PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 2
Strani 68–69

Ivan Vidav:

O ŠTEVILU π

Ključne besede: matematika, iracionalna števila, Duffinov razvoj.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1216-Vidav.pdf

O ŠTEVILU π

Število π je od nekdaj vzbujalo veliko zanimanja tako pri matematikih kakor pri nematematikih. Je namreč razmerje med obsegom in premerom kroga, krog pa velja za najpopolnejšo krivuljo.

Že v starem veku je Arhimed izračunal, da je π približno enak $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$. Veliko boljši približek je ulomek $\frac{355}{113}$. Vendar števila π ni mogoče predstaviti z nobenim ulomkom, ker ni racionalno temveč iracionalno število. To dejstvo je dokazal leta 1761 švicarski matematik Lambert. (Tudi razmerje med diagonalo in stranico kvadrata, ki je enako $\sqrt{2}$, je iracionalno število. To so odkrili že stari Grki v starem veku.)

Če razvijemo π v decimalni ulomek, dobimo

$$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 46\ \ldots$$

Za decimalno piko sledi neskončno decimalk, ki se ne ponavljajo periodično, ker π ni racionalen. Zato v njegovem desetiškem zapisu ne moremo razbrati nobene zakonitosti med števkami. Isto seveda velja, če razvijemo π v dvojiškem ali kakem drugem številskem sistemu. Ljudje z bujno domišljijo so zato prišli na misel, da je morda v zaporedju števk števila π na neki skriti način zapisana usoda sveta, oziroma, da tiči v njem kako pomembno sporočilo. Do tega sporočila bi prišli, če bi odkrili ključ, v katerem je šifrirano, in seveda izračunali dovolj decimalk števila π. Včasih je bilo to računanje sila zamudno delo. Danes so ga olajšali zmogljivi računalniki in z njimi so izračunali π na milijone mest natančno.

Kakor rečeno, v zaporedju števk števila π ni kakšne razvidne zakonitosti niti v desetiškem niti v kakem drugem sistemu. Pred kratkim pa je R. J. Duffin z univerze Carneggie Mellon, Pittsburgh, opisal, bolj za šalo kakor za res, neki razvoj za realna števila, v katerem se π izraža na videz presenetljivo preprosto. Oglejmo si ta razvoj!

Naj bo x dano pozitivno število. Pomnožimo ga zaporedoma z vsemi naravnimi števili $1, 2, 3, \ldots$ Denimo, da smo x pomnožili z n. Od produkta nx odštejemo njegov celi del, ostanek, ki leži med 0 in 1, označimo z (nx). (Celi del danega realnega števila je največje celo število, ki ne presega tega števila.) Če je nx celo število, je seveda celi del enak nx in je v tem primeru ostanek $(nx) = 0$. V splošnem pa velja $0 \leq (nx) < 1$. Pomnožimo zdaj (nx) s 7 in si oglejmo celi del produkta $7(nx)$. Ta celi del označimo z a_n. Ker je $7(nx) < 7$, je a_n eno izmed števil 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Na opisani način dobimo za vsak n neko število a_n, ki ga imenujemo n–ta števka števila x.

Zapišimo lepo po vrsti vse števke

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots$$

Temu zaporedju bomo rekli Duffinov razvoj števila x.

Za zgled poiščimo Duffinov razvoj od $x = \frac{1}{3}$. Pri $n = 1$ imamo $(nx) = (x) = \frac{1}{3}$. Največje celo število, ki ne presega produkta $7(x) = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, je 2 in je zato $a_1 = 2$. Pri $n = 2$ imamo $(2x) = \frac{2}{3}$ in $7(2x) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$, torej $a_2 = 4$. Nadalje je $3x = 1, (3x) = 0, 7(3x) = 0$, tako da je $a_3 = 0$. Podobno izračunamo $a_4 = 2, a_5 = 4, a_6 = 0$ itd. Duffinov razvoj za $x = \frac{1}{3}$ se glasi

$$240\ 240\ 240 \ldots$$

Trojka števk 240 se periodično ponavlja.

Oglejmo si zdaj razvoj za π. V tem primeru je $(\pi) = \pi - 3 = 0.14159..$ in $7(\pi) = 0.99114..$, torej $a_1 = 0$. Nadalje imamo $(2\pi) = 0.28318..$ in $7(2\pi) = 1.98229..$, tako da je $a_2 = 1$. Podobno izračunamo $(3\pi) = 0.42477..$, $7(3\pi) = 2.97344..$, se pravi $a_3 = 2$. Če tako nadaljujemo, dobimo po vrsti $a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 5, a_7 = 6$, potem pa spet od začetka: $a_8 = 0, a_9 = 1$ itd. Za π smo našli tale Duffinov razvoj

$$0123456\ 0123456\ 0123456\ 012 \ldots$$

Sedmerica zaporednih števk 0123456 se periodično ponavlja. Dobljeni razvoj je res zelo pregleden. Pa teče to tako lepo v nedogled? Žal moramo povedati, da je imel tu vrag svoje prste vmes in je red pokvaril. Šestnajstkrat se ponovi omenjena sedmerica števk, na stotrinajstem mestu se red podre, namesto 0 se tam pojavi števka 6.

Na koncu postavimo bralcu nekaj vprašanj:

1. Kakšen je Duffinov razvoj za $x = 3\frac{1}{7}$?

2. Kje tiči razlog, da se v razvoju števila π sedmerica števk 0123456 ponovi šestnajstkrat? (Arhimedov približek $3\frac{1}{7}$ za π je nekoliko prevelik, ulomek $\frac{355}{113}$ nekoliko premajhen. Pišimo $\pi = 3 + \frac{1-\varepsilon}{7}$, kjer je ε pozitiven. Ocenimo ε.)

3. Denimo, da poznamo celi del števila x in njegov Duffinov razvoj. Ali je s temi podatki x določen?

Literatura:

R. J. Duffin, The Patron Saint of Mathematics. The Math. Intelligencer, Vol. 15, No. 1, str. 52.

Ivan Vidav