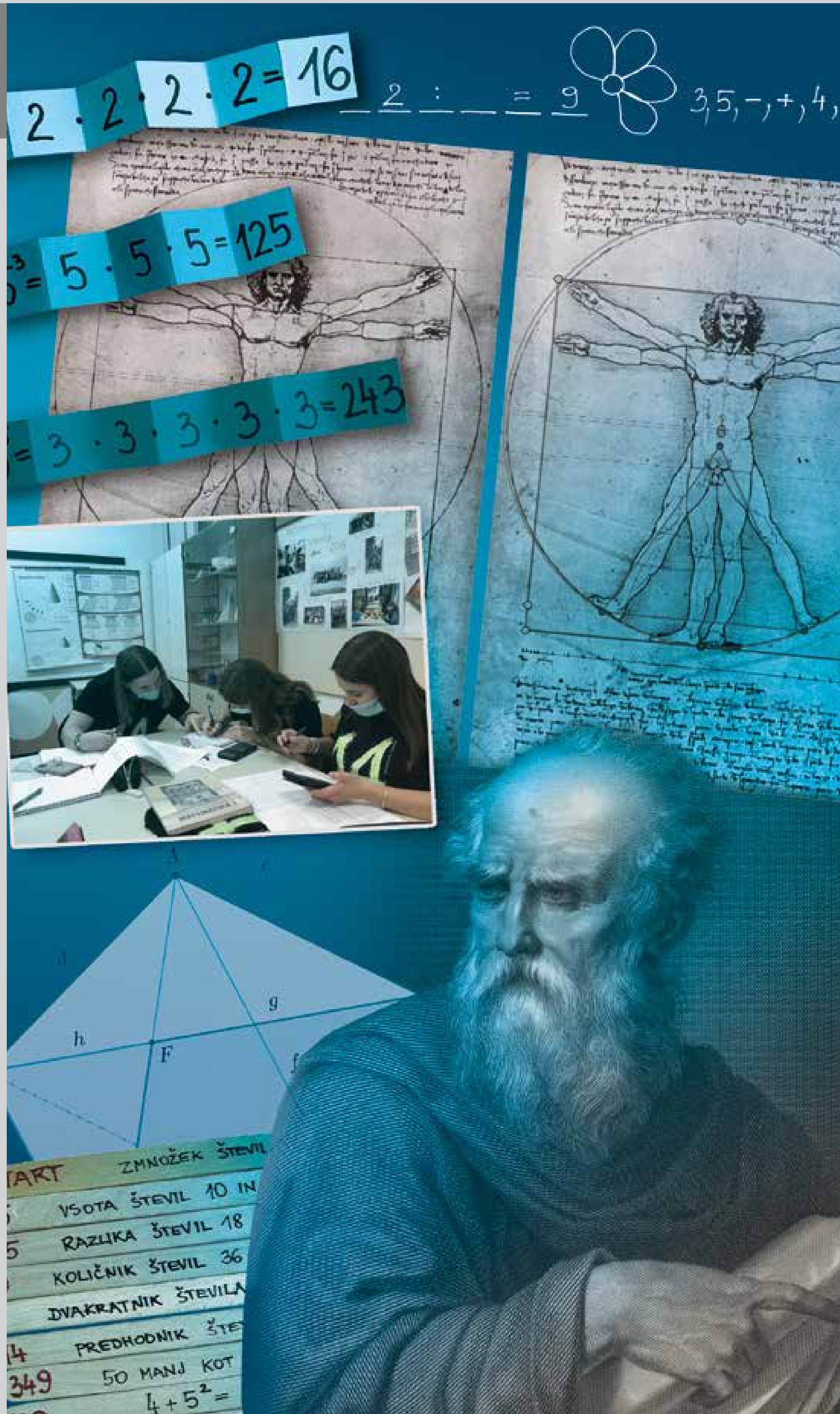
Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2022, letnik 28 **2**



IZ TEORIJE ZA PRAKSO

Strah pred matematiko ali matematična anksioznost

Algoritmično mišljenje pri zaporedjih v vsakdanjem življenju

NOVICE

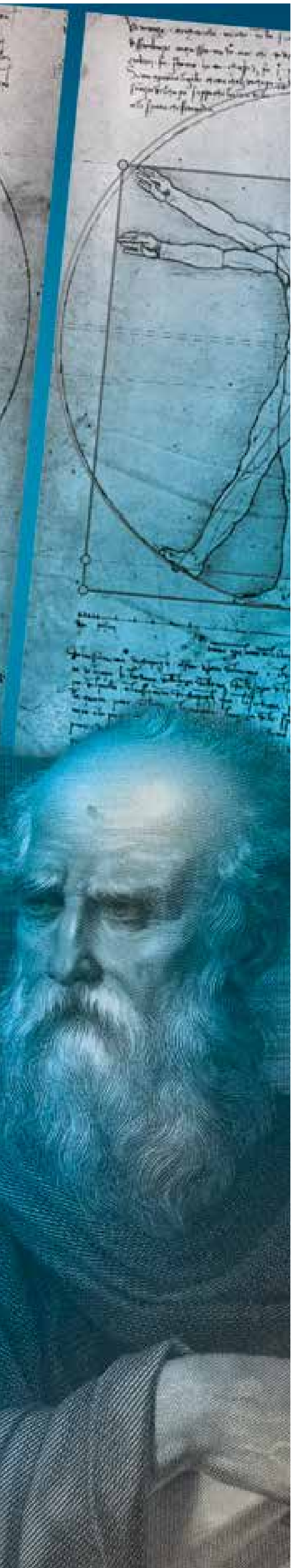
Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2022

Ugotavljanje modela za višino človeka glede na velikost čevljev

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Matematika v šoli

2022, letnik 28 2



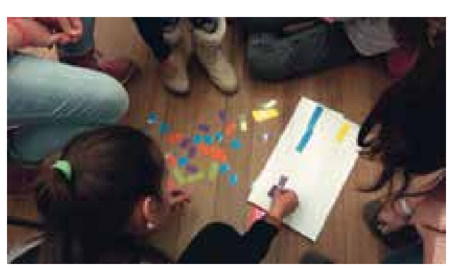
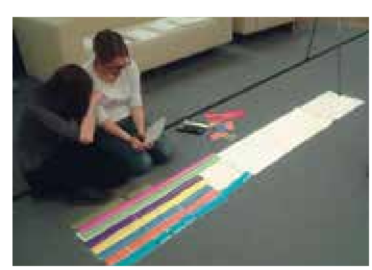
VSEBINA

Pogled na pouk matematike skozi zadnja tri stoletja

Dr. Franc Močnik je leta 1871 v priročniku Navod k pervi računici za slovenske ljudske šole napisal:
»Učitelj bi grešil proti naravi tega predmeta in proti naravni poti dušnega razvijevanja, ko bi računska pravila učencem predkladati hotel le kakor nekaj danega, kakor puhle posledke tujega razmišljevanja. On mora učence le s primernimi vprašanji napeljevati na to, da po lastnosti dotičnih nalog in iz številnih razmer učenci sami prevdarjajo in sklepajo, kako se imajo zastavljene naloge reševati; učenci morajo način, po kterem se računske naloge rešujejo, tako rekoč sami poiskati, a učitelj naj jih k temu le primerno napeljuje. Po tej hevristični metodi se učenci nauče, kako imajo ravnati, da zastavljene naloge rešijo, pa jim tudi ne bo težko najti dotične vzroke, po kterih se je naloga morala izpeljati. Obče nam je znano, da otroci navadno pozabijo to, kar so se zgolj mehanično naučili, po zgorej omenjeni metodi pa dobi spomin svojo močno podporo v razumnosti; in če bi tudi otroci sčasoma pozabili nekaj od tega, kar so si z lastno razumnostjo pridobili, ostane jim vendar še duševna moč, s ktero si slabo zapomnjene reči lehko vnovič prilaste. Lastna delavnost pa tudi učence spodbuja, da toliko več ljubezni in veselja do pouka zadobe. Čimbolj učenec sam dela in razsoja, timbolj je zadovoljen, ko se zaveda svoje lastne moči; vsaka nova po lastni poti in z lastnim trudom pridobljena reč ga toliko bolj veseli in ga spodbuja k tolikanj večji prizadevnosti. Po tem načinu vravnavani nauk je najterdnejša podlaga, na kteri se doseže gotovost in urnost v številjenji, *vsestransko jasen spregled, pa tudi gibčnost in živost duha, ki pelje učenca do samostojnosti.«*

In dr. Amalija Žakelj v priročniku Kako poučevati matematiko: teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava leta 2003 zapiše:
»Predvsem v drugi polovici prejšnjega stoletja pa sta znanost in tehnika doživeli izjemen razcvet, ki mu je bila šola, naravnana na stare vedenjske, kulturne in proizvodne procese, vse manj kos. To je terjalo njeno temeljno preobrazbo, ki še traja in v nekaterih predelih sveta bolj, v drugih pa manj uspešno lovi bliskovit razvoj vseh področij. Ena glavnih značilnosti teh preobrazb je v poudarjanju aktivne vloge učencev, ki naj znanje izgrajujejo oz. konstruirajo v procesu odkrivanja in izkušanja. Šola oz. učitelji naj jim ne bi stregla le z gotovimi znanji, npr. z razlagami, interpretacijami in kritičnimi mislimi, ampak naj bi se učence spodbujalo tudi k temu, da prihajajo do razlag z lastnim odkrivanjem, da sami interpretirajo, da kritično razmišljajo …«

Ker se zapisanega kot bralci revije zagotovo zavedamo, lahko kakšno idejo za pouk najdemo tudi med prispevki revije.

Učenci preiskujejo lastnosti ulomkov na Knjižnem sejmu.

mag. Mateja SIRNIK, *odgovorna urednica*
Mateja Sirnik

ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXVIII, številka 2, 2022

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Jezikovni pregled: Katja Křižnik Jeraj
Prevod povzetkov v angleščino: Bumblebee, jezikovno svetovanje, Polonca Luznik, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Fotografije: avtorji člankov
Računalniški prelom: Design Demšar, d. o. o.
Tisk: Present, d. o. o.
Naklada: 510 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Kidričeva 53, 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirnik@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe, 8,50 € za študente, dijake in upokojence. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Strah pred matematiko ali matematična anksioznost

Mag. Sonja Rajh
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

V prispevku bomo opredelili razlike med strahom in anksioznostjo ter spoznali specifične oblike anksioznosti, ki se pojavljajo v šolskem okolju: testna anksioznost, matematična anksioznost, šolska fobija in socialna anksioznost. Predstavili bomo značilnosti anksioznih posameznikov, vzroke za matematično anksioznost ter njeno povezanost s starostjo, spolom, inteligenco posameznika ter z njegovo uspešnostjo pri matematiki.

Ključne besede: matematika, strah, anksioznost, dosežki, čustva

Fear of Mathematics or Mathematics Anxiety

Abstract

Following a discussion of the differences between fear and anxiety, the article introduces specific forms of anxiety that occur in the school environment, i.e., test anxiety, mathematics anxiety, school refusal, and social anxiety. It then turns to examine the characteristics of anxious individuals, suggests the causes, and looks at the correlation of mathematics anxiety with age, gender, intelligence, and mathematical performance.

Keywords: mathematics, fear, anxiety, achievements, emotions.

Uvod

Matematika je eden od temeljnih in najpomembnejših predmetov izobraževalnega sistema v Sloveniji in tudi v tujini. Učenci se z njo srečujejo skozi celotno osnovnošolsko in srednješolsko izobraževanje. Takoj za materinščino je to predmet, ki mu je po predmetniku namenjenih največ ur pouka.

V vsakdanjem pogovoru pa tudi v različni literaturi pogosto zasledimo, da se kdo boji matematike, je ne mara ali jo celo sovraži. Nekateri jo jemljejo kot nujno zlo, da se prebijejo skozi šolanje in zmotno menijo, da je kasneje več ne bodo potrebovali. Seveda je to nam, učiteljem matematike, ki obožujemo matematiko, nepredstavljivo. Tudi informacije, zbrane v mednarodnih raziskavah, kot sta PISA in TIMSS, da slovenski učenci in dijaki ne uživajo v učenju matematike, nas morajo zaskrbeti.

George Polya (Polya, 1956) je leta 1956 v predgovoru k drugi izdaji knjige *Kako rešujemo matematične probleme* omenil in komentiral rezultate študije: »… matematike se drži dvomljiv sloves najmanj priljubljenega učnega predmeta. Bodoči učitelji matematike se v klopeh osnovne in srednje šole naučijo sovražiti matematiko … Vračajo se v osnovno in srednjo šolo, da bi naučili nove generacije sovražiti matematiko.«

Strah in anksioznost (oz. tesnoba)

Vsakega od nas je lahko kdaj pa kdaj za kratek čas strah, prestrašimo se lahko tudi matematike, čeprav jo imamo radi. **Strah** je naravna reakcija na dražljaj, ki ogroža posameznikovo blagostanje in varnost (Carr, 1999, v Lutovac 2014). Kratkotrajni strah je koristen, če se pojavi, ko nam grozi nekaj potencialno nevarnega ali ogrožujočega. Takrat nas preplavi adrenalin, poveča se dejavnost možganov, pospeši se delovanje srca, to povzroči boljšo prekrvavitev mišic, kar nam pomaga pri begu ali soočenju. Tak strah je koristen in lahko tudi reši življenje.

Iz strahu in zaskrbljenosti se lahko razvije anksioznost. Strah je reakcija na nevarnost, prisotno v sedanjosti, usmerjena je v točno določen zunanji objekt ali situacijo in traja krajši čas kot anksioznost. Izvor strahu je možno določiti, medtem ko anksioznost ne izhaja iz obstoječe, temveč iz pričakovane situacije v prihodnosti (Hribar in Magajna, 2011). Ker nevarnost ni jasno opredeljena, se proti njej ne moremo boriti, zato se počutimo nemočne.

Anksioznosti (oz. tesnoba) označuje nerazumski, prekomeren in nenehen strah, ko sploh nismo ogroženi. Občutek tesnobe in zaskrbljenosti sta usmerjena na prihodnost. Anksioznost ovira vsakodnevno rutino in akademsko napredovanje posameznika.

Telesne in vedenjske spremembe, ki jih doživlja posameznik ob tesnobi, so podobne odzivu na stres, le da so bolj izrazite. Vključujejo pospešeno bitje srca, slabost v želodcu, potenje, tresenje, napetost mišic, hitro utrudljivost, težave s prebavo, oteženo dihanje, vrtoglavico, nespečnost, težave s koncentracijo. Na ravni čustev posameznik doživlja vznemirjenost, občutke ogroženosti, strahu in panike. Na ravni mišljenja se porajajo neprestane skrbi o stvareh, ki so zanj pomembne, ter misli kot: »Zmešalo se mi bo.«, »Tega ne morem obvladovati.« (NIJZ, b. d.).

Pri otrocih predstavlja anksioznost neopredeljeno izkušnjo ogroženosti, neugodja in nemira, ki se ga otrok ne more znebiti in ne more najti rešitve, saj pravzaprav ne ve, kaj ga skrbi (Zupančič, 1996, v Hribar in Magajna, 2011).

Anksiozne motnje so zaznane kot prevladujoča oblika psihiatričnih motenj tako pri odraslih kot otrocih.

Za lažjo prepoznavo anksioznih učencev navajamo značilnosti:

- »so napeti in se težko sprostijo,
- tožijo za pogostimi telesnimi težavami,
- lahko se izogibajo šolskemu delu ali odlašajo zaradi strahu, da zadolžitev ne bodo opravili dovolj dobro (pretiran strah pred napakami),
- so pretirano zaskrbljeni in nerealno ocenjujejo lastno zmožnost,
- pretirano poudarjajo pretekle napake in tudi v prihodnosti pričakujejo neuspeh,
- potrebujejo neprestano odobravanje, posebno s strani odraslih in avtoritet,
- njihov strah pred obiskovanjem šole se občasno pojavlja v situacijah, ko so zaskrbljeni, da njihovo izvajanje ne bo dovolj dobro glede na pričakovanja,
- se na videz vedejo bolj zrelo od vrstnikov, vendar pa to vedenje izvira predvsem iz prilagajanja zahtevam drugih, posebno odraslih,
- težjo k perfekcionizmu in se izogibajo manj strukturiranim zahtevam,
- se izgubljajo v nepomembnih podrobnostih in imajo težave pri zaznavanju širše slike neke naloge, problema ali zahteve,
- so pretirano obremenjeni s skrbmi v zvezi s pravilnim in sprejemljivim vedenjem,
- ne zaupajo vase in so pretirano odvisni od mnenja in usmerjanja drugih« (Hribar in Magajna, 2011).

Testna anksioznost

V šolski situaciji se poleg splošne anksioznosti pojavljajo tudi bolj specifične oblike, kot so: **testna anksioznost**, **matematična anksioznost**, **šolska fobija** in **socialna anksioznost** (Kozina, 2016).

Čeprav je osrednja tema tega prispevka matematična anksioznost, predstavimo še testno anksioznost, v zaključku tega poglavja pa omenimo še ostali dve specifični obliki anksioznosti.

Testna anksioznost se nanaša na anksioznost, ki jo posameznik doživlja ob realnem ali namišljenem soočanju s testno ali izpitno situacijo (Kozina, 2016).

»Dražljaji, ki izzovejo strah, se spreminjajo od najzgodnejšega otroštva pa vse do adolescence. V obdobju med 8. in 11. letom starosti otroci visoko vrednotijo šolske in športne dosežke, posledično pa se v tem času pogosto pojavljajo strahovi in anksioznost, povezani s šolsko uspešnostjo, še zlasti testna anksioznost.« (Mash in Wolfe, 1999, v Lutovac 2008).

Posameznik preverjanje in ocenjevanje znanja presoja in doživlja kot nek zanj ogrožajoč dogodek, saj mora v zelo kratkem času in v napetem stanju pokazati pridobljeno znanje. Zaradi anksioznosti postane negotov in zmeden, njegova učinkovitost se zmanjša, kar pa še dodatno okrepi zaznavanje situacije kot nevarne. V naslednje podobne situacije pisnega ali ustnega preverjanja in ocenjevanja znanja tako vstopa z okrepljenim občutkom ogroženosti in pričakovanjem neuspeha. Raziskave so pokazale, da je pri učencih s testno anksioznostjo prisotna višja stopnja anksioznosti že kot osebnostna poteza (Hribar in Magajna, 2011).

Pri vrednotenju znanja učenci nimajo nadzora nad samim procesom izvajanja vrednotenja, saj odgovarjajo na vprašanja, ki jih postavi učitelj. Anksiozni posameznik se bo težje znašel v situaciji, kjer so vprašanja odprtega in problemskega tipa, saj zahtevajo fleksibilno mišljenje in povezovanje znanja (Puklek Levpušček, 2006).

Med glavne zunanje povzročitelje testne anksioznosti spadata šolski režim in učitelj. Ker si učitelj in učenec pri ustnem ocenjevanju gledata iz oči v oči, je testna anksioznost posameznika pri ustnem ocenjevanju lahko še višja kot pri pisnem ocenjevanju (Pečjak, 1993, v Friškovec, 2016).

Učenec doživlja anksioznost tudi v primeru, da ne pozna namenov učenja in kriterijev uspešnosti, zato si vnaprej ustvarja pričakovanja o visokih in zanj nedosegljivih kriterijih. Veliko učencev je prepričanih, da jih bo učitelj vprašal ravno tisto podrobnost, ki se je niso naučili (Puklek Levpušček, 2006).

Zelo pomembna je učenčeva motivacijska naravnanost, ki je lahko višja, če učenec verjame, da je lahko uspešen. Učna situacija zanj ne bo ogrožajoča, če bodo najprej zagotovljene nižje potrebe, kot so jasna pravila in primerne težavnosti nalog (Rojko, 2005).

Učitelj naj z učenci pogosto ponavlja in utrjuje učno vsebino ter pred ocenjevanjem znanje tudi preveri, da bo ocenjevanje za učence predvidljivo in psihološko varno. Učence naj opogumlja in jim omogoča, da mu postavljajo vprašanja v zvezi z učno vsebino. Testna anksioznost se pri učencih pojavi več dni pred ocenjevanjem, saj jo občutijo med učenjem, ob srečanju z učiteljem, ob pogledu na zvezek … Učitelj naj vzpostavi varno in spodbudno učno okolje, kar je še posebej pomembno pred preverjanjem in ocenjevanjem. Priporočljivo je, da uporabijo strategijo sprostitve, da učenci s preprostimi dihalnimi tehnikami sprostijo napetost in tako lažje usmerijo pozornost k reševanju nalog (Puklek Levpušček, 2006).

Šolska fobija je nerealen strah pred odhodom v šolo, v ozadju katerega je lahko bodisi separacijska anksioznost ali socialna anksioznost (Hribar in Magajna, 2011).

Za **socialno anksioznost** je značilno doživljanje močne tesnobe ob stikih z drugimi ljudmi, čustvena vznemirjenosti ob izpostavljanju drugim, strah pred nastopanjem, zaskrbljenost v zvezi s socialno podobo in zadržanost zlasti v novih situacijah (Puklek Levpušček, 2006).

Matematična anksioznost

Oblike anksioznosti v šolski situaciji, kot so testna anksioznost, matematična anksioznost, šolska fobija … ovirajo kognitivno funkcioniranje, učenje in šolsko prilagajanje (Hribar in Magajna, 2011).

Anksioznost se sicer pojavlja pri vseh šolskih predmetih, a je pri matematiki najpogostejša oziroma je matematična anksioznost najpogosteje omenjena zaradi osrednje vloge, ki jo ima matematika v našem šolskem sistemu (Lutovec, 2008). Obstajajo pa tudi oblike anksioznosti, ki se navezujejo na druge predmete (na primer na tuje jezike) (Kozina, 2016).

Matematično anksioznost označujejo neprijetna občutja napetosti, tesnobe, nelagodja, živčnosti, zaskrbljenosti in prekomernega strahu v situacijah reševanja nalog, ki zahtevajo matematično znanje. Vsa ta neprijetna občutja ter fiziološko vznemirjenje in reakcije (napetost, nemir, povišan srčni utrip, potenje …) ovirajo storilnost pri matematiki. Pri matematično anksioznem posamezniku se ne pojavljajo le v šolskih okoliščinah, ampak tudi v vsakodnevnih situacijah, ki zahtevajo matematično znanje (npr. pri uporabi števil v trgovini) ali celo takrat, ko samo pomisli na matematiko. Matematično anksioznega posameznika neprestano skrbi njegova uspešnost pri matematiki.

Strokovnjaki ocenjujejo, da kar 17 % populacije trpi za močno matematično anksioznostjo (Ashcraft in Moore, 2009, v Tepeš, b. d). Nekateri psihologi jo smatrajo celo za motnjo, ki jo je mogoče diagnosticirati in jo celo merijo z različnimi vprašalniki (Tepeš, b. d).

Sonja Lutovac meni, da znanstvena spoznanja o matematični anksioznosti ne sodijo zgolj v domeno didaktike matematike, pač pa se močno dotikajo tudi področja psihologije in pedagogike. Posamezniki, ki so visoko matematično anksiozni, imajo tudi katero izmed anksioznih motenj (Lutovac, 2008).

Značilnosti matematično anksioznih posameznikov

Anksiozen učenec je nesamozavesten in ima napačna prepričanja o svojih sposobnostih. Prepričan je, da njegove zmožnosti ne dosegajo ravni zahtevanega znanja, ter je zaskrbljen zaradi neuspešnosti, ki jo celo pričakuje. Ker pa je ravno pričakovanje lastne učinkovitosti in uspešnosti, poleg zaznavanja pomembnosti in uporabnosti učnih vsebin, pomembna motivacijska sila za učenje, je zaradi pomanjkanja vsega tega njegova učna uspešnost slabša.

Matematično anksiozni učenci imajo pomembno nižje računske zmožnosti na različnih področjih matematike, posledično imajo nižje ocene pri matematiki, kar lahko njihovo anksioznost v prihodnjih situacijah reševanja nalog še zvišuje. Za njih velja, da so obremenjeni s časovno omejitvijo, v kateri morajo rešiti matematično nalogo in da so osredotočeni na neuspeh – namesto na uspeh. Imajo večje zahteve po strukturiranosti nalog in po rutinskosti nalog. Izogibajo se soočenju s težjimi nalogami, kjer je uspeh nepredvidljiv.

Za visoko matematično anksiozne učence velja, da:

- so vključeni v manj matematičnih dejavnosti,
- se izogibajo matematiki in tudi naravoslovju,
- v manjši meri izbirajo predmete, povezane z matematiko,
- izberejo študij, kjer ni dosti matematike,
- imajo slabše ocene pri matematiki,
- so slabše matematično pismeni,
- imajo tudi bolj negativna stališča do matematike in
- negativna prepričanja o lastnih matematičnih sposobnostih.

Matematično anksiozni posamezniki se izogibajo matematiki in odlašajo z učenjem do zadnjega dne, a se takrat učijo celo noč. Seveda so zaradi takega načina učenja neuspešni. To je podobno, kot če bi za tekaški maraton začeli trenirati dan pred tekmovanjem in bi tekmovali utrujeni in nenaspani. Barbara Oakley ugotavlja, da odlašamo s stvarmi, ki v nas vzbujajo nelagodje (Oakley, 2022).

Čeprav je pri nas matematična anksioznost še premalo raziskana, se nekateri strokovnjaki (predvsem v tujini) ukvarjajo z njo.

V raziskavi (Clute, 1989, v Puklek Levpušček, 2014) so bili visoko anksiozni posamezniki bolj uspešni, kadar je učitelj uporabljal frontalne učne oblike pouka z metodo sistematične razlage, demonstracije primerov in utrjevanje z reševanjem novih nalog. Tisti posamezniki, ki niso imeli težav z anksioznostjo, pa so dosegali boljše uspehe v skupinah, kjer je učitelj uporabljal bolj konstruktivistične pristope k pouku matematike, to je metode z lastnim odkrivanjem in problemsko učenje.

Učenci so poročali, da so anksiozni predvsem v situacijah, ko jim učitelj matematike zastavi vprašanje, kadar tekmujejo v matematičnem kvizu, ko morajo pojasniti matematični problem oziroma rešitev sošolcu ali učitelju in ko jih nekdo opazuje med reševanjem naloge (K. Newstead, 1995, v Puklek Levpušček, 2014).

Matematično anksiozni učenci imajo tudi:

- splošno anksioznost (poteza in stanje),
- testno anksioznost (skrb in emocionalno neugodje v testnih situacijah),
- strah pred negativnim socialnim vrednotenjem (Hembree, 1990, v Puklek Levpušček, 2014).

Vzroki za matematično anksioznost

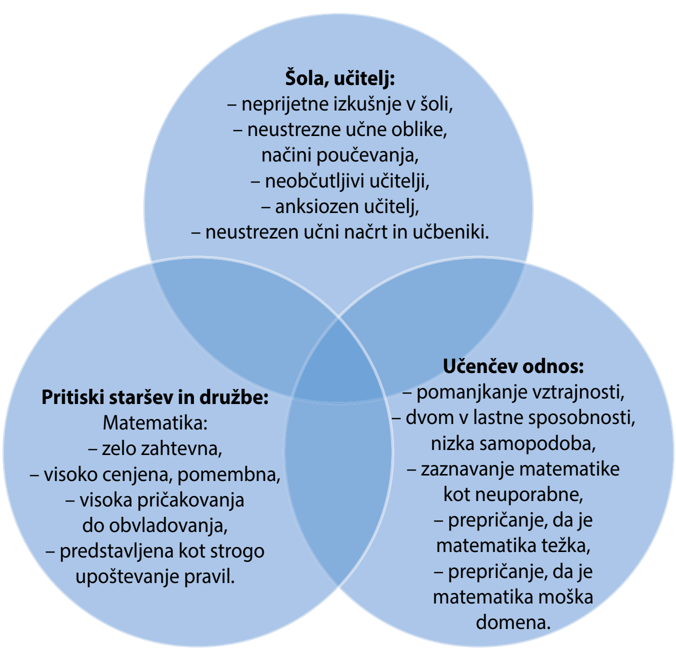
V družbi velja prepričanje, da je matematika zelo zahtevna in težko razumljiva, zato so možnosti uspešnosti pri matematiki manj verjetne. Podobno velja prepričanje, da so pri matematiki uspešni le redki izbranci in to predvsem fantje, saj matematika ni tipično področje, na katerem bi se dekleta enako ali bolje dokazovala kot fantje. Matematika pa ne velja samo za zelo zahtevno, ampak je tudi prepoznana kot zelo pomembna za nadaljnje izobraževanje. Poleg tega je povprečna uspešnost pri matematiki nižja kot pri ostalih predmetih in se zmanjšuje skozi leta šolanja. Učenci so navajali, da so v stiski zaradi pritiskov staršev, ki želijo, da je njihov otrok najboljši.

Več možnosti za pojav matematične anksioznosti obstaja pri tistih učencih, ki se učijo le postopke in strategije reševanja, manj pa se ukvarjajo z razumevanjem matematičnih problemov (zaradi pomanjkljivega razumevanja jim manjka neka celostna orientacija v problemski situaciji). Tudi neugodne pretekle izkušnje pri pouku matematike ali pri domačem delu, ki vodijo do izogibanja ukvarjanja z matematiko, in vrzeli v znanju povečujejo matematično anksioznost. Ker se znanje pri matematiki nadgrajuje, je zelo pomembna predstavitev vsebin na različne načine in povezovanje matematičnega znanja s posameznikovimi interesi in življenjskimi situacijami, ki omogoča uvidenje uporabnosti, pomembnosti in vpletenosti matematičnih problemov v vsakdanje življenje (Hribar in Magajna, 2011).

Med poglavitnimi dejavniki tesnobnosti in nelagodja pri reševanju matematičnih problemov so navedeni tudi učitelji oziroma njihov pretirano strog način vodenja razreda, neustrezna komunikacija z učenci in neustrezni stili poučevanja.

Kot slabe izkušnje z učiteljem so v raziskavi navedene:
- učiteljeve slabšalne opazke,
- negativno vedenje do učencev,
- učiteljevo neobčutljivost za nerazumevanje vsebin pri učencih (Jackson in Leffingwell, 1999, v Puklek Levpušček, 2014).

Če povzamemo, je vzrokov za matematično anksioznost več in so prepleteni med seboj.



Povezava matematične anksioznosti s starostjo

Kot navaja Sara Tepeš, si strokovnjaki v zvezi z matematično anksioznostjo o marsičem niso enotni, se pa vsi strinjajo, da je priučena. Zelo pomembna so prva sporočila, ki jih otrok prejme od staršev. Večina otrok pred vstopom v šolo ne razvije dovolj pozitivnih stališč o matematiki, kot se to zgodi npr. pri branju (Tepeš, b. d.). Veliko staršev otrokom pogosto bere (npr. pravljice, pesmice, uganke …) in se z njimi pogovarja o prebranem. Tako jim približa materni jezik. Redkokdo pa s svojim otrokom za zabavo računa ali pa z njim rešuje matematične probleme, ga seznanja z matematičnimi zanimivostmi in lepoto matematike. Ko se otroci v šoli prvič srečajo z matematiko, je večina stvari že zamujena, koncepti so zanje tuji in nerazumljivi. Morajo se šele naučiti jezika v »deželi matematiki«, da bi razumeli učitelja.

V začetnih letih šolanja so učenci soočeni z zaprtimi matematičnimi izzivi, ki imajo le en pravilen odgovor. Dejstvo, da bo odgovor pravilen ali napačen in da bo napačen prečrtan z rdečim pisalom, je lahko zelo zastrašujoče za učence, ki se že bojijo neuspeha. Učenci se bojijo narediti napako, zato rajši sploh ne poskusijo reševati, če niso sigurni v svoje znanje.

Čeprav v starosti med 9. in 11. letom učenci razvijejo odnos in čustvene reakcije do matematike, je stopnja matematične anksioznosti v tem obdobju še nizka. Ker pa matematična anksioznost nastopi s formalnim šolanjem, pomeni, da jo lahko povezujemo z učenjem. Sonja Lutovac meni, da je matematična anksioznost naučen in ne prirojen pojav (Lutovac, 2008). To pomeni, da jo lahko tudi odpravimo.

»Če težavam, vezanim na povečano anksioznost, v otroštvu in mladostništvu ne namenjamo ustrezne pozornosti ter jih ne obravnavamo, vztrajajo v odraslo dobo in povečajo verjetnost prilagoditvenih težav v odraslosti.« (različni avtorji, 2009, v Kozina, 2011).

Povezava matematične anksioznosti s spolom

Splošna anksioznost je v vseh starostnih obdobjih pogostejša pri ženskah kot moških. Raziskovalci še vedno puščajo odprto možnost, da so razlike med spoloma plod kulturno pogojenih stereotipov in tudi večje sposobnosti prepoznavanja in poročanja o simptomih anksioznosti pri ženskem spolu v primerjavi z moškim (različni avtorji, 2009, v Kozina 2011).

Različne raziskave pri učencih kažejo, da je pri dekletih zaznana nižja samoučinkovitost na področju matematike kot pri fantih. Dekleta niso prepričana o lastnih zmožnostih učenja matematike in v možnost uspešnosti pri matematiki, saj slabše zaupajo v lastne sposobnosti in tudi anksioznost je pri njih zaznana v večji meri kot pri fantih.

Podobno kot ugotavljajo pri odraslih, raziskovalci pripisujejo nižjo zaznano samoučinkovitost pri matematiki ter višjo matematično anksioznost pri dekletih kot fantih tudi preprostemu dejstvu, da so dekleta v večji meri nagnjena k razkrivanju podatkov o sebi kot fantje, ter prepričanju fantov, da je doživljanje anksioznosti zanje socialno nesprejemljivo (Puklek Levpušček, 2014). Raziskave sicer ugotavljajo, da so dekleta v povprečju bolj matematično anksiozna kot fantje, vendar ne zaznavajo statistično pomembnih razlik med spoloma (Lutovac, 2008). Kot možne vzroke za razlike med spoloma nekateri avtorji omenjajo družbeno pogojene vloge oz. pričakovanja ter verovanje v matematične mite (Ruben, 1998, v Lutovac, 2008).

Pa na tem mestu omenimo le nekaj teh mitov, čeprav je za razumevanje razlik med spoloma pomemben prvi:

- Matematika ni za dekleta. Matematika je moška domena.
- Jaz pač nisem sposoben/sposobnana za matematiko, saj so tudi moji starši imeli v šoli težave z matematiko. To je dedno pogojeno, zato bodo težave z matematiko imeli tudi moji otroci.
- V matematiki je lahko uspešnih le nekaj srečnih posameznikov. Matematika pač ni za vse.
- Matematika je težka. Nikoli je ne bom znal/znala, zato nima smisla, da se trudim.
- Matematika je zelo težka in je samo za genije. Toda, če je ne osvojiš, ti bo »trda predla«!
- Za moje znanje matematike je odgovoren učitelj matematike. Jaz ne razumem matematike, kar pomeni, da on slabo razlaga.

Če starši in učitelji podležejo mitu, da matematika ni za dekleta, to prepričanje podzavestno privede do razlikovanja v vzgoji deklet in fantov. Že v zgodnjem otroštvu fantom kupujejo tehnične igrače, ki zahtevajo prostorsko orientacijo, konstrukcijske veščine, logično razmišljanje in ustvarjalnost. Pričakovanja do deklet so drugačna, saj menijo, da vsega tega ne rabijo znati. One naj se igrajo s punčkami ter poslušajo ali pa berejo pravljice.

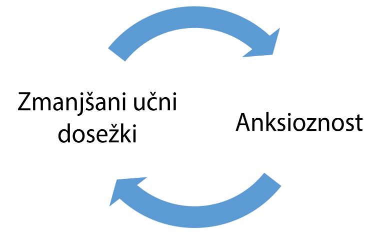
Ker se od deklet ne pričakuje isto, so pogosto tiste, ki pri matematiki v šoli nimajo težav, s strani učiteljev in staršev označene kot nadarjene. (Wright in Miller, 1981, v Lutovac, 2008).

Povezava matematične anksioznosti s splošno inteligenco

Anksioznost kot tudi njene specifične oblike se pogosto povezujejo s specifičnimi učnimi težavami. Tako za anksioznost kot za specifične učne težave je značilno ovirano delovanje metakognicije in delovnega spomina. Zato v primerih, ko se anksioznost pojavlja pri učencih z učnimi težavami, ta še dodatno obremeni kognitivne procese in tako še bolj razdiralno vpliva na pridobivanje znanja.

Na drugi strani pa povezanost med učnimi dosežki in anksioznostjo ne poteka nujno preko kognitivnih sposobnosti. Med učnimi dosežki in anksioznostjo je negativna povezanost tudi ob enakih kognitivnih sposobnostih. Zmanjšani učni dosežki lahko vodijo v večjo anksioznost tudi zaradi visokih pričakovanj staršev. Več kot polovica slovenskih osmošolcev poroča o tem, da imajo starši do njih previsoka pričakovanja, in večino osmošolcev je strah neuspeha v šoli. Pričakovanja staršev se lahko pojavljajo v obliki negativnih misli, ki zasedajo delovni spomin in s tem ovirajo kognitivni proces. Strah pred neuspehom se pojavlja tudi pri uspešnih otrocih, ne samo pri neuspešnih. Te je v enaki meri strah, da ne bodo dobili odlične ocene, kot je učno manj uspešne, da ne bodo dobili pozitivne ocene.

Če povzamemo, raziskave kažejo, da je možen vpliv v obeh smereh. Zmanjšani učni dosežki vodijo v večjo anksioznost in tudi ta povečana anksioznost vpliva na zmanjšanje učnih dosežkov, saj anksioznost vpliva na procese mišljenja, zaznavanje in učenje. (Kozina, 2016).



Nekateri menijo, da posamezniki trpijo za matematično anksioznostjo, ker so slabi v matematiki. Sara Tepeš v svojem spletnem članku piše, da je ravno obratno: V matematiki so neuspešni, ker trpijo za matematično anksioznostjo (Tepeš, b.d.).

Zmotno je prepričanje, da so matematično anksiozni zgolj manj uspešni učenci, saj se le-ta pojavlja tudi pri nadarjenih učencih (Herbart in Furner, 1997, v Lutovac, 2008). Prizadene jih zaradi perfekcionizma, visokih pričakovanj (sebe in/ali drugih), predvsem pa zaradi asinhronega razvoja, zaradi česar so podvrženi stresu. Matematično anksiozni so lahko tudi strokovnjaki, ki se ukvarjajo z matematiko.

Sonja Lutovec omenja, da so raziskovalci empirično ovrgli povezavo med matematično anksioznostjo in splošno inteligenco (Lutovec, 2008).

Matematična anksioznost in kognitivno procesiranje

Informacije iz okolja skozi spoznavni sistem (oči, ušesa) vstopajo v *zaznavni spomin*. Če smo pozorni nanje, se jih nekaj pretvori v *delovni spomin* za nadaljnje procesiranje. A ker ima delovni spomin omejene zmožnosti, se informacije, shranjene v njem, izgubijo že po nekaj sekundah, če jih ne nadgradimo. Shraniti jih moramo v *dolgoročnem spominu*, ki ima skoraj neomejene zmogljivosti in lahko zadrži informacije več dni in celo let. Nove informacije lahko vstopajo v dolgoročni spomin le skozi delovni spomin, a zaradi filtra vse ne dosežejo dolgoročnega spomina. Skozi filtre prehajajo le pomembne, dovolj pogoste in smiselne informacije, zato morajo učitelji informacije, ki jih prenašajo učencem, narediti smiselne, za njih pomembne, privlačne in povezane z znanjem, ki ga že imajo. (Schneider in Stern, v Dumont, 2013)

Matematična anksioznost vpliva na veliko stvari, ki so zelo pomembne v procesu učenja. Tako vpliva na: pozornost, hitrost obdelave informacij, načrtovanje in odločanje, pa tudi na mentalno procesiranje med reševanjem matematičnih nalog, saj matematična anksioznost ovira delovanje delovnega spomina in tako težje dostopamo do tega, kar sicer vemo in znamo.

Vsiljive in destruktivne misli ter skrbi (npr. »Samo 27 minut časa še imam. Ne bo mi uspelo rešiti naloge. Jaz tega ne zmorem. Saj sem vedel/vedela, da sem v matematiki slab/slaba.«) zavzamejo del pozornosti, ki jo posameznik potrebuje za reševanje matematične naloge. Tako mora matematično anksiozni posameznik v istem času poleg primarne (matematične) naloge rešiti še sekundarno nalogo, ki jo zahtevajo vsiljive destruktivne misli in skrbi, saj odvračajo pozornost od reševanja naloge. Te vsiljive misli so povezane z lastnim negativnim odnosom do matematike, z nizkim samozaupanjem ter z neprestanim preračunavanjem, koliko časa je še na razpolago v primeru časovne omejitve za reševanje naloge.

Ker je delovni spomin preobremenjen s trenutnim strahom, to izčrpava kognitivne vire. Zaradi tega se matematično anksiozni posameznik muči z najosnovnejšimi matematičnimi veščinami, ki jih sicer obvlada.

Raziskave so potrdile, da se pri matematično anksioznih posameznikih pojavi izrazit upad kapacitete delovnega spomina pri nalogah, ki temeljijo na računanju, medtem ko se ta upad ne pojavi pri verbalnih nalogah. To pomeni, da je pri njih delovni spomin ogrožen le, ko se sproži matematična anksioznost (Ashcraft in Kirk 2001, v Tepeš, b. d.).

Nej Lešnik omenja več študij raziskovanja povezave med anksioznostjo in delovnim spominom. Študije so pokazale, da anksioznost statistično pomembno negativno vpliva na vidno-prostorsko domeno delovnega spomina, medtem ko na verbalno/fonološko domeno vpliva s pol tolikšnim učinkom. To ugotovitev interpretirajo tako, da je fonološka shramba bolj disociabilna od izvršilnih procesov kot vidno-prostorska shramba. Predpostavljajo, da je fonološki material (črke, besede, števke) zaradi vsakodnevne uporabe v komunikaciji veliko bolj usvojen kot vidno-prostorski material. To pomeni, da zapomnitev prostorskega materiala zahteva bolj kontinuirano pozornost oziroma višji kognitivni energetski vložek kot zapomnitev enake količine fonološkega materiala.

Rezultati študij, v kateri so ugotavljali odnos med delovnim spominom, matematično anksioznostjo in matematično učinkovitostjo, potrjujejo, da anksioznost oslabi delovanje delovnega spomina, zato posamezniki manj učinkoviti rešujejo matematične naloge (Lešnik, 2019).

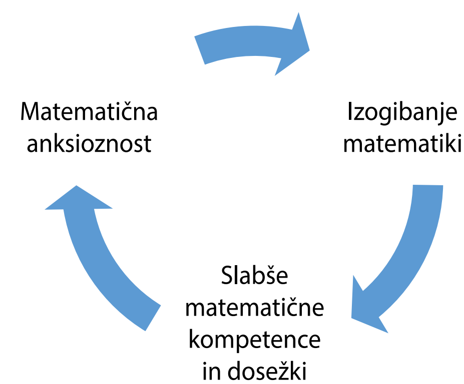
Strokovnjaki ugotavljajo, da večina učencev do srednje šole nima pretiranih težav z matematiko. Težave se začnejo, ko postane matematika bolj kompleksna, ko se pojavi več matematičnih sklepov in ko si je treba zapomniti več korakov (Pagirsky, 2016, v Tepeš, b. d.). Različno kompleksne naloge različno obremenjujejo delovni spomin. Uspešnost reševanja matematičnih nalog je odvisna od stopnje zahtevane udeležbe delovnega spomina pri reševanju naloge. Rutinske aritmetične naloge ne zahtevajo veliko procesiranja delovnega spomina, zato je pri njihovem reševanju učinek matematične anksioznosti minimalen. Pri zahtevnejših in kompleksnih nalogah, za reševanje katerih potrebuje posameznik velik delež delovnega spomina, pa je učinek matematične anksioznosti večji.

Nevroznanostvene raziskave dokazujejo, da so pri učencih z anksioznostjo pri izvajanju računskih operacij bolj dejavna tista področja v možganih, ki so povezana z negativnimi čustvi (npr. amigdala) in manj aktivna področja, ki uravnavajo delovanje delovnega spomina. Učinkovita uporaba delovnega spomina pa je bistvenega pomena za obdelavo informacij in njihovo shranjevanje v dolgoročnem spominu. Študija, v kateri so sodelovali mlajši odrasli, je pokazala, da lahko s krepitvijo miselnega nadzora (kognitivne kontrole) zmanjšamo negativna čustva (Churches idr., 2017).

Posledice matematične anksioznosti

Matematična anksioznost ima za posameznika in za njegovo uspešnost številne negativne posledice. Te se kažejo na osebnem in tudi na akademskem področju, saj matematična anksioznost ovira posameznikove izobraževalne in karierne odločitve (še posebej to velja za dekleta, ki zaradi tega ne izberejo študija, povezanega z matematiko). Mnogi anksiozni posamezniki tudi zgodaj opustijo šolanje.

Matematična anksioznost povzroča velike stiske pri posameznikih, ki so za ljudi v njihovi okolici pogosto nerazumljive. Matematično anksiozni posamezniki svoje stiske blažijo in skrivajo tako, da se izogibajo matematiki in matematičnim dejavnostim. Zaradi tega so slabše matematično pismeni, imajo slabše matematične kompetence in posledično slabše ocene pri matematiki. Vse to še povečuje njihovo matematično anksioznost, ki povzroča ponovno izogibanje matematiki in tako se začaran krog nadaljuje.



Verjetno ni treba posebej omenjati, da je tak dolgo časa trajajoč začaran krog zelo težko prekiniti.

Povezanost matematične anksioznosti z uspešnostjo pri matematiki

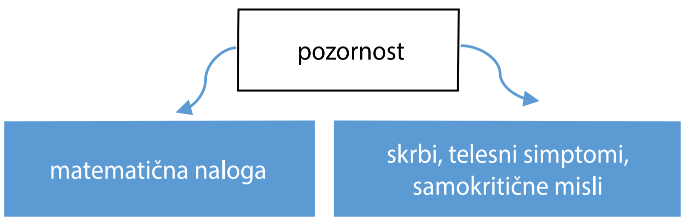
Uspešnost pri matematiki je povezana z mnogimi psihološkimi značilnostmi učenca. Odvisna je od njegovih prepričanj o lastnih zmožnostih uspešnega učenja, stališč o uporabnosti in koristnosti matematike ter stopnje matematične anksioznosti.

Po metaanalitični študiji, ki so jo na vzorcu 151 raziskav izvedli leta 1990, so ugotovili, da obstaja povprečna korelacija $r = -0{,}34$ med matematično anksioznostjo in uspešnostjo učencev pri matematiki. Leta 1999 izvedena metaanalitična študija, ki je zajela samo raziskave z vzorci osnovnošolskih in srednješolskih učencev, ugotavlja, da ima povprečni učenec iz skupine z nizko matematično anksioznostjo višji rezultat na matematičnem preizkusu znanja kot 71 % učencev iz skupine z visoko matematično anksioznostjo (Puklek Levpušček, 2014).

Odnos med matematično anksioznostjo (*MA*) in uspešnostjo (*U*) pri matematiki pojasnjujeta dva nasprotujoča si teoretska modela, ki različno pojmujeta matematično anksioznost.

Interferenčni model: matematična anksioznost je motnja v priklicu matematičnega znanja in izkušenj. (Winew, 1971, v Puklek Levpušček, 2014).

Matematično anksiozni posamezniki se ne morejo popolnoma posvetiti reševanju matematične naloge, saj med reševanjem usmerjajo svojo pozornost še na skrbi, telesne simptome, samokritične misli.



Matematično razmišljanje motijo različne vsiljive misli in skrbi (osredotočenost na neuspeh, obremenjenost s časovnimi omejitvami za reševanje naloge …), saj zavzemajo del pozornosti, ki jo posameznik potrebuje za učinkovito reševanje naloge. Ker pozornost ni popolnoma usmerjena v reševanje matematične naloge, to povzroči slabše dosežke pri matematiki. Torej je matematična anksioznost vzrok za neuspeh pri matematiki. $MA \rightarrow U$

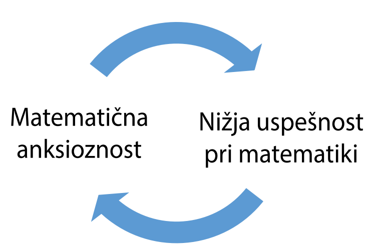
Deficitni model: matematična anksioznost je posledica neuspehov v preteklosti.

Neuspeh pri matematiki naj bi bil posledica slabih učnih navad in neuspešnih strategij pri reševanju preizkusov znanja in ne matematične anksioznosti (Tobias, 1985, v Puklek Levpušček, 2014).

Torej je matematična anksioznost le posledica preteklih neuspehov pri matematiki, vzroki za neuspeh so pa drugje. $MA \leftarrow U$

Pri odnosu med matematično anksioznostjo (MA) in uspešnostjo (U) ni enosmernega vpliva, ampak sta oba odvisna drug od drugega.

Torej ne velja le $MA \rightarrow U$ ali $MA \leftarrow U$, temveč $MA \leftrightarrow U$, če zanemarimo še nekatere druge dejavnike.



Nižja uspešnost pri matematiki namreč podkrepi anksiozne negativne misli in emocialne ter fiziološke reakcije, ki preko simptomov anksioznosti spet vplivajo na dosežke pri naslednjih podobnih situacijah.

Povezava matematične anksioznosti z matematično pismenostjo (v raziskavi PISA)

»Izsledki mednarodnih raziskav nam omogočajo dolgoročen vpogled v znanja in spretnosti učencev v raziskavi sodelujočih držav ter zagotavljajo mednarodno primerljive kazalnike.« (Bačnik idr., 2017).

V mednarodni raziskavi PISA 2012 je bilo poudarjeno področje merjenja matematične pismenosti. Dosežek slovenskih 15-letnikov je bil statistično pomembno višji od povprečja dosežkov OECD. Slovenska dekleta se v povprečnem matematičnem dosežku niso pomembno razlikovala od fantov (Štraus idr., 2013).

Toda slovenski 15-letniki so kljub nadpovprečnim rezultatom v matematični pismenosti v primerjavi z povprečjem v OECD tudi nadpovprečno matematično anksiozni.

Po dvournem reševanju nalog so 15-letniki v raziskavi PISA 2012 izpolnjevali še 30–minutni vprašalnik, ki je med drugimi meril tudi osebna prepričanja na področju matematike in to o:

- matematični samoučinkovitosti,
- matematični samopodobi ter
- matematični anksioznosti.

Matematično anksioznost (*Indeks zaskrbljenosti glede matematike*) so v raziskavi PISA 2012 ugotavljali s pomočjo petih trditev, ki se nanašajo na doživljanje zaskrbljenosti, napetosti in nemoči pri pouku matematike, v situacijah reševanja matematičnih problemov in ocenjevanja znanja pri matematiki. Ta indeks zaskrbljenosti ima povprečje 0 in standardni odklon 1. Pozitivne/negativne vrednosti indeksa za neko državo pomenijo, da njihovi 15-letniki v povprečju doživljajo višjo/nižjo anksioznost kot jo v povprečju doživljajo ostali 15-letniki iz držav OECD, vključenih v raziskavo.

Raziskava PISA 2012 je pokazala, da so bili slovenski 15-letniki v povprečju nekoliko bolj matematično anksiozni v primerjavi z vrstniki iz držav OECD, ki so sodelovale v raziskavi. Vrednost indeksa matematične anksioznosti slovenskih 15-letnikov je bila nadpovprečna in je znašala 0,07.

	Slovenija	OECD
dekleta	0,15	0,14
fantje	-0,01	-0,15

Iz zgornje preglednice je razvidno, da dekleta odkrito priznavajo večjo matematično anksioznost kot fantje tako v Sloveniji kot v povprečju OECD, ter da so slovenski fantje in dekleta bolj matematično anksiozni kot njihovi sovrstniki iz OECD.

V raziskavi je 61 % slovenskih 15-letnikov poročalo o pogosti zaskrbljenosti glede tega, da bo pouk matematike zanje pretežak; 33 % jih je poročalo o napetosti, ki jim jo povzroča delanje domačih nalog iz matematike; 38 % jih je priznalo, da postanejo živčni pri reševanju matematičnih problemov; 30 % pa, da se počutijo nemočne ob reševanju matematičnih problemov.

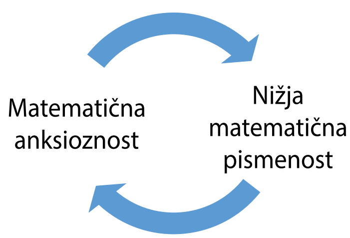
Slovenija je bila v poročilu poleg Liechtensteina, Nemčije, Avstrije, Češke, Japonske, Kanade, Nizozemske in Francije izpostavljena kot država, v kateri se je povezanost med matematično anksioznostjo in dosežkom na preverjanju znanja iz matematike pokazala kot najmočnejša (OECD, 2013a, v Kozina 2016).

Raziskava PISA 2012 je potrdila, da sta matematična anksioznost (*MA*) in matematična pismenost (*MP*) pomembno povezani v negativni smeri.

Matematična anksioznost (nelagodje, zaskrbljenost pri reševanju matematičnih nalog) lahko vpliva na raven matematičnih dosežkov, izraženih v matematični pismenosti. $MA \rightarrow MP$

Velja pa tudi obratno – posamezniki, ki so slabše matematično pismeni, imajo več izkušenj z negativnimi povratnimi informacijami o svoji uspešnosti, pa tudi naloge, ki jih rešujejo, so zanje prezahtevne, zato se pri njih krepi matematična anksioznost. $MA \leftarrow MP$

Torej velja: $MA \leftrightarrow MP$.



Po izsledkih raziskave PISA 2012 se višja matematična anksioznost povezuje z nižjo bralno, matematično in naravoslovno pismenostjo.

Mednarodna raziskava PISA 2015, ki je bila v celoti izvedena na računalniku, je imela poudarek na merjenju naravoslovne pismenosti. Merila je tudi testno anksioznost, pri kateri se je Slovenija uvrstila nad povprečje držav OECD. Vrednost indeksa testne anksioznosti je bila nadpovprečna in je znašala 0,06.

Slovenski 15-letniki so v letu 2015 v povprečju večinoma poročali o višjih ravneh testne anksioznosti kot njihovi sovrstniki iz držav OECD. V raziskavi je 60 % slovenskih 15-letnikov poročalo o pogostih skrbeh, da bo test za njih pretežek; 70 % jih je poročalo o skrbeh, da bodo v šoli dobili slabe ocene; 60 % jih je poročalo, da jih skrbi tudi, ko so za test dobro pripravljeni; 35 % jih poroča, da so napeti tudi, ko se učijo za test; ter 50 % jih poroča o živčnosti, ko v šoli ne znajo rešiti določene naloge (OECD, 2016, v Kozina 2016).

Po raziskavi PISA 2015 se višja testna anksioznost povezuje z nižjo matematično in naravoslovno pismenostjo, pri bralni pismenosti pa ni statistično pomembnih razlik (Kozina, 2016).

Zaključek

Ugotavljamo, da je matematična anksioznost v Sloveniji še premalo poznana in raziskana. Smiselno bi bilo raziskati, koliko učencev, študentov in učiteljev se pri nas sooča z anksioznimi motnjami ter zasnovati programe za preventivne in interventne aktivnosti.

Pomembno je, da učitelji matematike uzavestimo, da je matematična anksioznost prisotna med našimi učenci, da jo znamo prepoznati in pomagati matematično anksioznim učencem.

Viri in literatura

Bačnik, A., Slavič Kumer, S., Bone, J., Kregar, S., idr. (2017). *Analiza stanja naravoslovne in matematične pismenosti z utemeljitvijo projekta NA-MA POTI*. V Prijavnici projekta NA-MA POTI. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Bizjak, C., idr. (2021). *Gradniki učne motivacije – odnos do učenja naravoslovja in matematike*, Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo, 2021-11-29-GRADNIKI-UCNE-MOTIVACIJE-odnos-do-ucenja-naravoslovja-in-matematike.pdf (zrss.si)

Bizjak, C., idr. (2022). *SPODBUJANJE MOTIVIRANOSTI ZA GLOBINSKO UČENJE – Odnos do učenja naravoslovja in matematike*, Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*, San Francisco, CA: Jossey-Bass & Pfeiffer Imprints.

Churches, R., Dommett, E., Devonshire, I. (2017). *Neuroscience for teachers: applying research evidence from brain science*, Carmarthen; Williston: Crown House Publishing.

Dumont, H., Istance, D., Benavides, F. (2013). *O naravi učenja*, ZRSŠ (za prevod in slovensko izdajo), http://www.zrss.si/pdf/o-naravi-ucenja.pdf

Dweck, C. S. (2016). *Moč miselnosti: kako uresničiti svoje zmožnosti*; Tržič: Učila International.

Friškovec, T. (2016). *Testna anksioznost v osnovni šoli pri pouku matematike*, Diplomsko delo, Pedagoška fakultete, Univerza v Ljubljani.

Hribar, N. in Magajna, L. (2011). Prepoznavanje in diagnostično ocenjevanje učencev z učnimi težavami zaradi anksioznosti. V Magajna, L. in Velikonja M. (ur.). Učenci z učnimi težavami – prepoznavanje in diagnostično ocenjevanje. Ljubljana: Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani.

Kozina, A. (2011). Anksioznost učencev in dijakov v Sloveniji: vzorec razlik po spolu in starosti. *Psihološka obzorja 20* (4), 45–58.

Kozina, A. (2016). Razvijanje čustvenih in socialnih spretnosti za doseganje pravičnosti in učinkovitosti izobraževalnega sistema: odnos med anksioznostjo in učnimi dosežki; Š*olsko polje, letnik XXVII*, številka 5-6, str.174–194.

Lešnik, N. (2019). *Odnos med anksioznostjo, kapaciteto delovnega spomina in hitrostjo reševanja numeričnih operacij*, Magistrsko delo, Filozofska fakulteta, Univerza v Mariboru.

Lutovac, S. (2014). Matematična anksioznost, Revija za elementarno izobraževanje = *Journal of elementary education.* ISSN 1855-4431. – Letn. 1, št. 1/2 (sep. 2008), str. 105–112.

Nacionalni inštitut za javno zdravje (b. d.): *Anksioznost ali tesnoba*, https://www.nijz.si/sl/anksioznost-ali-tesnoba

Oakley, B. (2022). *Odprta glava za številke: kako blesteti pri matematiki in naravoslovju (tudi če si imel kdaj cvek).* Ljubljana: Vida založba.

Polya, G. (1985). *Kako rešujemo matematične probleme.* Ljubljana: DMFA.

Puklek Levpušček, M. (2006). *Socialna anksioznost v otroštvu in mladostništvu: Razvojni, šolski in klinični vidik*, Ljubljana: Znanstvenoraziskovalni institut Filozofske fakultete.

Puklek Levpušček, M. (2014). Matematična anksioznost in uspešnost pri matematiki, Pedagoška obzorja = Didactica Slovenica: časopis za didaktiko in metodiko. ISSN 0353-1392. – Letn. 29, [št.] 2 (2014), str. 46–60.

Rojko, C. (2005). Aktivno učenje pri matematiki. V Zupan., A. idr. *Od opazovanja do znanja, od znanja h kompetencam*, (str. 96-97). Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Suban. M., Gorše Pihler, M., idr. (2018). *Formativno spremljanje pri MATEMATIKI: Priročnik za učitelje*, Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Štraus, M., idr. (2013). OECD. PISA 2012. Ljubljana: Pedagoški inštitut.

Tepeš, S. (b. d.). *Velik strah pred matematiko*: *Matematična anksioznost*, https://psihoterapevtska-ambulanta.si/zakladnica-zapisov/matematicna-anksioznost/

Algoritmično mišljenje pri zaporedjih v vsakdanjem življenju

Dr. Andreja Drobnič Vidic
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Izvleček

V prispevku predstavimo algoritmično mišljenje, ki je pogosto pri pouku matematike, četudi se vselej tega ne zavedamo. Izpostavimo ga pri treh uporabnih primerih iz vsebin o zaporedjih, ki si sledijo po težavnosti in vpetosti v okolje. Omenimo prednosti in slabosti izpostavljanja algoritmičnega mišljenja pri pouku matematike z uporabo digitalnih tehnologij pri reševanju uporabnih primerov.

Ključne besede: algoritmično mišljenje, algoritem, zaporedja

Algorithmic Thinking for Sequences in Everyday Life

Abstract

The paper introduces algorithmic thinking, a concept frequently present in mathematics lessons, although not always apparent. Three pertinent examples from the content on sequences are used to bring attention to it, and they follow each other in terms of difficulty and real-world relevance. We discuss the benefits and drawbacks of introducing algorithmic thinking in mathematics lessons employing digital technologies to solve practical problems.

Keywords: algorithmic thinking, algorithm, sequences.

1 Uvod

Na splošno je algoritem končno zaporedje ukazov, s katerimi, če jim sledimo v določenem vrstnem redu, opravimo nalogo (Fajfar, 2020). Algoritmično razmišljanje ali sposobnost definiranja jasnih korakov pri reševanju problema je ključno pri predmetih, kot so matematika in naravoslovje. »Algoritme pogosto uporabljamo, ne da bi se tega zavedali, zlasti v matematiki. Pri deljenju z večmestnimi števili uporabljamo algoritem, pri katerem iteriramo skozi števke deljenega števila. Za vsako števko deljenega števila moramo deliti, množiti in odštevati. Algoritmično razmišljanje omogoča, da razčlenimo probleme in konceptualiziramo rešitve v smislu diskretnih korakov v postopku« (Evropski socialni sklad: E-gradiva za predmet Informatika). Pri matematiki je algoritmično mišljenje prisotno, a pogosto nezavedno in zato je dobrodošlo, da učitelj algoritmično razmišljanje pri pouku tudi izpostavi. Mladi se tako seznanijo, kdaj lahko uporabimo digitalno tehnologijo, ki olajša izvajanje zamudnega algoritmičnega postopka, in spoznajo, kako lastno mišljenje lahko nadomesti tako zamudno delo.

2 Algoritmično mišljenje pri zaporedjih

Pri obravnavi zaporedij pogosto začnemo s konkretnim zaporedjem npr. 2, 6, 10, 14 ... in povemo, da je zaporedje natanko določeno s splošnim členom ali z rekurzivno formulo, kjer podamo tudi prvi člen. Rekurzivna formula oziroma splošni člen natanko določata neko zaporedje in nam omogočata izračun nadaljnjih členov zaporedja.

Za določitev rekurzivne formule podanega konkretnega zaporedja moramo najti pravilo, kako iz predhodnega člena dobiti naslednji člen. Prehod iz 2 v 6: $2 \longrightarrow 6$ je možno dobiti vsaj na dva načina: $2 + 4 = 6$ ali $2 \cdot 3 = 6$ (morda še kako drugače). Opazimo, da je prva operacija ustrezna tudi za pridobitev nadaljnjih podanih členov zaporedja: $6 + 4 = 10$, $10 + 4 = 14$, zato postavimo rekurzivno formulo:

$$a_{n+1} = a_n + 4, \quad a_1 = 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rekurzivna formula je algoritem, ponavljajoči se korak, ki omogoča iz danega člena zaporedja a_n določiti naslednji člen a_{n+1}. Tako iz začetnih štirih členov 2, 6, 10, 14 z njo določimo peti člen: $a_5 = a_4 + 4 = 18$ in nadaljujemo, če želimo dobiti nove člene zaporedja. Ponavljajoči se algoritem za računanje členov zaporedja bi lahko predstavili takole:

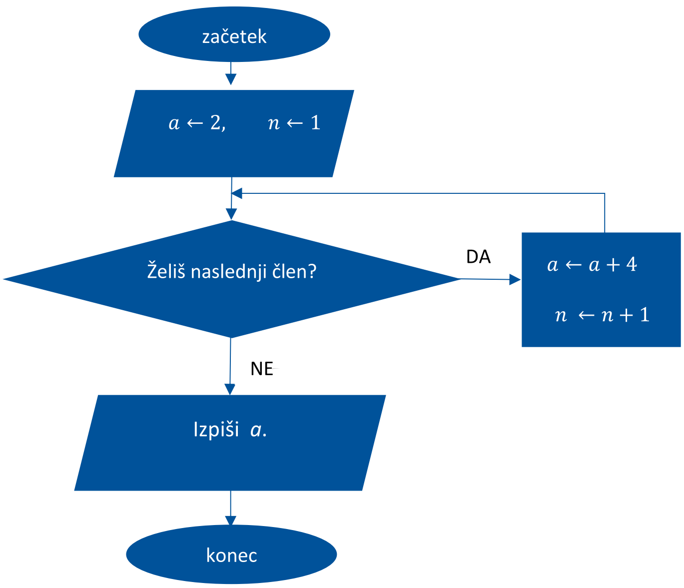
ZAČETEK: Začetni člen je $a_1 = 2$, kjer $n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, imenujemo indeks člena.

PONAVLJAJOČA SE FAZA: Želiš naslednji člen zaporedja?

DA $\rightarrow$ Pri danem indeksu n določi $a_{n+1} = a_n + 4$ in indeks povečaj za 1.

NE $\rightarrow$ Zaključi z algoritmom (izpiši zadnji dobljeni člen) – KONEC.

Algoritem lahko predstavimo z diagramom na sliki 1, ki je grafični način zapisovanja algoritmov, v katerem preprosto sledimo puščicam in izvajamo ukaze, ki so zapisani v grafičnih blokih (Fajfar, 2020, str. 9).



Slika 1: Algoritem predstavljen z diagramom.

Če iz rekurzivne formule uspemo določiti splošni člen, to omogoča določanje poljubnega člena zaporedja, ne da bi pred tem poznali predhodne člene. Če želimo določiti na primer 100. člen zaporedja, moramo z rekurzivno formulo po danem algoritmu izračunati vse člene do 100, kar je zamudno. Uporabimo rekurzivno formulo in povežemo enakosti: $a_2 = a_1 + 4$, $a_3 = a_2 + 4$, $a_4 = a_3 + 4$. Tako izpeljemo: $a_3 = a_2 + 4 = (a_1 + 4) + 4 = a_1 + 2 \cdot 4$, $a_4 = a_3 + 4 = (a_1 + 2 \cdot 4) + 4 = a_1 + 3 \cdot 4$ in iz ponavljajočega vzorca

$$a_1 = a_1 + 0 \cdot 4, \quad a_2 = a_1 + 1 \cdot 4, \quad a_3 = a_1 + 2 \cdot 4, \quad a_4 = a_1 + 3 \cdot 4$$

pridemo do predpisa za splošni člen (ki ga lahko potrdimo s popolno matematično indukcijo):

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 4, \quad \text{oziroma} \quad a_n = 2 + (n-1) \cdot 4, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Splošni člen nam omogoča, da neposredno izračunamo npr. 100. člen danega zaporedja: $a_{100} = 2 + 99 \cdot 4 = 398$.

V treh predstavljenih primerih se zrcalijo in nadgrajujejo osnovne faze najpreprostejšega iterativnega algoritma: ZAČETEK – PONAVLJAJOČA SE FAZA – KONEC. Čeprav smo z algoritmom zapisali uporabo rekurzivne formule, nismo zasnovali tipičnega rekurzivnega algoritma, ki je krajši in bolj eleganten, a časovno in razumsko zahtevnejši (Štrukelj, 2014; Demšar, 2016). Poglejmo si tri avtentične uporabne primere iterativnega algoritma.

Primer 1: VRTINA.

V podjetju vrtajo vrtino. Prvi meter stane 5 evrov, vsak naslednji globinski meter vrtine pa je za četrtino dražji od predhodnega. Naj bo cena posameznega metra vrtine člen zaporedja. Določi splošni člen. Izračunaj, kolikšna je cena 50-metrske vrtine. Kaj pa, če bi vrtali v »neskončnost« (Drobnič Vidic, v pripravi)?

Rešitev: Prvi meter stane $a_1 = 5$ evrov, drugi meter stane $a_2 = 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 5 \cdot \frac{5}{4}$ eurov, tretji meter ima ceno $a_3 = a_2 + \frac{1}{4}a_2 = 5 \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot \frac{5}{4} = 5 \cdot (\frac{5}{4})^2$ evrov in tako dalje. Dobimo rekurzivno formulo:

$$a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n, \quad a_1 = 5, \quad n \in \mathbb{N}$$

in izpeljemo splošni člen iz zapisa

$$a_1 = 5 \cdot (\tfrac{5}{4})^0, \; a_2 = 5 \cdot (\tfrac{5}{4})^1, \; a_3 = 5 \cdot (\tfrac{5}{4})^2:$$

$$a_n = 5 \cdot (\frac{5}{4})^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Toliko eurov stane n-ti globinski meter vrtine. Splošni člen nam pove, da je zaporedje geometrijsko z začetnim členom $a_1 = 5$ in količnikom $q = \frac{5}{4}$. Algoritem za 50. člen bi znali zapisati:

ZAČETEK: Začetni člen je $a_1 = 5$, kjer $n = 1$ imenujemo indeks člena.

PONAVLJAJOČA SE FAZA: Je $n < 50$? (Želiš naslednji člen?)

DA → Pri danem indeksu n določi $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{5}{4}$ in indeks povečaj za 1.

NE → Zaključi z algoritmom in izpiši a_{50} – KONEC.

Vsoto prvih 50 globinskih metrov izračunamo z uporabo formule za končno vsoto geometrijskega zaporedja, ki zopet nadomešča algoritem za postopno seštevanje členov. Postopoma seštevamo člene z rekurzivno formulo:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = s_1 + a_2, \quad s_3 = s_2 + a_3, \quad \ldots \quad , s_{n+1} = s_n + a_{n+1}.$$

Za ta algoritem bi zapisali:

ZAČETEK: Začetni člen je $s_1 = a_1 = 5$, $n = 1$ in zaporedje $\{a_n\}$ je znano.

PONAVLJAJOČA SE FAZA: Je $n < 50$?

DA → Pri danem indeksu n določi $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ in indeks povečaj za 1.

NE → Zaključi z algoritmom in izpiši s_{50} – KONEC.

Za izvedbo tega algoritma bi morali imeti shranjene vse člene zaporedja do 50, kar zavzame veliko pomnilniškega prostora pri uporabi digitalne tehnologije, zato oba algoritma izvedemo hkrati, diagram zanj pa je na sliki 2.

ZAČETEK: Začetni člen je $a_1 = 5$ s prvo vsoto $s_1 = a_1 = 5$ pri indeksu $n = 1$.

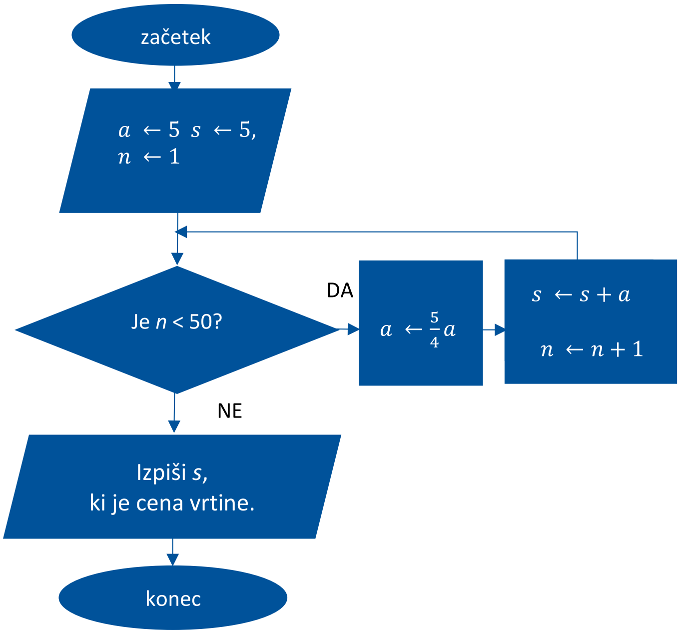
PONAVLJAJOČA SE FAZA: Je $n < 50$?

DA → Določi $a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n$ in $s_{n+1} = a_{n+1} + s_n$, indeks n povečaj za 1.

NE → Zaključimo algoritem ter izpišemo s_{50} – KONEC.

Za manj rutinskega dela izpeljemo formulo za vsoto členov geometrijskega zaporedja $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ s količnikom q. Enakost

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}$$



Slika 2: Algoritem predstavljen z diagramom.

Globinski meter: n	Cena globinskega metra (v eur): a_{n+1}=a_n+1/4 * a_n = 5/4 * a_n	Cena vrtine: s_{n+1}=s_n+a_n
1	5	5
2	6,25	11,25
3	7,8125	19,0625
4	9,765625	28,828125
5	12,20703125	41,03515625
	⋮	⋮
47	143492,963	717444,81
48	179366,203	896811,02
49	224207,754	1121018,77
50	280259,693	1401278,46

Slika 3: Naraščajoče vrednosti v programu Microsoft Excel.

odštejemo od enakosti, ki ima vse zgoraj zapisane člene pomnožene s faktorjem q:

$$s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + ... + a_1 \cdot q^n.$$

Dobimo

$$s_n \cdot q - s_n = a_1 \cdot q^n - a_1,$$

saj se ostali členi na desni odštejejo. Vsota n členov geometrijskega zaporedja se glasi

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Cena 50 globinskih metrov vrtine s ceno začetnega metra 5 evrov in s količnikom rasti $q = \frac{5}{4}$ znaša:

$$s_{50} = a_1 \frac{(\frac{5}{4})^{50} - 1}{\frac{5}{4} - 1} \approx 1401278,46 \text{ evrov.}$$

Opazimo, da cena vsakega nadaljnjega metra hitro raste in toliko bolj vsota, saj znaša za 50 metrov že preko milijon evrov. V tem primeru za količnik v splošnem členu velja $q = \frac{5}{4} > 1$, zato limita n-te delne vsote ni končno realno število. Vrednost vsote gre v neskončnost. Naraščajoče vrednosti lahko predstavimo z izvajanjem algoritma v programu Microsoft Excel, ki je sicer robusten program, a vsakemu učencu dosegljiv in poznan (Slika 3).

Primer 2: ANTIBIOTIK

Antibiotik razpada v človeškem telesu z razpolovnim časom 2,5 ure. Določi splošni člen a_n zaporedja, ki predstavlja maso antibiotika v telesu po zaužitju 250-miligramske tablete antibiotika. Ob predpostavki, da pacient vzame eno 250 miligramsko tableto antibiotika vsakih 6 ur, izračunaj približno vrednost antibiotika v telesu takoj po končani terapiji, ki znaša 28 tablet (teden dni) (Drobnič Vidic, v pripravi).

Rešitev

Razpad 250 *mg* tablete antibiotika poteka tako:

Po času $t_1 = 2{,}5$ ure imamo v telesu $a_1 = 0{,}5 \cdot 250$ *mg* antibiotika.

Po času $t_2 = 5$ ur je v telesu le še $a_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 250$ *mg* antibiotika itd. Po času $t_n = n \cdot 2{,}5$ ur imamo v telesu maso antibiotika

$$a_n = (0,5)^n \cdot 250 = 250 \cdot (0,5)^{\frac{t_n}{2,5}} \text{ mg.}$$

Masa antibiotika oblikuje člene geometrijskega zaporedja s količnikom $q = 0{,}5$.

V terapiji jemljemo na 6 ur nove tablete antibiotika, ki imajo enak način razpadanja v telesu. Čas, po katerem želimo določiti maso antibiotika v telesu, je $(28 - 1) \cdot 6$ ur, saj prvo tableto vzamemo v času $t = 0$, drugo v času $t = 6$, tretjo v času $t = 2 \cdot 6$ ur, ..., osemindvajseto v času $t = 27 \cdot 6$ ur.

Prva tableta ima po tem času skupno $\frac{27 \cdot 6}{2,5}$ razpolovitev, zato od prve tablete na koncu ostane masa $Q_1 = 250 \cdot (0,5)^{27 \cdot \frac{6}{2,5}}$ *mg*. Druge tablete imajo zaporedoma manj razpolovitev. Zapišemo po vrsti.

$250 \cdot (0\ 5)^{27 \cdot \frac{6}{2,5}}$, $Q_2 = 250 \cdot (0,5)^{26 \cdot \frac{6}{2,5}}$, $Q_3 = 250 \cdot (0,5)^{25 \cdot \frac{6}{2,5}}$, ... , $Q_{28} = 250 \cdot (0,5)^0$

Zadnjo tableto vzamemo pri koncu terapije in ta tisti trenutek učinkuje v telesu v celoti, zato maso te lahko postavimo za 1. člen zaporedja $\{Q'_N\}$ s količnikom $q' = (0,5)^{\frac{6}{2,5}}$. Seštejemo končno členov (N = 28) tega geometrijskega zaporedja.

$$Q'_1 + Q'_2 + ... + Q'_{28} = 250 + 250q' + 250q'^2 + ... + 250q'^{27} =$$

$$= 250 \frac{(q')^{28} - 1}{q' - 1} \approx 308,438$$

 Matematika v šoli, št. 2., letnik 28, 2022

Masa antibiotika v telesu takoj po končani tedenski terapiji znaša približno 308 mg.[1] Z daljšanjem terapije se masa antibiotika v telesu bistveno ne spremeni:

$$\lim_{N\to\infty} 250\frac{((0,5)^{\frac{6}{2,5}})^N-1}{(0,5)^{\frac{6}{2,5}}-1} \approx 308\,mg.$$

V tem uporabnem primeru imamo kar nekaj algoritmov za računanje različnih zaporedij, ki jih bomo zapisali z rekurzivnimi formulami:

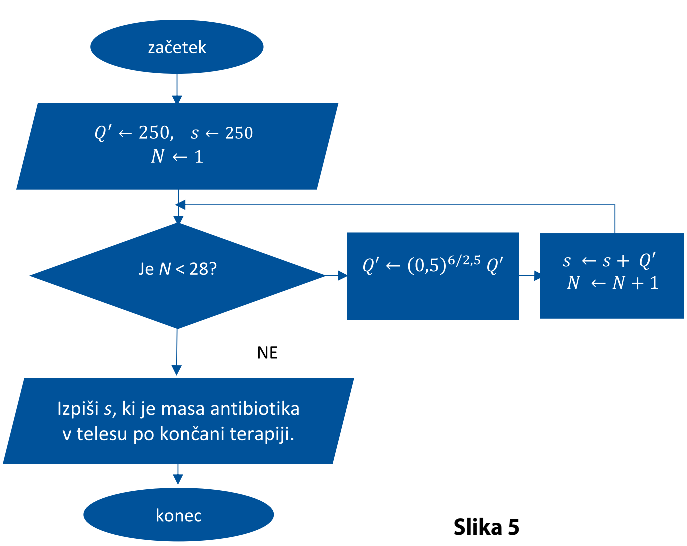
- $t_{n+1} = t_n + 2{,}5$, $t_1 = 2{,}5$ (časovni intervali);
- $a_{n+1} = a_n \cdot 0{,}5$, $a_1 = 125$ (spreminjanje mase ene tablete antibiotika);
- $Q'_{N+1} = Q'_N q'$, $Q'_1 = 250$ (mase posameznih tablet antibiotika);
- $s_{N+1} = s_N + Q'_{N+1}$, $s_1 = 250$ (vsote mas posameznih tablet antibiotika).

V primeru so skrita 4 različna zaporedja: dve aritmetični in dve geometrijski. Vendar pa indeksi členov za vse formule niso enaki: indeks v prvih dveh formulah šteje količino razpolovitev (v obdobju 27 · 6 ur), medtem ko indeks v drugih dveh formulah šteje količino tablet, vzetih v tem času. Naloga je toliko bolj kompleksna, ker ne zaključimo računanja neposredno po razpadu posamezne tablete, kar lahko vidimo na sliki 4 pri računanju posameznih rekurzivnih formul s programom Microsoft Excel. Navpično so indeksi n, ki štejejo razpolovitve in se ne končajo natančno pri času 27 · 6 = 162 ur ob koncu terapije, vodoravno pa število tablet v terapiji, označenih z N.

Št.razpolovitev: n	Čas t_n	Masa v tbl 1: a_n	Masa v tbl 2: a_n	Masa v tbl 3: a_n	Masa v tbl 25: a_n	Masa v tbl 26: a_n	Masa v tbl 27: a_n	Masa v tbl 28: a_n
0	0	250	250	250	250	250	250	250
1	2,5	125	125	125	125	125	125	125
2	5	62,5	62,5	62,5	62,5	62,5	62,5	62,5
3	7,5	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25	31,25
4	10	15,625	15,625	15,625	15,625	15,625	15,625	15,625
5	12,5	7,8125	7,8125	7,8125	7,8125	7,8125	7,8125	7,8125
6	15	3,90625	3,90625	3,90625	3,90625	3,90625	3,90625	3,90625
7	17,5	1,953125	1,953125	1,953125	1,953125	1,953125	1,953125	1,953125
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
58	145	8,674E-16	8,674E-16	8,674E-16	8,674E-16	8,674E-16	8,674E-16	8,674E-16
59	147,5	4,337E-16	4,337E-16	4,337E-16	4,337E-16	4,337E-16	4,337E-16	4,337E-16
60	150	2,168E-16	2,168E-16	2,168E-16	2,168E-16	2,168E-16	2,168E-16	2,168E-16
61	152,5	1,084E-16	1,084E-16	1,084E-16	1,084E-16	1,084E-16	1,084E-16	1,084E-16
62	155	5,421E-17	5,421E-17	5,421E-17	5,421E-17	5,421E-17	5,421E-17	5,421E-17
63	157,5	2,711E-17	2,711E-17	2,711E-17	2,711E-17	2,711E-17	2,711E-17	2,711E-17
64	160	1,355E-17	1,355E-17	1,355E-17	1,355E-17	1,355E-17	1,355E-17	1,355E-17
65	162,5	6,776E-18	6,776E-18	6,776E-18	6,776E-18	6,776E-18	6,776E-18	6,776E-18
Št. tbl v terapiji:	**N**	**1**	**2**	**3**	**25**	**26**	**27**	**28**
Masa antibiotika v tbl. po terapiji:	**Q_N**	7,784E-18	4,108E-17	2,168E-16	1,700	8,974	47,366	250
Masa antibiotika v telesu:	**s_N**	**7,784E-18**	**4,887E-17**	**2,657E-16**	**2,098**	**11,072**	**58,438**	**308,438**

Slika 4

Kaj se dogaja z maso antibiotika v vmesnih dobah? Biološka razpolovna doba ali razpolovni čas izločanja je namreč čas, potreben za snovi (zdravila, droge, radioaktivne snovi ali druge), da izgubijo polovico svoje farmakološke, fiziološke ali radiološke aktivnosti (Razpolovna doba, Wikipedija). Masa snovi torej ni diskretna spremenljivka, kar bi zlahka pripisali številu razpadlih jeder določenega atoma, ker ti razpadejo na dva dela ali pa ne. Masa snovi se spreminja tako, kot kaže graf eksponentne funkcije. Zato tudi ne smemo odkimavati ob branju prej zapisanega stavka: »Prva tableta ima v tem času skupno $\frac{27\cdot 6}{2,5}$ razpolovitev«, čeprav število razpolovitev v stavku sploh ni naravno število. Med enim in drugim razpolovnim časom masa razpada, zato rezultat, ki smo ga dobili z izpeljanimi formulami, dobro opiše vrednost antibiotika po končani terapiji. Algoritem za en indeks bi lahko predstavili s sliko 5.



Slika 5

Primer 3: GASILNA OPREMA OBJEKTOV PO SLOVENIJI

Na podlagi Pravilnika o izbiri in namestitvi gasilnih aparatov (2005) želimo ugotoviti, katere podatke potrebujemo za določanje teoretičnega minimalnega potrebnega skupnega števila enot gasila (teoretični EG) za posamezen objekt in kako avtomatično izračunati teoretični EG s pomočjo tabele v pravilniku. Enota gasila je sposobnost medija v gasilnim aparatu, da pogasi ogenj. Na podlagi teoretičnega EG določi postopek, kako primerjati konkretno gasilno opremljenost objektov v Sloveniji (dejanski EG) s teoretičnim EG iz pravilnika (Drobnič Vidic, 2016a).

1 Če bi si razpolovno dobo izbrali sami, na primer 2 uri, bi že takoj dobili precej bolj enostaven izračun za vsoto mase antibiotika v telesu po terapiji 28 tablet: $Q_1 + Q_2 + ... + Q_{28} = 250((0,5)^{27\cdot 3} + (0,5)^{26\cdot 3} + ... + (0,5)^0) = 250((0,125)^{27} + (0,125)^{26} + ... + 1) = 285,714$

Rešitev

V tej kompleksni nalogi morajo mladi povezati znanje naravoslovja (fizike in kemije), tehnologije, inženirstva in matematike (STEM). Za pridobivanje in obdelavo podatkov o posameznih konkretnih objektih je potrebno: znanje inženirstva za branje standardov o opremljenosti in požarni nevarnosti objektov ter za pridobivanje podatkov o dejanski gasilni opremljenosti objektov po Sloveniji; znanje kemije in fizike za preoblikovanje dobljenih podatkov pri določanju teoretičnega EG (ta je odvisen od dnevne dejavnosti, ki se odvija v objektu in od velikosti objekta) in pri določanju dejanskega EG v objektu (ta je odvisen od kemijskih in fizikalnih lastnosti medija v gasilnikih in v drugi gasilni opremi, kot so npr. hidranti); znanje matematike za urejanje, obdelavo podatkov ter za določanje formul za teoretični EG na podlagi standardov ter znanje tehnologije za algoritmično preverjanje, ali opremljenost objektov zadošča predpisanim standardom. Na koncu je potrebno znanje statistike za ugotavljanje povezanosti teoretičnega in dejanskega EG ter interpretacijo rezultatov. Računalniška avtomatizacija je potrebna zaradi velike količine objektov, ki jih je treba analizirati (v izvedenem primeru je bilo v vzorcu 208 objektov (Drobnič Vidic, 2016b)). V prispevku se bomo osredotočili na reševanje matematičnega dela problema, kjer bomo pripravili vse potrebno za delo z digitalno tehnologijo.

Preglednica 1, ki je prepisana iz Pravilnika o izbiri in namestitvi gasilnih aparatov (2005) v prilogi 2, kaže, da je izračun teoretičnega EG odvisen od požarne varnosti objekta, ki se določi na podlagi dejavnosti, s katero se v objektu ukvarjajo, ter fizikalnih lastnosti objekta, kot je na primer površina objekta. Na podlagi preglednice 1 izpeljemo formule za izračun teoretičnega EG za posamezno vrsto objekta. (Določenim vrstam objektov, kot so nekatere javne ustanove, se teoretični EG ne določa po preglednici 1, ampak enostavneje po členih 6–10 v pravilniku.)

Preglednica 1: Določanje teoretičnega EG objektov je odvisno od njihove požarne varnosti[2] in površine.

Požarna nevarnost →(PN) oz. ogroženost	**Majhna (1)**	**Srednja (2)**	**Velika (3)**
Objekt do površine ↓ (v m²)	**Enot gasila (EG)**		
50	6	12	18
100	9	18	27
200	12	24	36
300	15	30	45
400	18	36	54
500	21	42	63
600	24	48	72
700	27	54	81
800	30	60	90
900	33	66	99
1000	36	72	108
Vsakih nadaljnjih 250	+6	+12	+18

Iz preglednice 1 v pravilniku razberemo, da imamo objekte z majhno, srednjo in veliko požarno nevarnostjo (PN), ki zahteva različne izračune vrednosti teoretičnega EG. Prav tako se drugače obravnavajo objekti različnih površin X: do 100 m^2, med 100 in 1000 m^2 in objekti nad 1000 m^2. Objektom med 100 in 1000 m^2 se po stoticah povečuje število teoretičnega EG v aritmetičnem zaporedju (preglednica 1):

- pri objektih z majhno požarno ogroženostjo z oznako $PN = 1$ imamo zaporedje z rekurzivno formulo $a_{n+1} = a_n + 3$, $a_1 = 9$,
- pri objektih s srednjo požarno ogroženostjo z oznako $PN = 2$ imamo zaporedje z rekurzivno formulo $b_{n+1} = b_n + 6$, $b_1 = 18$,
- pri objektih z veliko požarno ogroženostjo z oznako $PN = 3$ imamo zaporedje z rekurzivno formulo $c_{n+1} = c_n + 9$, $c_1 = 27$ za mejne vrednosti teoretičnega EG.

Za manjše in večje objekte sledijo aritmetična zaporedja z drugimi aditivnimi konstantami in začetnimi členi. Skupna formula za mejne vrednosti teoretičnega EG (mejni teoEG) za objekte s površino med 100 in 1000 m^2 iz preglednice 1, ki nadomešča vse tri prej zapisane rekurzivne formule za objekte z različnimi vrstami požarne nevarnosti, se glasi:

$$\text{mejni teoEG}_1 = PN \cdot 9,$$
$$\text{mejni teoEG}_{n+1} = \text{mejni teoEG}_n + PN \cdot 3.$$

Splošni člen bi se glasil:

$$\text{mejni teoEG}_n = PN \cdot (9 + 3(n - 1)).$$

Če bi želeli računanje potrebnega teoretičnega EG avtomatizirati za podatke o objektih po Sloveniji s požarno ogroženostjo PN in s površino X, ki jih dobimo na terenu, potrebujemo postopek, kako določiti vse potrebno za izračun.

Najprej si zastavimo vprašanje, **kolikšna je požarna ogroženost *PN* objekta.**

Če je majhna, pišemo $PN = 1$, če je srednja, velja $PN = 2$, pri veliki pa je $PN = 3$. Nato sledi vprašanje: **Kolikšen je teoretični EG pri objektu s površino X v m^2 (in požarno nevarnostjo PN)?**

Pri $X \in (0,100)$ uporabi formulo:
$$\text{teoEG}(X) = PN \cdot (6 + 3 \cdot \text{Zaokroži}(X/100)).$$

Pri $X \in [100,1000)$ uporabi formulo:
$$\text{teoEG}(X) = PN \cdot (9 + 3 \cdot \text{Celi del}(X/100)).$$

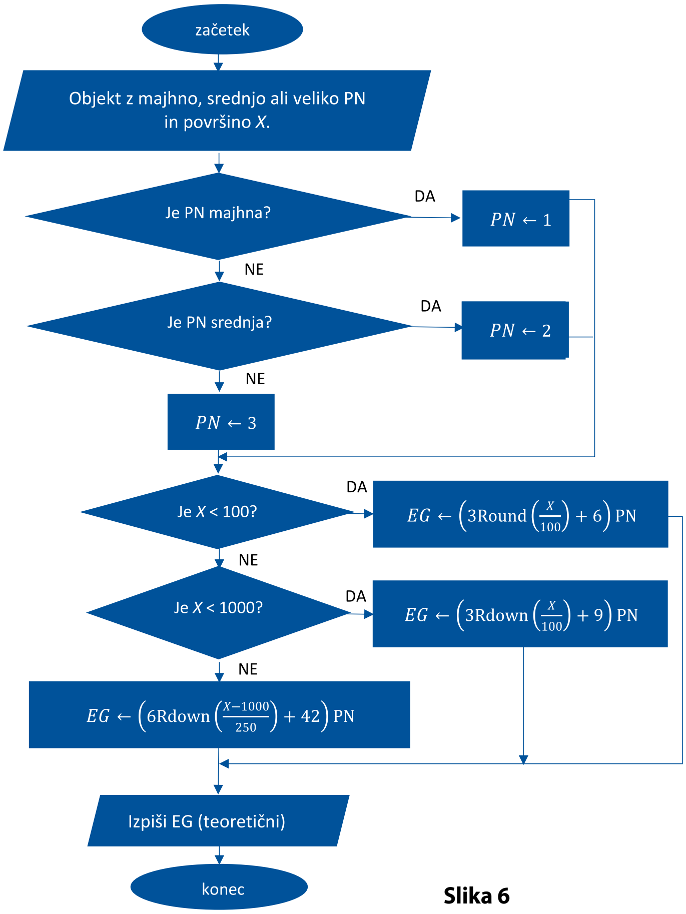
Pri $X \in [1000,\infty)$ uporabi:
$$\text{teoEG}(X) = PN \cdot (42 + 6 \cdot \text{Celi del}((X - 1000)/250).$$

Seveda bi formule lahko zapisali tudi kako drugače, saj je podanih le nekaj začetnih členov zaporedja. Predlagane formule so primerne za avtomatizacijo z računalniškim programom Microsoft Excel, kjer lahko uporabimo funkcijo zaokroževanja in iskanja celega dela realnega števila. Postopek bi lahko zapisali z vprašanji pri DA, NE odgovorih takole (logična vrata):

Začetek: Ali imamo objekt z majhno požarno ogroženostjo?
DA → Zapiši *PN* = 1
NE → Je objekt s srednjo požarno ogroženostjo?

- **DA → Zapiši *PN* = 2.**
- **NE → Zapiši *PN* = 3.**

2 Požarna varnost se določi na podlagi več dejavnikov, od tega, kako je stavba zgrajena do tega, kaj v stavbi počnejo in s katerimi materiali imajo opravka. Če za stavbo požarna ogroženost ni vnaprej določena, jo morajo učenci določiti sami.



Slika 6

Podobna logična vrata sledijo nato za objekte različnih površin X, kot je predstavljeno na sliki 6. Izračuni za obe vrsti logičnih vrat so zapisani s programom Microsoft Excel z vgnezdenimi IF stavki na sliki 7.

Logična vrata so potrebna tudi za preverjanje, ali teoretični EG ustreza dejanskemu EG ali ne. Glede na to, da se nekaterim posebnim objektom teoretični EG ne določa po tabeli 1, ampak drugače (po členih 6–10 v pravilniku), bi bilo za celotno obravnavo, ki je predstavljena v Drobnič Vidic (2016a), treba preveriti naslednje faze, predstavljene na sliki 8.

3 Prednosti in slabosti vključevanja algoritmičnega razmišljanja v pouk matematike

Ob navedenih zgledih algoritmičnega mišljenja se pogosto porajajo vprašanja, ali je dana aktivnost matematično ali algoritmično mišljenje. Natančne ločnice po mojem mnenju ni moč potegniti, saj imata pojma, če ju ponazorimo z množico aktivnosti, neprazen presek. Iskanje ponavljajočega se koraka pri pridobivanju členov zaporedja in oblikovanje rekurzivne formule zanj lahko prištevamo tako med algoritmično kot matematično mišljenje. Vendar iskanje ločnice ni namen tega prispevka. Cilj je izpostaviti algoritmično mišljenje (ki je hkrati lahko tudi matematično mišljenje) pri pouku matematike.

Kadar ob določeni matematični vsebini izpostavimo algoritmično mišljenje, omogočimo mladim, da matematične vsebine takoj povežejo z informatiko in tehnologijo. Algoritmično mišljenje, ki je izpostavljeno ob vsebini o zaporedjih, omogoči določanje pomembnih korakov (algoritmov), kot je določanje rekurzivne formule za avtomatično pridobivanje členov zaporedja. Hkrati se ob vsebini o zaporedjih izpostavi pomen matematičnega mišljenja, na primer pri določanju predpisa za splošni člen iz rekurzivne formule, ki nam olajša zamudno delo postopnega določanja členov in omogoča takojšnji izračun poljubnega člena zaporedja.

V primeru VRTINA nam algoritmično mišljenje pomaga določiti rekurzivno formulo za postopni izračun cene posameznega globinskega metra vrtine, prav tako pa nam algoritmi oziroma ponavljajoči se koraki pomagajo določiti predpis za splošni člen cene metra vrtine kot tudi za izpeljavo formule za vsoto členov geometrijskega zaporedja. Seveda je za izpeljavo teh formul potrebno matematično mišljenje (povezovanje elementov v celoto oziroma sinteza).

Algoritmično mišljenje mladim pomaga pri urejanju korakov in postopkov pri reševanju problema, saj z analizo in delitvijo naloge na manjše dele (kot je algoritmični postopek Začetek – Ponavljajoča se faza – Konec) lažje rešijo kompleksno nalogo. (Mimogrede je analitično razmišljanje in delitev problema na manjše dele tudi aktivnost matematičnega mišljenja.) V primeru ANTIBIOTIK začnemo s časovno delitvijo, nato razpolavljanjem ene tablete antibiotika, kasneje z razpolavljanjem več tablet antibiotika in nato pridobivanjem njihove vsote ...). Ravno primer ANTIBIOTIK kaže, kako pomembno je matematično mišljenje, saj je treba izpeljati formule za izračun posameznih mas tablet in pravilno določiti konec algoritma.

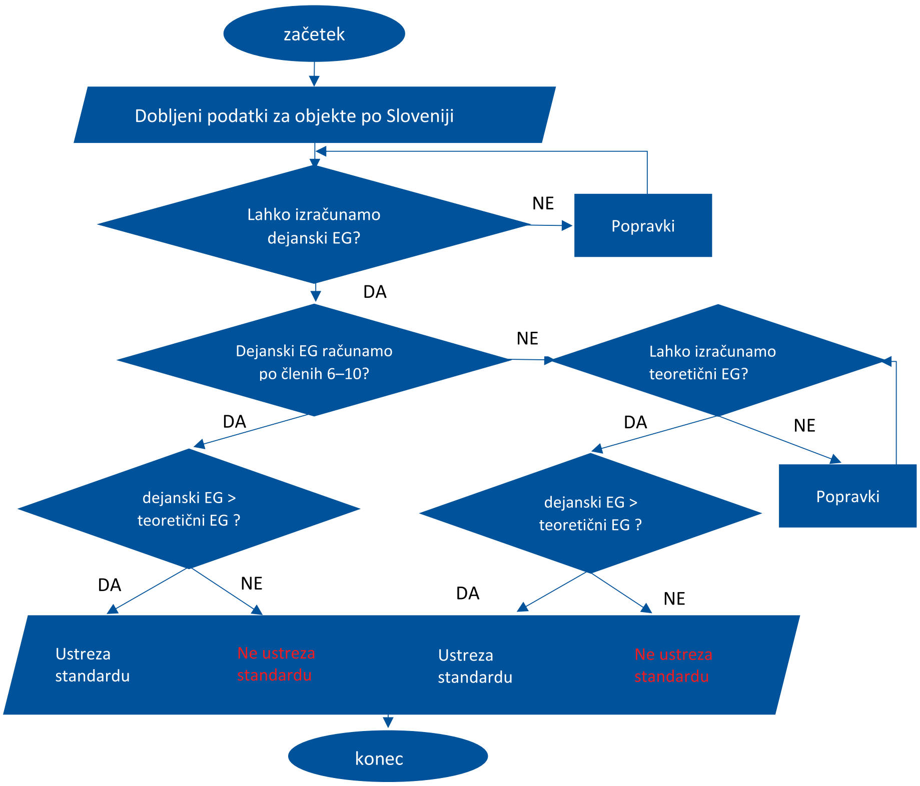
Algoritmično mišljenje je nujno potrebno, če želimo avtomatizirati nek postopek. Avtomatizacija je nujna pri velikem številu podatkov, četudi z bistrim umom izpeljemo mnoge matematične formule za neposredno računanje. V primeru GASILNA OPREMA OBJEKTOV PO SLOVENIJI avtomatiziramo določanje dejanskega EG s teoretičnim EG, kar je potrebno za analizo velikega števila objektov po Sloveniji. Matematično mišljenje uporabimo za določanje formule za izračun dejanskega EG na podlagi površine in požarne nevarnosti objekta, algoritmično mišljenje pa uporabimo za umestitev logičnih vrat, ki omogočajo avtomatiziran postopek določanja dejanskega EG pri veliki količini podatkov.

Prav tako se algoritmično mišljenje v tem primeru zrcali v vrstnem redu postopkov in operacij, ki jih je treba izvesti, da lahko pravilno primerjamo dejansko opremljenost objektov z gasilno opremo od teoretičnih zahtev in predpisov. Seveda pa natančna razčlenitev med matematičnim in algoritmičnim mišljenjem ni mogoča, saj je algoritmično mišljenje pogosto sestavni del celovitega matematičnega mišljenja.

Natrpane matematične vsebine v kurikulumu gotovo ne pomagajo učitelju, da bi pri matematičnih vsebinah izpostavljal algoritmično mišljenje. A vendar uporaba matematike v vsakdanjem življenju kaže, da je uporabna matematika močno povezana s tehnologijo, kjer moramo algoritmično mišljenje osmisliti in uporabiti v računalniških programih. Pogosto je algoritmično mišljenje povezano z modeliranjem v matematiki, ki pri pouku matematike tudi aktualna didaktična vsebina. Ker je algoritmično mišljenje že tako ali tako nezavedno prisotno pri učenju matematičnih vsebin, je morda dovolj, da pri nekaterih vsebinah

Objekt	PN	Površina X	PN=IF(B="majhna";1; IF(B="srednja";2;3))	teoEG = IF(X<100; PN*(6+3*Round[X/100]); IF(X<1000; PN*(9+3*Rounddown[X/100]); PN* (42+6*Rounddown[(X-1000)/250]))
1	majhna	925	1	36
2	velika	122	3	36
3	velika	550	3	72
4	srednja	1200	2	84
5	majhna	210	1	15
6	majhna	675	1	27
7	srednja	2200	2	132
...	...	...	...	...
208	velika	80	3	27

Slika 7



Slika 8

učitelj tako mišljenje izpostavi (morda z zgledom na računalniškem programu, z dodatnim predstavljenim algoritmom v besedilu naloge ali dodatno z domačo nalogo, kjer mladi poskusijo faze algoritmičnega mišljenja zapisati sami).

Morda so predstavljeni primeri pri vsebini o zaporedjih bralcu vzbudili misel, da je rekurzivna formula bolj pomembna, kot je mislil doslej. Morda se nam prikrade misel o tem, kako bistro matematično mišljenje in izpeljava formul za splošni člen ali pa vsoto zaporedja nadomesti rutinsko delo in ponavljanje enakega postopka. Morda smo na kak drug način ozavestili razliko med matematičnim in algoritmičnim mišljenjem in s tem dosegli cilj tega prispevka. Prav ozaveščanje algoritmičnega mišljenja pa bi bil lahko tudi eden od ciljev učitelja matematike pri delu z mladimi: po potrebi izpostaviti algoritmično mišljenje, ki mladim pomaga pri strukturiranju njihovega razmišljanja in jim po drugi strani morda vzbudi zanesenost, lepoto in korist matematičnega mišljenja, ki pogosto nadomesti zamudno in rutinsko algoritmično opravilo.

Viri

Demšar, J. (2016). *Učenje računalništva s pomočjo tekmovanja Bober.* Algoritmi.

Zapiski. Pridobljeno dne 26. 9. 2022 na:

https://ucilnica.fri.uni-lj.si/course/view.php?id=200

Drobnič Vidic, A. (2016a). Using a Problem-Based Learning Approach to Incorpo-rate Safety Engineering into Fundamental Subjects, *Journal of Professional Issues in Engineering Education and Practice, 142* (2), str. 9.

Drobnič Vidic, A. (2016b). STEM – povezovanje v slovenskem izobraževanju (STEM connection in Slovenian education). V: Suban, M. (ur.), idr., *KUPM 2016: zbornik razširjenih povzetkov.* 1. izd. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, str. 194–196.

Drobnič Vidic, A. (v pripravi). *Matematika v uporabi: učbenik za visokošolske inženirske programe*, Univerza v Ljubljani.

Evropski socialni sklad. *E-gradiva za predmet Informatika. Algoritmi.* Pridobljeno dne 8. 9. 2022 na: http://sasa.musiclab.si/eri1/INFORMATIKA/index.html.

Fajfar, I. (2020). *Algoritmi in podatkovne strukture. Uvod za inženirje.* Ljubljana: Založba fakultete za elektrotehniko.

Pravilnik o izbiri in namestitvi gasilnih aparatov (2005). V: Ur.l. RS, št. 67/2005. Dostopno na: http://www.pisrs.si/Pis.web/pregledPredpisa?id=PRAV5533

Razpolovni čas (Wikipedia). Pridobljeno 29. 9. 2022 na https://sl.wikipedia.org/wiki/

Štrukelj, T. (2014). *Poučevanje rekurzije v osnovni šoli* (diplomska naloga). Pedagoška fakulteta: Univerza v Ljubljani.

Dokaz v srednješolski matematiki

Dr. Brigita Ferčec
Fakulteta za Energetiko Univerze v Mariboru in Center za uporabno matematiko in teoretično fiziko Univerze v Mariboru in Fakulteta za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru

Dr. Matej Mencinger
Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo Univerze v Mariboru in Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana

Izvleček

V članku obravnavamo pomen dokaza v matematiki. Po kratkem zgodovinsko-teoretičnem uvodu se dotaknemo pomena dokaza v srednji šoli. Omenimo tudi Pitagorov izrek, ki velja za enega glavnih rezultatov v matematiki, in navedemo dva dokaza, ki temeljita na geometrijski podlagi. Obravnavamo tudi glavne tehnike dokazovanja (ki so primerne za srednješolski nivo): dedukcija, dokaz s protislovjem, kontrapozicija, protiprimer in indukcija. Pri vsaki tehniki podamo tudi (srednješolskemu nivoju) ustrezne primere. Omenimo tudi eno najslavnejših domnev – Collatzovo domnevo, katere tezo lahko brez težav razumejo celo osnovnošolci, dokaz (ali protiprimer) pa še vedno čakamo.

Ključne besede: dokaz, srednja šola, matematična indukcija, dedukcija, protislovje, proti-primer, Collatzova domneva

Mathematical Proof in Upper Secondary School

Abstract

This article covers the significance of proof in mathematics. It starts with a brief historical-theoretical background before highlighting the role of proof in the context of upper secondary school mathematics. We also refer to the Pythagorean theorem, one of the most important mathematical concepts, and provide two proofs based on geometric foundations. Further, we examine the main proof techniques at the secondary-school level: deduction, proof by contradiction, counterexample, contrapositive and induction, along with suitable examples. We also look at one of the most famous conjectures, i.e., the Collatz conjecture, whose thesis is simple enough for primary school students to understand but whose proof (or counterexample) has not yet been provided.

Keywords: proof, upper secondary school, mathematical induction, deduction, contradiction, counterexample, Collatz conjecture.

1 Uvod

Začetniki dokazovanja matematičnih trditev v smislu sodobne matematike so bili starogrški matematiki, ki so v aritmetiki in geometriji odkrili, da lahko trditvam dokažemo »pravilnost« ali »točnost«, oziroma kar danes v logiki imenujemo resničnost trditve/izjave (Franklin, Daoud, 2011).

V slovenskih gimnazijah v učnem načrtu za matematiko (Žakelj, 2008) dokaz nastopa na več mestih. V osnovi lahko govorimo o dveh nivojih dokazovanja: pasivnem (ko dijak »prejme« dokaz in ga je potencialno sposoben ponoviti/reinterpretirati) in aktivnem (ko dijak pozna neko metodo dokazovanja in jo je sposoben aktivno uporabiti v novih situacijah). Slednje je v gimnaziji večinoma omejeno (Žakelj, 2008) na popolno matematično indukcijo, medtem ko pasivno dokazovanje nastopa na primer pri vsakem izpeljevanju (formul pri danih predpostavkah).

Dokazovanje spada v višji nivo znanja. Z dokazovanjem so povezana procesna znanja, kot je abstraktno razmišljanje, formalno sklepanje, intuitivne izpeljave ter kritično razmišljanje o potrebnih in zadostnih pogojih. V učnem načrtu (Žakelj, 2008) je dokazovanje obravnavano kot posebno znanje in je delno vključeno tudi v izbirne vsebine (npr. polarni zapis kompleksnega števila, analitična geometrija v prostoru, vektorski produkt). Vsebine (in cilji), ki so potencialno povezane s pridobivanjem takšnih procesnih znanj, so (glej (Žakelj, 2008)) predvsem osnove logike izjave (zapis izjave in določevanje logične vrednosti izjave, ugotavljanje enakovrednosti dveh izjav) in številske množice – naravna števila (induktivno sklepajo, posplošujejo, posplošitev dokažejo ali ovržejo in dokazujejo z matematično indukcijo (Žakelj, 2008, str. 11). Primeri nalog, kjer lahko uporabimo induktivni dokaz, so povezani s številskimi množicami, algebrskimi izrazi, (ne)enačbami ter zaporedji in vrstami.

Najpomembnejše (dokazano resnične) trditve v matematiki imenujemo *izreki*, malo manj pomembne imenujemo preprosto *trditve*, tiste, ki same po sebi niso tako zanimive, so pa pomembne kot del dokaza nekega (širšega) izreka, pa imenujemo *leme*. Za razliko od aksiomov, ki so vnaprej dogovorjena dejstva oziroma resnice, moramo veljavnost (resničnost) vsake trditve preveriti z dokazom.

Izpeljave formul (pri danih predpostavkah) imajo seveda pomen izreka oziroma trditve. Dokazovanje veljavnosti formul je v gimnazijskem programu zelo pogosto in je namenjeno prej omenjenim višjim/procesnim ciljem, ki so povezani s sposobnostjo dokazovanja. Omenimo samo nekaj primerov izpeljav, ki so res nujne: kot med premicama v ravnini, vsota geometrijske vrste in vsota poljubnega števila členov aritmetičnega zaporedja, dokazi nekaterih limit in osnovni odvodi z limitami ipd.

Pri dokaz(ovanj)u ločimo dva vzporedna vidika: miselni proces in oblikovanje dokaza. Rezultat dokazovanja je dokaz, rezultat miselnih procesov je razumevanje. Samo dokazovanje lahko poteka na več načinov: induktivno, deduktivno, s protislovjem, s kontrapozicijo in s protiprimerom (če ovržemo trditev o splošnosti neke izjave). Posamezne miselne sheme so povezane z organizacijo miselnih procesov (torej z različnimi strategijami pri oblikovanju dokaza). V (Harel, 2008) avtor omenja dokazne sheme (indukcija, dedukcija, dokaz s protislovjem, dokaz s protiprimerom), ki si jih lahko predstavljamo kot »protokole« razmišljanja in poti do razumevanja, ki se jih lahko priučimo (procesni cilj), medtem ko dokazane izreke (pa tudi sam dokaz) uvrsti v kategorijo institucionalne matematike (zbirka struktur, aksiomov, trditev, dokazov). Težimo torej k temu, da dijaki usvojijo prej omenjene protokole razmišljanja z namenom, da sledijo (institucionalnemu) dokazovanju učitelja.

Alternativno lahko dokazovanje v grobem razdelimo v tri skupine (Harel, Sowder, 1998): avtoritativno (učitelj ali knjiga ponudi dokaz), empirično (na osnovi primerov meritev količin, konkretnih števil vizualizacij itd. induktivno sklepamo/posplošujemo) in deduktivno (zaporedno dokazovanje implikacije $A \Rightarrow B$ z razdelitvijo na več korakov: iz A sledi B_1, iz B_1 sledi B_2, …, iz B_n sledi B, pri čemer je pomembno razumevanje pomena »za vse« oziroma »ne obstajajo izjeme«).

Empirično razmišljanje je najbolj pogost način utemeljevanja, vendar nujno zahteva posplošitev. Proces posploševanja lahko (glej (Harel, 2008)) ločimo na rezultatsko in procesno posploševanje. Da so števila 1, 2, 4, 8, 16 … členi zaporedja s splošnim členom 2^n, lahko preverimo z računanjem (preverimo ujemanje členov za prvih pet vrednosti z dano formulo). V procesnem razmišljanju je treba uvideti, da vsak naslednji člen iz prejšnjega dobimo s podvajanjem (prejšnjega). Pri dokazovanju je lahko rezultatski način razmišljanja zgolj osnovna ideja (ki jo potem nadgradimo z matematično indukcijo). Procesno razmišljanje nas običajno pripelje do »pravega« dokaza.

Oba primera razmišljanja lahko ponazorimo na primeru.

Primer 1. Želimo dokazati, da je 2 zgornja meja zaporedja

$$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ \dots$$

Trditev v obliki implikacije je: za vsako naravno število n je $a_n < 2$. Kot rečeno, lahko rezultatsko razmišljanje (izračun približnih vrednosti za prvih nekaj členov) služi kot osnovni preizkus potrebnosti pogoja (če bi za nek $n \in \mathbb{N}$ veljalo $a_n \geq 2$ smo našli protiprimer in implikacija ni veljavna). Približne decimalne vrednosti prvih nekaj členov zaporedja so 1. 4142, 1. 8478, 1. 9616, 1. 9904 ... Zavedati se moramo, da to ne more biti dokaz zgornje trditve. Po drugi strani pa vemo, da ravno na osnovi takega rezultatskega raziskovanja postavimo domnevo, da zgornja trditev velja za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za dokaz trditve je potrebno *procesno razmišljanje*: za $n = 1$ je očitno $a_1 = \sqrt{2} < 2$, saj po kvadriranju sledi $2 < 4$. Za $n = 2$ po kvadriranju neenačbe $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$ sledi $2+\sqrt{2} < 4$ oziroma $\sqrt{2} < 2$ (kar smo že dokazali). Za $n = 3$ po kvadriranju neenačbe $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} < 2$ sledi $2 + a_2 < 4$ oziroma $a_2 < 2$, kar smo že dokazali. Takšno procesno razmišljanje nas privede do induktivnega dokaza. Induktivni korak zahteva zgolj razmislek, da je $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je $a_1 = \sqrt{2}$, je izraz $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ dobro definiran.

Najpogosteje uporabljen izrek v celotni učni vertikali (ki povezuje matematiko s fiziko, mehaniko, geodezijo, statiko, elektrotehniko) je zagotovo Pitagorov izrek. Dokaj preprosta premisa (ki je pogosto vsaj s strani učencev zamolčana oziroma pozabljena) in zaključek sta zelo razumljiva in zato obravnavana že v osnovni šoli. Kljub pozabljanju se bi verjetno največ bivših sošolcev na 20 ali celo 40 obletnici zaključka OŠ spomnilo Pitagorovega izreka (vsaj obrazca $a^2 + b^2 = c^2$). V srednji šoli pri trigonometriji izrek nadgradimo s sinusnim in kosinusnim izrekom. Pitagorov izrek ima zagotovo še en rekord, namreč številnost različnih dokazov (nekateri se razlikujejo zgolj v niansah, pa vendar). V (Dunham, 1994) najdemo kar nekaj dokazov izreka:

Izrek (Pitagora). (V evklidski geometriji) za vsak pravokotni trikotnik s katetama a in b ter hipotenuzo c velja $a^2 + b^2 = c^2$. (Kot vemo, velja tudi obrat: če za stranice trikotnika velja $a^2 + b^2 = c^2$, je trikotnik pravokoten.)

Zaključek oziroma sklep izreka so (vsaj 1000 let pred Pitagoro) uporabljali že stari Babilonci. Pitagora in pitagorejci (cca. 560-480 p. n. št.) so ga uporabljali, Evklid (cca. 300 let p. n. št.) ga je dokazal na dva načina (Ratner, 2009). Izrek so (za vrednosti $a = 3$, $b = 4$ in $c = 5$) uporabljali že stari egipčani (cca. 4000 p. n. št.). Pred Pitagoro so ga zagotovo poznali tudi stari Kitajci (Cullen, 1996). Pitagorov izrek je najbolj znana trditev v matematiki. Enačba $a^2 + b^2 = c^2$ pa velja za četrto najlepšo enačbo nasploh (Ratner, 2009). Einstein ga je dokazal pri 12 letih. Zato si Pitagorov izrek zagotovo zasluži predstavitev vsaj dveh dokazov. Najpreprostejši dokazi temeljijo na geometrijski predstavi. Na sliki 1 je prikazan miselni proces, ki vodi do dveh preprostih dokazov trditve Pitagorovega izreka.

Dokaz 1. Narišimo kvadrat s stranico $a + b$. Vodoravni in navpični stranici razdelimo na odseka a in b, kot kaže slika 1 (levo). Ostra kota α in β sta določena z razmerjem odsekov a in b in s pravim kotom γ. (Ker smo začeli s kvadratom s stranico $a + b$, je kot γ pravi: 90°. Zato so svetlo-sivi trikotniki pravokotni trikotniki s hipotenuzo c in katetama a in b.)

Ker smo v evklidski ravnini, je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Kot $\alpha + \beta + \varphi$ je iztegnjen in zato je tudi kot φ pravi. Torej je modri štirikotnik kvadrat. Ploščinski argument pove, da je

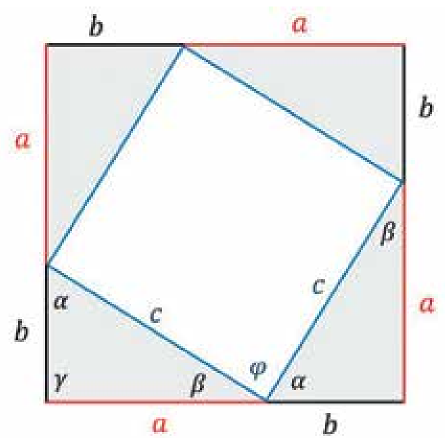
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ in

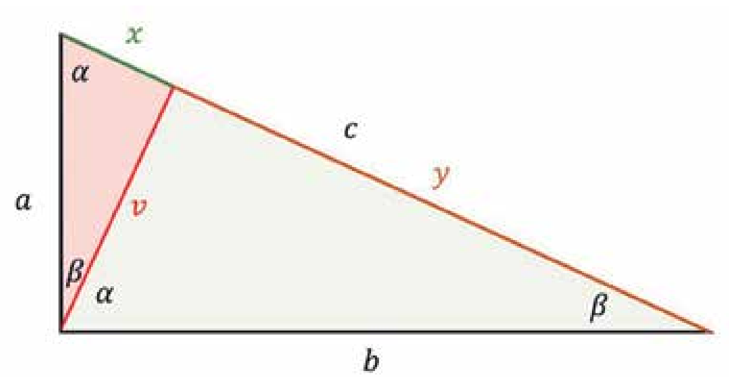
$(a+b)^2 = 4 \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) + c^2$.

Iz obeh enačb sledi

$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) + c^2 \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

kar smo želeli dokazati. ■





Slika 1: Dve preprosti geometrijski ideji za dokaz Pitagorovega izreka. Zgoraj: miselna shema na osnovi večjega in manjšega kvadrata. Spodaj: skica Einsteinovega dokaza (pri 12 letih).

Dokaz 2. Einsteinov dokaz Pitagorovega izreka, ki ga je napisal pri 12 letih, temelji na ploščinah znotraj osnovnega trikotnika s stranicami a, b in c: oranžni pravokotni trikotnik ima hipotenuzo a, zeleni pravokotni trikotnik ima hipotenuzo b, skupni pravokotni trikotnik ima hipotenuzo c (Slika 1, desno). Za vsakega od teh treh pravokotnih trikotnikov velja, da je ploščina številsko enaka produktu kvadrata njegove hipotenuze in faktorja $f = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{2}$. Ko razmislimo, da je za podobne trikotnike faktor f enak, iz enačbe ploščin $a^2 \cdot f + b^2 \cdot f = c^2 \cdot f$ po krajšanju s skupnim faktorjem f sledi $a^2 + b^2 = c^2$. ■

Med bolj znanimi dokazi Pitagorovega izreka je še Leonardov dokaz (najdete ga npr. v Mencinger, 2022) in dokaz ameriškega predsednika J. A. Garfielda (Dunham, 1994). Veliko zanimivih geometrijskih dokazov, ki so primerni za dokazovanje v srednji šoli, najdete v (Nelsen, 1993; 2000; 2016).

2 Sheme dokazovanja v srednji šoli

Zgoraj smo omenjali več načinov dokazovanja in z njimi povezane miselne procese. V tem poglavju na kratko opišemo glavne načine/sheme dokazovanja:

a) dedukcija;
b) dokaz s protislovjem;
c) kontrapozicija;
d) dokaz s protiprimerom (ko ovržemo trditev o splošnosti);
e) popolna matematična indukcija.

Poleg omenjenih načinov obstajajo še drugi, kot so npr. konstruktivni dokaz, verjetnostni dokaz in kombinatorični dokaz (Weisstein, 2022). Pomembno je ločiti med (enostavno) izjavo s kvantifikatorji in pa sestavljeno izjavo (kot npr. implikacijo $A \Rightarrow B$). Opozorimo, da načini a)-c) opisujejo dokazovanje implikacije $A \Rightarrow B$ medtem ko d) in e) opisujeta izjavo s kvantifikatorji, kjer govorimo o izjavi, da neka trditev $T(n)$ velja za vsak n. V primeru d) izrek »$T(n)$ velja za vsak n« ovržemo, v primeru e) pa izrek »$T(n)$ velja za vsak n« dokažemo na osnovi baze indukcije ter induktivnega koraka. Seveda mora biti v primeru e) $n \in \mathbb{N}$, medtem ko v primeru d) to ni nujno. V nadaljevanju temeljiteje predstavljamo dokazne sheme za vseh pet primerov.

a) Dedukcija

Izjavo $A \Rightarrow B$ lahko dokažemo povsem deduktivno (direktno): torej najdemo zaporedje implikacij, ki dokazujejo, da iz A sledi B. Logična shema dedukcije je
$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \ldots, B_{n-1} \Rightarrow B_n, B_n \Rightarrow B)$.

Ponazorimo to z dvema primeroma.

Primer 2. Dokažimo, da za vsako naravno število n velja: $n^2 - n$ je sodo število.

Sklepamo tako, da najprej število $n^2 - n$ zapišemo kot
$n^2 - n = n(n-1)$.

Ker sta to dve zaporedni naravni števili, lahko brez izgube za splošnost (b. i. z. s.) pišemo
$n = 2k + 1$ in $n - 1 = 2k$ za neko naravno število k. Potem je
$n^2 - n = n(n-1) = (2k+1)2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$,
kar je očitno sodo število, saj je deljivo z 2.

Primer 3. Dokažimo, da je izraz $x^2 - 6x + 16$ pozitiven za vsako realno število x.

Izraz $x^2 - 6x + 16$ lahko zapišemo kot
$x^2 - 6x + 16 = (x-3)^2 + 7$.

Število $(x-3)^2$ je pozitivno za vsak x saj je kvadrat števila. Če dodamo 7, število ostane pozitivno.

b) Dokaz s protislovjem

Dokaz s protislovjem je za razliko od dedukcijskega dokaza indirektna metoda dokazovanja: poskušamo zaobiti problem in najti pameten argument, ki ustvari logično protislovje. Izjavo A lahko dokažemo s protislovjem (kontradikcijo) tako, da ob premisi privzamemo $\neg A$ in dokažemo, da iz tega sledi protislovje, ki običajno nastopa v obliki $B \wedge \neg B$ (za neko drugo izjavo B). Če protislovje označimo s P to pomeni pomeni $\neg A \Rightarrow P$, kar pomeni, da je $\neg A$ neresnična izjava. Trditev A je lahko bodisi resnična bodisi neresnična (ne more biti hkrati resnična in neresnična, kar je obravnaval že Aristotel (Zalta, 2019)). Logična shema (tavtologija) za tak dokaz je

$(\neg A \Rightarrow P) \Rightarrow A,$

kar pomeni: če dokažemo pravilnost trditve, da iz premise in negacije A sledi protislovje, smo s tem dokazali pravilnost izjave A.

Primer 4. Dokaži, da ne obstaja celo število, ki bi bilo sodo in liho hkrati.

Dokaz. Dokaz te (enostavne izjave) s protislovjem poteka takole. Poglejmo negacijo izjave, torej izjavo, da obstajajo cela števila n, k in l, da velja $n = 2k \wedge n = 2l + 1$. Izračunamo $k = \frac{n}{2}$ in $l = \frac{n-1}{2}$. Iz tega sledi, da je $k - l = \frac{1}{2}$, kar je protislovje, saj je množica celih števil zaprta za odštevanje.

Primer 5. Dokaži, da za vsa naravna števila n velja: če je $n^3 + 5$ liho, je n sodo število.

Dokaz. Naj bo n poljubno naravno število in predpostavimo, da sta tako $n^3 + 5$ kot n lihi števili. V tem primeru obstajata takšni števili k in l, da je $n^3 + 5 = 2k + 1$ in $n = 2l + 1$. Torej velja:

$n^3 + 5 = 2k + 1$

$(2l + 1)^3 + 5 = 2k + 1$

$8l^3 + 12l^2 + 6l + 1 + 5 = 2k + 1$

$8l^3 + 12l^2 + 6l + 5 = 2k.$

Če zadnjo enakost delimo z 2, dobimo

$k - 4l^3 - 6l^2 - 3l = \frac{5}{2},$

kar je protislovje, saj je $k - 4l^3 - 6l^2 - 3l$ celo število. Torej mora veljati, da v primeru, ko je $n^3 + 5$ liho število, n ne more biti liho število oz. je lahko samo sodo število. ■

Pogosta alternativna oblika dokazovanja s protislovjem je dokaz, da iz $\neg A \Rightarrow A$, kar je očitno protislovje (razen, če je izjava $\neg A$ neresnična, kar pomeni, da mora biti A resnična). Logična shema za ta tip dokaza je

$A \Rightarrow (A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg(\neg A) \Rightarrow A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A)$

(tu smo uporabili tavtologijo $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$).

Primer 6. Najbolj klasični primer dokaza trditve s protislovjem, ki se obdela tudi v gimnaziji, je dokaz izjave $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Privzamemo nasprotno, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Torej je mogoče $\sqrt{2}$ zapisati v obliki okrajšanega ulomka, t. j. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, kjer je $D(a, b) = 1$. Po kvadriranju in množenju z b^2 dobimo $2b^2 = a^2$. Vidimo, da je a^2 sodo število in posledično je tudi a sodo število, torej oblike $a = 2m$, kjer je m naravno število. Tako velja $2b^2 = (2m)^2 = 4m^2$. Po deljenju z dva dobimo $b^2 = 2m^2$ od koder vidimo, da je tudi b^2 sodo število in posledično je b sodo število. Torej sta oba a in b deljiva z 2, kar nas privede do protislovja (s tem, da je ulomek $\frac{a}{b}$ okrajšan). To pa pomeni, da je resnična izjava $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (in ne njena negacija $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

c) Kontrapozicija

Dokaz s protislovjem ni edini način indirektnega dokazovanja – obstaja še dokaz s kontrapozicijo, ki je prav tako indirektna metoda dokazovanja in ki poteka po naslednji shemi: namesto implikacije $A \Rightarrow B$ dokažemo implikacijo $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Primer 7. Dokaži, da za $a, b, n \in \mathbb{Z}$ velja: če $n \nmid ab$, potem $n \nmid a$ in $n \nmid b$.

Najprej moramo najti negacijo izjave "$n \nmid a$ in $n \nmid b$". Tukaj je potrebna previdnost, kajti negacija je

"$n|a$ **ali** $n|b$"

(Uporabili smo DeMorganov zakon). Recimo, da n deli a. Potem je $a = nc$ za nek $c \in \mathbb{Z}$ in $ab = ncb = n(cb)$. Torej $n|ab$. Podobno, če n deli b, je $b = nd$ za nek $d \in \mathbb{Z}$ in $ab = and = n(ad)$. Zato $n|ab$.

Primer 8. Dokaži, da za $x \in \mathbb{Z}$ velja: če je $x^2 - 6x + 5$ sodo število, potem je x liho število.

Dokažimo s kontrapozicijo: predpostavimo, da je x sodo število in dokažimo, da je potem $x^2 - 6x + 5$ liho število. Če je x sodo število, je oblike $x = 2k$ za nek $k \in \mathbb{Z}$, od koder sledi

$x^2 - 6x + 5 = (2k)^2 - 6(2k) + 5 = 4k^2 - 12k + 5 = 2(2k^2 - 6k + 2) + 1.$

Vidimo, da je $x^2 - 6x + 5$ liho število.

d) Dokaz s protiprimerom

Če želimo ovreči, da je neka trditev tipa »za vsak element $m \in M$ je trditev $T(m)$« resnična, iščemo protiprimer. V jeziku logike to pomeni »obstaja (vsaj en) element (iz množice M), za katerega T ni resnična«.

Primer 9. Naj bo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva in monotono naraščajoča funkcija (torej iz $x > y$ sledi $f(x) > f(y)$). Trditev, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f'(x) > 0$, ne velja. Protiprimer je funkcija $f(x) = x^3$, za katero v točki $x = 0$ sklep ne velja, saj je $f'(0) = 0$.

Primer 10. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja, da je $\sqrt{2+n}$ iracionalno število.

Trditev ni resnična, saj lahko najdemo protiprimer. Če izberemo npr. $n = 7$, vidimo, da trditev »$\sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$ je iracionalno število« ni resnična.

Primer 11. Preveri, ali velja trditev: če je p praštevilo, je tudi $2^p - 1$ praštevilo.

Izračunamo vrednost izraza za prvih nekaj praštevil in rezultate zapišemo v spodnji tabeli.

p	2	3	5	7	11
$2^p - 1$	3	7	31	127	2047

Števila 3, 7, 31 in 127 so praštevila, medtem ko $2047 = 23 \cdot 89$ ni praštevilo. Torej smo našli protiprimer, zato zgornja trditev ne velja.

e) Matematična indukcija

Matematična indukcija je močna in elegantna tehnika za dokazovanje določenih vrst matematičnih trditev: splošne izjave, ki trdijo, da je nekaj res za vsa naravna števila ali za vsa naravna števila od nekega naravnega števila naprej. Z naslednjim primerom se je že kot mlad učenec ukvarjal znani matematik C. F. Gauss (1777–1855).

Primer 12. Dokaži, da je vsota prvih n naravnih števil enaka $\frac{n(n+1)}{2}$.

Preverimo trditev za prva štiri naravna števila in rezultate zapišimo v tabelo:

n	1	2	3	4
Vsota prvih n naravnih števil	1	$1 + 2 = 3$	$1 + 2 + 3 = 6$	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$
$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$	$\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$	$\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$	$\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$

Morda je to precej prepričljivo in lahko se vprašamo, ali je potreben še kakšen dokaz. Če trditev velja za vsa števila, ki smo jih preizkusili, ali lahko sklepamo, da je resnična za vse vrednosti n? Spomnimo se primera 11, kjer je trditev veljala za prva štiri praštevila, pri petem praštevilu pa se je izkazalo, da je splošna trditev napačna. Vrnimo se k primeru 12 in se vprašajmo, koliko naravnih števil bi morali preveriti, da bi lahko z gotovostjo trdili, da je trditev pravilna. Recimo, da nam računalnik po vrsti po naravnih številih računa vsote. Ne glede na to, za koliko naravnih števil n smo ugotovili, da je trditev pravilna, ne bomo prepričani, ali obstaja večje naravno število n za katero je trditev napačna. Ravno to pa narekuje potrebo po splošnem dokazu, ki zajema vse vrednosti n.

Eden od načinov razmišljanja o matematični indukciji je, da ne dokažemo ene trditve za splošen n ampak celo zaporedje trditev za posamezna naravna števila n. Bistvo matematične indukcije je, da dokažemo prvo trditev zaporedja, nato pa, če je katerakoli trditev v zaporedju resnična, je tudi njena naslednja trditev resnična. Iz tega sledi, da so vse trditve pravilne. Zapišimo ta dva koraka v formalnem navodilu.

Baza indukcije (začetni korak). Dokaži, da je trditev resnična za $n = 1$. (Ali, če dokazujemo trditev za $n \geq a$, dokažemo njeno resničnost za $n = a$.)

Indukcijski korak. Dokaži, da če je trditev resnična za $n = k$, potem je resnična tudi $n = k + 1$. Ta korak predstavlja zahtevnejši del indukcije, zato ga razdelimo na več manjših korakov.

Korak 1: Zapišemo trditev za $n = k$ in predpostavimo, da ta trditev velja. Zato jo ponavadi imenujemo *indukcijska predpostavka*.

Korak 2: Zapišemo trditev za $n = k + 1$, t. j. trditev, ki jo želimo dokazati.

Korak 3: Dokažemo korak 2 ob indukcijski predpostavki iz koraka 1. Za ta korak ni splošnega recepta, saj se razlikuje za različne primere in je odvisen od matematičnega konteksta. Uporabiti je treba iznajdljivost in znanje matematike.

Ko enkrat izvedemo oba koraka (baza indukcije in indukcijski korak), lahko takoj zaključimo, da je trditev resnična za vsak $n \geq 1$ (ali za vsak $n \geq a$, če smo začeli z $n = a$). Na celotni postopek lahko gledamo kot na nek »avtomatski stroj dokazovanja izjav«. Dokažemo trditev za $n = 1$. Po indukcijskem koraku, ker trditev velja za $n = 1$, velja tudi za $n = 2$. Nato ponovno po indukcijskem koraku, ker trditev velja za $n = 2$, velja tudi za $n = 3$ itd. Ker smo dokazali indukcijski korak, se ta proces nikoli ne zaključi. Ta »avtomatski stroj« nikoli ne preneha delati ne glede na to, kako veliko je število n.

Recimo, da obstaja število K, za katerega je trditev neresnična. V tem primeru, ko pridemo do števila $K - 1$, imamo situacijo: trditev je resnična za $n = K - 1$ ampak napačna za $n = K$. To nasprotuje induktivnemu koraku in zato se to ne more zgoditi, kar pomeni, da je trditev resnična za vsa naravna števila.

Matematično indukcijo lahko primerjamo s procesom zanke v računalniškem programiranju, kjer začnemo tako, da določimo začetno vrednost, kar je pri indukciji analogno bazi indukcije. Nato pa definiramo zanko, ki s pomočjo prejšnjih vrednosti spremenljivk računa nove vrednosti, kar je analogno indukcijskemu koraku v matematični indukciji. V računalniškem programu je potrebna še ena stvar: nastaviti je treba pogoj »stop«, sicer bo program deloval večno. To pa nima analogije v našem procesu – naš teoretični stroj bo deloval večno in zato smo lahko prepričani, da je naš rezultat resničen.

Poglejmo, kako matematična indukcija deluje na konkretnem primeru. Dokažimo trditev iz primera 11, torej, da je $1 + 2 + 3 + \cdots = \frac{n(n+1)}{2}$.

Baza indukcije. Če je $n = 1$, je vsota 1. Po drugi strani pa je za $n = 1$ vrednost izraza $\frac{n(n+1)}{2}$ prav tako enaka 1. Torej je trditev resnična za $n = 1$.

Indukcijski korak.

Korak 1: Zapišemo indukcijsko predpostavko:
$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2} k(k + 1)$ (Lastnost za $n = k$).

Korak 2: Zapišemo indukcijski sklep

$$1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]=$$
$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2).$$

Korak 3: Dokažemo, da iz indukcijske predpostavke sledi indukcijski sklep (t. j. desno stran enačbe v koraku 2 pridobimo s pomočjo leve strani enačbe v koraku 1 z dodajanjem člena $k+1$:

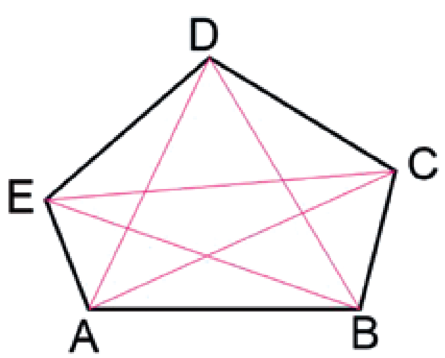
$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+(k+1) &= 1+2+3+\cdots+k+(k+1) \\ &= \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) \\ &= (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2), \end{aligned}$$

kar zaključuje induktivni korak. Zato trditev velja za vse $n \in \mathbb{N}$.

Na koncu si poglejmo še geometrijski primer, kjer trditev velja od $n = 4$. Zato se baza indukcije začne pri 4.

Primer 13. Za vsak $n \geq 4$ je število diagonal v konveksnem n-kotniku enako $\frac{n(n-3)}{2}$.

n-kotnik je večkotnik, ki ima n oglišč. n-kotnik je *konveksen*, če za vsako njegovo nosilko stranice velja, da preostala oglišča ležijo na isti polravnini te nosilke. V konveksnem n-kotniku so diagonale vedno znotraj lika. Slika 2 prikazuje konveksni petkotnik z diagonalami.



Slika 2: Konveksni petkotnik.

Sedaj s pomočjo indukcije pokažimo, da trditev v primeru 12 velja za vsak $n \geq 4$.

Baza indukcije. Če je $n = 4$, je lik štirikotnik, za katerega vemo, da ima dve diagonali. Prav tako je za $n = 4$ vrednost izraza $\frac{n(n-3)}{2}$ enaka 2. Torej je trditev resnična za $n = 4$.

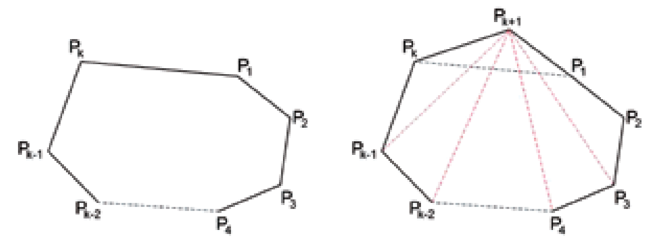
Indukcijski korak.

Korak 1: Indukcijska predpostavka: trditev velja za $n = k$. Število diagonal v konveksnem k-kotniku je enako $\frac{k(k-3)}{2}$.

Korak 2: Indukcijski sklep: trditev velja za $n = k + 1$. Število diagonal v konveksnem $(k + 1)$-kotniku je enako

$$\frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Korak 3: Dokažemo, da iz indukcijske predpostavke sledi indukcijski sklep. Zato konveksnemu -kotniku dodamo novo oglišče, da dobimo konveksni $(k + 1)$-kotnik (pazimo, da nastali lik ostane konveksen). Nato pogledamo, koliko novih diagonal s tem pridobimo (glej sliko 3).



Slika 3: Konveksni k-kotnik (levo) in konveksni $(k + 1)$-kotnik (desno).

Ko dodamo še eno oglišče k večkotniku s k oglišči, vse diagonale, ki so bile že v prejšnjem k-kotniku, ostanejo tudi v novem $(k+1)$-kotniku in teh je po indukcijski predpostavki $\frac{k(k-3)}{2}$. Dodatno nastane še $k - 2$ diagonal, ki jih narišemo iz oglišča P_{k+1} do drugih nesosednjih oglišč (glej sliko 3 (desno), kjer so te diagonale narisane z rdečo barvo). Ena dodatna diagonala pa nastane iz stranice, ki je v k-kotniku povezovala oglišči P_1 in P_k. Tako dobimo

$$\frac{k(k-3)}{2}+(k-2)+1=\frac{k(k-3)+2k-4+2}{2}=$$
$$=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

diagonal (kar potrjuje, da iz indukcijske predpostavke sledi indukcijski sklep). ■

Nazadnje obravnavajmo primer, ki je zanimiv predvsem zaradi enostavnosti trditve. Kljub temu pa matematiki (še) niso postregli z dokazom (ali ovrgli veljavnost trditve s protiprimerom), kar pomeni, da ima trditev status *domneve* (in ne izreka). Domneva se imenuje po nemškem matematiku Lotharju Collatzu, druga imena so tudi »3x + 1 domneva«, *Ulamova domneva*, *Kakutanijev problem*, *Thwaitesov problem*, *Hassejev algoritem* in *sirakuški problem*. Collatzova domneva je zanimiva , ker je njena trditev tako preprosta, da jo lahko razume učenec v osnovni šoli, pa vendar je v 85-ih letih od njene formulacije niso uspeli niti dokazati, niti ovreči.

Domneva (Collatz, 1937). Collatzova funkcija $C(n)$ naravnemu številu $n \in \mathbb{N}$ priredi število $\frac{n}{2}$ če je število n sodo, oziroma $3x + 1$, če je število n liho. Collatzova domneva pravi, da za vsako naravno število n zaporedno izračunavanje Collatzove funkcije na nekem koraku privede do števila 1.

Opomba. Če zaporedno iteracijo $\underbrace{C(C(\cdots(C(n))))}_{k-krat}$ označimo s $C^k(n)$, lahko zgornjo domnevo zapišemo takole: za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $C^k(n) = 1$, vendar ta formulacija ni primerna za osnovno šolo.

Omenimo, da poskusi, da bi domnevo ovrgli segajo v neverjetne višave. Največje število doslej, ki so ga testirali kot potencialni proti-primer (Ren, 2019), je število $n = 2^{100000} - 1$. Po neverjetnih $k = 1344926$ iteracijah sledi $C^k(n) = 1$; od tega je bilo treba 481603-krat uporabiti funkcijo $n \mapsto 3n + 1$ in 863323-krat deljenje z 2. Omenimo še, da so raziskave na področju Collatzove domneve številne in zelo aktualne (Ren, 2019). Problem naravno spada v teorijo (diskretnih) dinamičnih sistemov (iteracije). Bistvo težavnosti problema seveda ne tiči v sodih številih, ki jih delimo z 2, ampak v lihih številih, ki jih množimo s tri (in prištejemo ena). Zato je indukcijski sklep težko izpeljati.

Za dovolj majhne množice $\mathbb{N}_m = \{1, 2, \dots, m\}$ niti v osnovni šoli, še manj pa v srednji šoli ni težko dokazati veljavnost trditve, »za vsak $n \in \mathbb{N}_m$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $C^k(n) = 1$«.

Primer 14. Za $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ je trditev »za vsak $n \in \mathbb{N}_4$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $C^k(n) = 1$« resnična.

Za $n = 1$ izračunamo: $C(1) = 4$, $C(4) = 2$in $C(2) = 1$, kar pomeni $C^3(1) = 1$.

Za $n = 2$ izračunamo: $C(2) = 1$.

Za $n = 3$ izračunamo: $C(3) = 10$, $C(10) = 5$, $C(5) = 16$, $C(16) = 8$, $C(8) = 4$, $C(4) = 2$ in $C(2) = 1$ kar pomeni $C^7(3) = 1$

Za $n = 4$ izračunamo: $C(4) = 2$ in $C(2) = 1$ kar pomeni $C^2(4) = 1$.

Zgornji izračuni potrjujejo/dokazujejo, da ima za množico $\mathbb{N}_4$ Collatzova domneva status (dokazane) trditve.

Opomba. Zgornje zaporedne izračune lahko krajše zapišemo v obliki *orbite*, ki nastane z iteriranjem Collatzove funkcije C. Za $n = 3$ je pripadajoča orbita $3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$.

Primer 15. Za $\mathbb{N}_{10} = \{1, 2, \dots, 10\}$ je trditev »za vsak $n \in \mathbb{N}_{10}$ obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $C^k(n) = 1$ resnična.

Pripadajoče orbite so naslednje:

$1\to4\to2\to1$ (za $n = 1$), $2\to1$ (za $n = 2$), $3\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$ (za $n = 3$), $4\to2\to1$ (za $n = 4$), $5\to16\to8\to4\to2\to1$ (za $n = 5$), $6\to3\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$ (za $n = 6$), $7\to22\to11\to34\to17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$ (za $n = 7$), $8\to4\to2\to1$ (za $n = 8$), $9\to28\to14\to7\to22\to11\to34\to17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$ (za $n = 9$) in $10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$ (za $n = 10$).

Zgornji seznam pomeni, da je za množico $\mathbb{N}_{10}$ Collatzova domneva dokazana.

Opazimo, da so dolžine orbit enake

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	3	1	7	2	5	8	16	3	19	6

Iz zgornje tabele je razvidno, kaj je potencialna težava pri induktivnem dokazovanju za splošno naravno število. Gre za dolžino (najdaljšega) cikla: za $m = 10$ je dolžina maksimalnega cikla pri naravnem številu $n = 9$ enaka $k = 19$. Drugi problem je največje število, kamor nas iteracije »odnesejo«: v tem primeru število 52. To število je lahko bistveno večje, kot sam $m = 10$, ki nastopa v trditvi.

Zaključek

Na preprostih primerih smo spoznali različne tehnike dokazovanja, katerih poznavanje in razumevanje je (tako za učitelja kot za dijaka) zelo pomembno.

Dokaz mora pokazati, da je trditev (vedno: za vse pogoje premise oziroma za vse vrednosti iz dane množice) resnična, pri čemer lahko včasih navedemo vse možne primere in preverimo veljavnost za vsak konkreten primer, ni pa dovolj zgolj navesti končnega števila primerov, za katere trditev velja, če naj nekaj velja za vsa naravna števila. Navajanje primerov, za katere trditev velja, lahko zgolj privede do nepotrjene trditve, za katero se domneva, da je resnična in jo zato imenujemo *domneva*, če zanjo še ni bilo mogoče najti dokaza. Ena izmed najbolj znanih domnev je Collatzova domneva, ki smo jo navedli kot primer domneve, katere dikcija je zelo preprosta, dokaz pa je zelo zahteven.

Literatura

[1] Cullen, C. (1996). *Astronomy and mathematics in ancient China: the Zhou bi suanjing*. Cambridge University Press. https://avserzhen.files.wordpress.com/2016/06/astronomy-and-mathematic-in-ancient-china.pdf

[2] Dunham, W. (1994). The Mathematical Universe. New York: John Wiley & Sons.

[3] Franklin, J., Daoud, A. (2011). Proof in Mathematics, An Introduction, Quakers Hill Press. https://web.maths.unsw.edu.au/~jim/proofs.html

[4] Harel, G. (2008). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM Mathematics Education* 40, str.893–907.

[5] Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (ur.), *Research in collegiate mathematics education* 3, str. 234–283.

[6] Mencinger, M. (2022). Simetrijske grupe končnih vzorcev, Univerzitetna založba UM. https://dk.um.si/IzpisGradiva.php?id=81064

[7] Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words*. ZDA: The Mathematical Association of America.

[8] Nelsen, R. B. (2000). *Proofs Without Words II*. ZDA, The Mathematical Association of America.

[9] Nelsen, R. B. (2016). *Proofs Without Words III*. ZDA, The Mathematical Association of America.

[10] Ratner, B. (2009). Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it 1000 years before him. *J Target Meas Anal Mark* **17**, 229–242. https://doi.org/10.1057/jt.2009.16

[11] Ren, W. (2019). A New Approach on Proving Collatz Conjecture, Journal of Mathematics, Hindawi. https://www.hindawi.com/journals/jmath/2019/6129836/

[12] Weisstein, E. W. (2022). Constructive Proof, From MathWorld-A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/ConstructiveProof.html

[13] Zalta, E. N. (ur.) (2019). The Stanford Encyclopedia of Philosophy. https://plato.stanford.edu/

[14] Žakelj, A. Učni načrt: Matematika, Gimnazja (Splošna, klasična in strokovna gimnazja), Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo 2008. http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2017/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf

Raziskovalna naloga na Evropskih statističnih igrah: Nasveti za pripravo nalog

Dr. Aleš Toman
Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta

Izvleček

Evropske statistične igre so mednarodno ekipno tekmovanje, ki spodbuja radovednost in zanimanje za statistiko, uporabo uradnih statističnih podatkov, osvajanje dodatnih statističnih znanj in veščin ter skupinsko delo in sodelovanje med mladimi. Na šolski ravni tekmovanja ekipe rešujejo spletni test iz poznavanja statističnih pojmov in podatkov, na državni ravni pripravijo statistično raziskovalno nalogo na osnovi danega podatkovnega niza, na evropski ravni pa pripravijo videoposnetek, v katerem s pomočjo uradnih statističnih podatkov obravnavajo predpisano temo. Avtor prispevka kot član strokovne žirije že 5 let ocenjuje raziskovalne naloge na državni ravni tekmovanja. V prispevku navaja primere dobre in manj dobre prakse, vse z namenom, da bodo lahko ekipe v prihodnje pripravljale še boljše naloge. Poudarek je na tistih vsebinah, ki so tesno povezane s poukom matematike (izračuni in grafikoni). Kljub temu so zapisani nasveti dovolj splošni, da so uporabni pri vsaki raziskovalni nalogi. Prispevek vključuje tudi kratek opis vseh ravni tekmovanja in spodbuja učiteljice in učitelje matematike k mentoriranju ekip na svojih šolah.

Ključne besede: Evropske statistične igre, raziskovalna naloga, analiza podatkov, statistični grafikoni

European Statistics Competition: Tips for Preparing Research Papers

Abstract

The European Statistics Competition is an international team competition that encourages young people to work together and cooperate while using official statistical data and developing their statistical knowledge and skills. At the school level, teams complete an online test on statistical concepts and data; at the national level, they write a research paper based on an actual dataset; and at the European level, they create a video in which they present a given topic using official statistical data. The author is a member of the expert jury and has been evaluating research papers at the national level for five years. The article offers examples of both the best and less effective techniques to help teams produce even better papers in the future. Although the emphasis is on topics directly relevant to mathematics (calculations and diagrams), these broad guidelines adhere to any research paper. The summaries of each competition stage further encourage math professors to mentor school teams.

Keywords: European Statistics Competition, research paper, data analysis, statistical graphs.

1 Opis tekmovanja

Evropske statistične igre so mednarodno ekipno tekmovanje srednješolcev, ki ga organizirajo statistični urad Evropske unije Eurostat in nacionalni statistični uradi sodelujočih držav z namenom, da bi med mladimi spodbudili zanimanje za statistiko in uporabo podatkov uradne statistike ter s tem prispevali k **dvigu statistične pismenosti** v Evropi (https://www.esc2022.eu). Prve Evropske statistične igre so potekale v šolskem letu 2017/18. Tekmovanje se vselej odvija v dveh fazah, prva faza je nacionalna in poteka v nacionalnih jezikih sodelujočih držav, druga faza pa je evropska in poteka v angleškem jeziku. Popularnost iger raste tako v Sloveniji kot tudi v Evropi. Ker je tekmovanje v celoti izvedeno preko spleta, je lahko nemoteno potekalo tudi v času epidemije. O tekmovanju in uspehu ekipe Teglzarože[1] iz leta 2021 sta članici ekipe skupaj z mentorico že poročali v reviji Matematika v šoli (Rauter Repija in drugi, 2021).

1 Imena ekip si tekmovalke in tekmovalci izberejo sami. Imena članic in članov ekip niso objavljena.

1.1 Nacionalna faza tekmovanja

Slovenija na Evropskih statističnih igrah sodeluje že od samega začetka, nacionalno fazo tekmovanja organizira Statistični urad Republike Slovenije (SURS) v sodelovanju s Statističnim društvom Slovenije (https://www.stat.si/igre). Nacionalna faza tekmovanja se deli na šolsko in državno raven. Na obeh ravneh dijakinje in dijaki tekmujejo v stalnih največ tričlanskih ekipah v dveh starostno ločenih tekmovalnih skupinah, in sicer

- v kategoriji A dijakinje in dijaki zadnjih dveh letnikov srednjih šol (16–18 let),
- v kategoriji B pa dijakinje in dijaki prvih dveh letnikov srednjih šol (14–16 let).

Na šolski ravni tekmovanja ekipe odgovarjajo na 3 sklope po 10 vprašanj izbirnega tipa.

- Sklop a) preverja osnovno znanje statistike.
- Sklop b) preverja poznavanje in uporabo uradnih statističnih virov.
- Sklop c) preverja razumevanje izbrane Eurostatove publikacije s statističnimi podatki.

Šolsko tekmovanje poteka v obliki spletnega testa in traja približno 2 tedna, ekipe pa lahko na vprašanja odgovarjajo v poljubnem tempu in zaporedoma na več napravah (v šoli, dijaškem domu, doma …). Sodelujoči na šolski ravni tekmovanja lahko osvojijo bronasto priznanje.

Najuspešnejše ekipe se uvrstijo na **državno raven tekmovanja**. Tam prejmejo obsežen podatkovni niz, na osnovi katerega pripravijo **statistično raziskovalno nalogo**, ki jo oceni strokovna žirija. Ekipe so povsem samostojne pri izbiri raziskovalne teme, vprašanj, hipotez, podmnožice podatkov ter metod dela. Časa za pripravo naloge imajo približno 4 tedne, nalogo nato v ocenjevanje oddajo preko spletnega obrazca. Sodelujoči na državni ravni tekmovanja lahko osvojijo srebrno ali zlato priznanje.

1.2 Evropska faza tekmovanja

V evropsko fazo tekmovanja se iz vsake sodelujoče države uvrstita po 2 (prvo leto tekmovanja pa 3) najuspešnejši ekipi iz vsake starostne skupine. Organizator tekmovanja izbere temo, nato vsaka ekipa pripravi **videoposnetek**, v katerem s pomočjo uradnih statističnih podatkov na zanimiv način obravnava izbrano tematiko. Vsebino predstavijo v največ 2 minutah, temu sledi še največ 10 sekund za navedbo virov. Videoposnetek je lahko v nacionalnem ali angleškem jeziku, obvezno pa mora biti opremljen z angleškimi podnapisi. Ekipe skupaj z videoposnetkom preko spletnega obrazca oddajo še spremljevalni dokument, v katerem na največ 4 straneh opišejo postopek priprave videoposnetka. Časa za pripravo obeh datotek imajo približno 6 tednov, nato datoteki po vnaprej znanem kriteriju oceni mednarodna strokovna žirija. Sodelujoči v evropski fazi tekmovanja lahko osvojijo pokal ali priznanje.

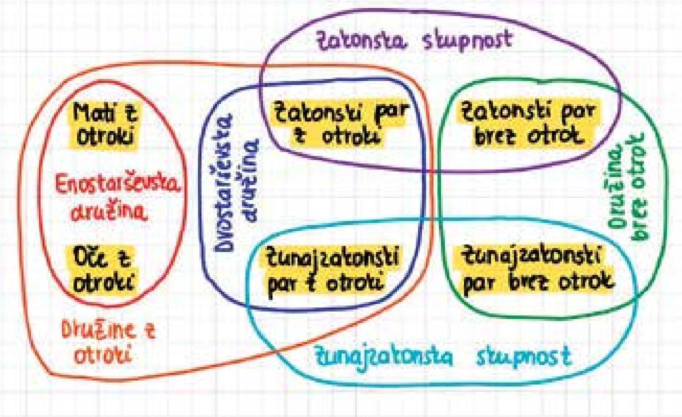
1.3 Namen prispevka

Ekipe na državni ravni tekmovanja pripravijo izredno zanimive in kakovostne raziskovalne naloge, najvišje uvrščene naloge pa vsako leto SURS objavi na svoji spletni strani. Objavljene izdelke posebej pozorno pregledajo prihodnje generacije tekmovalk in tekmovalcev, saj v njih iščejo ključ do visoke uvrstitve na državni ravni tekmovanja. A tudi v najboljših nalogah se najdejo napake in nespretnosti. V upanju, da se te zaradi objave nalog ne bi širile, sodelavci SURS in člani Statističnega društva pripravljajo izobraževanja za ekipe in njihove mentorice in mentorje. Temu je namenjen tudi ta prispevek. Predstavljeni zgledi izhajajo iz raziskovalnih nalog, ki so jih ekipe pripravile v obdobju 2018–2022. Čeprav nekateri nasveti izhajajo iz priročnika Making Data Meaningful (2009), so v prispevku opisana predvsem lastna opažanja.

2 Podatkovni niz in raziskovalno vprašanje

Državna raven tekmovanja se prične, ko SURS ekipam posreduje podatke, na osnovi katerih pripravijo raziskovalne naloge. Podatki so shranjeni v **Excelovi datoteki** z več listi, numerične vrednosti pa so zapisane v tabeli, kjer stolpci predstavljajo spremenljivke, vrstice pa geografske enote. Vrednosti so najpogosteje dane na ravni 212 slovenskih občin, v dodatnih listih pa so lahko podane še agregirane vrednosti za 12 statističnih regij in Slovenijo kot celoto. V nadaljnjih listih Excelove datoteke ekipe najdejo metapodatke ter prostorski šifrant. Metapodatki so podrobni opisi spremenljivk, prostorski šifrant pa kodna tabela, ki jo ekipe potrebujejo, saj so geografske enote v tabeli s podatki določene s kodami in ne imeni.

V letu 2020 so imele ekipe na voljo kar sto spremenljivk, a so vse opisovale *družine v Sloveniji* v točno določenem trenutku. Leto kasneje je bilo spremenljivk skoraj pol manj, a so ekipe imele na voljo vrednosti vsake spremenljivke v 5 zaporednih letih, zato so lahko tematiko *okolja v Sloveniji* spremljale skozi čas. Prva naloga vsake ekipe je, da dane podatke zelo natančno preuči in razišče njihovo kompleksno strukturo. Le tako si lahko zastavijo ustrezna **raziskovalna vprašanja** in kasneje pripravijo ustrezne izračune (**Slika 1**).



Slika 1: Klasifikacija družin. Razumevanje medsebojne povezanosti 12 spremenljivk (tipov družin) omogoča računanje ustreznih deležev.

Vseh spremenljivk ni mogoče uporabiti v eni raziskovalni nalogi, ekipa mora zato izbrati natanko tiste, ki ustrezajo postavljenemu raziskovalnemu vprašanju. Podatkovni niz preučijo tudi člani strokovne žirije in zato lahko preverijo ustreznost posamezne izbire. Ekipe lahko uporabljajo le podatke danega podatkovnega niza. Uporaba dodatnih podatkov ni dovoljena in vodi v diskvalifikacijo. Lahko pa ekipe iščejo dodatne metapodatke ali ideje za pripravo naloge (**Slika 2**). Prav tako lahko uporabljajo poljubne vire pri učenju statistične analize, dela z računalnikom in izdelavi predstavitve.

Slika 2: Podatek o količini vode, uporabljeni v procesu izdelave enega avtomobila (zgoraj), v podatkovnem nizu ni bil na voljo. Ker pa je služil kot zanimivost in ne kot informacija za nadaljnje analize, uporaba podatka ni sporna. Vir: Deadsirius (2021).

Čeprav vse ekipe analizirajo iste podatke in je njihov vir iz konteksta povsem jasen, SURS ob uporabi podatkov izrecno zahteva **navedbo vira**, pri čemer je dovolj že zapis *Vir: SURS*. Kadar ekipe podatke še naprej preračunavajo (združevanja, povprečja, deleži), je pravilen še pripis *Lastni izračuni*. Vir praviloma navajamo tudi ob tabelaričnih in grafičnih prikazih podatkov.

3 Elementi raziskovalne naloge

Pravila za nacionalni del tekmovanja določajo, da ekipe svoje delo predstavijo na največ **8 prosojnicah**, ki jim lahko sledita največ **2 prosojnici z metodološkimi pojasnili**. Vsaka naloga mora vsebovati uvodno prosojnico in zaključek, pri ostalih 6 prosojnicah pa imajo ekipe proste roke. Žirija ima pri ocenjevanju na voljo le prosojnice, zato je pomembno, da je z njih razvidno logično zaporedje vsebin, zlasti kadar je na eni prosojnici prikazanih več analiz. Ekipe lahko urejenost (pa tudi jasnost in razumljivost) nalog preverijo tako, da ob prosojnicah pripravijo predavanje za mentorja ali prijatelje. Pri tem bodo hitro ugotovile, ali so na pravem mestu zapisale vse potrebne informacije.

3.1 Uvodna prosojnica

Uvodna prosojnica obvezno vsebuje ime ekipe, šole, statistične regije in navedbo starostne kategorije. Preostali prostor na uvodni prosojnici lahko ekipa izkoristi za informativen naslov naloge ter privlačno grafiko, ki lahko prispeva k razumevanju naloge. Pri uporabi slikovnega gradiva pazi, da ne krši avtorskih pravic in da v nalogi navede ustrezne vire. Uvodna prosojnica je prvi stik bralca z raziskovalno nalogo, zato se jo splača čim bolj premišljeno izkoristiti (**Slika 3**).

3.2 Cilji in hipoteze

Na drugi prosojnici ekipe običajno navedejo cilje in hipoteze. **Hipoteze** niso obvezne, če jih ekipa zapiše, pa morajo biti jasne, argumentirane in zapisane pred analizo podatkov. Nedoločene hipoteze je bolje nadomestiti z navedbo ciljev (**Slika 4**). Cilji pomagajo ustvariti pregledno strukturo naloge. Pravila ne zahtevajo, da so cilji zbrani na drugi prosojnici. Ekipa se zato lahko odloči, da cilje preplete s statistično analizo.

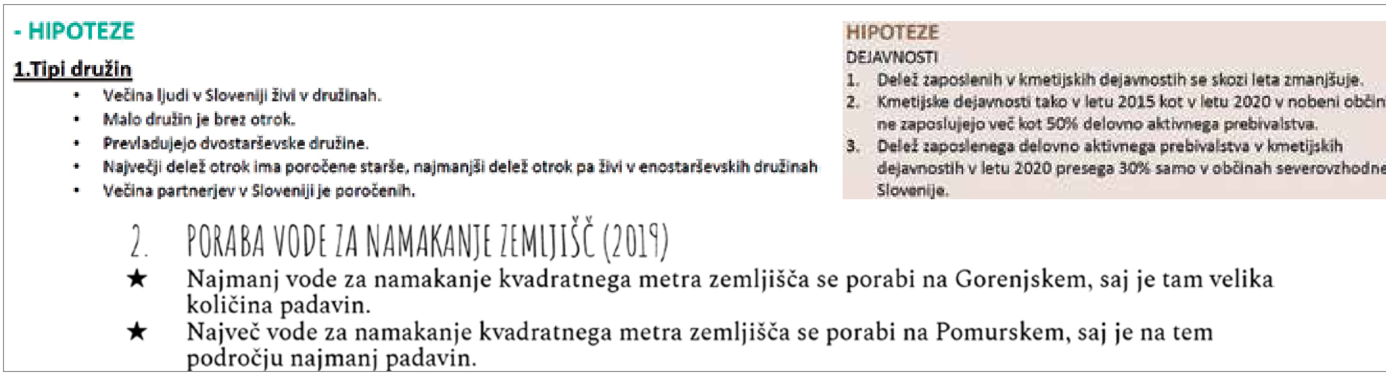
Slika 3: Uvodna prosojnica ekipe Statisti1 (zgoraj) poleg obveznih sestavin vsebuje še osrednje raziskovalno vprašanje, tri slike pa kažejo okoljske vidike, ki jih v nadaljevanju obravnava ekipa. Pri uvodni prosojnici ekipe Lnmstorm (spodaj, ime in logotip šole sta zakrita) je nesrečna izbira pisave močno otežila branje. Vir: zgoraj Statisti1 (2021), spodaj Lnmstorm (2020).

Zaželjeno je, da si ekipe zastavijo **glavni (primarni) cilj**, ki določa zgodbo raziskovalne naloge, nato pa navedejo še **sekundarne cilje**, s katerimi postopoma dosežejo glavni cilj. Pri številu ciljev naj ekipe upoštevajo, da imajo na voljo 8 prosojnic. Količina analiz, ki jih lahko prikažejo, je zato omejena. Tudi sekundarni cilji so lahko dovolj splošni, da so zapisani kratko in jedrnato. Čeprav je cilj zapisan splošno, so lahko z njim povezane ugotovitve veliko bolj podrobne.

3.3 Statistični kazalniki

Ko so cilji določeni, lahko ekipe v podatkovnem nizu poiščejo ustrezne podatke in se lotijo analize. Večina podatkov je rezultat preštevanja (število prebivalcev, gospodinjstev …), zato po vrednostih med regijami običajno izstopa osrednjeslovenska (**Slika 5**), med občinami pa Ljubljana. Ker regije in občine niso enako velike, je pred primerjavo treba opraviti ustrezne preračune.

Statistični kazalnik je iz danih podatkov izvedena (izračunana) spremenljivka, ki omogoča primerjavo različnih geografskih enot. Če sta števili zaposlenih in brezposelnih oseb odvisni od velikosti občine ali regije, je stopnja brezposelnosti kazalnik, s



- HIPOTEZE

1.Tipi družin

- Večina ljudi v Sloveniji živi v družinah.
- Malo družin je brez otrok.
- Prevladujejo dvostarševske družine.
- Največji delež otrok ima poročene starše, najmanjši delež otrok pa živi v enostarševskih družinah
- Večina partnerjev v Sloveniji je poročenih.

HIPOTEZE

DEJAVNOSTI

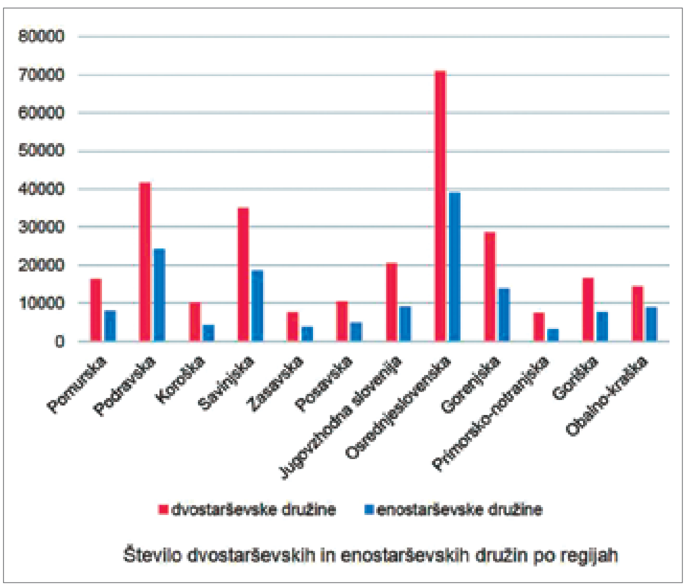
1. Delež zaposlenih v kmetijskih dejavnostih se skozi leta zmanjšuje.
2. Kmetijske dejavnosti tako v letu 2015 kot v letu 2020 v nobeni občini ne zaposlujejo več kot 50% delovno aktivnega prebivalstva.
3. Delež zaposlenega delovno aktivnega prebivalstva v kmetijskih dejavnostih v letu 2020 presega 30% samo v občinah severovzhodne Slovenije.

2. PORABA VODE ZA NAMAKANJE ZEMLJIŠČ (2019)

★ Najmanj vode za namakanje kvadratnega metra zemljišča se porabi na Gorenjskem, saj je tam velika količina padavin.

★ Največ vode za namakanje kvadratnega metra zemljišča se porabi na Pomurskem, saj je na tem področju najmanj padavin.

Slika 4: Primer presplošnih (zgoraj levo) in ustrezno argumentiranih (spodaj) hipotez. Hipoteze, ki navajajo le izbrana leta in konkretne vrednosti (zgoraj desno), dajejo vtis, da so bile pripravljene po analizi podatkov. Vir: zgoraj levo 20in20 (2020), zgoraj desno Kapljice (2022), spodaj Plan_xy (2021).



Slika 5: Neinformativen prikaz absolutnih vrednosti. V osrednjeslovenski regiji živi približno četrtina prebivalcev Slovenije, zato so tam vrednosti demografskih spremenljivk običajno najvišje. Vir: Teglzarože (2020).

Slika 6: Število vodovodnih ali kanalizacijskih priključkov na 100 gospodinjstev sta statistična kazalnika. Zapisana ugotovitev nas preseneti. Ekipa je spregledala, da v večstanovanjskih stavbah več gospodinjstev uporablja isti priključek na javni vodovod oziroma kanalizacijsko omrežje. Vir: Kamni (2021).

katerim je mogoče primerjati občine ali regije med seboj. Pri izbiri kazalnikov si ekipe lahko pomagajo s pregledovanjem spletnih strani SURS. Če uporabijo standardni kazalnik, lahko izračunane vrednosti primerjajo s tistimi, ki jih objavi SURS, in preverijo ustreznost izračunov[2] (**Slika 6**). Pri izbiri kazalnikov je ekipa lahko zelo izvirna, paziti mora le, da so vsi izračuni dobro dokumentirani (**Slika 7**).

3.4 Metode dela

Uporabljene metode dela morajo biti skladne z ravnjo izobrazbe ekipe. Torej lahko ekipe uporabijo vse znanje opisne statistike iz srednješolskih učbenikov. Dovoljeni so kakršnikoli preračuni ali tabelacije. Če vrednosti statističnih kazalnikov ekipe prikažejo še grafično, nimajo nikakršnih omejitev pri uporabi klasičnih grafikonov ali modernejših infografik (**Slika 6** in **Slika 8**).

2 Možna so manjša odstopanja, če SURS v standardnem kazalniku uporabi podatek za dan, ki v podatkovnem nizu ni na voljo. Ekipe imajo na primer na voljo podatke o številu prebivalcev na začetku leta, SURS pa v standardnem kazalniku uporabi število prebivalcev na sredini leta.

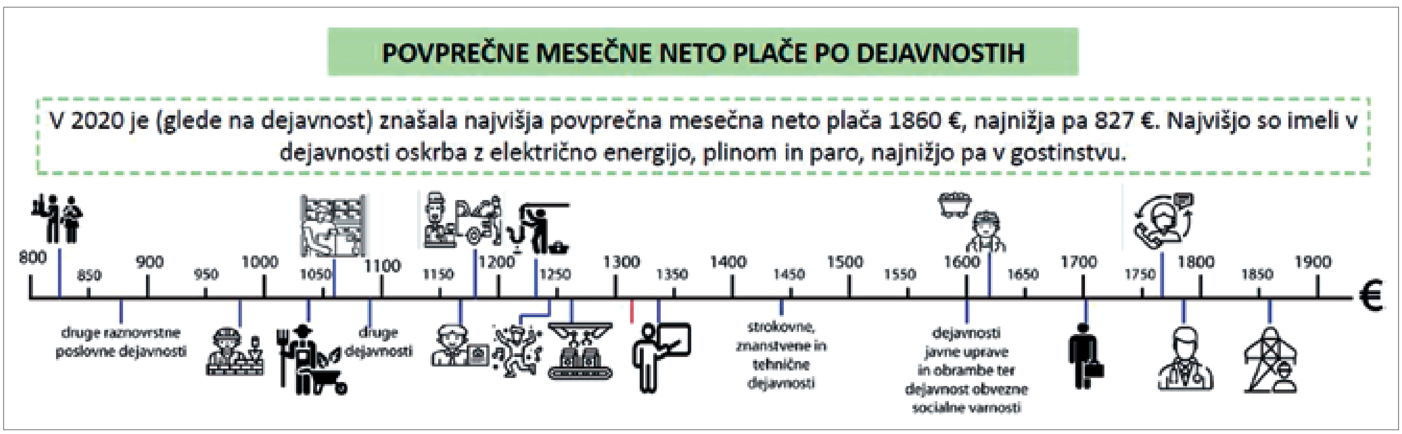
4. OKOLJSKI INDEKS

Okoljski indeks je kazalnik, izračunan na podlagi treh parametrov: količina odpadkov na prebivalca (O); količina porabljene vode na prebivalca (V); delež BDP, ki ga predstavljajo investicije za vlaganje v okolje (I).
Pri vsakem parametru smo regije razporedili v 10 rangov (razlaga rangov na prosojnici 10), kjer rang 1 pomeni najboljši rezultat. Okoljski indeks E izračunamo tako, da od 33 odštejemo vsoto vrednosti vseh treh parametrov za dano regijo. Po tej metodi je največje število točk indeksa 30, najmanjše pa 3. Regije z višjim rezultatom indeksa veljajo za okolju bolj prijazne.

Slika 7: Opis izračuna in interpretacija zapletenega statističnega kazalnika. Vir: Marreb (2021).

Največ otrok živi v osrednjeslovenski regiji (177426), najmanj pa v primorsko-notranjski (17247). Pearsonov koeficient korelacije kaže na to, da je število otrok močno povezano s številom vseh prebivalcev v regiji (p=0,99).

Slika 9: Pearsonov korelacijski koeficient, ki je izjemno blizu vrednosti 1, lahko nakazuje, da je preučevana zveza trivialna; v regijah z veliko prebivalci živi veliko otrok. Vir: Teglzarože (2020).

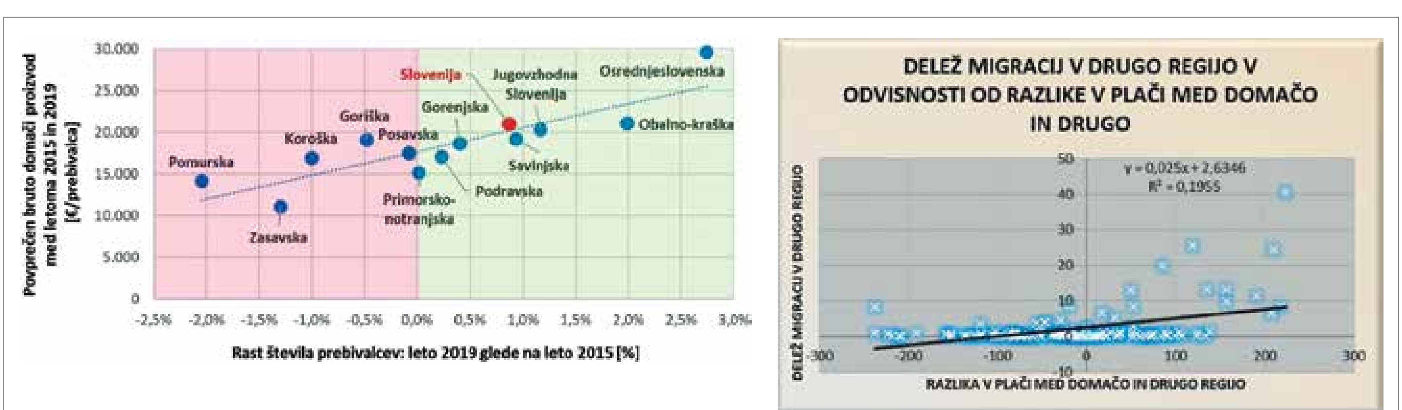


Slika 8: Infografika prikazuje povprečne mesečne neto plače po dejavnostih v Sloveniji 2020. Raziskovalna naloga je vsebovala tudi legendo uporabljenih grafik. Vir: Avengers (2022).

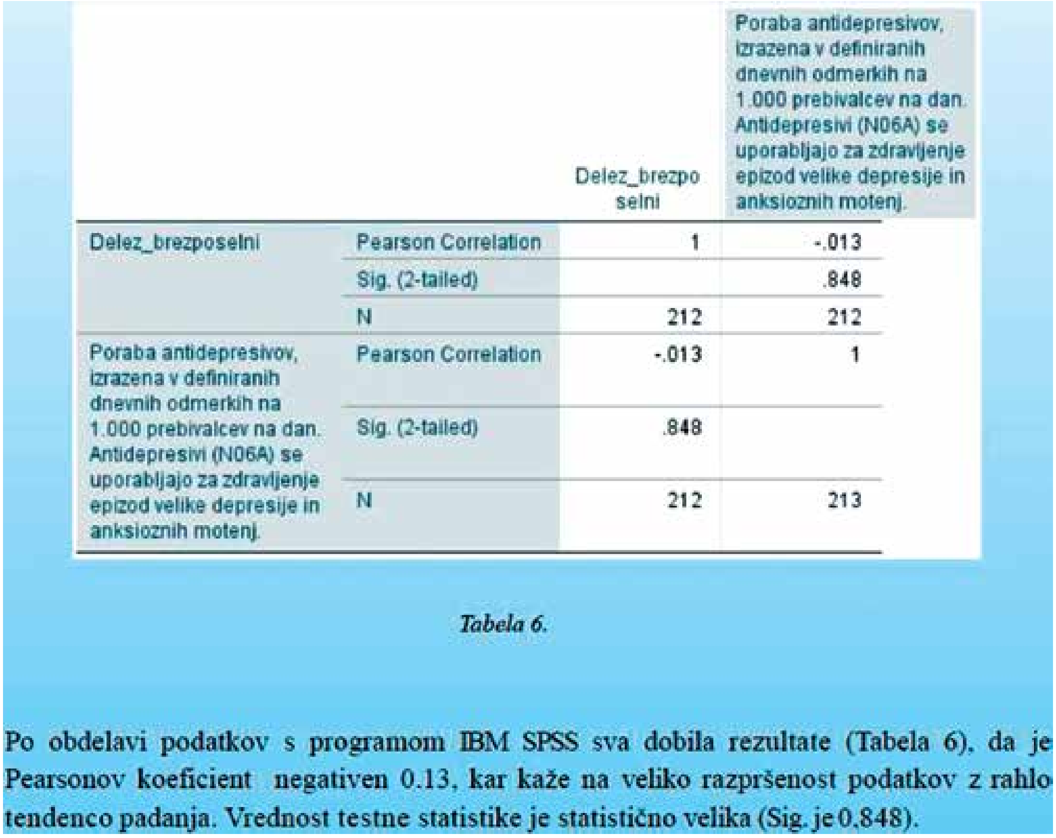
Težave lahko nastopijo pri bivariatni statistiki (povezanost dveh spremenljivk). Ekipe pogosto izračunajo in interpretirajo **korelacijski koeficient**, pri čemer se ne zavedajo, da je to zgolj mera linearne povezanosti. Povezanost med dvema spremenljivkama lahko učinkoviteje preučijo in opišejo z razsevnim grafikonom. Včasih razsevni grafikon razkrije, da je preučevana zveza nelinearna ali trivialna (**Slika 9**).

Večja težava je uporaba **linearne regresije**. Prileganje premice množici točk je vsebina, ki jo srednješolci poznajo iz fizike, kljub temu pa izračun in interpretacija determinacijskega koeficienta (R^2) običajno spadata med visokošolske statistične vsebine. Tam študenti spoznajo potrebne okoliščine, v katerih je uporaba regresije ustrezna (**Slika 10**). Uporabo metod, ki jih ekipe ne razumejo dovolj dobro, odsvetujemo.

Najbolj sporna je uporaba **sklepne statistike** (statistični testi), ki je v kontekstu tekmovanja nepotrebna. S sklepno statistiko raziskovalci ugotovitve, do katerih so prišli na vzorcu, posplošijo na celotno populacijo. Podatkovni niz pa ni vzorec, temveč vsebuje



Slika 10: Enostavna linearna regresija predpostavlja linearno povezanost spremenljivk (levo). Uporaba regresije pri deležih (desno) ni nujno smiselna. Prilegana premica zavzame tudi negativne vrednosti, ki pri deležu niso možne. Vir: zgoraj Gimvel (2020), spodaj Latte (2022).



		Delez_brezposelni	Poraba antidepresivov, izrazena v definiranih dnevnih odmerkih na 1.000 prebivalcev na dan. Antidepresivi (N06A) se uporabljajo za zdravljenje epizod velike depresije in anksioznih motenj.
Delez_brezposelni	Pearson Correlation	1	-.013
	Sig. (2-tailed)		.848
	N	212	212
Poraba antidepresivov, izrazena v definiranih dnevnih odmerkih na 1.000 prebivalcev na dan. Antidepresivi (N06A) se uporabljajo za zdravljenje epizod velike depresije in anksioznih motenj.	Pearson Correlation	-.013	1
	Sig. (2-tailed)	.848	
	N	212	213

Tabela 6.

Po obdelavi podatkov s programom IBM SPSS sva dobila rezultate (Tabela 6), da je Pearsonov koeficient negativen 0.13, kar kaže na veliko razpršenost podatkov z rahlo tendenco padanja. Vrednost testne statistike je statistično velika (Sig. je 0,848).

Slika 11: Uporaba statističnih programov lahko privede do izračunov, ki presegajo srednješolski okvir statistike. Posledično so možne napačne interpretacije. Vrednost *Sig. (2-tailed)* je narobe interpretirana. Vir: Statisti (2018).

podatke za prav vse enote populacije. Še huje je, če so rezultati sklepne statistike napačno interpretirani (**Slika 11**).

3.5 Izračuni

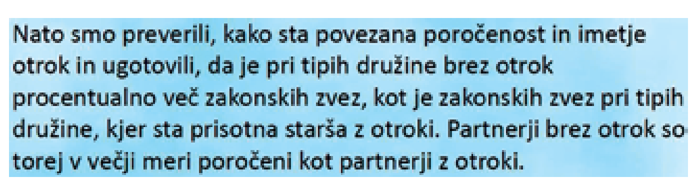
O matematičnih napakah v statističnih izračunih sem že pisal (Toman, 2022). Napake se nanašajo predvsem na računanje **povprečij** iz povprečij. Poglejmo si namišljen zgled, ki hkrati pojasni dve napaki. Preučevana regija naj ima le dve občini, v katerih je skupaj zaposlenih 5 oseb. **Tabela 1** prikazuje podatke o njihovih neto plačah v izbranem mesecu ter pripadajoča občinska povprečja.

Tabela 1: Podatki o plačah v izbranem mesecu v dveh namišljenih občinah.

Občina A		**Občina B**	
Oseba	Neto plača	Oseba	Neto plača
Andrej	1680 €	Bojan	1760 €
Ana	1920 €	Barbara	1848 €
		Branko	2464 €
Povprečje	*1800 €*	*Povprečje*	*2024 €*

Kako izračunamo povprečno mesečno neto plačo v regiji? Za pravo vrednost seštejemo plače vseh 5 zaposlenih in vsoto delimo s 5, torej $\mu = \frac{1680 + \cdots + 2464}{5} = 1934{,}40$ €. Ekipe tako podrobnih podatkov nimajo na voljo, zato velikokrat izračunajo povprečje objavljenih občinskih povprečij $\tilde{\mu} = \frac{1800 + 2024}{2} = 1912$ €, kar je narobe. Do pravilnega rezultata lahko pridejo, če objavljeni povprečji ustrezno **utežijo** sorazmerno s številom zaposlenih v posamezni občini $\mu = \frac{2 \cdot 1800 + 3 \cdot 2024}{2 + 3} = 1934{,}40$ €. Enaka zakonitost velja tudi pri združevanju deležev. V občini A delež žensk med zaposlenimi znaša 50 %, v občini B pa 33,3 %. S preštevanjem hitro ugotovimo, da je delež žensk med zaposlenimi v regiji enak $\pi = \frac{2}{5} = 40$ %. Če izračunamo le povprečje občinskih deležev $\tilde{\pi} = \frac{50 + 33{,}3}{2} = 41{,}7$ %, dobimo napačen rezultat. Do prave vrednosti lahko pridemo z uporabo uteženega povprečja $\pi = \frac{2 \cdot 50 + 3 \cdot 33{,}3}{2 + 3} = 40$ %. Zaradi pogostosti te napake so v zadnjih letih nekatera regionalna povprečja ali deleži na voljo v podatkovnem nizu in jih ekipam ni treba izračunati (ali pa za ustrezen izračun niti nimajo na voljo dovolj podatkov).

Izračunane vrednosti morajo ekipe tudi ustrezno interpretirati in zapisati ugotovitve. **Interpretacija** ni zgolj ubesedenje številk.



Nato smo preverili, kako sta povezana poročenost in imetje otrok in ugotovili, da je pri tipih družine brez otrok procentualno več zakonskih zvez, kot je zakonskih zvez pri tipih družine, kjer sta prisotna starša z otroki. Partnerji brez otrok so torej v večji meri poročeni kot partnerji z otroki.

Slika 12: Ekipa na zapleten način sporoča, kar enostavno povzame zadnja zapisana poved. Več ugotovitev ekipe je nakazovalo na težave pri razumevanju partnerjev brez otrok. V ta tip družine spadajo tudi pari, katerih otroci so se že osamosvojili. Vir: Yobama (2020).

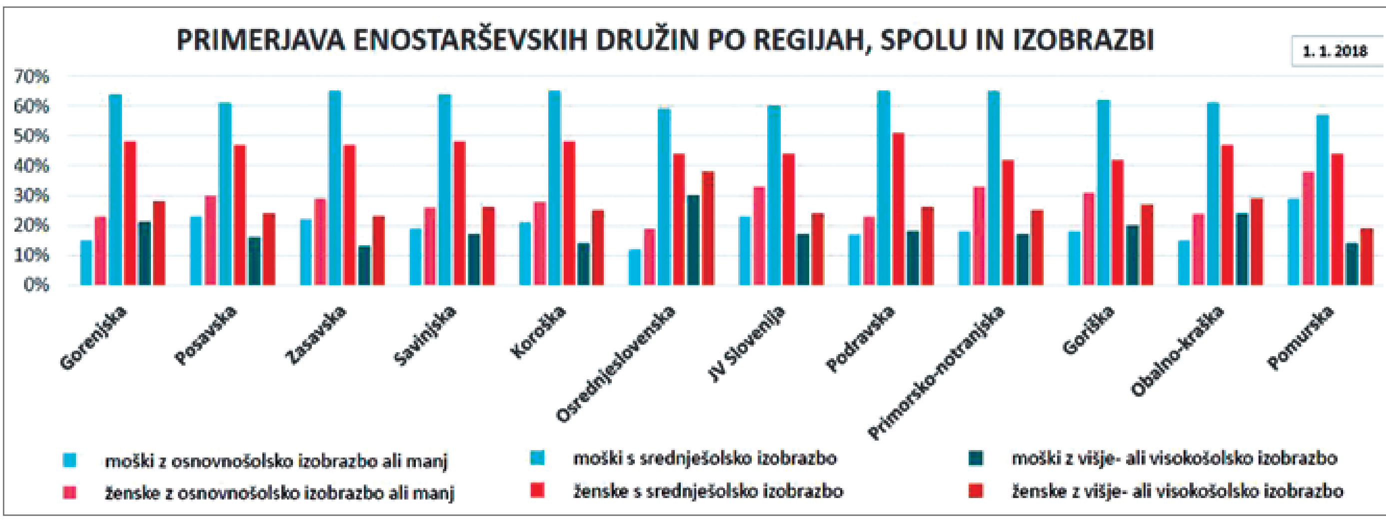
Čeprav so opisi spremenljivk pogosto dolgi in birokratski, morajo biti ugotovitve zapisane v obliki preprostih in pravilnih povedi (**Slika 12**). Izrazi, kot so *odpadna regija*, *obrobna občina* …, so lahko za prebivalce žaljivi. Tudi zapisom *najbolj izobražena regija* ali pa *največ odpadkov proizvede regija* se izogibamo. Izobražujejo se in odpadke proizvajajo ljudje v regijah in ne regije.

Zaključimo še s opozorilom pri opisovanju **sprememb**. Če količina odpadkov naraste z 10 ton na 11 ton, rečemo, da se je povišala za 10 %. Če stopnja brezposelnosti naraste z 10 % na 11 %, rečemo, da se je povišala za 1 odstotno točko.

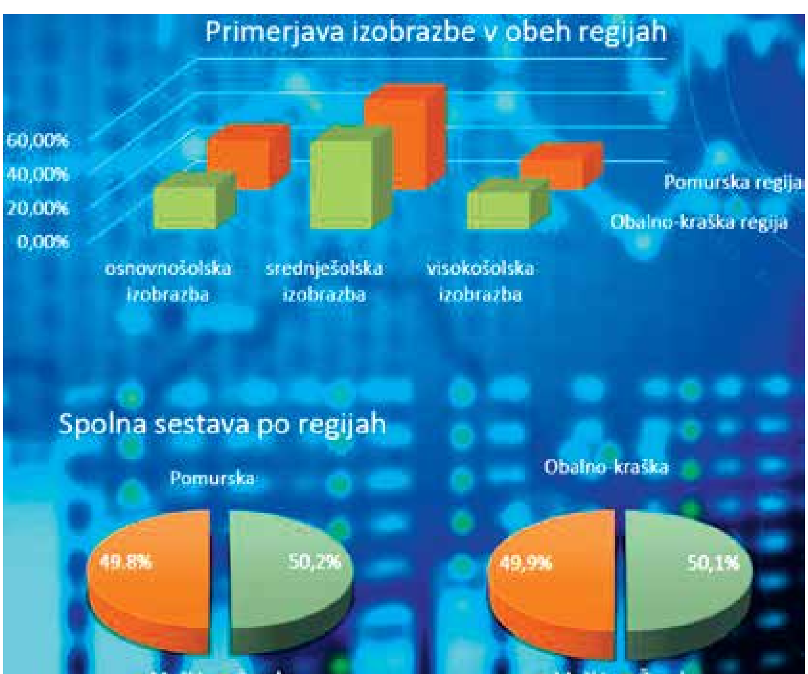
3.6 Grafični prikazi

Tudi o prikazovanju podatkov sem že pisal (Toman, 2022). Ekipe z grafikoni primerjajo regije (ali občine) ali pa prikažejo dinamiko pojava v času. Kadar prikazujejo vrednosti številske spremenljivke po regijah, najpogosteje izberejo **stolpčni ali vrstični grafikon**. Možna nerodnost pri takšnem grafikonu je izbira vrstnega reda regij. Abecedni vrstni red ali pa urejenost po kodah, ki jih uporablja SURS, običajno nista primerna (**Slika 5** in **Slika 17**). Ker želijo primerjati regije med seboj, je grafikon nazornejši, če so regije urejene po naraščajočem ali padajočem vrstnem redu prikazane spremenljivke. Odločitev o vrstnem redu je težja, če ekipa s stolpci prikazuje več spremenljivk hkrati (**Slika 13**). Urejenost naj bo tedaj taka, da čim bolj podpre trditve, ki so zapisane v ugotovitvah. Stolpčni grafikoni morajo biti dvorazsežni (**Slika 14**).

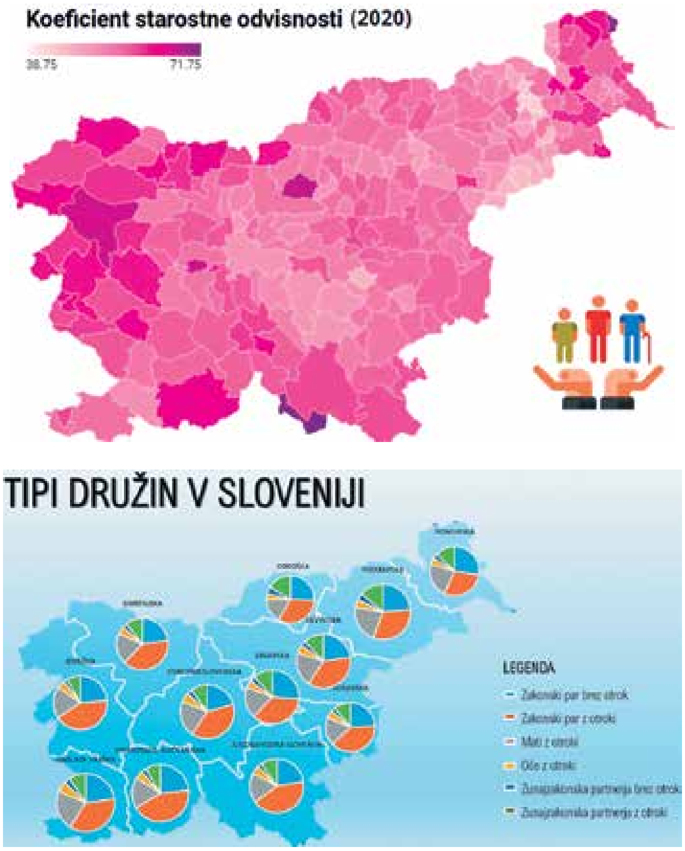
Pri prikazovanju prostorske razporeditve vrednosti spremenljivk ekipe pogosto uporabijo **tematske karte**. Pri tem je vsaka geografska enota na zemljevidu pobarvana v skladu s položajem



Slika 13: Kompleksen prikaz s stolpčnim grafikonom omogoča primerjavo enostarševskih družin po regijah (skupki stolpcev), spolu starša (barva) in izobrazbi starša (zasičenost barve). Izobrazba je urejenostna (ordinalna) spremenljivka – višja zasičenost barve ustreza višji stopnji izobrazbi. Spol je imenska (nominalna) spremenljivka – ker vrednosti nista urejeni, je uporabljena enaka zasičenost barve. Vir: Frekvenca9 (2020).

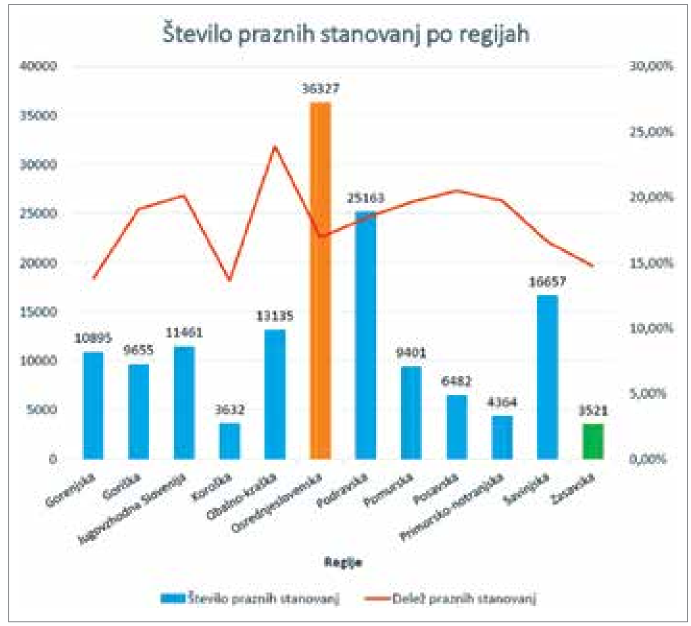


Slika 14: Stolpčni in tortna grafikona imajo odvečno tretjo dimenzijo. Pri stolpcih je zato težko določiti njihovo višino, tortna grafikona pa poudarita (a ne tu) tiste vrednosti, ki so prikazane v ospredju. Na sliki je moteče tudi ozadje, ki oteži branje in stilsko posnema grafične prikaze podatkov. Vir: Številopi (2018).

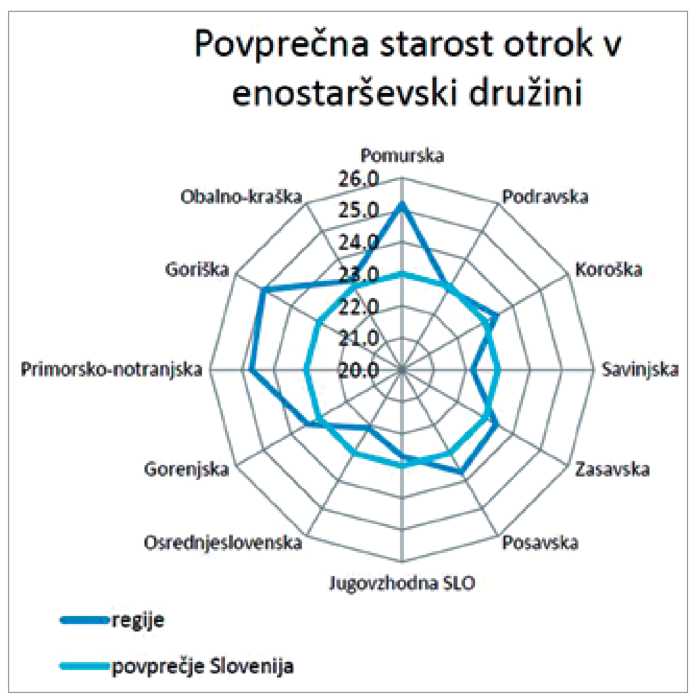


Slika 15: Primerjava geografskih enot s pomočjo tematske karte je zahtevnejša, kadar je geografskih enot veliko (zgoraj) ali pa je na isti karti prikazanih več spremenljivk (spodaj). Vir: zgoraj No1liga (2022), spodaj Amaterji (2020).

Slika 16: Dinamika pojava je lahko prikazana s stolpčnim ali črtnim grafikonom. Kombinacija obeh je koristna, kadar spremenljivki nimata podobnih vrednosti ali istih enot. Vir: Kalamari (2021).



Slika 17: Primerjava regij je lažja, če so urejene padajoče glede na prikazano spremenljivko. Ker med regijami ni logičnih povezav, uporaba črtnega grafikona ni primerna. Grafikon uporablja dve navpični osi, pri tem oznake na desni osi niso povsem usklajene z vodilnimi črtami. Vir: Ekotistiki (2019).

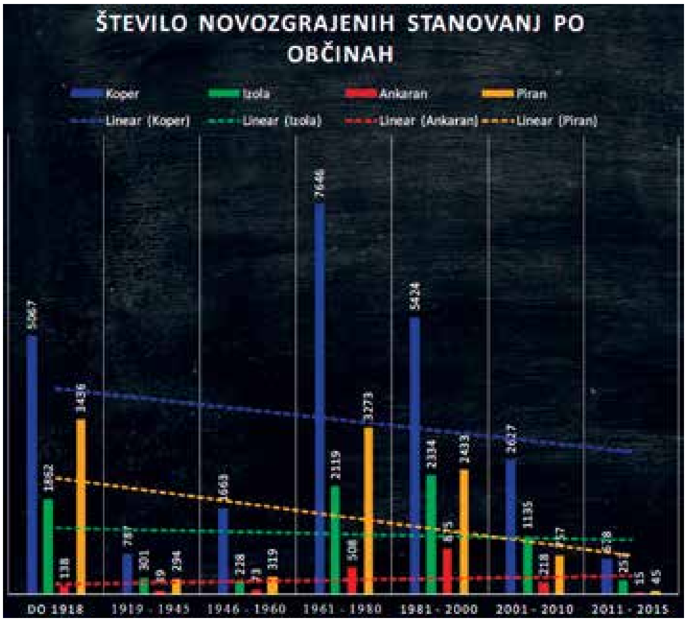


Slika 18: Polarni grafikon je poseben primer črtnega grafikona, pri katerem mora biti smiselna tudi povezava prve in zadnje vrednosti. Pri regijah to ne drži. Vir: Llama (2020).

njene vrednosti spremenljivke v barvni lestvici. Na eni karti je možno s kombinacijo barv in drugih elementov prikazati več spremenljivk, a je tak prikaz za bralca zahteven (**Slika 15**).

Kadar ekipe prikazujejo spreminjanje vrednosti ene ali več spremenljivk v času, najpogosteje izberejo črtni grafikon. Pri tem je pomembno, da so razmiki na vodoravni osi sorazmerni dolžinam časovnih intervalov (soroden primer je prikazan na **Slika 19**). Opomnimo, da lahko ekipe časovno dinamiko pojava prikazujejo tudi s stolpci (**Slika 16**), vrednosti po regijah pa nikoli s črtnim grafikonom, saj črte, ki povezujejo zaporedne regije, nimajo pomena (in **Slika 18**).

Za konec omenimo še razliko med stolpčnim grafikonom in histogramom. Na vodoravni osi stolpčnega grafikona so nanešene vrednosti (ali kategorije), ki niso povezane. Stolpci so zato ločeni s praznim prostorom. Na vodoravni osi **histograma** pa so enako široki razredi številske (numerične) spremenljivke. Višine stolpcev so frekvence razredov; te povedo število enot v posameznem razredu (**Slika 20** in **Slika 21**).



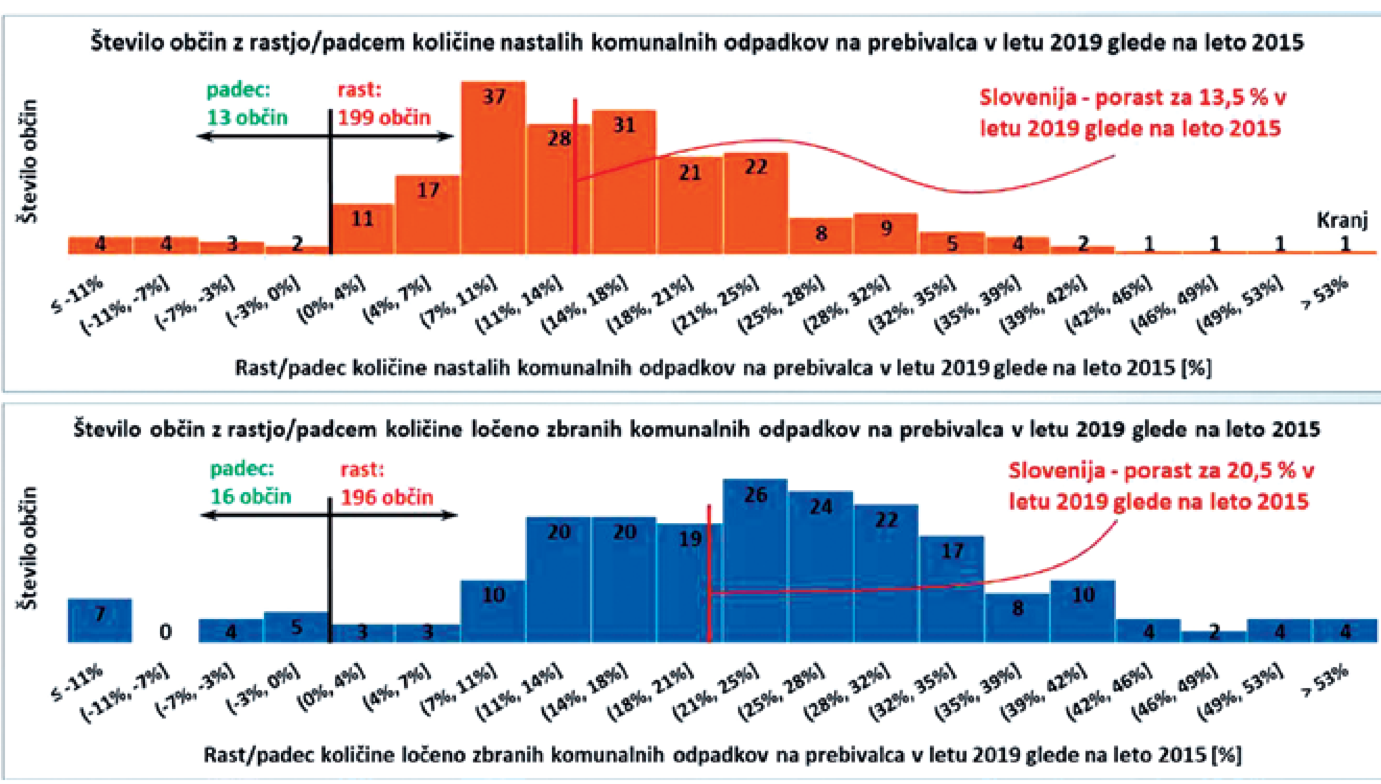
Slika 19: Pregled vodoravne osi razkrije, da časovna obdobja niso enako dolga. Višine stolpcev v različnih obdobjih zato niso primerljive, linearni trend je neustrezen. V prikazu najdemo še vsebinsko napako, saj grafikon v resnici prikazuje razvrstitev trenutnih stanovanj po letu izgradnje. Vir: Možganci (2019).

3.7 Ugotovitve in zaključki

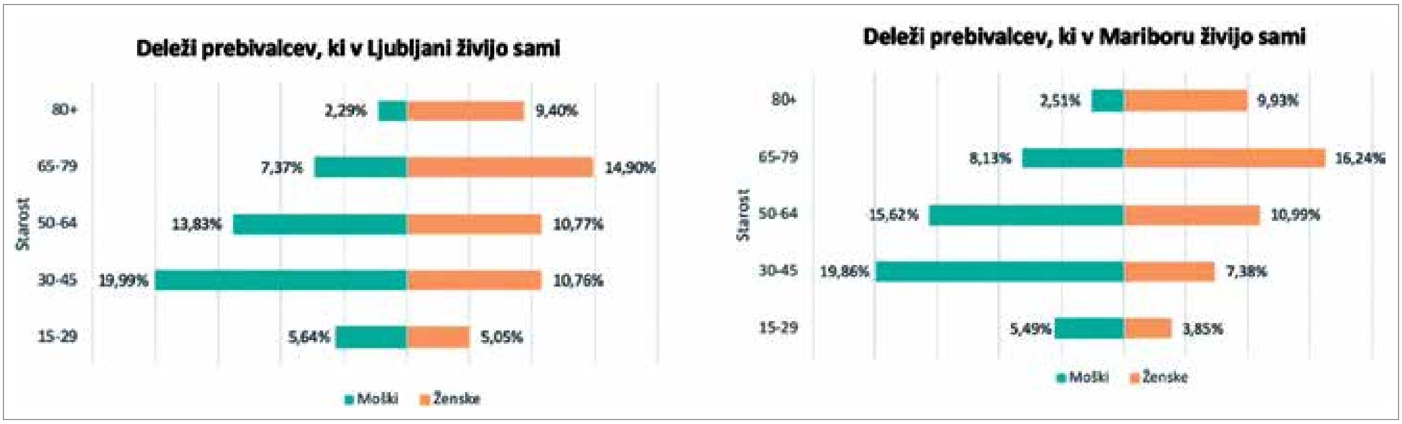
Podrobne ugotovitve je najbolje zapisati na prosojnici, na kateri je prikazana ustrezna analiza. Na zadnji vsebinski prosojnici lahko ekipe glavne ugotovitve povzamejo in jih interpretirajo v kontekstu zastavljenih ciljev. Če ekipa na začetku postavi hipoteze, je na koncu treba vsako hipotezo ovrednotiti. Kriteriji ocenjevanja spodbujajo razmislek o omejitvah podatkovnega niza. O tem razmišlja in poroča le malo ekip. Pri pregledovanju ugotovitev in zaključkov žirija ponovno pregleda celotno nalogo in preveri, ali so bili vsi zastavljeni cilji doseženi (vsak cilj mora imeti svoj zaključek) in ali je vsaka ugotovitev podprta z vmesnimi izračuni.

3.8 Prikazi izračunov

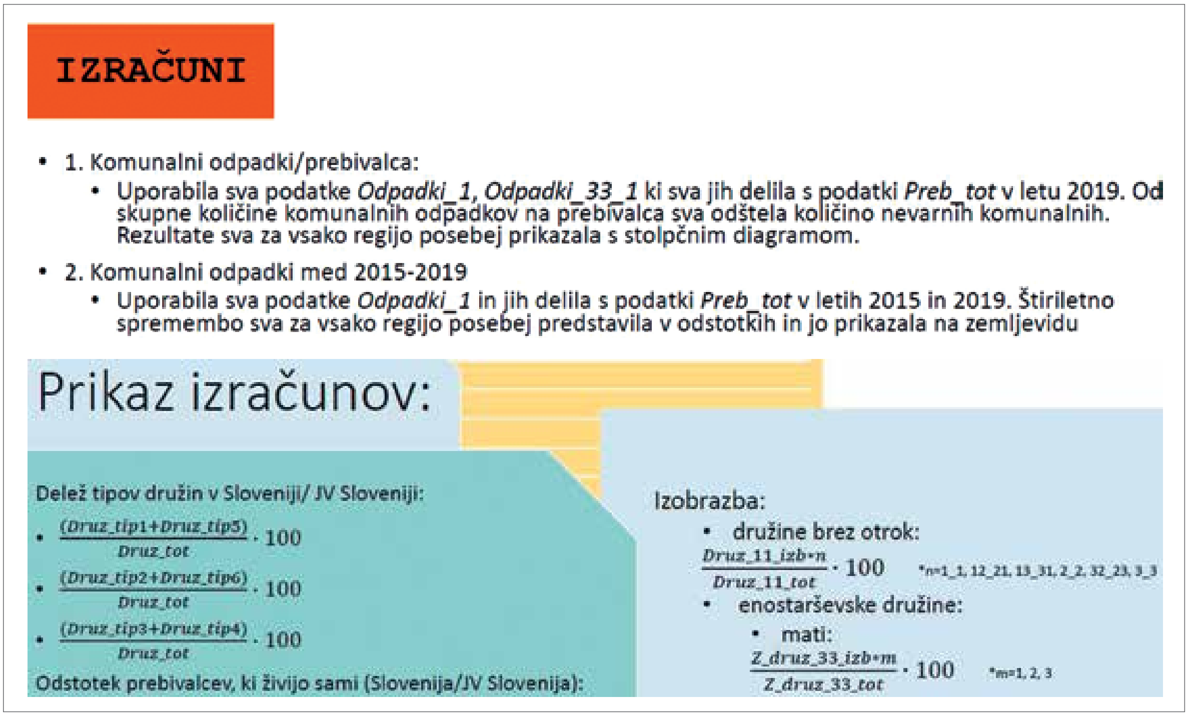
Raziskovalne naloge morajo biti **ponovljive**. Avtorji nalog morajo zato navesti dovolj informacij, da lahko bralci, ki razpolagajo s podatki, ponovijo vse izračune in preverijo vse trditve, ki so zapisane v nalogi. Da tehnične podrobnosti ne zameglijo vsebine analize, sta ekipam na voljo dodatni prosojnici za predstavitev izračunov. Natančnost in izčrpnost sta tu pomembnejši od estetike. Zaželjeno je, da ekipe v opisih uporabljajo imena spremenljivk, kot so na voljo v podatkovnem nizu (**Slika 22**).



Slika 20: Histogram prikazuje porazdelitev občin glede na odstotno spremembo količine odpadkov. Razredi so matematično označeni, vendar niso enako široki. V večini občin se izboljšuje odnos do okolja, ker pa se občine razlikujejo po številu prebivalcev, je preštevanje občin lahko zavajajoče. Vir: Gimvel (2021).



Slika 21: Prebivalstvena piramida je posplošitev histograma. Ker so starostni razredi stični, prostor med vrsticami ni potreben. Različno široki razredi so bili določeni v podatkovnem nizu, razred 30–49 je na sliki neustrezno označen. Vir: 20in20 (2020).



Slika 22: Opis izračunov v opisni (zgoraj) in matematični (spodaj) obliki. Oba opisa omogočata ponovitev opravljene analize. Vir: zgoraj Koale (2021), spodaj Lnmstorm (2020).

Zaključek

V šolskem letu 2021/22 so se uspešno zaključile 5. Evropske statistične igre. Kljub mladosti je tekmovanje popularno, znano in priznano v Sloveniji in Evropi in je uspešno premagalo vse ovire, ki jih je prinesla epidemija. Slovenske ekipe se skoraj vedno uvrstijo med najboljše v Evropi, kar utrjuje prepričanje, da smo na pravi poti, in nam daje neizmerno motivacijo za nadaljnje korake. Poleg tekmovalnih uspehov pa Evropske statistične igre prinašajo še spodbudo mladim in njihovim mentoricam in mentorjem k pridobivanju novih statističnih (in interdisciplinarnih) znanj in preučevanju naravnih in družbenih pojavov. Tekmovanje s tem vzgaja odgovorne in mednarodno vpete državljanke in državljane, ki znajo svoje odločitve in mnenja oblikovati in podpreti s pomočjo podatkov uradne statistike.

Več informacij o aktualni izvedbi iger je na voljo na naslovih https://www.stat.si/igre in statigre.surs@gov.si.

Viri in literatura

Rauter Repija, I. in Godec, M.; Karas, T., in Štampar, N. (2021). Evropske statistične igre. *Matematika v šoli 27*(2), str. 45–51.

Toman, A. (2022). Evropske statistične igre in spodbujanje statistične pismenosti pri matematiki. *Zbornik 1. mednarodne konference o poučevanju matematike, fizike in astronomije*, str. 72–78. Dostopno na https://www.dmfa.si/_CmsFiles/2022/08/zbornik-1-konferenca--dmfa-2022.pdf

Making Data Meaningful (2009). Part 2: A Guide to Presenting Statistics. United Nations Economic Commission for Europe. Dostopno na http://www.unece.org/fileadmin/DAM/stats/documents/writing/MDM_Part2_English.pdf

20in20 (2020). Ali se Slovenci odločamo za družinsko življenje? Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/10877/20IN20.pdf

Amaterji (2020). Izobrazba v slovenskih družinah. Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/10879

Avengers (2022). Trg dela, Slovenija 2020. Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11827

Deadsirius (2021). Voda. Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11341

Ekotistiki (2019). Analiza stanovanjske problematike v Sloveniji.

Frekvenca9 (2020). Slovenija, dežela ločitev in visoke izobrazbe? Dostopno na http://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/10883

Gimvel (2021). Ali je Slovenija res tako čista država? Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11346

Kalamari (2021). Odpadki v Sloveniji. Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11347

Kamni (2021). Uporaba in pridobivanje voda v letu 2018. Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11348

Kapljice (2022). Ali na zaposlitev v gospodarskih dejavnostih vplivajo migracije ter višina plače ali je ravno obratno? Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11834

Koale (2021). Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11349

Latte (2022). Ali je Slovencem pomembnejši čas ali denar? Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11837

Llama (2020). Družine v Sloveniji. Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/10886

Lnmstorm (2020). Družine v Jugovzhodni Sloveniji 2018. Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/10887

Marreb (2021). Primerjava statističnih regij glede na odnos do okolja. Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11350

Možganci (2019). Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/10382

No1liga (2022). Neenakost med delovno aktivnim prebivalstvom v Sloveniji. Kje v Sloveniji je najbolje delati? Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11840

Plan_xy (2021). Kako Slovenci ravnamo z vodo? Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11353

Statisti (2018). Analiza statističnih podatkov po občinah v Sloveniji za Evropske statistične igre

Statisti1 (2021). Slovenija = Ekološka? Dostopno na https://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/11356

Številopi (2018). Evropske statistične igre 2018.

Teglzarože (2020). Slovenske družine. Dostopno na http://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/10893

Yobama (2020). (Zunaj)zakonski partnerji, njihova izobrazba ter otroci. Dostopno na http://www.stat.si/StatWeb/File/DocSysFile/10896

S seminarja *Smiselno vključevanje sodobnih tehnologij za obdelavo podatkov*

V šolskem letu 2021/22 sta bili dve izvedbi seminarja **Poti za izboljšanje učnih dosežkov pri matematiki s smiselnim vključevanjem sodobnih tehnologij za obdelavo podatkov.** Seminar je potekal v dveh delih, v vmesnem času so udeleženci zapisali in v spletni učilnici seminarja oddali dejavnost za obdelavo podatkov, ki so jo že ali pa jo še bodo izvedli z učenci pri pouku. Objavljamo tri različne primere.

Analiza števila točk Luke Dončića

Gregor Spačal
Osnovna šola Miren

Razred: 9.	**Časovna opredelitev:** 1 šolska ura
Vsebina: Obdelava podatkov s pomočjo programa Excel	
Cilji: Učenec: • uredi podatke, • izbere in uporabi ustrezen prikaz, • zapiše aritmetično sredino, modus, mediano in medčetrtinski razmik, • predstavi podatke s škatlo z brki, • za obdelavo podatkov uporablja elektronske preglednice.	**Tehnični pogoji za izvedbo:** • delo v parih, • uporaba računalnika in programa Excel, • uporaba učbenika in zvezka, • povezava do vira podatkov (https://www.espn.co.uk/nba/player/gamelog/_/id/3945274/luka-doncic).
Dejavnosti učitelja: • navodila za delo, • spremljanje dela učencev, • nudenje pomoči učencem s težavami, • motiviranje, usmerjanje, sprotno podajanje povratne informacije.	**Dejavnosti učenca:** • delo v parih, • obdelava podatkov, • uporaba programa Excel, • interpretacija ugotovitev.

Luka Dončić je dosegel v sezoni 21/22 naslednje število točk (za lažjo preglednost je število točk razdeljeno po mesecih):

OKTOBER	18	27	26	25	16	23									
NOVEMBER	33	23	33	25	20	32	23	26	33	25					
DECEMBER	28	21	28	26	27										
JANUAR	14	21	26	22	21	27	23	20	41	28	37	25	15	30	34
FEBRUAR	40	33	18	33	51	45	21	49	8	23	34				
MAREC	25	41	35	31	30	26	37	17	37	15	24	32	34	35	
APRIL	36	32	26	39	26										

Podatke prenesi v program Excel in z uporabo programa reši:
1. Za enega od mesecev grafično prikaži doseženo število točk.
2. Za posamezen mesec izračunaj aritmetično sredino, modus, mediano.
3. S pomočjo programa nariši škatlo z brki za tisti mesec, kjer je to smiselno. Interpretiraj škatlo z brki.
4. Podatke analiziraj kot celoto – za celo sezono – in določi aritmetično sredino, modus in mediano ter nariši škatlo z brki. Interpretiraj rezultate.
5. *Poskusi izračunati povprečno število točk za posamezen mesec in ga primerjaj s povprečnim številom točk celotne sezone. Se razlikujeta? Poskusi pojasniti, zakaj.

Matematika v šoli, št. 2., letnik 28, 2022

Rezultati Tine Maze in merila za razpršenost podatkov

Mitja Vatovec
Osnovna šola Sostro

Razred: 9.	**Časovna opredelitev (število ur): 1**
Vsebina: Obdelava podatkov in verjetnost – srednje vrednosti, merila za razpršenost in verjetnost	
Cilji: Učenec: • uredi podatke, • določi modus, mediano in medčetrtinski razmik, • predstavi podatke s škatlo z brki, • določi verjetnost dogodka, • predstavi svoje ugotovitve.	
Tehnični pogoji za izvedbo: • delo v parih, • uporaba učbenika in zvezka, • povezava do videa (https://www.youtube.com/watch?v=5pfV7BAWMXE).	
Dejavnosti učitelja: • navodila za delo, • spremljanje dela učencev, • motiviranje, usmerjanje in vrednotenje.	**Dejavnosti učencev**: • samostojno delo v parih, • obdelava podatkov, • izdelava predstavitve, • predstavitev raziskave.

Še nekaj povratnih informacij na zapisani primer

Ana Canzutti

Odličen primer. Ob pregledu in vaši predstavitvi primera sem takoj videla, kako navdušeno bi učenci iskali podatke svojih najljubših športnikov in jih potem obdelali. Primer, da je škatla z brki dejansko brez brka, je res odličen za razpravo. Tako naša Tina ni poskrbela samo za izvrstno sezono, ampak tudi za odličen šolski primer :)

Tjaša Gašpar

Odlična motivacijska naloga, zelo me je pritegnila in verjetno bo tudi učence. Videoposnetek pa je še pika na i.
Čeprav je priprava mišljena brez uporabe Excela, vidim potencial, da nalogo uporabim tudi v računalniški učilnici.

Nataša Budna Stanta

Že sam naslov me je pritegnil k branju naloge. Zelo dobro zastavljana naloga, ki jo lahko nadgradimo z delom v računalniški učilnici.

V sezoni 2012/2013 je Tina Maze osvojila naslednje uvrstitve na tekmah za svetovni pokal:
1, 3, 1, 2, 4, 1, 2, 1, 4, 5, 1, 2, 3, 2, 5, 1, 4, 2, 3, 2, 3, 3, 1, 12, 1, 2, 1, 4, 10, 20, 3, 1, 4, 1

1. Določi modus, mediano in medčetrtinski razmik uvrstitev Tine Maze. Nariši tudi škatlo z brki. Podatke najprej uredi.

   ___, ___

   a) $Mo =$ ______

   b) $Me =$ ______

   c) medčetrtinski razmik

   ___, ___

   $Q_1 =$ ______ $Me = Q_2 =$ ______ $Q_3 =$ ______

   $Q_3 - Q_1 =$ ______ $-$ ______ $=$ ______

   d) škatla z brki

2. Na televiziji bodo prenašali posnetek ene izmed tekem te sezone. Določi verjetnost dogodka, da bodo predvajali tekmo, na kateri je:

   a) Tina zmagala.
   b) bila Tina 6.
   c) bila Tina na stopničkah.
   d) bila Tina uvrščena med prvo trideseterico.

   Nemogoč dogodek je dogodek ______, gotov dogodek je dogodek ______ ter slučajna dogodka sta dogodka _____ in ______.

Napovejmo vreme

Teja Škrjanec
Osnovna šola Davorina Jenka Cerklje na Gorenjskem

<table>
<tr><th>Razred: 8. r</th><th>Časovna opredelitev (število ur): 5 ur</th></tr>
<tr><td colspan="2">Vsebina: Napovejmo vreme (obdelava podatkov v 8. razredu)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cilji:
• Spoznajo osnove računalniških preglednic (Excel).
• Uporabljajo računalniške preglednice (Excel).
• Iz prikaza preberejo podatke in jih interpretirajo.
• Razvijajo kritičen odnos do interpretacije rezultatov.
• Izberejo primeren prikaz za predstavitev podatkov.
• Uporabijo osnovne štiri matematične in nekatere statistične operacije oziroma metode pri zbiranju, analiziranju in prikazovanju geografskih informacij (grafi/diagrami, tabela, klimogrami).
• Spoznajo vremensko hišico z merilnimi inštrumenti.
• Izdelajo klimogram kraja in napovejo vreme med poletnimi počitnicami.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tehnični pogoji za izvedbo: računalniška učilnica in podatki, zbrani iz vremenske hišice</td></tr>
<tr><td>Dejavnosti učitelja:
• pripravi navodila za delo,
• učence razdeli v pare,
• učencem razloži delo v Excelu,
• učencem pomaga z računalniškimi preglednicami.</td><td>Dejavnosti učenca:
• izdelajo empirično preiskavo,
• uporabljajo Excel,
• izdelajo klimogram kraja v Excelu,
• napovejo vreme med poletnimi počitnicami.</td></tr>
</table>

1 Empirična raziskava

Učence že v 6. razredu navajamo delo z empiričnimi preiskavami in obdelavo podatkov z računalniškimi preglednicami. Tako znajo učenci v programu Excel razširiti oziroma skrčiti stolpce in vrstice, vpisati podatke in besedila, narediti preglednico, izdelati ustrezen diagram oziroma grafikon in na njem popraviti oziroma dodati naslov diagrama, naslov osi, merske enote, legendo, spremeniti barvo stolpcev itn. Poleg naštetega je bistvena stvar, da se naučijo interpretirati diagram.

Slika 1: Vremenska hišica v Cerkljah.

1.1 Postavitev vprašanja

Tehniški dan smo začeli s ponovitvijo geografskega znanja o klimogramih in z matematično-računalniškimi veščinami uporabe Excela. V izvedbo tehniškega dneva je bila vključena tudi učiteljica geografije, ki nam je pomagala pri pravilnem razumevanju geografskih pojmov (podnebje, vreme …).

Za izdelavo klimograma potrebujemo podatke o temperaturi in količini padavin nekega kraja za obdobje 30 let, ki jih merijo inštrumenti v vremenski hišici (Slika 1), ki je v okolici šole. Podatki se zbirajo in hranijo na šolskem računalniku.

Učenci so delo nadaljevali v parih. Vsak par je imel nalogo, da izdela klimogram Cerkelj za določeno leto. Postaviti so si morali še vprašanja, na primer:

- V katerem mesecu je bilo največ in v katerem najmanj padavin?
- Kdaj je bila v Cerkljah najvišja temperatura?
- Kolikšna je bila razlika med najvišjo in najnižjo temperaturo?
- Kateri tip podnebja je značilen za Cerklje?

1.2 Načrtovanje preiskave

Učenci so naredili načrt, kako se bodo preiskave lotili. Načrt dela je pomemben, saj učencem pomaga narediti kronološko sosledje korakov preiskave, da se v paru organizirajo in porazdelijo delo ter da česa ne pozabijo.

Primer načrta:
- pridobitev podatkov o temperaturi in količini padavin za leto 2014,
- izračun povprečne temperature in mesečne količine padavin,
- izdelava tabele in vnos podatkov,
- izris klimograma,
- razlaga klimograma.

1.3 Zbiranje podatkov

Iz podatkov, ki se preko vremenske hišice zbirajo na šolskem računalniku, so učenci izluščili povprečne temperature za vsak dan v mesecu in dnevno količino padavin. Iz zbranih povprečnih dnevnih temperatur so učenci izračunali povprečno mesečno temperaturo. Pri tem so si pomagali z Excelovo funkcijo Average. Količino padavin so izračunali s seštevkom vseh padavin v določenem mesecu. Pri tem jim je pomagala funkcija Sum. Dobljene podatke o povprečni mesečni temperaturi in količini padavin so zapisali in uredili v preglednico (Slika 2) v Excelu.

Klimogram za leto 2014 (Cerklje)

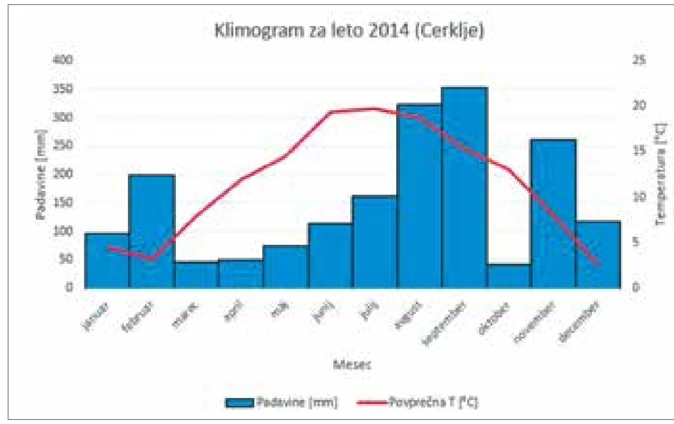
Mesec	Padavine [mm]	Povprečna T [°C]
januar	96,6	4,4
februar	198,2	3,2
marec	46,2	7,9
april	49	12
maj	75	14,5
junij	113	19,3
julij	162	19,7
avgust	323	18,7
september	352	15,4
oktober	41	13
november	260,5	8,1
december	117	2,6

Slika 2: Zbrani in urejeni podatki o količini padavin in povprečni mesečni temperaturi za leto 2014.

1.4 Analiziranje podatkov

Sledila je izdelava klimograma (Slika 3). Excel nudi vrsto različnih diagramov: stolpčni, črtni, tortni, palični, raztreseni, kombinirani itn. Slednji se uporablja za klimograme, saj nam omogoča izris treh različnih vrst podatkov (meseci, padavine, povprečne temperature), za kar potrebujemo tri osi.

Moder stolpčni del diagrama predstavlja količino zapadlih padavin v posameznem mesecu, rdeč črtni diagram ponazarja povprečno mesečno temperaturo, vodoravna os pa prikazuje mesece v letu. Učenci so klimogram opremili z glavnim naslovom in naslovi osi, ki ponazarjajo merske količine s pripadajočimi merskimi enotami, ter legendo, ki razlaga modro in rdeče obarvan del diagrama.



Slika 3: Klimogram Cerkelj za leto 2014.

1.5 Interpretacija rezultatov

Najzahtevnejši del preiskave je razlaga dobljenih rezultatov. Poglejmo interpretaciji dveh različnih parov za isti klimogram (Slika 3) za leto 2014:

Prva interpretacija rezultatov:
Klimogram prikazuje tem-perature in količino padavin za leto 2014 v Cerkljah. Prikazuje tipično celinsko podnebje, kar dokazuje krivulja. Najvišja temperatura je bila julija, in sicer 19,7 °C. Najnižja temperatura je bila decembra, in sicer 2,6 °C. Celoletne temperature so bile nizke (niso presegle 20 °C). Povprečna letna temperatura je bila 11,6 °C. Graf s temperaturami se na polovici leta preslika, stolpčni diagram s količino padavin pa ne. Temperatura je od februarja do julija naraščala, od julija do decembra pa se je zniževala. Največ padavin je padlo v septembru, in sicer 352 mm. Najmanj padavin je padlo v oktobru, in sicer 41 mm. Letno je padlo kar precej padavin (1833,5 mm). Spomladi je zapadlo precej malo padavin. Pozimi je padlo precej padavin (snega). Od marca do septembra je količina padavin stalno naraščala. Med zimskimi meseci je največ padavin zapadlo v februarju, najmanj pa v januarju. Med pomladnimi meseci je največ padavin zapadlo v maju, najmanj pa v marcu. Med poletnimi meseci je največ padavin zapadlo v avgustu, najmanj pa v juniju. Med jesenskimi meseci je največ padavin zapadlo v septembru, najmanj pa v oktobru. Med zimskimi meseci so bile najvišje temperature v januarju, najnižje pa v decembru. Med pomladnimi meseci so bile najvišje temperature v maju, najnižje pa v marcu. Med poletnimi meseci so bile najvišje temperature v juliju, najnižje pa v avgustu. Med jesenskimi meseci so bile najvišje temperature v septembru, najnižje pa v novembru.

Druga interpretacija rezultatov:
Najvišja temperatura v letu 2014 je bila v mesecu juliju. Najnižja temperatura je bila v mesecu decembru. Največ padavin je bilo v novembru, najmanj pa v oktobru. Poleti je bilo veliko padavin, spomladi pa zelo malo. Poletje ni bilo vroče, temperature niso presegle 20 °C.

1.6 Predstavitev preiskave

Tehniški dan smo sklenili s predstavitvijo klimogramov za posamezno leto. Učenci so izdelali skupno predstavitev s pomočjo spletne aplikacije Google Drive, ki se uporablja podobno kot Microsoftov PowerPoint, le da lahko učenci hkrati vnašajo in urejajo en dokument. Vsak par je dodal svoj klimogram ter ugotovitve in tako je nastal skupen dokument.

Na podlagi vseh klimogramov smo izdelali še skupni klimogram. Vremenska hišica je začela delovati leta 2006, tehniški dan pa je bil izveden leta 2016. Torej smo zbrali podatke za obdobje desetih let, zato klimogram ni bil popolnoma zanesljiv. Napovedali smo, da bodo poletne temperature nad 20 °C, količina padavin pa bo okoli 100 mm.

Po poletnih počitnicah smo z učenci analizirali napoved in ugotovili, da so bile povprečne poletne temperature krepko nad 20 °C, količina padavin pa se je gibala okoli 100 mm, le junija je padlo nekoliko več padavin. Naša vremenska napoved se je torej uresničila, da pa bomo resnično lahko izdelali objektivnejši klimogram, bomo morali zbirati in obdelovati podatke še naslednjih 20 let.

Povprečna dnevna temperatura

Na tehniškem dnevu smo razložili tudi pojem povprečna dnevna temperatura. Običajno so učenci navajeni, da je povprečje v vsakdanjem življenju enako matematičnemu pojmu aritmetična sredina. V tem primeru pa ugotovimo, da ni tako. Poiščemo definicijo povprečne dnevne temperature (https://meteo.arso.gov.si/met/sl/climate/current/last-12-months/description/), ki pravi:

Povprečna dnevna temperatura zraka je vsota četrtine izmerjene temperature ob 7. in 14. uri in polovice izmerjene vrednosti ob 21. uri po zimskem času.

$$\overline{T} = \frac{T_7 + T_{14} + 2T_{21}}{4}$$

Še nekaj povratnih informacij na zapisani primer

Z učiteljico geografije sva dogovorjeni, da v 7. razredu eno učno uro matematike namenimo izdelavi klimograma („ročno“), vaša dejavnost pa me spodbuja, da se učne ure lotim še v računalniški učilnici:).
Zanima me še, kdo je izdelal vremensko postajo.
Zanimivo in smiselno zasnovan tehniški dan.

Tjaša Gašpar

Super zadeva!
Všeč mi je medpredmetno povezovanje z geografijo. Učencem že tako težko utemeljimo uporabnost matematike v vsakdanjem življenju in pri drugih predmetih, tako pa lahko neposredno vidijo njen pomen, pa še zanimivo je, ker raziskujejo vreme za njihov domači kraj.

Gregor Spačal

Kakovostna zasnova in dobro gradivo za takojšnjo izpeljavo pri pouku.

Ana Zgonc Možina

Zanimiva in dobra ideja. Škoda, da mi v šoli ne zbiramo takih podatkov. Morda kdo ve, ali je možno na spletu pridobiti podatke za več let nazaj za kakšen kraj.

Mitja Vatovec

Izbrani primer je zanimiv in zelo uporaben z vidika ozaveščanja v zvezi z dvigovanjem povprečne temperature.

Ana Kodelja

Podatke za različne meteorološke postaje najdete na povezavi: https://meteo.arso.gov.si/ v zavihku: Vreme podrobneje (levo) in Arhiv (zgoraj).

Mnemonike in kaj ima nesrečna ljubezen opraviti z racionalno funkcijo

Natalija Zver
Gimnazija Litija, Gimnazija Ledina

Izvleček

Dijaki pri učenju matematike pogosto naletijo na težave s pomnjenjem. Bistvo tega prispevka je prikaz alternativnega načina poučevanja, z vključevanjem motivacijsko zanimivih asociacij – mnemonik, ki so lahko koristne za boljše pomnjenje in hitrejši priklic. Dijakom omogočajo ustvarjanje lastnih asociacij, zato lahko postane učenje matematičnih pojmov bolj zanimivo, kar vodi k boljši motivaciji. Ta asociacijska tehnika ni vedno učinkovita pri vseh dijakih. Menim, da učinkovitost ni odvisna od dijakovih sposobnosti, temveč od dijakovega in učiteljevega značaja. V prispevku je predstavljena nesrečna ljubezen kot asociacija pri razumevanju obnašanja grafa racionalne funkcije v okolici polov ter v odnosu z vodoravno in poševno asimptoto.

Ključne besede: matematika, asociacije, mnemonike, racionalna funkcija

On Mnemonics and Connection Between Unrequited Love and Rational Function

Abstract

When learning arithmetic, students frequently have trouble memorising the material. The purpose of this study is to present an alternate method of instruction that includes mnemonics or associations that are both motivationally compelling and quickly remembered. Learning mathematics can be more engaging and motivating if students have the freedom to build their associations. This strategy is not always successful. Effectiveness, it seems, depends less on aptitude and more on the student‘s and the teacher‘s personalities. The author introduces unrequited love as an association for understanding how a rational function‘s graph behaves at its poles and concerning its horizontal and oblique asymptotes.

Keywords: mathematics, associations, mnemonics, rational function.

Uvod

Že več let opažam, da se o uporabi mnemonik pri poučevanju gimnazijske matematike v slovenskem prostoru zelo redko piše. Pri dijakih, ki jih poučujem, sem v tem času zaznala, da je uporaba zapomnitvenih tehnik zelo učinkovita. Odločila sem se, da zapišem eno izmed svojih mnemonik, ki jo uporabljam pri pouku.

Mnemonike

Kot se za matematike spodobi, je prav, da zapišemo najprej definicijo mnemonike.

Mnemonika -e ž [gr. *mnemonike sc. techne* iz *mneme* spomin] je spretnost in nauk o urjenju spomina (s pravili, kako si zapomnimo čim več; sloni na zakonih o asociaciji idej); (vaja za) urjenje spomina.

Verjetno je eden izmed najbolj nazornih prikazov, kaj so mnemonike, naslednji primer: kadar nekdo vpraša, koliko dni ima npr. april, bo marsikdo pogledal na roko in začel naštevati mesece po vrsti, pri čemer se bo s prstom druge roke premikal po členkih. Če bo pristal na členku, bo vedel, da ima mesec 31 dni, v nasprotnem primeru, ko bo pristal med členkoma, pa 30 dni, z izjemo februarja, ki ima 28 oziroma 29 dni.

Slika 1: Uporaba mnemonike za število dni v mesecu.

Mnemonika, ki so jo včasih uporabljali, da so otrokom razložili, kdaj lahko sedijo na travi, da se ne bodo prehladili, pravi, da lahko sediš na travi tiste mesece, ki v imenu nimajo črke r.

Slika 2: Mnemonika, povezana s sedenjem na travi.

Seveda je takšnih mnemonik še veliko, saj so si tudi v preteklosti pri pomnjenju pomagali z različnimi zapomnitvenimi tehnikami. Tudi pri pouku jih srečamo, vendar jih nekateri žal velikokrat povezujejo z delom z manj sposobnimi dijaki, torej kot nekaj »manjvrednega« oziroma »ne dovolj strokovnega«. To ne drži, saj mnemonike uporabljajo pri učenju tudi zelo sposobni dijaki.

Matematiko poučujem že več kot dvajset let in spoznala sem, da mnemonike niso namenjene samo dijakom z učnimi težavami, ampak jih s pridom uporabljajo tudi nadarjeni dijaki, saj nekatere pojme tako hitreje prikličejo iz spomina. Od dijaka do dijaka se zapomnitvene tehnike lahko razlikujejo. Vsak lahko za isto matematično vsebino poišče svojo asociacijo, povezano s področjem, ki ga zanima ali ga dobro pozna, kot so šport, risani filmi ipd. na področju, kjer je v svojem okolju opazil matematične zakonitosti ali podobnosti; torej je matematiko opazil v okolju, odnosih, glasbi, literaturi … Asociacije so lahko vizualne, zvočne, besedne, številske, pri povezovanju pojmov si lahko pomagamo tudi z vrstnim redom začetnic pojmov v abecedi.

Zanimivo je brati o strategijah, ki jih pri pomnjenju decimalk števila pi uporabljajo ljudje, ki v recitiranju decimalk tekmujejo. Od združevanja po devet števk v nekakšne telefonske številke, do označevanja števk z različnimi barvami, pri čemer nastanejo barvni vzorci.

Vse to so mnemonike oziroma zapomnitvene tehnike, ki s pomočjo asociacij pomagajo pri lažjem pomnjenju. Mnemonike delujejo na principu povezovanja novih pojmov s pojmi, ki so že zasidrani v našem spominu, in na ta način se novih pojmov hitreje spomnimo.

Še vedno v različnih projektih sodelujem s svojimi, sedaj že zaposlenimi, bivšimi dijaki. Ob eni izmed takih priložnosti mi je nekdanja dijakinja zaupala, da me je svoji sodelavki predstavila kot profesorico, ki matematiko poučuje kot zgodbo. Najprej sem se nasmehnila, nakar sem premislila njene besede in se ji zahvalila za kompliment. Zelo dobro je namreč opisala moj nekoliko drugačen način poučevanja, s katerim poskušam razvijati ljubezen do matematike. Želim si, da bi pri reševanju nalog dijaki uživali ter spoznali, da je matematika orodje za reševanje življenjskih problemov. Matematiko poskušam predstaviti kot celovito, povezano zgodbo, pri čemer mi pomagajo mnemonike, ki poskrbijo za marsikatero sproščeno minuto pri pouku.

Verjamem, da si vsak, ki novo snov sprejema v okolju in na način, pri katerem se dobro počuti, veliko več zapomni, kot če je pri pouku napet, nesproščen in prestrašen. Mnemonike so namenjene pripenjanju novega znanja na snov, ki je že utrjena; smeh in sproščenost, ki jih sprožijo pa dijaku, pomagata pri dobrem počutju in lažjem pomnjenju.

Skrivnost sreče ni v tem,
da vedno delamo tisto,
kar imamo radi, temveč
da imamo radi to, kar delamo.
(Lev Nikolajevič Tolstoj)

Graf racionalne funkcije s kančkom romantike

Dva izmed ciljev, zapisanih v učnem načrtu pri racionalni funkciji, govorita o tem, da dijaki/dijakinje:

- poznajo in uporabljajo lastnosti racionalnih funkcij,
- narišejo in interpretirajo graf racionalne funkcije.

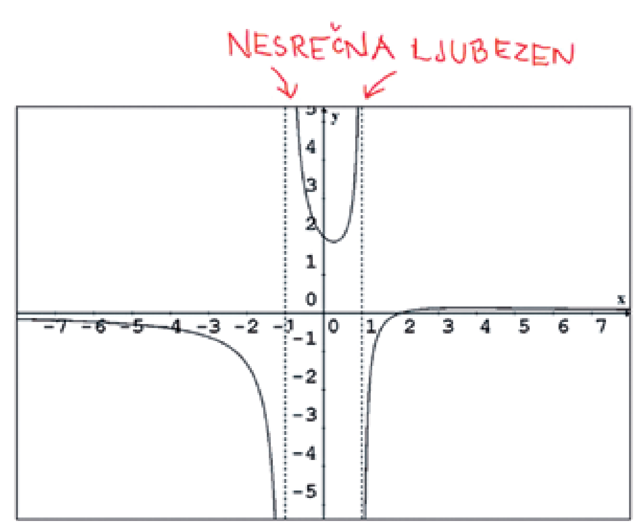
Da bi cilja uresničili, pred risanjem grafa racionalne funkcije določimo ničle, pole in navpične asimptote, začetno vrednost, enačbo vodoravne oziroma poševne asimptote, presečišče grafa funkcije z asimptoto, lahko določimo tudi predznak funkcije ter narišemo graf.

Matematiki poznamo različne šale. Če nas kdo vpraša, kaj je nesrečna ljubezen v matematiki, je odgovor na dlani: ko se ljubita dve vzporedni premici. Matematik bi dodal še: v evklidski geometriji.

To šalo uporabljam pri poučevanju racionalne funkcije. Uporabljam jo pri obnašanju grafa funkcije v okolici polov, torej kakšen je graf levo in desno od navpične asimptote, in pri risanju grafa funkcije v presečišču funkcije z vodoravno oziroma poševno asimptoto ter obnašanju funkcije daleč proč od koordinatnega izhodišča.

1 Graf racionalne funkcije in navpična asimptota

Graf funkcije ima v polu navpično asimptoto, ki se ji približuje z obeh strani, je ne seka, niti se je ne dotakne, saj funkcija v polu ni definirana. Graf funkcije je v polu »pretrgan«, kot bi ga s škarja-



Slika 3: Na primeru 1 je prikazana nesrečna ljubezen.

mi nekdo razrezal. Če vse skupaj primerjamo z ljubezenskim odnosom, je videti kot da asimptota graf funkcije privlači, vendar nikdar ne prideta skupaj.

Med navpično asimptoto in grafom funkcije je torej vedno nesrečna ljubezen.

Primer 1

$f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$.

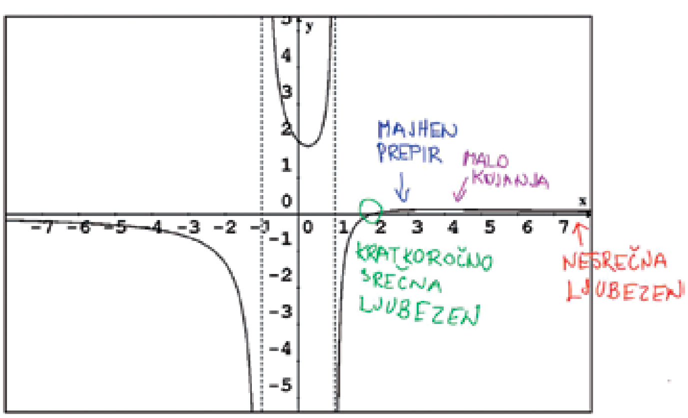
1. Ničle: $x = 2_{(1)}$
2. Poli: $x_1 = 1_{(1)}$, $x_2 = 1_{(1)}$
3. Začetna vrednost: $f(0) = 2$
4. Vodoravna asimptota: $y = 0$

2 Graf racionalne funkcije in vodoravna (poševna) asimptota

Zgodba v primeru vodoravne in poševne asimptote je nekoliko drugačna.

Vemo, da se graf funkcije in vodoravna (poševna) asimptota lahko sekata, ampak to se zgodi le pri nekem končnem *x*, v neskončnosti se graf vodoravni (poševni) asimptoti le približuje.

V presečišču funkcije z asimptoto zato rečem, da sta graf funkcije in asimptota »prišla skupaj« (kratkoročno srečna ljubezen), potem se spreta, se kratek ali daljši čas kujata, vendar v neskončnosti čutita ljubezen drug do drugega. Vodoravna (poševna) asimptota graf funkcije v neskončnosti privlači, vendar ne prideta več skupaj (dolgoročno gledano nesrečna ljubezen).



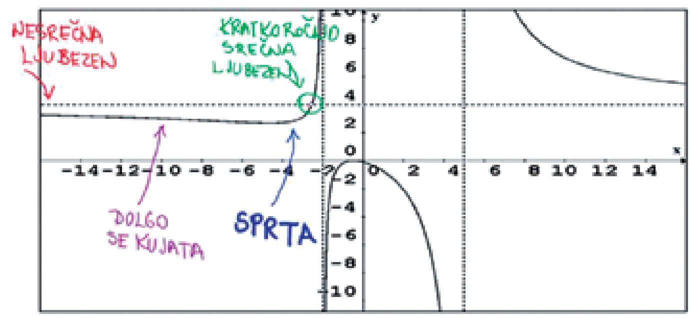
Slika 4: Na primeru 1 je prikazana kratkoročno srečna ljubezen in dolgoročno gledano nesrečna ljubezen.

Med vodoravno (poševno) asimptoto in grafom funkcije je lahko kratkoročno srečna ljubezen, dolgoročno gledano pa je vedno nesrečna ljubezen.

Primer 2

$f(x)=\dfrac{4x^2+4x+1}{x^2-3x-10}$

1. Ničle: $x=-\dfrac{1}{2}_{(2)}$
2. Poli: $x_1 = -2_{(1)}$, $x_2 = 5_{(1)}$
3. Začetna vrednost: $f(0)=-\dfrac{1}{10}$
4. Vodoravna asimptota: $y = 4$

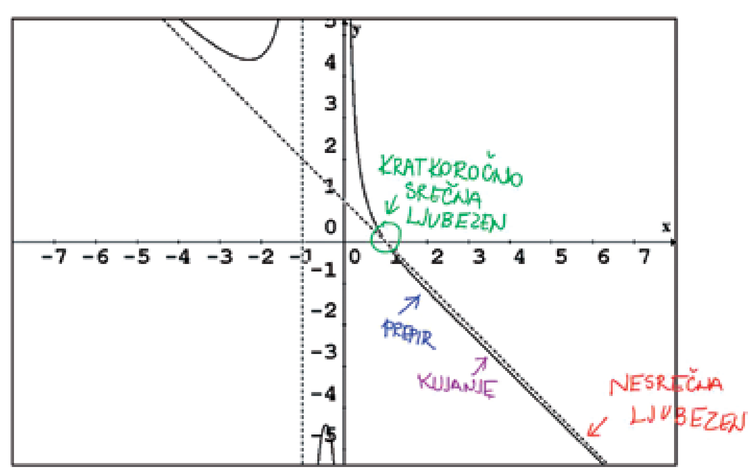


Slika 5: Na primeru 2 je prikazana kratkoročno srečna ljubezen in dolgoročno gledano nesrečna ljubezen.

Primer 3

$f(x)=\dfrac{1-x^3}{x^2+x}$

1. Ničle: $x = 1_{(1)}$
2. Poli: $x_1 = 0_{(1)}$, $x_2 = -1_{(1)}$
3. Začetna vrednost: ni začetne vrednosti
4. Poševna asimptota: $y = -x + 1$



Slika 6: Na primeru 3 je prikazana kratkoročno srečna ljubezen in dolgoročno gledano nesrečna ljubezen.

Zaključek

Menim, da učinkovitost mnemonik ni odvisna od dijakovih sposobnosti, temveč od dijakovega in učiteljevega značaja. Nekaterim dijakom so omenjene asociacije v veliko pomoč, saj s takim načinom razlage snov malo bolje razumejo. Zapomnijo si, da graf funkcije z navpično asimptoto nima skupne točke. Vsekakor pa je pouk matematike zaradi te mnemonike bolj zanimiv, saj dijake z asociacijo nekoliko razvedrim in jih tako hitreje motiviram za delo.

Viri

[1] Pavlič, G., Rugelj, M., Šparovec, J., Kavka, D. (2013). *Spatium novum: matematika za gimnazije*. Ljubljana: Modrijan.

[2] Verbinc, F. (1982). *Slovar tujk*. Ljubljana: Cankarjeva založba.

[3] Žakelj, A., idr. (2008). *Učni načrt Matematika Gimnazija*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. https://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2018/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf (6. 12. 2022).

Različni primeri dejavnosti pri pouku matematike

Jožica Okorn
Osnovna šola Vrhovci, Ljubljana

Izvleček

V prispevku predstavim moj pogled na poučevanje in nekaj primerov dejavnosti, ki jih naredijo učenci pri pouku. Pomembno se mi zdi, da učenci sami zbirajo podatke ter obdelujejo, predstavljajo realne podatke in rešitve. Pri tem poskušam razmišljati, kako vzporedno poučevati aritmetiko in geometrijo.

Ključne besede: obdelava podatkov, preiskovanje, verjetnost

Miscellaneous Mathematics Activities

Abstract

This paper outlines the author's perspective on teaching and provides several class activities. The article asserts that it is essential for students to gather, analyse and present factual data and solutions on their own. The author goes on to consider teaching arithmetic and geometry simultaneously.

Keywords: data collection, data processing, statistics.

Uvod

Ker poučujem matematiko, vam bom predstavila, kako se s postopnim doseganjem standardov znanja približujemo srednješolskemu nivoju obravnave podatkov – statistiki. Izhodišče je učni načrt. Predstavila vam bom standarde, ki nas usmerjajo k razvoju razumevanja podatkov, sistematičnega zbiranja, njihove analize in interpretacije. To dosežemo s tem, da učenci postopno osvajajo znanje aritmetike, algebre, geometrije. Vsa področja se prepletajo in dopolnjujejo. Vse tri veje matematike se povezujejo s cilji ostalih predmetov, ki se jih učenci učijo v šoli. Ta medpredmetna povezanost osmišlja naučeno. Lahko smo genialni na nekem področju, vendar če ne znamo teh sposobnosti prenesti na ostala področja življenja, imamo velik problem. V bistvu je jasno, da se pri tehniki, glasbi, likovni umetnosti, geografiji … učimo matematike in obratno.

Tudi naloge v Nacionalnem preverjanju znanja so mi zelo pri srcu. O smislu in pomenu Nacionalnega preverjanja znanja se vijejo razprave in krešejo mnenja. Vendar o nalogah samih ni dvoma, kakovostne so, lepo sestavljene, upoštevajo didaktična načela, njihova težavnost se stopnjuje na pravi način. Preverjajo široko paleto standardov znanja.

Tudi o primernosti in namenih učbenikov in delovnih zvezkov imamo različna mnenja. Sama se nagibam k uporabi manj obsežnih gradiv, da z učenci lahko naredim kakšno uporabno raziskavo, poskus, ki ga kasneje analiziramo, povezujemo znanja z več področij, se ukvarjamo s primerjavo izkušenj iz življenja … Zopet poudarjam, da so učna gradiva dobra, odlična, vendar marsikdaj preobsežno zastavljena. V praksi ponujenega ne moremo v celoti izkoristiti. Vsaj pri poučevanju matematike je tako.

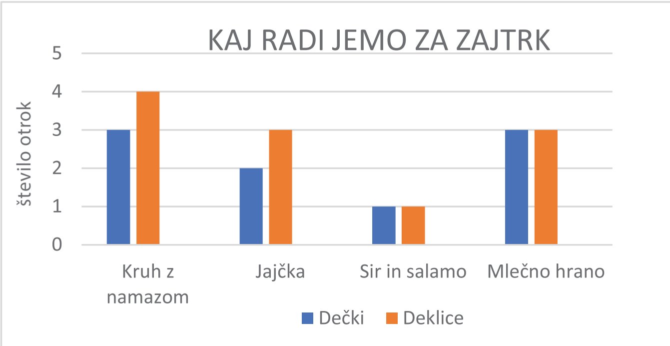
V drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju so zapisani naslednji standardi znanja, ki jih lahko povezujemo z obdelavo podatkov:

- zbere, uredi in prikaže podatke v preglednici in s prikazi ter analizira podatke in rezultate (preiskava),
- razišče kombinatorično situacijo in prikaže vse možne izide,
- pri reševanju (besedilnih) problemov uporablja različne bralne strategije ter kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih,
- reši matematične probleme in probleme iz vsakdanjega življenja.

Primer naloge

V razredu izvedemo hitro anketo. Učenci uživajo, če lahko povedo, kaj imajo radi. Radi prispevajo svoj delež k raziskavam. Radi so soudeleženi. Dobro je, da učenci rišejo prikaze različnih oblik in barv. Prikaze opremijo z legendo (Slika 1). Na podlagi ustvarjenega jim zastavimo različna vprašanja, od zelo preprostih do težjih.

V šestih razredih opažam, da učenci dobro berejo podatke z grafov in diagramov. Težje pa jim gre od rok risanje na podlagi izvedenih anket. S prostoročnim risanjem razvijajo občutek za



Slika 1: Primer diagrama v 6. razredu.

vzporednost, pravokotnost, za oblike in razporejanje podatkov. Nič hudega, če za nalogo porabimo več časa. Naša strpnost se obrestuje v naslednjih letih. S takimi nalogami vzgajamo natančnost, strpnost do sebe, voljo do dela.

Primera preiskovalnih nalog v 6. razredu

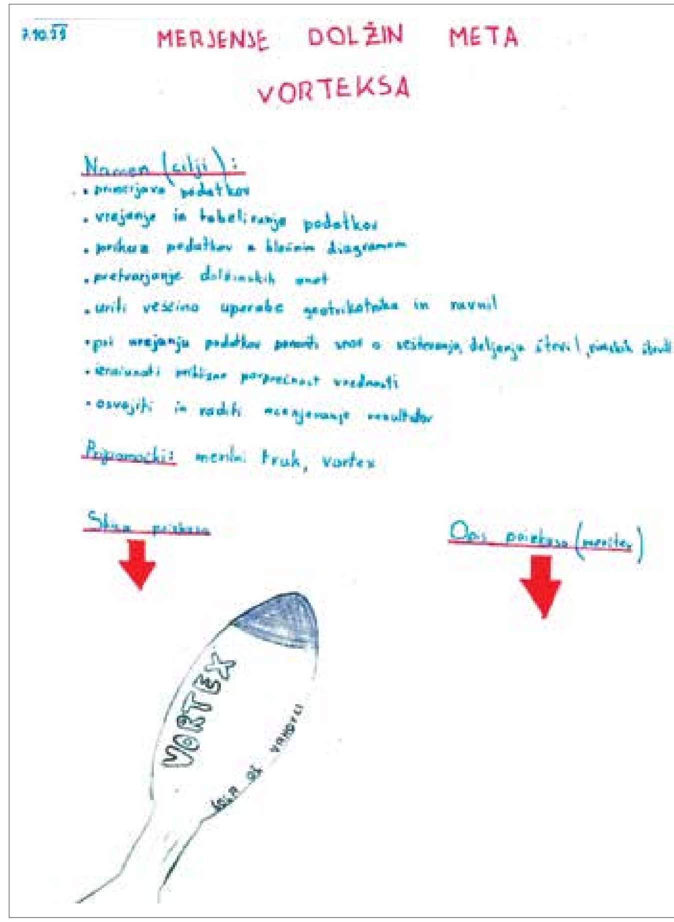
Met vorteksa

Pri pouku matematike sem se odločila, da bomo z učenci zadnjo uro v tednu namenili obravnavi in analizi konkretne meritve. Učitelj športne vzgoje je z dečki opravil meritve dolžin meta vorteksa. Fantje so metali vorteks z mesta in z zaletom. Z učenci smo skupaj v zvezek prostoročno zapisali uvod, sami so narisali tabelo za prepis podatkov. S to nalogo so utrjevali risanje vzporednic in pravokotnic, vadili natančnost pri prepisu podatkov, opazovali razlike v dolžinah metov, že analizirali, zakaj je tako. V uvodu so narisali sliko (Slika 2). S pomočjo učiteljic za slovenščino in angleščino so opisali nalogo. Prvič sem jim predstavila izračun povprečne vrednosti. Nato smo še načrtovali in analizirali prikaze (Slika 3 in 4).

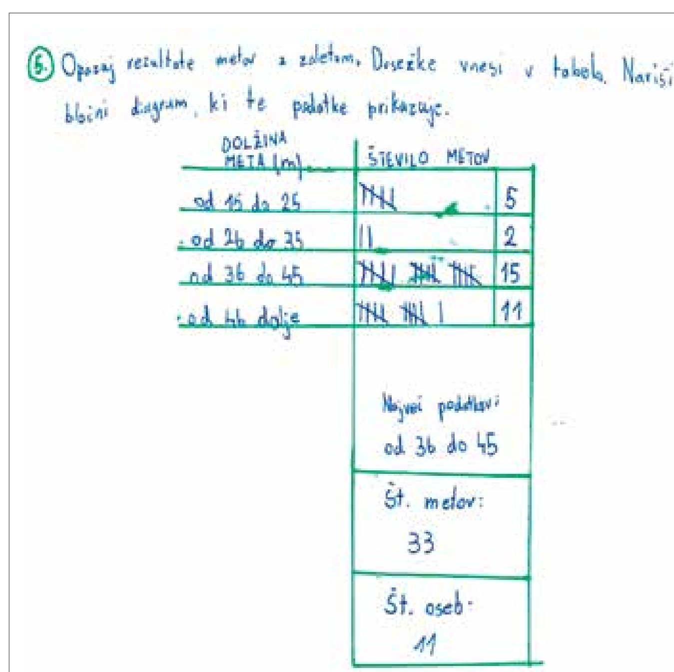
S tako nalogo zajamemo veliko ciljev, ki jih uresničujemo pri pouku matematike, na primer:

- sistematično zapišejo, štejejo in meritve ter jih smiselno vpišejo v preglednico,
- razporedijo izide meritev v smiselne skupine,
- opredelijo in utemeljijo kriterij urejanja podatkov,
- poznajo prednosti (linearno) urejenih podatkov pri delu s podatki,
- razporejajo podatke po enem ali dveh kriterijih (tudi številčnih),
- dane (zbrane) podatke smiselno uredijo v preglednico,
- iz prikaza preberejo podatke in jih interpretirajo,
- izberejo primeren prikaz za predstavitev podatkov,
- berejo odnose med podatki,
- rešijo problem, ki zahteva zbiranje in urejanje podatkov, njihovo predstavitev ter branje in interpretacijo,
- razvijajo kritičen odnos do interpretacije rezultatov.

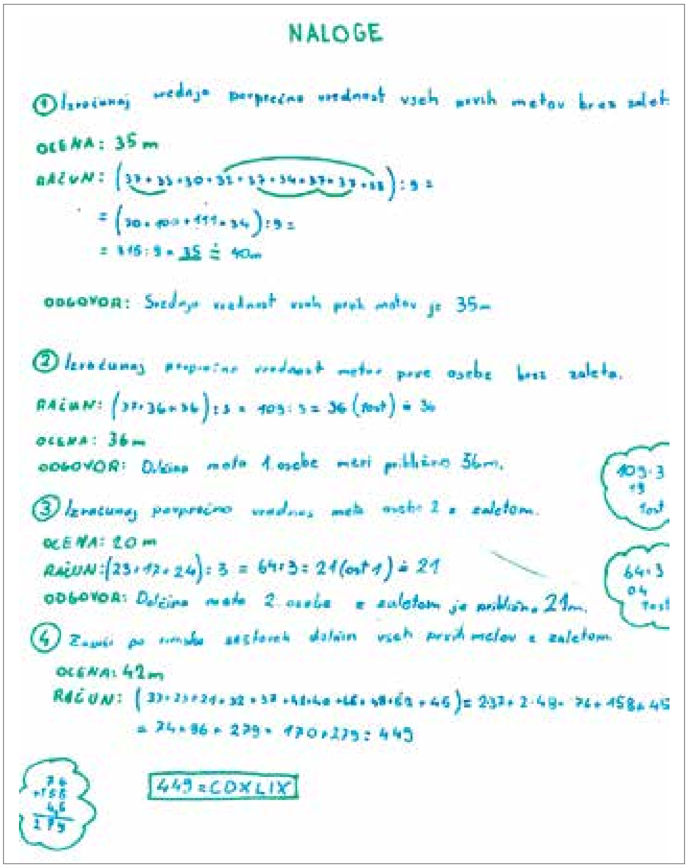
Medpredmetno povezovanje vzpodbuja razmišljanje, povezovanje podatkov, naučeno uporabljamo na več področjih. Razvijamo socialnost, različne talente. Pouk postane zanimiv. Vsi, učenci in jaz, se vsako tako uro čudimo, kako hitro nam je minil čas. Pripomba, ki jo je zadnjo uro izrekla učenka, da je matematika postala zabavna, me je razveselila. Suhoparnost in enoličnost smo preobrazili v razgibanost in zanimivost. Učitelji, ki sodelujemo, pomagamo drug drugemu. Vsi sodelujoči delamo za vse in imamo z enako količino vnesenega truda več rezultatov.



Slika 2: Met vorteksa. (Uršula Maček)

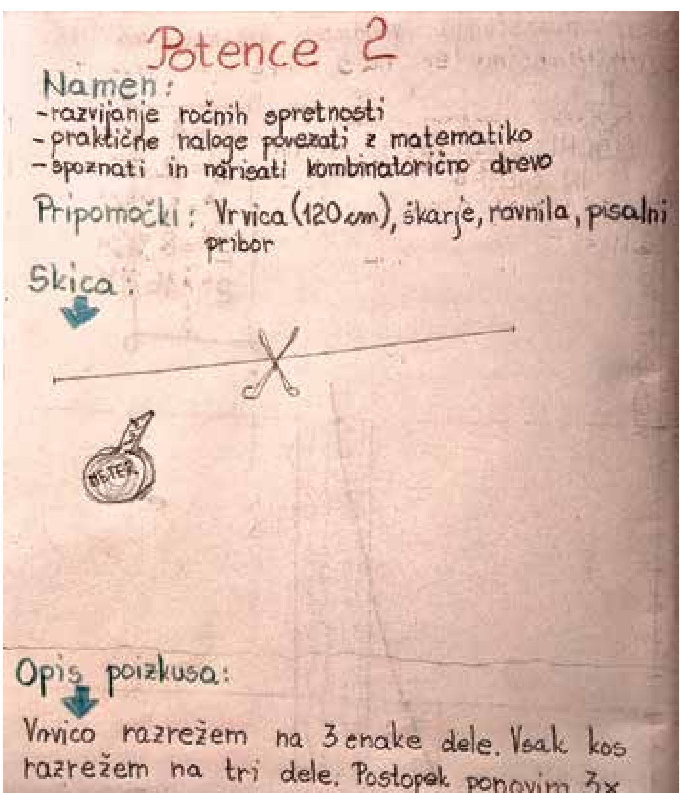


Slika 3: Izdelek učenca, 1. del.

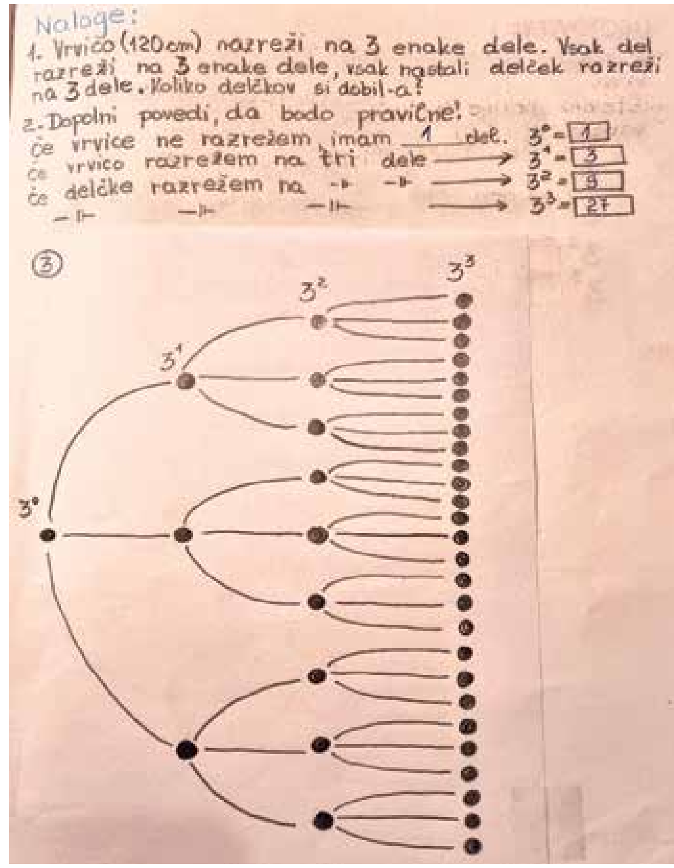


Slika 4: Izdelek učenca, 2. del.

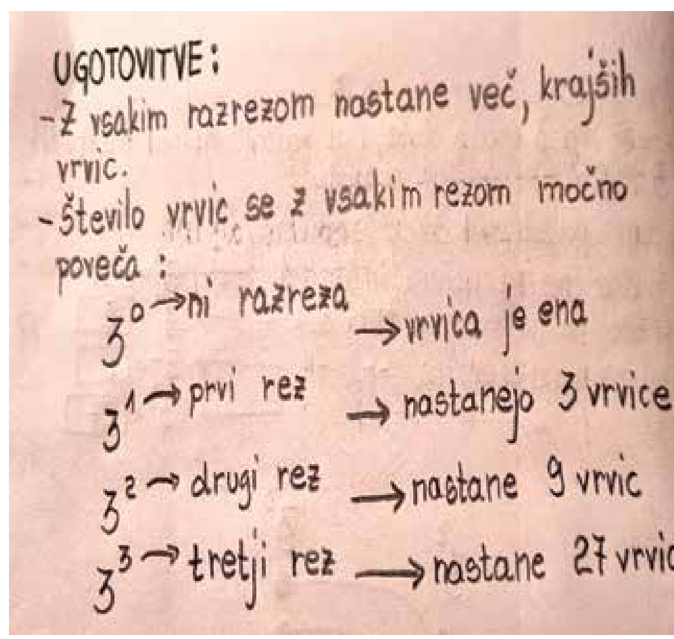
Učenje osnov potenciranja z eksperimentom in kombinatoričnim drevesom



Slika 5: Uvod v eksperiment.



Slika 6: Kombinatorično drevo



Slika 7: Zapis ugotovitev. (Jerneja Hribar)

V tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju so zapisani naslednji standardi znanja, ki so eksplicitno vezani na obdelavo podatkov:

- pozna in uporablja načine zbiranja, strukturiranja in predstavljanja podatkov,
- načrtuje in izvede statistično raziskavo, rezultate kritično analizira in jih predstavi na najustreznejši način,
- se kritično opredeli do interpretiranih podatkov,

- pozna in uporablja aritmetično sredino, modus in mediano,
- reši kombinatorični problem in prikaže rešitev,
- uporablja računalniške preglednice.

V **7. razredu** učenci računajo z aritmetično sredino, znajo narisati tudi krožne prikaze, v nalogah uporabijo znanje o odstotkih. Predhodnica teh znanj je geometrija, ki v sedmem razredu dobi nov, velik zamah.

V **8. razredu** je statistika vtkana v naloge čez celo leto. Pri poglavjih o funkcijah, odvisnostih in sorazmerjih, risanje grafov in interpretacija je na visokem nivoju. Velik preskok naredijo pri sklepanju zaporedij n-tih členov zaporedja. V **9. razredu** pa je statistiki namenjeno celo poglavje. Od aritmetične sredine se pomaknemo še k modusu, mediani, verjetnosti. Če bi imeli več časa, bi obravnavali kvartile, razpršenosti. Žal, zares žal, za to področje zmanjka časa. Pa tako zanimive raziskave bi lahko obravnavali!

Primeri nalog v 9. razredu kažejo velik preskok na intelektualni razvojni stopnji mladine v najstniških letih.

Izračun povprečne uspešnosti pri različnih matematičnih vsebinah

V zadnjih letih z učenci beležim njihovo lastno uspešnost pri tedenskih preverjanjih, izdelavi in predstavitvi domačih nalog. V tedenska preverjanja vključim tudi dodatno nalogo. Skrbim, da so zastopane naloge na različnih taksonomskih stopnjah. Še kakšna dejavnost se prikrade v delo in njihovo uspešnost beležimo z odstotki. Na ta način učence seznanim z obliko deležev v odstotkih že v 6. razredu, v želji, da pridobijo občutek, o čem odstotki govorijo. Ko imajo učenci šest takih zabeležk uspešnosti (v odstotkih), naredi vsak zase izračun na list papirja. Zgodi se, da imajo dejavnejši otroci več zabeležk uspešnosti. Za nagrado si lahko odvzamejo iz preračunavanja najslabši dosežek ali celo dva.

Iz zabeležk preračunajo povprečje uspešnosti. Skupaj z učenci se dogovorimo o načinu pridobivanja ocen.

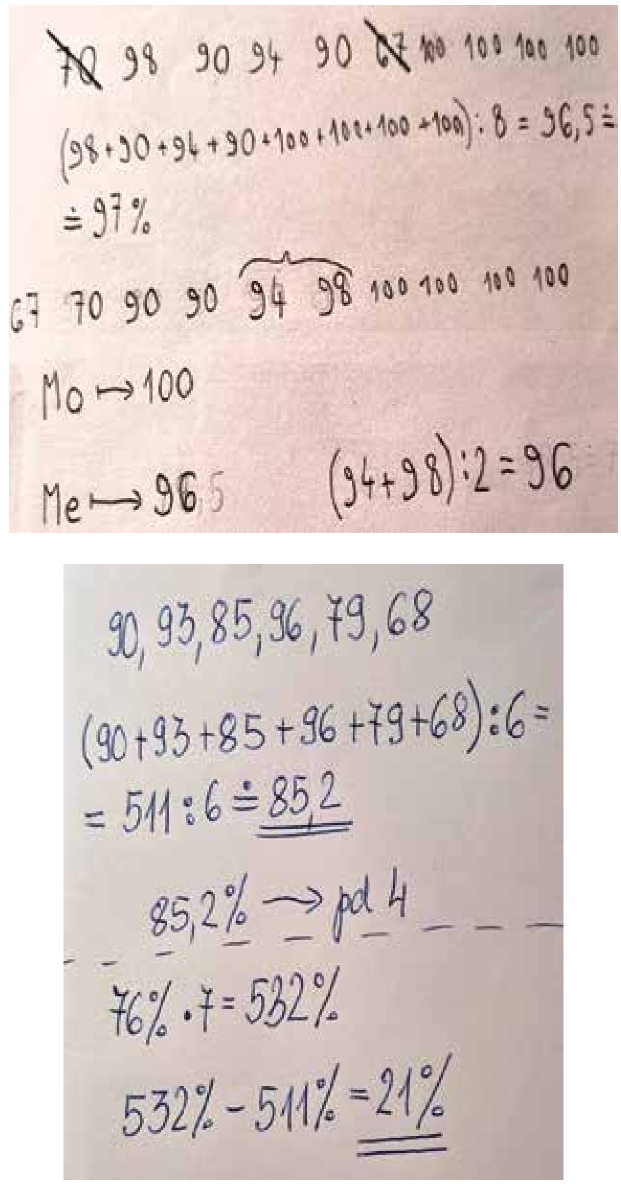
S tem osvojimo več ciljev: večina učencev je motivirana za sprotno delo, ko predstavljajo rezultate domače naloge, vadijo nastopanje v živo, učne ure so razgibane, učenci dobijo sprotne povratne informacije o znanju … Predvsem pa utrjujemo izračun aritmetičnih sredin.

Ob zaključku šolskega leta, pred zadnjim ocenjevanjem, si učenci izračunajo povprečje dosežkov. Nato izračunajo, koliko odstotkov morajo doseči v zadnjem ocenjevanju, da oceno ohranijo oz. da jo izboljšajo. Čeprav ocena ni izračun aritmetične sredine, jim na ta način približam praktično uporabo tega znanja v življenju.

Vsako leto se to preračunavanje prelevi v akcijo medsebojne pomoči. Boljši in sposobnejši učenci pomagajo šibkejšim. Cilj je dosežen in učenci vnaprej vedo, koliko dela morajo v zadnje ocenjevanje vložiti.

Naj zapišem še anekdoto iz lanskega leta. Učim posebno dekle, lani je obiskovala 7. razred. Je ljub, vendar izredno hiperaktiven otrok z motnjo pozornosti. Na začetku leta je bila nad učenjem navdušena. To se je poznalo tudi pri pridobivanju odličnih ocen. Na pomlad ji je motivacija padla. Z nivoja odličnih ocen je padla na dobro, potem pa, v zadnjem mesecu celo na nezadostno znanje. Ko je prišla k meni na zadnje ustno ocenjevanje, mi je rekla:

»Učiteljica, nič ne znam. Sem si pa preračunala, da če dobim 21 %, imam na koncu povprečje 76 %, to je pa dovolj za zaključeno 4.« No, zbrala je 26 % in zaključna ocena je bila 77 %, kar je prav dobro. Menim, da sva v tem poglavju življenja obe dosegli svoj uspeh.



Slika 8: Preračunavanje svoje povprečne uspešnosti.

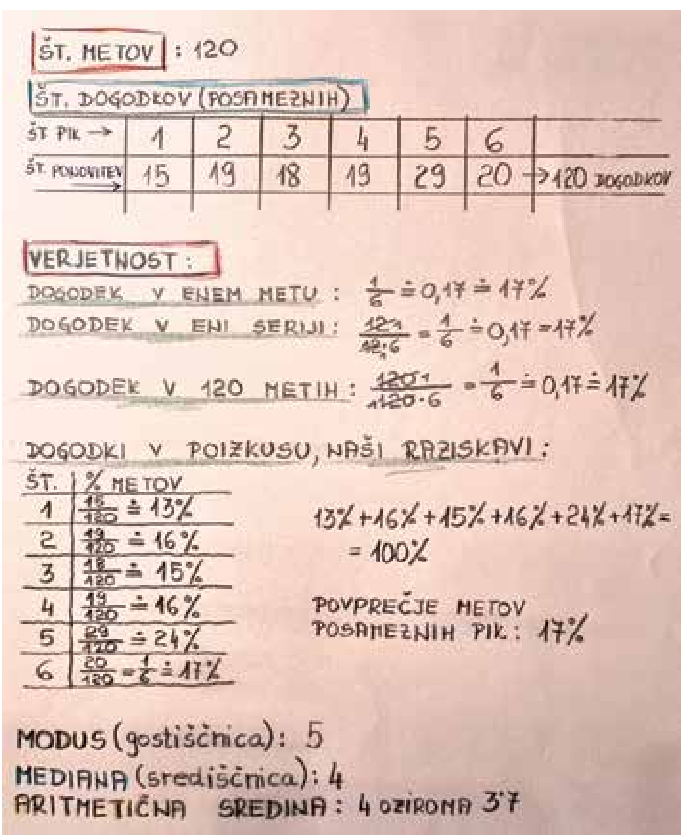
Primer preiskovalne naloge v 9. razredu

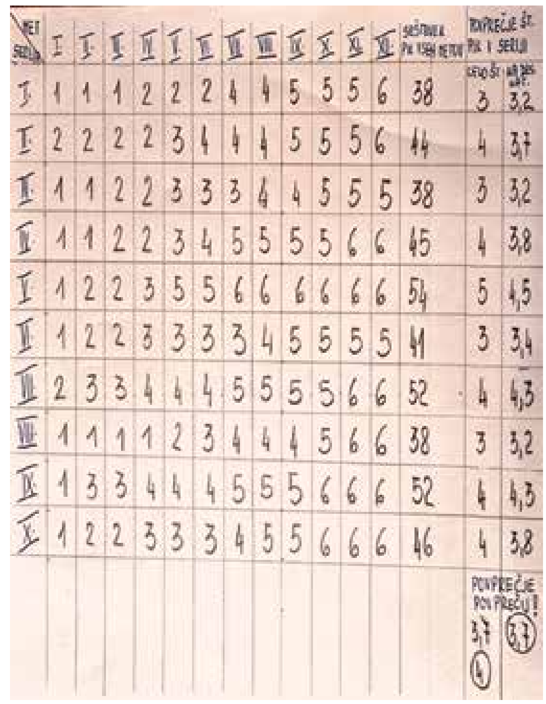
Učenci imajo v 9. razredu osvojenega veliko znanja. Zato se z njimi lahko lotimo tudi obširnejše obravnave dogodkov. Naloge lahko izvajamo v več zaporednih urah pouka ali pa na dnevu dejavnosti.

Za izdelavo naloge, ki jo predstavljam, potrebujemo do dvanajst igralnih kock. Kocke lahko meče posameznik ali pa več otrok, ki delujejo v skupini. Cilj je utrditi poznavanje izračuna verjetnosti metov, mediane, modusa. Izide lahko predstavimo z različnimi prikazi.

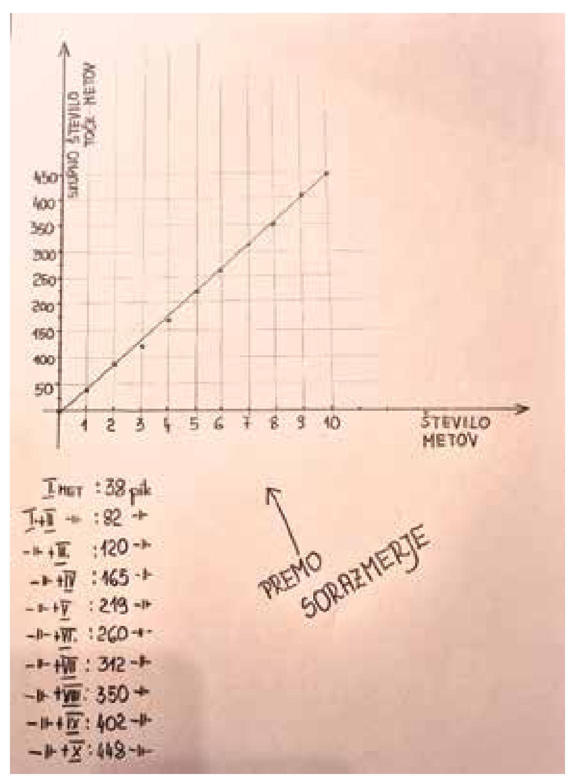
Izvedemo deset serij po dvanajst metov. Na ta način pridobimo veliko število podatkov. Z njihovo analizo se približamo izračunom verjetnosti rezultatov. V preglednico beležimo število pik, ki so na zgornji vidni ploskvi kocke. Možnosti za analizo imamo zares veliko.

V 9. razredu se osredotočamo na verjetnost in srednje vrednosti metov, v 8. razredu lahko navežemo rezultate na izdelavo grafov pri premem in obratnem sorazmerju.





MET / SERIJA	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	SEŠTEVEK PIK VSEH METOV	POVPREČJE ŠT. PIK V SERIJI	
I	1	1	1	2	2	2	4	4	5	5	5	6	38	3	3,2
II	2	2	2	2	3	4	4	4	5	5	5	6	44	4	3,7
III	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	38	3	3,2
IV	1	1	2	2	3	4	5	5	5	5	6	6	45	4	3,8
V	1	2	2	3	5	5	6	6	6	6	6	6	54	5	4,5
VI	1	2	2	3	3	3	3	4	5	5	5	5	41	3	3,4
VII	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	52	4	4,3
VIII	1	1	1	1	2	3	4	4	4	5	6	6	38	3	3,2
IX	1	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	52	4	4,3
X	1	2	2	3	3	3	4	5	5	6	6	6	46	4	3,8
														POVPREČJE POVPREČIJ! 3,7 (4)	3,7



Slika 9: Met kock, analiza podatkov, Jerneja Hribar.

Zaključek

V osnovni šoli so učni načrti pri posameznih predmetih postavljeni na podlagi dognanj o razvojnih, socialnih, umskih sposobnosti učenca. Za to so priporočila v učnih načrtih postavljena tako, da se učenec pri vseh predmetih razvija na vseh področjih, ki jih bo kot človek potreboval.

Žal učitelji velikokrat opažamo, da smo kot družba, učni sistem in vsi sistemi, ki naj bi učni proces podpirali, zašli. Pri prilagajanju podajanja vsebin učencem novih, sodobnih generacij, nas vodijo tudi strah, nezaupanje v stroko. Kot bi klonili pod pritiski družbe. Poplava učbenikov, delovnih zvezkov, digitalnih pripomočkov je za pouk dobrodošla. Slaba plat te medalje je, da delovni zvezki, učbeniki, družbena mnenja, krojijo pouk. Ne govorim, da je ponujeno slabo, vendar nas je ujelo v kalup nefleksibilnosti. Učni načrti jasno povedo, katera področja, katero vedenje je potrebno pri določenih letih osvojiti, da bo učenec lahko napredoval. Omogočajo nam tudi, da smo fleksibilni in da določeno snov obdelamo čez aktivnosti, ki jih učitelji, kot strokovnjaki, izberemo. Vendar, če se zapletemo v nakup preobsežnih gradiv, smo pod pritiskom pričakovanj staršev, da gradiva, ki so jih po naših priporočilih kupili, tudi uporabimo. Torej nimamo časa, da bi z otroki naredili kakšno preiskavo in jo z njimi analizirali, obdelali, »razsekljali«, jo sestavili na drugačen način, se spraševali, iskali odgovore … Temu je treba nameniti čas, ki si ga, če smo sužnji obsežnosti gradiv, ne moremo privoščiti! Meni osebno pa se zdi to dobro in dobrodošlo.

Učni načrti so ustrezni, vendar jih je treba prevetriti, nujno je treba pregledati, kako se med seboj dopolnjujejo pri posameznih predmetih. **Medpredmetno povezovanje** bo moralo biti ključnega pomena. Ponovno je treba osmisliti smisel učenja in poučevanja. Naj zaključim s citatom velikega človeka Nikole Tesla: »***Ko odraščamo, se naš razum krepi in postajamo še bolj sistematični in ustvarjalni. Vendar so ti prvi impulzi na prvi pogled neproduktivni, najpomembnejši trenutki, in lahko močno oblikujejo naše usode.***«

Viri

Žakelj, A. idr. (2011). *Učni načrt, program osnovna šola, Matematika*. Ljubljana: ZRSŠ. https://www.gov.si/assets/ministrstva/MIZS/Dokumenti/Osnovna-sola/Ucni-nacrti/obvezni/UN_matematika.pdf

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2022

Dr. Borut Jurčič Zlobec
Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je *čim* zgodnejše uvajanje mladih v znanost, popularizacija znanosti in tehnike, odkrivanje nadarjenih učencev in dijakov na posameznih področjih in njihovo spodbujanje k poglabljanju znanja in raziskovalne dejavnosti.

Na državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge z regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2022 je potekalo *že* 56. državno srečanje v Murski Soboti.

Organizator je dobil v pregled 11 osnovnošolskih in 4 srednješolske naloge. Med osnovnošolskimi nalogami smo izbrali 7 nalog za bronasto priznanje, ostale so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje. Med srednješolskimi nalogami je vsaka dobila ali zlato ali srebrno priznanje.

Naloge, ki so kandidirale za zlato oziroma srebrno priznanje, so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, izr. prof. dr. Marko Jakovac, doc. dr. Mateja Grašič, asist. Simon Brezovnik in Borut Jurčič Zlobec.

Komisija je izbrala 2 osnovnošolski in 2 srednješolski nalogi za zlato priznanje, ostale pa so dobile srebrno priznanje. Naloge, ki so dobile zlato priznanje, je komisija razdelila v dve skupini. V prvi skupini so bile naloge, za katere je komisija določila, da so najboljše v svoji kategoriji.

Objavo rezultatov je narekoval predvsem namen, da izpostavimo delo učencev in mentorjev, in pri*čaku*jemo, da bodo drugi sledili njihovemu zgledu.

Pojdimo k nalogam. Teme nalog, ki so bile predstavljene pred državno komisijo, so bile geometrija (6 nalog),teorija iger (4 naloge), analiza (3 naloge) ter ena naloga iz statistike in ena iz kombinatorike.

Anketnih nalog letos ni bilo. Naj kljub temu ponovimo, da so anketne naloge privlačne, ker ustrezajo napotkom organizatorjev, da je treba v raziskovalni nalogi narediti nekaj izvirnega, kar pa v matematiki ni tako lahko. Zato stalno poudarjamo, da taka inovativnost za matematične naloge ni primerna. Tudi kakovost teh nalog je vprašljiva. Vprašljive so tudi statistične metode, ki jih uporabljajo. Zato mentorjem priporočamo, da se takih tem izogibajo. Pri matematičnih raziskovalnih nalogah je pomembno, da se učenci naučijo nekaj novega iz matematike in da znajo to lepo predstaviti. *Če* pa jim uspe kakšen izviren problem opisati matematično in ga tako rešiti, so dosegli največ, kar se od njih pričakuje.

Pri ocenjevanju nalog je komisija poleg nalog ocenjevala tudi predstavitev.

Naloge smo uredili po vrsti, najprej osnovnošolski zlati nalogi, nato pa *še* srednješolski. Na prvem mestu je naloga, ki jo je komisija ocenila kot najboljšo.

Pri srednješolskih nalogah je bila komisija v zadregi, ker sta bili obe nalogi vsaka na svoj način izjemni. Ena je bila naloga z naslovom Origamika, ki je v resnici pokazala inovativnost, druga pa je bila naloga Katje Vreš, ki je bila tudi na svoj način inovativna, vendar ni uporabljala tako zahtevnega matematičnega orodja. Njena predstavitev naloge je bila briljantna. Bila je ena najboljših v tridesetih letih, odkar sodelujem pri ocenjevanju raziskovalnih nalog.

Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2022

Zlato priznanje so dobile *štiri* raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski:

• IGRA NIM
Avtor: Gregor Bokal
Mentorja: Ambrož Demšar, Drago Bokal
Šola: Osnovna *šola* Alojzija *Šuštarja*, Ljubljana-Šentvid

• ČAROBNI PLATONSKI POLIEDRI
Avtorja: Jarnej Starčič, Martin Starčič
Mentor: Mišo Krog
Šola: Osnovna *šola* Miška Kranjca Ljubljana

• ORIGAMIKA
Avtorji: Matic Kravos, Rene Turk, Aljaž Velikonja
Mentor: Alojz Grahor
Šola: Škofijska gimnazija Vipava

• KVADRATNI PALINDROM
Avtor: Kaja Vreš
Mentor: Domen Vreš
Somentor: Simona Vreš
Šola: Šolski center Ravne na Koroškem, Gimnazija Ravne na Koroškem

Kratek opis nagrajenih nalog

1. naloga: Igra Nim skozi matematiko in spodbujevano učenje

V igri Nim imamo na mizi določeno *število žetonov* in dva igralca. Igralca smeta izmenoma vzeti enega ali dva *žetona. Tisti,* ki pobere zadnji *žeton,* je poraženec. Avtor se je odločil, da bo iskanje optimalne strategije prepustil računalniku.

Pri programiranju je uporabil metodo *spodbujevanega učenja* (angleško reinforcement learning).

V Wikipediji ob geslu Spodbujevano učenje piše, da je to strojno učenje, katerega cilj je priučiti ali optimizirati vedenje na podlagi povratne informacije. Spodbujevani učenec izbira možnosti, ki so mu v dani situaciji na voljo. *Če* se izkaže, da je izbral možnost, ki ga je pripeljala do zmage, je nagrajen, sicer pa kaznovan.

Zapišimo skrajšani povzetek k nalogi, ki ga je napisal avtor.

Z logičnim razmišljanjem lahko pridemo do optimalne strategije. Kako pa bi do op-

timalne strategije prišel računalnik? Računalnik skozi odigrane igre s soigralcem pridobiva znanje. Na hitrost učenja vpliva tudi izbor soigralca. Če soigralec igra z optimalno strategijo, se računalnik hitreje nauči. Če pa soigralec igra naključno, računalnik potrebuje več časa, da razvije optimalno strategijo. Uporabili smo knjižnico za spodbujevalno učenje programskega jezika Python. Med igranjem si računalnik beleži, koliko žetonov je vzel v danem primeru. Če je po koncu igre poražen, zmanjša verjetnost, da bi kasneje v enakem primeru spet izbral to število žetonov. *Poleg tega poveča verjetnost za potezo, ki je ni izbral. Če v igri zmaga, stori obratno. Računalnik si zapomni, koliko žetonov mora vzeti pri danem* številu žetonov *na polju, ki ga je že srečal. Tega znanja ne zna posplošiti.*

Pa poglejmo, kakšna naj bi bila optimalna strategija:

(1) Če ostane na mizi le en *žeton,* potem je igra za tistega, ki je na vrsti, izgubljena.

(2) Pri dveh *žetonih* na mizi je igra za tistega, ki je na vrsti, dobljena. Vzame en *žeton* in prepusti izgubljeni primer soigralcu.

(3) Če ostanejo na mizi trije *žetoni,* potem mora igralec, ki je na vrsti, vzeti dva *žetona.* Tako ostane en *žeton* za soigralca.

(4) Pri *štirih žetonih* je primer za soigralca, ki je na vrsti, izgubljen. *Če* vzame en *žeton,* prepusti soigralcu zmagovalni primer, to so trije *žetoni, če* pa pobere dva *žetona,* potem ravno tako prepusti soigralcu zmagovalni primer, to sta dva *žetona.*

(5) Splošno velja, da je igra v primeru, ko imamo na mizi $3(n - 1) + 1$ žetonov, za igralca, ki je na vrsti, izgubljena, *če* njegov partner uporablja optimalno strategijo.

(6) Če pa je na mizi $(3(n - 1) + k)$ žetonov, kjer je $k = 2, 3$, potem bo igralec zmagal, *če* vzame en *žeton za* $k = 2$ in dva *žetona* za $k = 3$.

2. naloga: Platonski poliedri

Nalogo bomo predstavili z njenim povzetkom.

V nalogi sva raziskovala čarobne *platonske poliedre: Rubikova kocka, pyraminx, skwebdiamond, kilominx, dogic. To so mehanske matematične uganke v obliki pravilnih teles, ki so sestavljena iz več manjših delov, ki se vrtijo okrog nevidnega jedra. Zakonitosti premikov in položajev sva opisala v matematičnem jeziku. Glavni cilj pa je bil najti algoritme, ki premešane* čarobne *poliedre spet spravijo v prvotno stanje. To je stanje, ko so na vsaki ploskvi vsi delci enake barve. Domislila sva se tudi uporabe* čarobnih *poliedrov pri* šifriranju *sporočil.*

Slika 1: Poliedri, opisani v nalogi (vir avtorja)

V nalogi so natanko opisani algoritmi za sestavljanje teh teles in izračun vseh možnih kombinacij. Vsega je preveč, da bi na tem mestu natančneje opisali.

3. naloga: Origamika, delitev kota na več enakih delov

Z neoznačenim ravnilom in *šestilom* lahko rešimo kvadratno enačbo, medtem ko s pregibanjem papirja lahko rešimo tudi enačbe tretje stopnje. Ker moramo pri trisekciji kota, to je delitev kota na tri enake dele, rešiti enačbo tretje stopnje, pomeni, da lahko s pomočjo pregibanja papirja razdelimo kot na tri enake dele, kot prikazuje slika 2.

Če poznamo $k = \tan(3\alpha)$, potem $x = \tan\alpha$ ustreza enačbi

$$x^3 - 3kx^2 - 3x + k = 0.$$

Enačbo dobimo iz zveze

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

Več o tem najdete na spletni strani https://www.youtube.com/watch?v=IUC--8P0zXe8.

V povzetku naloge je zapisano:
V raziskovalni nalogi uporabljamo za reševanje geometrijskih problemov matematični origami. To je metoda, pri kateri namesto neoznačenega ravnila in šestila *konstruiramo geometrijske elemente s pomočjo prepogibanja papirja. V prvem delu naloge obravnavamo problem delitve kota na tri enake dele. Predstavimo Abejevo in dve Justinovi metodi, ki opisujeta delitev ostrega in topega kota. V drugem delu opišemo metodo dvojnega pregibanja in z njeno pomočjo razdelimo kot na pet enakih delov (Langova metoda). Langovo metodo kvintisekcije smo priredili tudi za trisekcijo kota.*

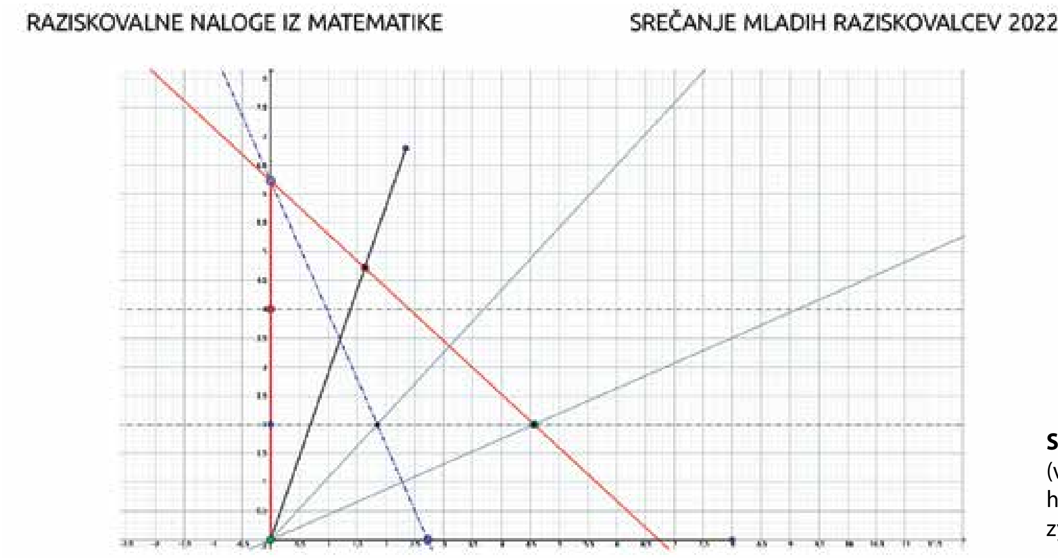
Pravila matematičnega origamija:

(1) Za dani različni točki P_1 in P_2 obstaja pregib, s katerim dobimo premico skozi ti dve točki.

(2) Za dani premici lahko poiščemo presečišče, *če* obstaja.

(3) Za dani dve točki P_1 in P_2 obstaja pregib, ki točko P_1 preslika v točko P_2 (tako dobimo simetralo daljice (P_1, P_2)).

(4) Za dani dve različni premici l_1 in l_2 obstaja pregib, ki premico l_1 preslika na premico l_2 (tako dobimo simetralo kota, ki ga določata premici (l_1, l_2)).



Slika 2: Prikaz trisekcije ostrega kota (vir Borut Jurčič Zlobec, Geogebra) https://www.geogebra.org/m/zykratk2

(5) Za dano točko P in premico l lahko naredimo pregib skozi točko P pravokotno na premico l (tako dobimo pravokotnico na premico, ki poteka skozi dano točko).
(6) Za dani točki P_1 in P_2 ter premici l_1 in l_2 lahko naredimo pregib tako, da se točka P_1 preslika na premico l_1 in točka P_2 preslika na premico l_2.

Cilji naloge:

(1) Opisati znane konstrukcije delitve kota na tri enake dele.
(2) Odkriti nove načine delitve kota na tri enake dele.
(3) Opisati Langovo konstrukcijo delitve kota na pet enakih delov.
(4) Proučiti delitev kota na sedem enakih delov.

Na Sliki 2 je prikazana konstrukcija trisekcije ostrega kota, poleg tega pa imamo *še* povezavo na spletno stran, kjer je ta konstrukcija narejena v programu Geogebra. Kot, ki ga bomo razdelili na tri enake dele, ima vrh v koordinatnem izhodišču. En krak poteka po osi x, drugi krak pa je označen s poudarjeno poševno daljico v *črni* barvi. Narišemo dve premici, vzporedni z osjo x. Medsebojni razdalji premic in spodnje premice z osjo x sta enaki. Papir prepognemo tako, da se koordinatno izhodišče preslika na spodnjo premico, ti dve točki sta označeni z zeleno barvo. Hkrati pa se mora presečišče zgornje premice z osjo y preslikati na krak kota. Točki sta označeni rdeče. Prepogib je označen z modro *črtkano črto. Kako narišemo* premici, ki določata trisekcijo kota, je razvidno s slike.

4. Naloga: Kvadratni palindromi

Zapis *števila* je palindrom, *če* se *števke* v zapisu berejo enako naprej kot nazaj. To pomeni, da so v njegovem zapisu *števke* razporejene simetrično (prva *števka* je enaka zadnji, druga *števka* je enaka predzadnji itd). Lahko ga zapišemo kot: $a_1a_2a_3 \ldots | \ldots a_3a_2a_1$.

Poglejmo povzetek k nalogi.

Kvadratni palindrom je število, *za katero velja, da drugo* število *s* števkami *v obratnem vrstnem redu nima vodilnih ničel. Poleg tega velja enako za njuna kvadrata; torej ima kvadrat prvega* števila števke *v obratnem vrstnem redu kot kvadrat drugega* števila. *V tej raziskovalni nalogi raziskujemo, kakšni so pogoji, da je zapis* števila *kvadratni palindrom. S pomočjo Microsoft Excela smo poiskali nekaj primerov kvadratnih palindromov in jih nato opazovali. Ugotovili smo, da jih sestavljajo samo* števke *0, 1, 2 in 3. V nadaljevanju dokažemo, da kvadratni palindrom ne more vsebovati nobene druge* števke *in da ne sme prihajati do prenosa enote pri kvadriranju* števila. To *dokažemo s pomočjo kongruenc in matematične indukcije. Iz tega zaključimo, da je v kvadratnem palindromu lahko največ ena* števka *enaka 3 in, da* števki *2 in 3 ne moreta nastopati skupaj. Ugotovili smo tudi, da* števka *3 ne sme biti na sredini zapisa* števila, *ki ga kvadriramo. Prav tako pokažemo ,da lahko enako obravnavamo tudi kvadratne palindrome, ki imajo različno* število števk; *torej ima eno* število *na koncu vsaj eno* števko *enako 0, vendar zanje ne velja ugotovitev, da* števka *3 ni na srednjem mestu.*

Delo nam olajša bolj nabrušeno orodje. Program, ki naredi vse potrebno, zapisan v jeziku Python.

```
#!/usr/bin/env python3

def inv_order(n):
    # Pretvori število v niz znakov (števk)
    # obrne vrstni red v nizu in ga pretvori nazaj v število
    return int(str(n)[::-1])

def qpalin(n):
m = inv_order(n)        # Števke v obratnem vrstnem redu
nn = n**2               # Kvadriramo števili m in n
mm = m**2
mm = inv_order(mm)      # V številu mm obrnemo vrstni red števk
return nn - mm          # Če sta obe števili enaki
                        # je število n kvadratni palindrom

if __name__ == '__main__':
    n = int(input('n --> '))
    print(qpalin(n))
```

O projektu NA-MA POTI

Mag. Mateja Sirnik
Zavod RS za šolstvo

V projektu **Naravoslovna in matematična pismenost: spodbujanje kritičnega mišljenja in reševanja problemov (NA-MA POTI – NAravoslovje, MAtematika, Pismenost, Opolnomočenje, Tehnologija, Interaktivnost)** je deloval Razvojni tim za matematično pismenost, katerega člani so v času projekta:

- opravili pregled in študij strokovne literature na področju razvijanja matematične pismenosti,
- zapisali opredelitev matematične pismenosti za slovenski šolski prostor,
- opredelili gradnike in podgradnike skupaj z opisniki na petih razvojnih stopnjah,
- načrtovali in preizkušali primere dejavnosti najprej za razvijanje prvega in kasneje za razvijanje drugega gradnika matematične pismenosti ter jih dopolnjevali in nadgrajevali.

Rezultat vsega razvojnega dela so teoretična izhodišča za poučevanje matematične pismenosti v našem izobraževalnem prostoru ter preizkušeni in dopolnjeni primeri prakse za razvoj matematične pismenosti na posamezni razvojni stopnji od vrtca do srednje šole.

Osnovna opredelitev matematične pismenosti v projektu NA-MA POTI sloni na definiciji matematične pismenosti iz mednarodne raziskave PISA 2018 (OECD PISA 2018, 2019):

Matematična pismenost je zmožnost posameznika, da na osnovi matematičnega mišljenja in matematičnega znanja:

- zmore uporabljati matematične pojme, postopke in orodja v različno strukturiranih okoljih;
- analizira, utemeljuje in učinkovito sporoča svoje zamisli in rezultate pri oblikovanju, reševanju in interpretaciji matematičnih problemov v različno strukturiranih okoljih;
- zaznava in se zaveda vloge matematike v vsakdanjem in poklicnem življenju, jo povezuje z drugimi področji in sprejema odgovorne odločitve na osnovi matematičnega znanja ter je pripravljen sprejemati in soustvarjati zanj nova matematična spoznanja.

Temeljna gradnika matematične pismenosti, opredeljena v projektu NA-MA POTI, sta:

- matematično mišljenje, razumevanje in uporaba matematičnih pojmov, postopkov ter strategij, sporočanje kot osnova matematične pismenosti,
- reševanje problemov v raznolikih kontekstih (osebni, družbeni, strokovni in znanstveni), ki omogočajo matematično obravnavo.

https://www.zrss.si/pdf/Matematicna_pismenost_gradniki.pdf

Priročnik **Razvijamo matematično pismenost** je sinteza našega dela in naj kot gradivo s teoretičnimi izhodišči za razvoj matematične pismenosti in ozaveščanje znanj, ki jih razvija matematika kot predmet skozi učne načrte, prispeva k razvoju pismenosti učencev. Uporabite ga kot pripomoček za razumevanje opredeljenih znanj po podgradnikih in opisnikih matematične pismenosti po vertikali.

https://www.zrss.si/pdf/Razvijamo_matematicno_pismenost.pdf

Več o razvijanju matematične pismenosti v našem šolskem prostoru bomo objavili v eni od naslednjih številk revije Matematika v šoli.

Vsa objavljena gradiva v projektu so na spletni strani: https://www.zrss.si/digitalna-bralnica/na-ma-poti/. Vabljeni k branju in izmenjavi dobrih praks.

Kot primer za razvijanje 2. gradnika matematične pismenosti sledi izvedena dejavnost **Ugotavljanje modela za višino človeka glede na velikost čevljev.** Dejavnost je predstavljena v priročniku *Kritično mišljenje pri naravoslovju in matematiki, Priročnik za strokovne delavce v vrtcih in šolah,* kjer je poudarjen tudi vidik razvijanja kritičnega mišljena.

Ugotavljanje modela za višino človeka glede na velikost čevljev[1]

Jerneja Bone, Zavod RS za šolstvo

Modeliranje je dejavnost, s katero se učenci posredno srečujejo v življenju, neposredno pa se z njo seznanijo pri pouku. Ob reševanju problemov z modeliranjem učenci prepletajo matematično znanje z veščinami, ki jim pridejo prav v ostalih okoliščinah in tudi pri drugih predmetih (zbiranje podatkov, iskanje virov, sistematično beleženje, prevajanje vsakdanje situacije v matematično okolje …).

Iskanje primerov iz vsakdanjega življenja, ki so primerni za modeliranje, ni enostavno. Lažje je, da v razredu, pri pouku, uporabimo primer, ki ga je že nekdo preizkusil. Zato smo pri izvedbi dejavnosti z učiteljicama izhajali iz primera, ki smo ga našli v strokovnem prispevku, in ga pripravili za učence, hkrati pa smo stremeli k temu, da je primer primeren za različne razrede, za učence z različnim matematičnim predznanjem.

Pri izvedbi iste dejavnosti v različnih razredih (od 6. do 9. razreda) smo želeli ugotoviti, kakšne načine in poti reševanja problema bodo poiskali učenci. Predvideli smo, da bodo dejavnost izvedli v eni šolski uri, možnost pa je, da se dejavnost s predstavitvijo rešitev in konstruktivno razpravo izvede v dveh strnjenih šolskih urah.

Z dejavnostjo smo sledili naslednjim vsebinskim in procesnim ciljem.

Učenec:
- opredeli matematični problem v dani realni situaciji,
- poišče potrebne podatke, razložiti dogajanje v problemu, napovedati druga dogajanja,
- predstavi problemsko situacijo,
- predstavi način reševanja,
- s svojimi besedami opiše model,
- preizkuša model v podobni situaciji.

Učenci lahko uporabljajo pri reševanju žepno računalo oz. drugo digitalno tehnologijo (računalnik), uporabijo lahko milimetrski papir, različne merilne inštrumente ali iščejo relevantne podatke po spletnih in drugih virih, kjer jih opozorimo na navajanje uporabljenih virov. Za reševanje problema uporabi matematično znanje, ki ga je pridobil, npr. računanje z decimalnimi števili, razmerja, pretvarjanje količin (dolžina).

Z dejavnostjo smo stremeli k razvijanju drugega gradnika matematične pismenosti (MP 2).

2.2 obravnava situacije z matematičnim modeliranjem.

Bolj smo se posvetili razvijanju naslednjih podgradnikov in njihovih opisnikov:

2.2 obravnava situacije z matematičnim modeliranjem

2.2.1 prenese situacijo v matematični kontekst

a) prepozna, da bo dano situacijo lahko matematično modeliral
b) opiše življenjski problem (npr. osebni, družbeni, strokovni) v matematičnem jeziku
c) prepozna količine, matematične pojme in odnose v obravnavani situaciji in odloča o njihovi relevantnosti
e) predstavi situacijo z matematičnimi sredstvi in oblikuje problemska vprašanja v matematičnem kontekstu

1 Članek je prirejen po prispevku: Bone, J. in Starčič, T. (2022). Ugotavljanje modela za višino človeka glede na velikost čevljev. V Suban, M. in Rupnik Vec, T. (ur.) *Kritično mišljenje pri naravoslovju in matematiki. Priročnik za strokovne delavce v vrtcih in šolah.* Ljubljana: ZRSŠ. Dostopno na: www.zrss.si/pdf/Kriticno_mislenje_prirocnik.pdf

2.2.2 oblikuje matematične modele za dano situacijo

a) pri načrtovanju modela opredeli spremenljivke, formulira predpostavke in navede omejitve modela
b) izbere ustrezno zvrst modela (empirični, simulacijski, teoretični, algoritmični itd.) glede na dano situacijo
c) prepozna in zapiše odnose med izbranimi spremenljivkami oziroma predlaga matematično strukturo za dano situacijo (npr. funkcijski predpis, graf, linearna enačba, sistem linearnih enačb, diagram, preglednica, geometrijski objekt, slika, opisno ali kako drugače)
d) pri izdelavi modela uporablja ustrezna matematična in tehnološka orodja

2.2.3 uporablja matematične modele

a) opiše dane in lastne modele z različnimi matematičnimi reprezentacijami
b) uporablja dane in lastne modele
c) razloži model in upošteva značilnosti konteksta (ustrezne enote, natančnost, zaokroževanje)
d) pri uporabi modela se poslužuje tehnoloških orodij (računalo, računalniške preglednice, razni programi, spletne aplikacije itd.)
f) interpretira matematične rešitve (izračune, dobljene z modelom) v kontekstu

2.2.4 vrednoti matematične modele

a) obravnava ustreznost (smiselnost, pravilnost, natančnost) modela v različnih okoliščinah (npr. obravnava mej, obravnava predpostavk, zanemarjenih količin)
d) primerja različne modele (npr. glede na točnost, obseg uporabnosti, zahtevnost uporabe)

Avtorica: Jerneja Bone	**Vzgojno-izobraževalni zavod:** OŠ Danila Lokarja Ajdovščina	**Področje predmet:** MATEMATIKA	**Razred:** 7., 8. in 9. razred
Učni sklop: Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami			**Trajanje:** 1–2 šolski uri
Naslov dejavnosti: Ugotavljanje modela za višino človeka glede na velikost čevljev			
Vključeni (pod)gradniki MP: **MP 2.2** Obravnava situacije z matematičnem modeliranjem			
Operativni cilji dejavnosti: Učenci znajo: • *opredeliti matematični problem v dani realni situaciji* • *poiskati potrebne podatke, razložiti dogajanje v problemu, napovedati druga dogajanja* • *predstaviti problemsko situacijo* • *predstaviti način reševanja* • *s svojimi besedami opisati model* • *preizkušati model v podobni situaciji*			

Aktivnost učencev	Podgradnik MP	Vloga učitelja	Pričakovani rezultati/dokazila
Učenci so razdeljeni v heterogene skupine po 3 ali 4 člane. **Razgovor o temi: velikost čevljev** Učenci opišejo, kaj vedo o velikosti čevljev – dolžini stopala.	**MP** 2.2.1 a), b), c)	Učitelj vodi razgovor o velikosti čevljev: Katero velikost čevljev ima Luka Dončić? Kolikšna je dolžina vašega stopala?	Zapisi, kaj že vedo o velikosti čevljev (na učnih listih).
Realistična situacija Po Guinnessovi knjigi rekordov (2002) so največji čevlji dolgi 5,29 m in široki 2,37 m. Učenci zastavljajo vprašanja. (*Kaj nas zanima?*) Izbor ključnega vprašanja. **Približno kako visok bi bil velikan, ki bi obul te čevlje?**	**MP 2.2.1** e)	Učitelj spodbudi učence, da razmišljajo o možnih vprašanjih, ki jih to dejstvo predstavlja.	Zapisi vprašanj na tablo.
Oblikovanje modela in njegova uporaba na velikanovih čevljih Oblikujejo predpostavke. Učenci iz predpostavk sklepajo na potrebne podatke. Poiščejo podatke, ki jih potrebujejo za reševanje problema. Učenci iščejo in zapisujejo možne rešitve. Svoja razmišljanja rišejo, pišejo, računajo. Predstavijo rešitev.	MP 2.2.2 a), b), c), d) MP 2.2.3 b), c), d)	Učitelj usmerja/podpira učence. Če učenci izrazijo, da potrebujejo določen pripomoček, jim ga da. Vodi pogovor o predstavljenih modelih.	Opisujejo situacijo, predlagajo možne rešitve. Zapisi na učne liste. Predstavitve modelov – rešitev (zapisi na folije piši-briši).
Interpretacija modela Pri katerih modelih smo dobili podobne velikosti velikana? V čem so si modeli podobni, v čem različni? Ali so modeli uporabni/prenosljivi? Kje? Kako?	MP 2.2.4 a), d)	Učitelj vodi pogovor.	Zapisi modelov – rešitev.

Aktivnost učencev	Podgradnik NP	Vloga učitelja	Pričakovani rezultati/dokazila
Refleksija Učenci odgovorijo v povedih na zastavljena vprašanja na delovnih listih.	**MP 1.3** c)	Učencem razdeli učne liste in jim pojasni, kaj od njih pričakuje. Učitelj učencem poda povratno informacijo o znanju.	Zapisi na učnih listih.

Opomnik in dodatni napotki za izvedbo dejavnosti:

Pripravljeni računalniki/tablice s povezavo na splet.

Priprava žepnih računal.

Priprava milimetrskega papirja, karo papirja.

Priprava različnih metrov.

Viri:

Viryent, A. (2017). Največji čevlji na svetu. Dostopno na: https://viryent.com/blog-sl/najvecji-cevlji-na-svetu/.

World's Largest Shoes. Dostopno na: https://www.atlasobscura.com/places/world-s-largest-shoes.

Blum, W., Ferri, R. B. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1* (1), 45–58.

Sirnik, M., Vršič, V., Magajna, Z., Hodnik, T., Stopar, N., Pustavrh, S., Vreš, S., Kretič Mamič, V., Ternar, V., Angelov Troha, K., Zadel, V., Lipovec, A., Žakelj, A., Klemenčič, E., Fras Bero, F. (2022). Matematična pismenost. Opredelitev in gradniki. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. https://www.zrss.si/pdf/Matematicna_pismenost_gradniki.pdf

Največji čevlji

V Športnem centru v Marikini na Filipinih imajo shranjen največji par čevljev na svetu. Po Guinnessovi knjigi rekordov (2002) so dolgi 5,29 m in široki 2,37 m.

Približno kako visok bi bil velikan, ki bi lahko obul te čevlje?

Pri reševanju naloge lahko uporabite žepno računalo in računalnik s povezavo na splet. Če boste potrebovali še kakšne druge pripomočke, vprašajte učiteljico. Zapisujte vse korake reševanja.

Pojasnite potek reševanja oz. rešitev, ki jo boste predstavili.

Refleksija po reševanju:

1. Kakšna se ti je zdela naloga?
2. Kaj ti je uspelo (dobro šlo) pri reševanju naloge?
3. Kaj ti je bilo pri reševanju naloge najtežje, kje si imel največ težav?
4. Ali si še želiš reševati podobne naloge? Zakaj?
5. Katero matematično znanje si uporabil pri reševanju naloge?

Evalvacija, refleksija učiteljice

Naloga je primerna za uvajanje učencev v reševanje tovrstnih problemov – modeliranja. Ker učenci niso imeli izkušenj z reševanjem tovrstnih nalog, smo se na začetku pogovorili o dolžini stopal, velikosti čevlja in jim takoj predstavili nalogo oz. vprašanje. V naslednjih izvedbah jim ne bomo takoj ponudili tablic, ampak bomo pustili, da sami izrazijo potrebo po določenih pripomočkih, ki jim bodo vidni na mizi v učilnici.

Učenci so takoj začeli iskati po spletu, iskanje ni bilo usmerjeno.

Refleksija učencev

Učenci so zapisali, da se jim je zdela naloga zanimiva; da so delali v skupini in z računalniki.

Zabavna in drugačna, saj si moral razmišljati ven iz okvirja in ni samoumevno kakšen bo odgovor.

Dobro so se ocenili pri iskanju začetnih podatkih.

1. Kaj ti je uspelo (dobro šlo) pri reševanju naloge?

Iskanje podatkov in delo v skupini.

Težko jim je bilo, kako začeti reševati nalogo.

Zapisali so, da so pri reševanju uporabili (različni učenci so različno zapisali): množenje, premo sorazmerje, križni račun, seštevanje in odštevanje, pretvarjanje enot.

2. Kaj ti je uspelo (dobro šlo) pri reševanju naloge?

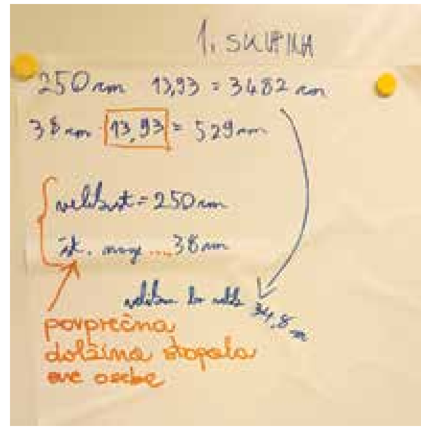
Ugotovili smo, da telo ni sorazmerno s stopalom.

Priloženi dokazi, izdelki učencev

1. skupina

Skupina je na spletu našla podatek, da ima 250 cm visok človek stopalo dolgo 38 cm. Izračunali so količnik med višino človeka in dolžino stopala. Dobljeni količnik so potem pomnožili z dolžino velikanovega čevlja in dobili velikost velikana.

Učenci si niso shranili spletne strani, kjer so podatek o velikosti človeka (250 cm) dobili. Opomnili smo jih na delo z viri.

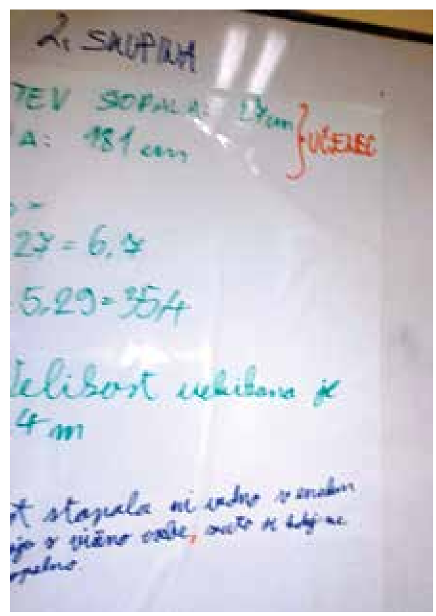


2. skupina

Učenci so izmerili višino enega od sošolcev in dolžino njegovega stopala. Količnik, ki so ga dobili, so pomnožili z dolžino velikanovega čevlja. Dobili so podoben rezultat kot prva skupina.

Preverili so svoj model tako, da so izmerili višino drugega sošolca in dolžino njegovega stopala, in dobili so enak količnik. Ko pa so to storili pri tretjem sošolcu, količnik ni bil enak.

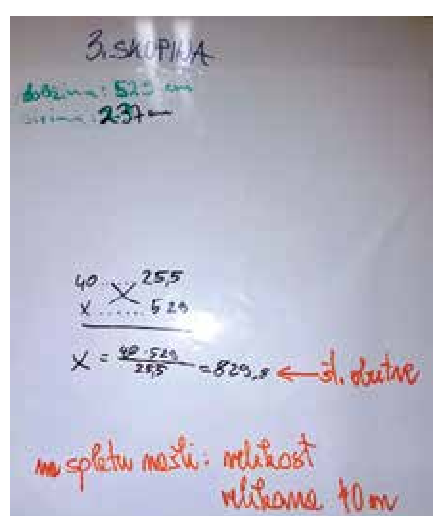
Presenečeni so bili, da rešitev ni enolična.



3. skupina

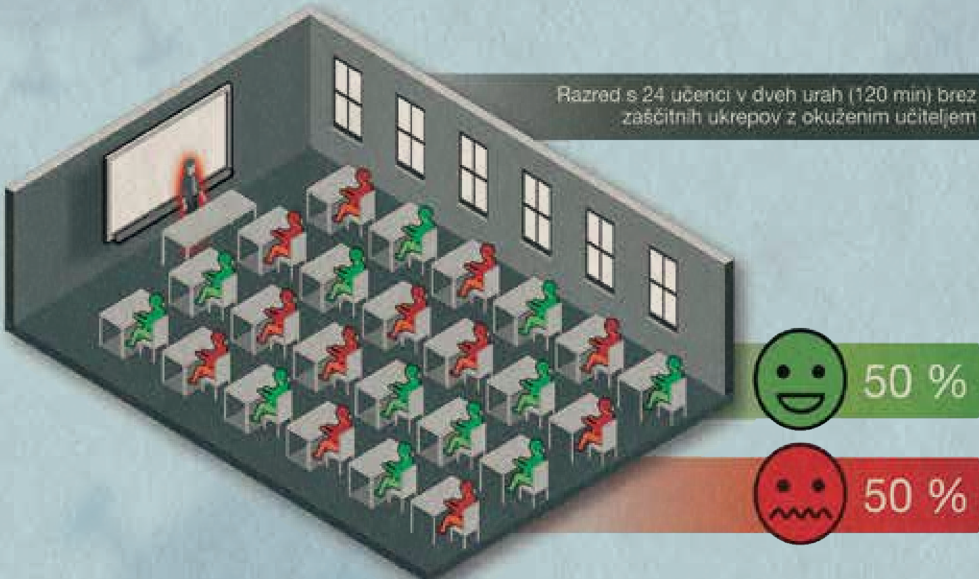
Skupina je na spletu našla podatek, da bi bil tak velikan velik 40 metrov (niso si shranili spletnega mesta – opozorilo na delo z viri). Potem pa so hoteli iz rešitve sklepati na pot reševanja.

Na spletu so potem našli podatek, da je pri obutvi s številko 40 stopalo dolgo 25,5 cm. Nato so izračunali, kolikšna bi bila številka čevlja velikana. Tu se jim je reševanje v času, ki jim je bilo namenjeno, ustavilo.

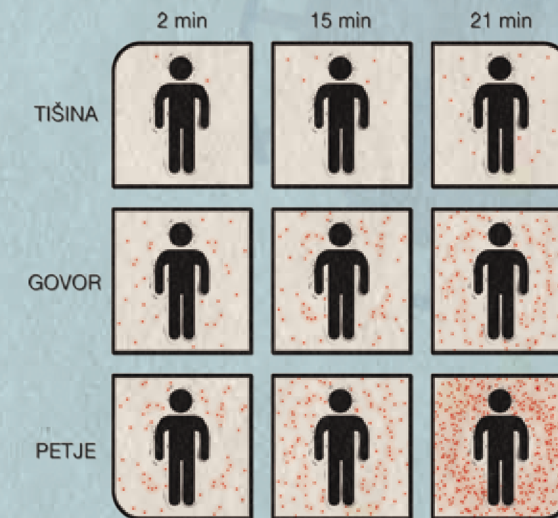


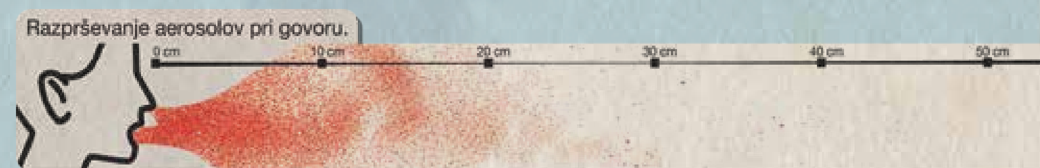
NALEZLJIVE BOLEZNI IN NJIHOVO ŠIRJENJE V RAZREDU

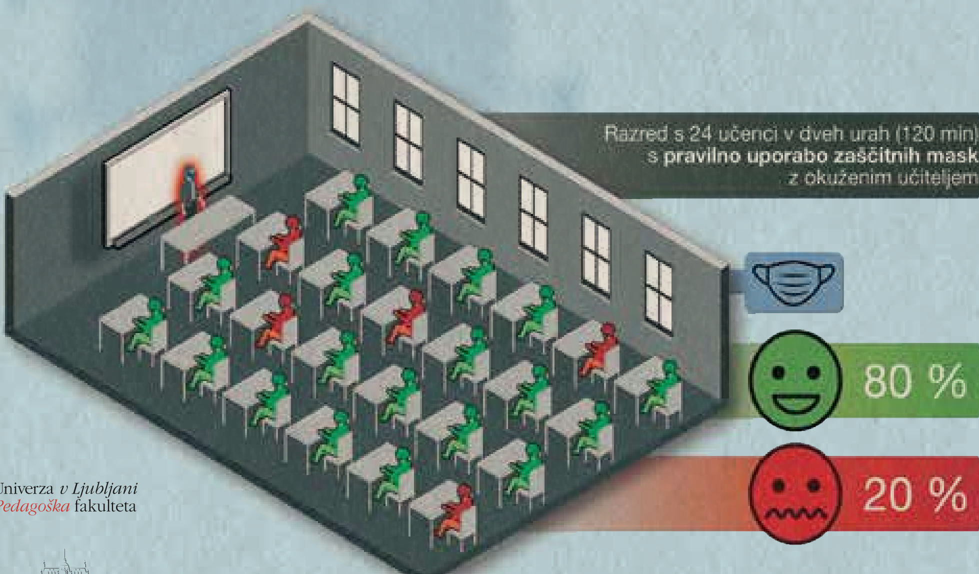
Vpliv izbranih zaščitnih ukrepov na primeru epidemije virusa SARS-CoV-2.

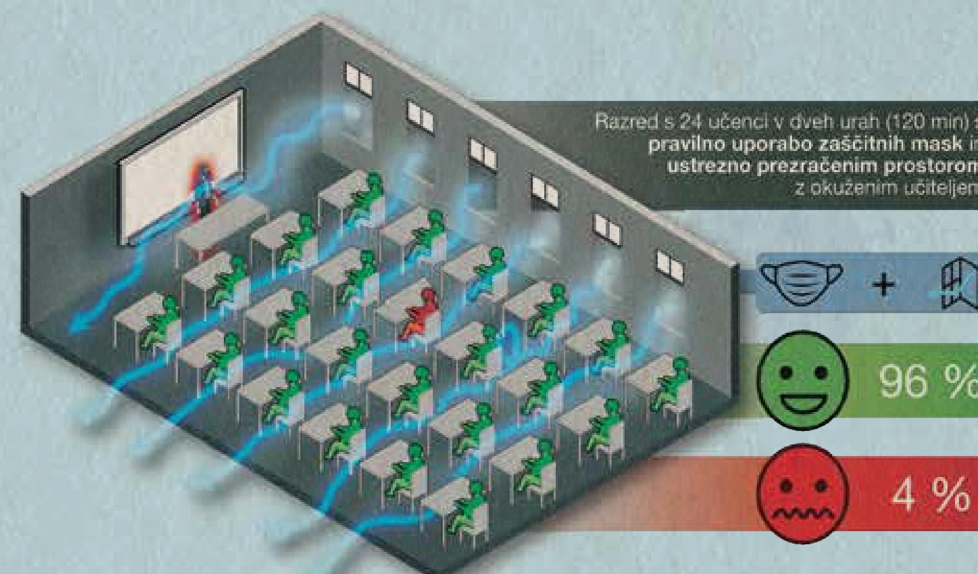


- Šole prispevajo približno **6%** izbruhov virusa SARS CoV-19.
- Prenos virusa je **različen**, glede na prenašalca/ko - učitelj/ica oz. učenec/ka.
- Možnost prenosa okužbe lahko močno zmanjšamo z **rednim prezračevanjem prostorov in pravilnim nošenjem zaščitnih obraznih mask**.







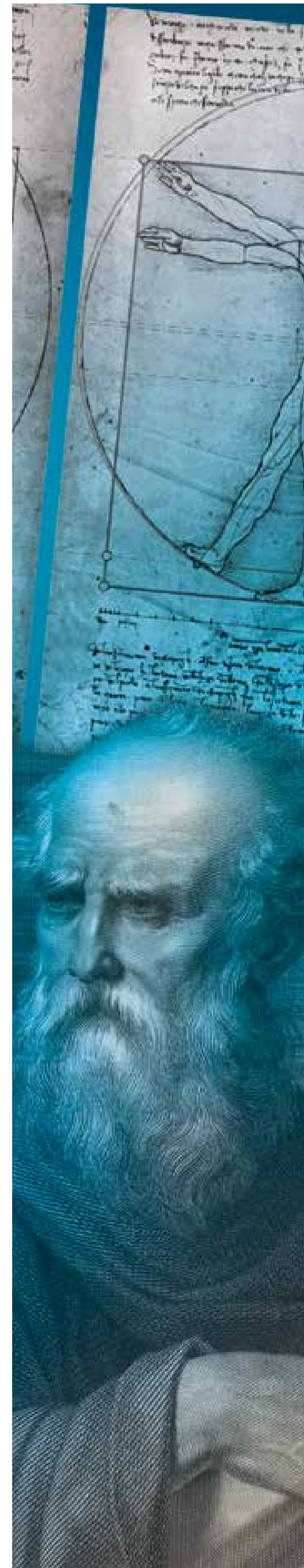


Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta

Naravoslovna solnica • letnik XXVI • št. 3 • zamisel: dr. Gregor Torkar • besedilo: Tim Prezelj • oblikovanje in ilustracija: Žan Rode

Mathematics in school

2 2022 Volume 28



CONTENTS

Iz digitalne bralnice ZRSŠ

Izdane publikacije v projektu

NA-MA POTI

Naravoslovna in matematična pismenost: spodbujanje kritičnega mišljenja in reševanja problemov

NAravoslovje, **MA**tematika,
Pismenost, **O**polnomočenje, **T**ehnologija, **I**nteraktivnost

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

NA-MA POTI

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT

EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD

Naložbo sofinancirata Republika Slovenija in Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada

www.zrss.si/digitalna-bralnica/na-ma-poti