LEONARDO DA VINCI (1452–1519) – OB PETSTOLETNICI NJEGOVE SMRTI: LEONARDO IN MATEMATIKA

JURIJ KOVIČ

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana
FAMNIT, Univerza na Primorskem

Math. Subj. Class. (2010): 00A66, 01A90, 01A40, 01-02

Leonardo da Vinci je zapisan v zgodovino kot znanstvenik, izumitelj in umetnik. Tudi petsto let po njegovi smrti znanstveno-raziskovalno zanimanje za njegovo ustvarjalnost samo še narašča. V članku bomo pregledali in ovrednotili predvsem njegove dosežke, povezane z matematiko, še posebej geometrijo.

LEONARDO DA VINCI (1452–1519) – AT HIS 500$^{\text{th}}$ DEATH ANNIVERSARY: LEONARDO AND MATHEMATICS

Leonardo da Vinci is recorded in history as an scientist, inventor and artist. Even five hundred years after his death the scientific-research interest in his creativity is only increasing. We will examine and try to evaluate, in particular, his achievements related to mathematics, especially geometry.

Matematika v Leonardovem času

V članku [5] smo povedali, kakšna je bila v Leonardovem času znanost in kakšen je bil položaj umetnika (arhitekta, slikarja). Nismo pa še natančneje opredelili: *Kaj je za časa Leonardovega življenja (1452–1519) oziroma samemu Leonardu pomenila beseda »matematik«? Kaj je sestavljalo matematiko tistega časa? Kakšne metode je uporabljala? Kakšne simbole? Na kakšni ravni je bila? Kje vse so jo uporabljali?* To bomo storili v tem članku.

Vsako zgodovinsko obdobje izoblikuje svojo »definicijo« matematika in matematike, ki za druga obdobja morda sploh ni uporabna. Kot pravi znani francoski matematik in zgodovinar matematike Jean Dieudonné (1906–1992), je matematik »nekdo, ki je objavil dokaz najmanj enega netrivialnega izreka«. V knjigi [1, str. 53] je podan seznam 52 imen matematikov, rojenih med 1397 in 1517.

V Leonardovem času je ime *matematik* zaslužil, kdor se je spoznal na: aritmetiko oz. računanje z abakusom in z arabsko-indijskimi številkami, geometrijsko algebro grških in arabskih avtorjev in praktično matematiko (trgovsko-knjigovodsko, finančno-bančno).

Matematiki v času renesanse (kot tudi še nekaj časa pred njo in potem) niso bili specializirani na neko ozko področje, kot so to matematiki danes, ampak so bili pogosto tudi humanistično izobraženi, bili so tudi filozofi in umetniki, arhitekti in slikarji (teoretiki in praktiki na teh področjih).

Arhitekti so načrte cerkva in njihovih delov (npr. oken, rozet, pročelij, mozaikov itd.) pogosto zasnovali na različnih simetričnih vzorcih; tako je npr. Donato Bramante (1444–1514) načrt za tloris *Bazilike sv. Petra* zasnoval na križnem starogrškem vzorcu s simetrijo kvadrata; podobno je Leonardo risal načrte cerkva s centralno simetrijo [4, str. 143]. Pogosto so na tleh upodabljali poliedre, vozle, labirinte (npr. na tleh *Katedrale v Chartresu* [8, str. 135]) in druge geometrijske oblike z različnimi simboličnimi pomeni. Skrbno so pazili na proporce zgradb; tako je npr. pročelje *Katedrale v Milanu* zasnovano na koncentričnih krogih in večkratnikih števil 12 in 7 [8, str. 133]. Arhitekturo so, v povezavi s študijem antičnih piscev o arhitekturi, npr. Vitruvija, povzdignili v znanost s teoretičnimi razpravami o njej (prej je bila bolj v domeni mojstrov, obrtnikov, kamnosekov itd.). Med teoretiki arhitekture sta pomembna npr. Filippo Brunelleschi (1377–1466), »oče renesančne arhitekture«, in Leon Battista Alberti (1404–1472), avtor prve renesančne razprave o arhitekturi *O umetnosti gradnje* (De Re Aedificatoria).

Renesančni slikarji so svoje kompozicije dostikrat zasnovali na linearni perspektivi, pa tudi na preprostih geometrijskih likih ali krivuljah. Tako so npr. ključni elementi Leonardove slike *Leda z labodom* iz leta 1508 razporejeni v koncentričnih krogih s središčem ob desnem robu, zunaj okvirja slike [8, str. 149]. Na Leonardovi sliki *Madona v skalni votlini* (1483–86) se figure vrtinčijo v rastoči stožčasti spirali [12, str. 238]. Uporabljali so tudi zlati rez. Tega so upoštevali tudi kiparji, po zgledu starogrškega kipa, imenovanega *Kanon*, katerega avtor Poliklet (ok. 480–420 pr. n. št.), eden izmed najpomembnejših kiparjev klasične antike, je menil, da morajo biti vsi deli kipa povezani med seboj s sistemom idealnih matematičnih razmerij.

Glasbeniki so že od Pitagore (ok. 570–495 pr. n. št.) dalje vedeli za tesno povezavo med razlikami v višinah tonov in razmerji njihovih frekvenc, tudi glasbene kompozicije so že od nekdaj zrcalile »matematične« lastnosti: simetrijo, red, harmonijo, mero, sorazmerje, število. Renesančna glasba se, za razliko od renesančne arhitekture, književnosti in likovne umetnosti, ki je iskala svoje vzore v antiki, ni mogla zgledovati po antični glasbi, saj se le-ta ni ohranila. Je pa renesančna glasba razvila vrsto svojih glasbenih oblik, od katerih ima vsaka svojo bolj ali manj določeno »matematično« strukturo.

Leonardo je besedo »matematik« uporabljal za vsakega svobodnega duha – tako npr. za filozofa in slikarja – ki dvomi o nepreverjenih trditvah avtoritet in želi sam, na podlagi lastnih opazovanj, vprašanj in eksperimentov, priti do odgovorov, in nazadnje do resnice (in lepote). Pojem »matematik« je torej Leonardu pomenil predvsem nekoga, ki želi spoznati skrivnosti narave in odkriti nekaj novega, ne le nekoga, ki obvlada določene matematične algoritme ali pozna določene že obstoječe matematične teorije. Leonardov »matematik« je torej nekakšen skeptik in racionalist, ki pa je obenem tudi radoveden in raje sprejema skrivnostno in neznano, kot da bi se zadovoljil z nepreverjenim odgovorom, in ki ga ne zanimajo le odgovori na posamezne probleme, temveč hoče preko rešitve številnih posamičnih problemov z različnih področij uzreti širšo sliko in po možnosti razumeti ves svet, kolikor je to človeku dano (prim. [1, str. 53]). Matematične knjige v Leonardovem času so bile predvsem prevodi in komentarji Evklida in Arhimeda v latinščini in grščini. Leonardo jih ni mogel brati, šele pozno se je sam naučil latinsko. V matematiki je bil, vse do srečanja z Luco Paciolijem, samouk, imel je težave z ulomki, koreni, razmerji, potencami.

Matematika v Leonardovem času ni bila tako »stroga«, pa tudi ne tako abstraktna in konceptualna, kot je matematika danes. Slonela je na grški in arabski matematiki. Njeno najbolj razvito področje je bilo geometrija, zanimala se je za pravilne poliedre in zlati rez, poskušala je določiti ploščine različnih ukrivljenih likov (s tem se je zelo rad ukvarjal tudi Leonardo), vse bolj se je uveljavljala tudi kot orodje pri raziskovanju narave in gibanja. Pogosto je številom (podobno kot pitagorejci) pripisovala simbolične pomene (to je počel še Luca Pacioli, ne pa Leonardo, ki mu je npr. število 3 vedno pomenilo samo 3 in nič drugega). Algebra je bila še slabo razvita.

Leonardo tudi kot »fizik« (čeprav fizika v pravem pomenu besede takrat še ni obstajala) ni bil ravno eksakten. Bil je domiseln pri oblikovanju problemov, ne pa vselej najbolj uspešen pri njihovem reševanju. Pogoste računske in miselne napake ali neskladje med besedilom in slikami v njegovih zapiskih [3, str. 215–234] navajajo na misel, da so bili nekateri njegovi eksperimenti očitno samo miselni, ne vselej podprti z merjenji. Kot fizik se je ukvarjal z mehaniko, optiko, hidromehaniko. V *Kodeksu Arundel*, folio 17r, je z uporabo Arhimedovega zakona vzvoda določil težišče najprej enakostraničnega, nato pa še poljubnega petkotnika. Kot prvi je določil težišče tetraedra in, splošneje, poljubne pravilne piramide, ter dokazal, da se nahaja na eni četrtini njegove višine, merjeno od osnovne ploskve [3, str. 224–225].

Algebra

V 15. stoletju so znali rešiti splošno linearno in kvadratno enačbo, ki bi ju danes zapisali kot $ax + b = 0$ in $ax^2 + bx + c = 0$.

Takrat še ni bilo algebrajskega simbolizma, kot ga uporabljamo danes. V srednjem veku in renesansi so uporabljali *retorično algebro* (»algebra retorica«) – besedne opise za posamezne tipe enačb (v katerih so dopuščali samo pozitivne koeficiente), kot prikazuje tabela 1 [1, str. 22].

Naslednja stopnja v razvoju algebrske pisave je bila *sinkopirana algebra* (»algebra sincopata«). Za neznanke in operacije so uporabljali okrajšave

BESEDNI OPIS ENAČBE	USTREZNI DANAŠNJI ZAPIS
cose uguale a numero	$ax = b$
censi e cose uguale a numero	$ax^2 + bx = c$
censi uguale a numero	$ax^2 = b$
censi uguale a cose	$ax^2 = bx$
censi e numero uguale a cose	$ax^2 + c = bx$
censi uguale a cose e numero	$ax^2 = bx + c$
cubo e cose uguale a numero	$x^3 + bx = c$
cubo uguale a cose e numero	$x^3 = bx + c$
cubo e numero uguale a cose	$x^3 + c = bx$

Tabela 1. Linearne, kvadratne in reducirane kubične enačbe s samimi pozitivnimi koeficienti a, b, c.

besed iz naravnega jezika. Tako so npr. enačbo $x^2 = 4x + 32$ pisali takole: Qdratu aeqtur 4 rebus p: 32. Sinkopirano algebro je uporabljal npr. Luca Pacioli (1445–1514), frančiškanski menih in Leonardov prijatelj, sodelavec ter učitelj matematike.

Simbolična algebra (»algebra simbolica«) je nastala šele približno sto let po izdaji matematičnih del Luce Paciolija. Njena tvorca sta Francois Viète (1540–1603) in René Descartes (1596–1650). Ta simbolizem je omogočil parametrizacijo problemov in številne pomembne posplošitve [1, str. 23].

Geometrija in perspektiva

Geometri tistega časa so predvsem brali in komentirali klasična dela v grščini in latinščini. Ptolemejevo delo o astronomiji *Almagest* je bilo dvakrat prevedeno iz arabščine v latinščino že v 12. stoletju. Prva tiskana verzija Evklidovih *Elementov* je izšla v Benetkah leta 1482. Prvi prevod *Elementov* v italijanščino je priskrbel Tartaglia leta 1543. Ni bilo še analitične geometrije, ki sta jo odkrila šele Descartes in Pierre de Fermat (1601–1665), čeprav je določene ideje v tej smeri razvijal že Nicola Oresme (1323?–1382). Geometrija tistega časa je bila sintetična, ravninska in prostorska. Evklidska geometrija je veljala za neizpodbojno resnico, Evklid pa upravičeno za nepresežni zgled strogosti v dokazovanju. Geometrijo njegovih *Elementov*, pa tudi *Optike*, so uporabili pri razvoju linearne perspektive. Perspektiva (z ustrezno skrajšavo pravih proporcev, ki pa jih slikar mora poznati) ustvari iluzijo tridimenzionalnosti (globine) na dvodimenzionalni površini slike.[1] Perspektivični pogled je subjektiven, relativen, odvisen od zornega kota (od kraja, od koder gledamo), z njim je opazovalcu (slikarju) dana pomembnejša vloga, kot jo je imel dotlej.

Stare kulture niso poznale perspektivnega upodabljanja. Raziskovanje perspektive je bilo najprej empirično (npr. že v minojski kulturi na Kreti). V renesansi postane raziskovanje perspektive bolj teoretično: nastanejo precizna pravila, kodificirane norme, sistematični traktati o uporabi perspektive pri umetniških delih. Vendar pa v umetnosti racionalni, matematični pristop k perspektivi nikoli ni povsem prevladal nad empiričnim. Že v poznem srednjem veku so se številni umetniki trudili empirično določiti pravila za zvesto in korektno upodabljanje teles na slikah. Načela linearne perspektive odkrijejo v renesansi v Italiji. Formuliral jih je Filippo Brunelleschi (1337–1446). Leon Battista Alberti (1404–1472) je v knjigi *O slikarstvu* (*De pictura*, napisani leta 1435 v latinščini, objavljeni šele 1450) predstavil teorijo perspektive, ki je močno vplivala na delo renesančnih slikarjev. Piero della Francesca (1415–1492), ki ga je Vasari imenoval najboljši geometer svojega časa, je napisal *De prospectiva pingendi* (napisana okrog 1475), v kateri je obravnaval matematična načela perspektive za opazovalca, ki bi gledal z enim očesom in med gledanjem ostajal nepremičen; napisal je tudi *Trattato d'abaco* (*Razpravo o računanju*) ter pomembno delo *De quinque corporibus regularibus* (*O petih pravilnih telesih*). Luca Pacioli je 1498 napisal razpravo o zlatem rezu (*De divina proporzione*). Zanjo je Leonardo narisal okrog 60 odličnih slik pravilnih (in drugih) teles, med drugim ilustracije poliedrov z votlimi lici in odebeljenimi robovi, ki omogočajo dober vpogled v strukturo. Te ilustracije so zahtevale odlične risarske sposobnosti, veliko dela, upoštevanje zakonov perspektive ter upodabljanja svetlobe in senc, in so bile pomembna inovacija [11].

Leonardo perspektive v [9] ni obravnaval le matematično oz. geometrijsko (kot npr. Piero della Francesca), temveč je upošteval tudi *sfumato* (tehniko zamegljenih, prelivajočih se barv in barvnih odtenkov) in *chiaroschuro* (tehniko uporabe svetlobe in senc za prikaz plastičnosti upodobljenih teles). Zanj je bila perspektiva nekakšna znanost o videnju, kot jo pri svojem delu potrebuje slikar. Leonardo je učil, da obstajajo tri vrste perspektive: linearna, barvna (oddaljene stvari so manj intenzivnih barv) in razblinjajoča se (oddaljena telesa je treba zaradi vpliva zraka na videnje opazovalca naslikati manj jasno). Leonardo je uporabil linearno perspektivo (z določenimi modifikacijami zaradi velikih dimenzij slike) tudi pri *Zadnji večerji*.

Albrecht Dürer (1471–1528) je napisal deli *Institutionem geometricarum Libri quatuor*, 1525, in *Unterweysung der Messung mit dem Zirkel und Ri-*

[1] O tem, kakšni so pravi proporci človeškega telesa, so stari Egipčani, Grki in renesančni umetniki imeli drugačna mnenja – različne kulture imajo različne lepotne ideale.

chtsheyt, 1528. Na dveh lesorezih je prikazal perspektograf, napravo, ki pomaga pri risanju v perspektivi. Omenja jo že Leonardo v [9]. Perspektivo sta kot vejo geometrije uveljavila šele Federico Commandino (1509–1575) in Guidobaldo del Monte (1545–1607). Z njunim delom sta »perspektiva umetnikov« in »perspektiva matematikov« ubrali dve različni, komplementarni poti.

Postopoma se je iz matematičnih raziskav perspektive porodila projektivna geometrija. Zanjo so zaslužni Gérard Desargues (1591–1661), Blaise Pascal (1623–1662), Gaspard Monge (1746–1818) in Jean-Victor Poncelet (1788–1867). Tako se je v nekaj stoletjih krog sklenil: geometrija je navdihnila raziskavo perspektive v slikarstvu, ta pa je spodbudila rojstvo nove veje geometrije, projektivne geometrije (katere osnove lahko bralec najde v [7]).

Aritmetika

Aritmetika je bila v Leonardovem času precej elementarna. V knjigi anonimnega avtorja o umetnosti računanja (*L'arte de l'abaco*, Treviso, 1478), ki je bila prva tiskana matematična knjiga, so predstavljeni tipični aritmetični postopki tistega časa. Števila so razvrščena v kategorije *numeri semplici*: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, *numeri articuli* $10, 20, 30, 40, 50$, in *numeri misti*: $11, 12, 13$ itd. To razvrstitev naj bi motiviral način izvajanja operacij množenja in deljenja [1, str. 34]. V knjigi je razloženih pet osnovnih aritmetičnih operacij: štetje, seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje (»Numerare. Iongere. Cavare. Moltiplicare. e Partire.«), precej pozornosti je posvečene tudi razlagi desetiškega zapisa, ni pa modernih znakov za aritmetične operacije. Znaka $+, -$ vpelje šele G. Widmann leta 1489, znak $=$ R. Recorde leta 1557, G. Oughtred pa znaka $\times$ leta 1631 in : leta 1657.

Med računskimi algoritmi, razširjenimi v Leonardovem času, je treba omeniti *množenje s podvajanjem*, katerega različica je bila znana že starim Egipčanom. Tako so npr. $124 \times 35 = 4340$ dobili kot vsoto števil 124, $248 = 2 \times 124$ in $3968 = 124 \times 2^5$, saj je $35 = 1 + 2 + 32$.

Uporabljali so tudi *množenje s tabelo*, pri katerem se zmnožke posameznih parov števk vpisuje v pravokotno tabelo, potem pa »sešteva po diagonali« enice, desetice, stotice itd., kot kaže primer v tabeli 2.

Produkt dveh dvomestnih števil so dobili s *križnim množenjem* (»per crocetta«), kot v primeru iz tabele 3. Najprej zmnožimo enice $8 \times 6 = 48$, zapišemo enice 8, zapomnimo si 4 (desetice); vsota obeh produktov enic in desetic $4 \times 6 = 24$ in $8 \times 5 = 40$ je 64; prištejemo ji 4 in dobimo 68. Zapišemo desetice 8; zapomnimo si 6 (stotic). Zmnožku desetic $4 \times 5 = 20$ prištejemo 6 in dobimo 26 (stotic), torej je rezultat 2688.

Sicer pa tedanjo aritmetiko zaznamuje boj med konservativnimi privrženci računanja z abakusom (»abacisti«) in naprednejšimi privrženci ra-

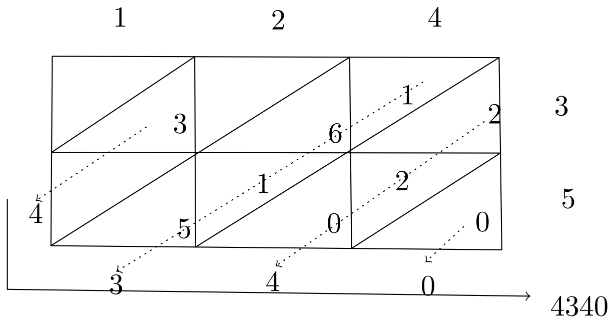


Tabela 2. Prikaz množenja s tabelo: $124 \times 35 = 4320$.

$$\begin{array}{c} 48 \\ \times \\ 56 \end{array}$$

Tabela 3. Primer križnega množenja: $48 \times 56 = 2688$.

čunanja z indijsko-arabskimi številkami (»algoritmisti«). Indijsko-arabske številke je vpeljal v Evropo Leonardo iz Pise (Fibonacci) (1170?–1250?) v knjigi *Liber Abaci*, objavljeni leta 1202 [1, str. 38]. Decimalnega zapisa še niso poznali, tako da npr. Leonardo rezultata deljenja 10 s 6 ni mogel zapisati kot 1,6, temveč v obliki $1 + \frac{4}{6} = 1\frac{2}{3}$ [1, str. 44].

Leonardo in matematika

Že kot otrok je učitelju matematike zastavljal izvirna vprašanja. V šoli se je učil matematiko za trgovsko rabo, vsestranski mojster Verrochio, pri katerem se je med svojim vajeništvom sicer naučil številnih praktičnih veščin in umetnosti, pa ga je poučil tudi o nečem globljem – o lepotah geometrije.

Do svojega 44. leta, pred srečanjem z Luco Paciolijem, je bil Leonardo kot matematik samouk, njegovo matematično znanje pa majhno ali pomanjkljivo. Tako je npr. za $\frac{12}{12}$ zapisal, da je enako $\frac{1}{0}$, do pravilnega rezultata pri krajšanju $\frac{270}{360}$ je prišel bolj z intuicijo kot z matematiko, pri deljenju $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ pa je sicer dobil pravilni rezultat $\frac{8}{9}$, za katerega pa je menil, da ni pravilen, saj je večji od deljenca; to sklepanje bi bilo pravilno, če bi bil delitelj večji od 1 [1, str. 71–72]. V *Arundelskem kodeksu* je primer njegovega neznanja, kako se množijo ulomki, saj je zapisal: $\frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{4}$ [1, str. 73].

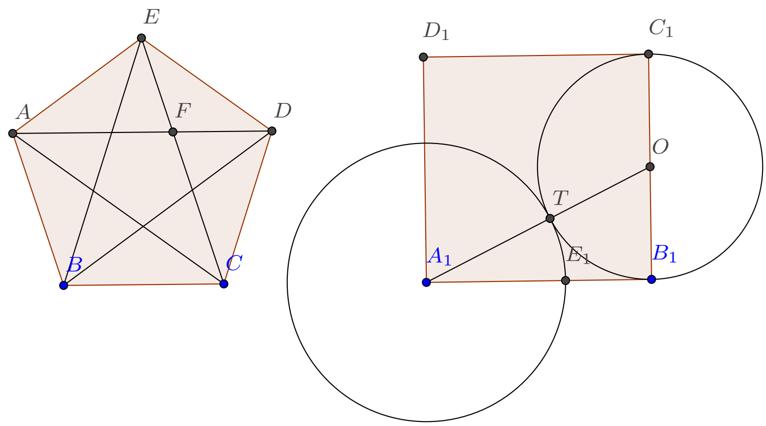
In s kakšnimi matematičnimi problemi se je ukvarjal Leonardo? Z najrazličnejšimi, od trivialnih do izredno težkih, nerešljivih s sredstvi, ki so bila tedaj na voljo. Leonarda so zanimale npr. geometrijske konstrukcije. Tako je npr. (še pred srečanjem s Paciolijem) za problem, kako včrtati pravilne n-kotnike krogu, iskal eksaktne in aproksimativne rešitve za $n = 3, 4, 5, \ldots, 48$. Svojih konstrukcij pogosto ne pojasni, kjer pa pravi, da bo podal dokaz, poda samo razlago postopkov. Neznanje latinščine in grščine ga ni oviralo, da ne bi bral, prepisoval in komentiral preprostih odlomkov iz Evklidovih *Elementov*.

Paciolijevo enciklopedijsko delo *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni e proporzionalitá*, ki ni bilo napisano v latinščini, je izšlo v Urbinu leta 1493 in v Benetkah leta 1494. Leonardo si je prepisoval cele pasuse iz te knjige, naredi celo povzetek poglavij, ki se nanašajo na teorijo razmerij. Najbolj ga je prevzela geometrija, predvsem problem kvadrature kroga in teorija lunic med krožnimi loki. Po njunem srečanju v Milanu leta 1494 se je Leonardo močno navdušil za matematiko. Od njega se je naučil, kaj pomeni »dokaz« v matematiki. V uvodu traktata o anatomiji je zapisal, po vzoru napisa nad Platonovo akademijo, naj teh zapisov ne bere, kdor ni matematik. Vendar je matematiko razumel nekoliko po svoje, v smislu tiste temeljne znanosti, ki daje gotovost vsem drugim. Podobne poglede razodeva njegova izjava, da je mehanika paradiž, v katerem matematični sadeži dozorijo.

Posebej ga je očaral zlati rez (ki ga na daljici AB določa točka E, za katero je $AB : AE = AE : EB$), saj je bil ta povezan s skrivnostjo lepega v umetnosti, s katerim so se ukvarjali že antični slikarji, kiparji in arhitekti.

V zlatem razmerju $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}61$ se sekajo npr. diagonale pravilnega petkotnika, takšno je tudi razmerje diagonale in stranice pravilnega petkotnika. Zagotovo so ga poznali že Pitagorejci, saj je bil pentagram njihovo skrivno znamenje. V zlati pravokotnik (v katerem sta si stranici v zlatem razmerju), se da včrtati kvadrat in dobiti manjši zlati pravokotnik, s ponavljanjem tega postopka pa dobimo neskončno zaporedje kvadratov, ki se vijejo v spirali, kar spominja na lupino brodnika. Po Leonardu, ki je ob študiju Vitruvija narisal *Kanon proporcev človeškega telesa*, so človekovi proporci idealni, kadar popek deli njegovo višino v zlatem razmerju. To Leonardovo misel je povzel tudi Dürer, ki na eni od svojih študij človeškega telesa nariše krožni lok, ki ima središče v popku, presečišče tega loka z vodoravno tangento, ki se dotika vrha glave, pa je tudi skrajna točka, ki jo dosežejo prsti iztegnjene roke.[2] Vendar je Leonardo za zlati rez uporabljal tudi zelo grobe približke, tako je npr. daljico dolžine 12 razdelil v razmerju $4 : 8$, kar je daleč od dobrega racionalnega približka $741 : 458$, ki bi ga sicer

[2]Od tod lahko izračunamo radij $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, če poznamo razdaljo a od popka do vrha glave in pravokotno projekcijo b od iztegnjene roke na vodoravno tangento.



Slika 1. Zlati rez v pravilnem petkotniku $AD : AF = AF : FD$ in konstrukcija točke E_1 na daljici A_1B_1, stranici kvadrata $A_1B_1C_1D_1$, za katero je $A_1B_1 : A_1E_1 = A_1E_1 : E_1B_1$.

lahko dobil iz svojih računov, če bi upošteval več decimalk [1, str. 89].

Za reševanje enačb z eno neznanko je uporabljal »il metodo della falsa posizione«, znano že iz Rhindovega papirusa, zelo popularno v renesansi, potem pa samo še v 19. stoletju. Po tej metodi npr. enačbo $x + \frac{x}{5} = 48$ poskusimo najprej rešiti s »falsa posizione« $x = 5$; če to vstavimo v levo stran, dobimo 6, kar je osemkrat manj od prave vrednosti, torej je rešitev $5 \times 8 = 40$.

Rad je imel (tako kot Luca Pacioli) aritmetične trike s števili. Rad je risal vozle (z vozli se danes ukvarja matematična teorija vozlov). Narisal je številne slike tlakovanj ravnine z nepravilnimi večkotniki (kar je področje, na katerem so se odlikovali zlasti Arabci v umetniških dekoracijah svojih arhitekturnih del), vendar ga je pri tem vodil bolj umetniški kot matematični navdih. Imel je zelo dobro razvito prostorsko predstavo, zato je lahko izdelal dobre zemljevide mest in pokrajin, narisane iz ptičje perspektive. Med zanimivimi Leonardovimi risbami z matematično vsebino je zanimiva slika nekaj deset kock z votlimi lici in odebeljenimi robovi, zloženimi v tridimenzionalno strukturo, podobno kakšni Escherjevi sliki [1, str. 113].

Ukvarjal se je tudi s simetrijami rozet in kupol. »Leonardov izrek«, kot mu ga je pripisal George E. Martin v [6], pravi (v sodobnem matematičnem jeziku), da je grupa simetrij ravninskega lika lahko le ciklična (sestavljena iz samih rotacij) ali diedrska (sestavljena iz rotacij in zrcaljenj).[3]

[3]Pri tem se Martin sklicuje na Hermana Weyla (1855–1955), ki pri svoji obravnavi cikličnih grup v [10] sicer večkrat citira Leonarda, nikjer pa ne pokaže mesta, kjer bi

Povsem postranske matematične zadeve so mu vzele strahovito veliko časa. Potem ko je npr. ugotovil, da človekovo telo in njegovi deli v gibanju ohranjajo prostornino, prostornina je torej invarianta pri gibanju telesa, je vrsto let z veliko zavzetostjo študiral pretvorbe teles v telesa z enakim volumnom in pretvorbe likov v like z enako ploščino. To je vodilo do njegovih poskusov kvadriranja kroga, ki ga je drobil na vse manjše trikotnike. Na ta način ni prišel prav daleč.

Matematiko je visoko cenil, kot kažejo zapisi iz njegovih beležnic; uvidel je, da je nujna pri formulaciji naravnih zakonov in naravoslovnih teorij. Matematiko je uporabljal v umetnosti (perspektiva, proporci človeškega telesa) in naravoslovju (optika, študije osvetljenosti lune in zemlje od sonca). Zelo spretno in domiselno jo je, v povezavi s fiziko, uporabljal tudi pri svojih tehničnih izumih. Za nekatere od njih je dejansko izdelal modele in jih preizkusil, za številne, ki so bili veliko pred časom, pa je narisal le načrt oziroma študije. Številni njegovi izumi so bili izboljšave izumov, ki so jih razvili že drugi, tako npr. film Leonardo – človek, ki je rešil znanost, pove, da je (mnogo premajhno) padalo pred Leonardom izumil že renesančni inženir Taccola, ki je z napravo skušal reševati ljudi iz gorečih hiš. Geometrijo je obvladal bolje kot aritmetiko, algebre praktično ni poznal (lahko bi rekli: njegova genialnost je bila bolj »analogna« kot pa »digitalna«). Paradoks, zakaj je bil računsko nespreten pri elementarnih aritmetičnih operacijah, pri čemer se je tudi dostikrat zmotil, precej dobro pa se je kot matematik znašel pri uporabi matematike v tehničnih izumih in v umetnosti, bi bilo treba šele razložiti; morda je odgovor prav v njegovi vsestranskosti in zmožnosti prehajanja med različnimi področji, ki je nepogrešljiva pri vseh praktičnih problemih. Čeprav teoretično ni bil dorasel številnim matematičnim problemom, ki se jih je lotil, pa je bil neverjetno domiseln pri zastavljanju zanimivih problemov in zelo uspešen pri različnih uporabah matematike. Verjel je, da mora slikar poznati geometrijo in si z njo pomagati pri kompoziciji svojih del, podobno kot je Platon menil, da mora filozof poznati geometrijo. Ta njegova širina pa ni ugajala vsem. Ozko usmerjeni kritiki njegovega dela so mu npr. očitali, da je njegova geometrija »geometrija inženirja«, njegovi izumi pa »izumi geometra«.

Traktat o slikarstvu je Leonardo napisal v matematičnem stilu, z definicijami, dokazi in ilustracijami svojih opažanj in trditev. Definicije različnih geometrijskih pojmov so raztresene po različnih kodeksih. Ravno črto definira povsem drugače kot Evklid: kot takšno, ki opiše najkrajšo razdaljo med dvema točkama. V »definiciji premice« pravi, da premica nima v sebi nobene substance ali materije in je torej nekakšna duhovna entiteta (»cosa spirituale«). V kratki razpravi »O točki« točko definira kot »kar je na nekem mestu, ga pa ne zaseda« oz. v italijanskem izvirniku: »il punto e in

Leonardo dejansko dokazal ali vsaj obravnaval tak izrek [1, str. 112].

sito senza occupazion il sito«. K istim temam se znova in znova vrača z novimi argumenti. Privlačili so ga tudi znameniti grški problemi konstrukcij z ravnilom in šestilom. Znameniti Délski problem podvojitve kocke »reši« aproksimativno: kocka s stranico 4 ima 64 kock, kocka s stranico 5 ima 125 kock, $2 \times 64 = 128$ je približno 125. Nekje drugje pa isti problem reši na podoben način, kot so ga že v času Platona, vendar ne z ravnilom in šestilom [1, str. 93–98]. V številnih kodeksih so našli njegove izračune robov, diagonal in površin različnih teles. Veliko časa in energije je posvetil kvadraturi različnih krivočrtnih likov, npr. likov, ki spominjajo na Hipokratove lunice: o tej temi je že Alberti napisal knjižico *De lunularum quadratura*. V *Atlantskem kodeksu* je 180 slik, posvečenih reševanju problema: včrtati bel kvadrat v črn krog, nato pa dobljene krožne segmente pretvoriti v ploščinsko enake like drugačnih oblik, tako da bo razmerje med črno in belo pobarvanimi liki ostalo konstantno. To Leonardovo delo, čeprav obarvano s slikarskim načinom razmišljanja – iskanjem lepih vzorcev, vsaj po svojem sistematičnem pristopu spominja na matematično raziskavo z določeno vrednostjo, npr. na različne cenzuse grafov, koristne v teoriji grafov.

Zaključimo lahko, da se Leonardo v »čisti« matematiki ni odlikoval tako kot na drugih področjih. Je pa prispeval nekaj zelo pomembnih inovacij, aproksimativnih konstrukcij, ilustracij poliedrov, zanimivi so tudi njegovi poskusi kvadriranja ukrivljenih likov, slike tlakovanj, vozlov itd. Njegova matematika je bila predvsem geometrija, namenjena uporabi v umetnosti, pa tudi v mehaniki, inženirstvu, optiki, tehniki itd. Še danes nam je lahko neizčrpen navdih pri iskanju uporab matematike, predvsem geometrije, na različnih področjih.

LITERATURA

[1] G. T. Bagni in B. D'Amore, *Leonardo e la Matematica*, Giunti Editore, Milano, 2006.

[2] R. Byrne, *The Elements of Euclid*, William Pickering, London, 1847.

[3] M. Clagett, *Studies in Medieval Physics and Mathematics*, Variorum Reprints, London, 1979.

[4] W. Isaacson, *Leonardo da Vinci* (podnaslov: *Fascinantna biografija enega največjih genijev vseh časov*), Učila International, Tržič, 2018.

[5] J. Kovič, *Leonardo da Vinci (1452–1519) – ob petstoletnici njegove smrti: Renesančni človek*, Obzornik. mat. fiz. **66** (2019), 105–113.

[6] G. E. Martin, *Transformation geometry*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[7] M. Mitrović, *Projektivna geometrija*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2009.

[8] S. Skinner, *Sacred Geometry*, Sterling, New York, 2006.

[9] L. da Vinci, *Traktat o slikarstvu*, Studia humanitatis, Ljubljana, 2014.

[10] H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton, 1952.

[11] *Luca Pacioli, Divina proportione*, dostopno na `archive.org./details/divinaproportion00paci/page/n4`, ogled 2. 6. 2019.

[12] *Umetnost, Svetovna zgodovina*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 2010.