

Prečkanje reke

↓↓↓

ALEKSANDRA TEPEH

→ Prečkanje reke spada med tiste vrste nalog, v katerih moramo z majhnim čolnom z enega na drugi breg reke prepeljati ljudi, živali ali predmete. Pri tem imamo podane omejitve, koliko oseb, živali oz. predmetov je lahko hkrati v čolnu ter v kakšni družbi so lahko. Te vrste nalog navadno srečamo pri logiki, lahko pa se jih lotimo tudi s pomočjo teorije grafov. Ne samo, da tako nalogo rešimo na drugačen, zanimiv način, najdemo lahko tudi vse možne rešitve in se prepričamo, katera med njimi je najkrajša.

Volk, koza in zelje

Mož, ki je obiskal zelo posebno tržnico, se iz nje vrača z volkom, kozo in zeljem. Na poti domov mora prečkati reko, vendar ima za to na razpolago le majhen čoln, v katerega gre poleg njega samo še ena od stvari, ki jih je kupil na tržnici. A koze ne sme pustiti same z volkom, ker bi jo volk požrl. Prav tako ne smeta ostati sama skupaj koza in zelje, saj bi koza zelje pohrustala. Ali lahko mož vse varno spravi na drugo stran reke?

Če ste se s tako ali podobno uganko že srečali, to ni nič presenetljivega. Ljudje se namreč z njo ukvarjajo že od srednjega veka dalje. Prvič je bila zapisana že konec 9. stoletja v latinskem rokopisu *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, ki predstavlja eno najzgodnejših zbirk zabavne matematike. Od tedaj se je pojavilo veliko različic te uganke. V eni izmed njih

poleg kmeta nastopajo lisica, goska ter vreča fižola, spet v drugi panter, prašiček in ovsena kaša. Danes jo v različnih preoblikah najdemo v računalniških igrinah, pojavila pa se je tudi v priljubljeni risani seriji *Simpsonovi*, kjer Homer skuša čez reko prepeljati Maggie, kužka in strup za podgane, ki izgleda kot bonboni. V vseh različicah uganke tako nastopajo trije objekti A, B in C , pri čemer ne A in B ne B in C ne smeta ostati sama brez nadzora.

Uganko lahko rešimo z naslednjim logičnim premislekom. Najprej mora mož na drugo stran reke varno spraviti kozo, saj bo v nasprotnem primeru volk pojedel kozo oz. bo koza pojedla zelje. Ko se mož vrne, ima na izbiro, da prepelje na drugo stran bodisi volka bodisi zelje. Če prepelje na drugo stran volka in se sam vrne po zelje, bo medtem volk pojedel kozo. Če pa prepelje zelje in se vrne po volka, bo koza pohrustala zelje. To težavo lahko reši tako, da na drugo stran odpelje volka ter s seboj nazaj vzame kozo. Sedaj lahko prepelje na drugo stran še zelje in se brez bojazni vrne po kozo. Mož tako reko prečka sedemkrat v naslednjih korakih:

- prepelje kozo,
- se sam vrne nazaj,
- prepelje volka,
- nazaj grede vzame kozo,
- prepelje zelje,
- se sam vrne nazaj,
- prepelje na drugo stran še kozo.

Rešitve uganke tako ni bilo posebej težko poiskati. A radovedni ugankar se bo vprašal, ali je to edina rešitev ali nemara celo obstaja rešitev, kjer bi se mož čez reko peljal manjkrat. Odgovor na ti vprašanji lahko dobimo s pomočjo teorije grafov.

Rešitve uganke Volk, koza in zelje s pomočjo teorije grafov

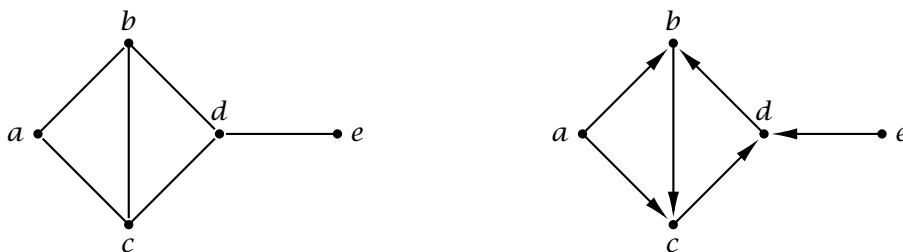
Kako pojmuje graf, je že bilo pojasnjeno v preteklih številkah Preseka (zanimivo predstavitev uporabe grafov lahko najdemo npr. v izdaji letnika 46). Spomnimo se, da si pod grafom predstavljamo množico vozlišč (točk) ter povezav (črt) med njimi. Označimo ga z $G = (V(G), E(G))$, kjer $V(G)$ predstavlja množico vozlišč, $E(G)$ pa množico povezav **grafa** G . Levi graf na sliki 1 predstavlja graf G , za katerega velja $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ in $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$. Povezavo ab bi lahko označili tudi z ba , saj je pomembno le to, da sta vozlišči povezani. Če sta vozlišči povezani s povezavo, rečemo da sta **so-sednji**. V grafu G sta a in b so-sednji, rečemo pa tudi, da je a **sosed** od b (in b so-sosed od a), vsi sosedi vozlišča b pa so a, c in d .

Če vsako povezavo usmerimo od enega vozlišča k drugemu, govorimo o **usmerjenem grafu**. Usmerjenemu grafu rečemo tudi **digraf**. Običajna oznaka za digraf je $D = (V(D), A(D))$, kjer je $V(D)$ množica vozlišč, $A(D)$ pa množica usmerjenih povezav digrafa D . Primer digrafa vidimo desno na sliki 1. Zanj velja $V(D) = \{a, b, c, d, e\}$, množica usmerjenih povezav pa je enaka $A(D) = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, d), (d, b), (e, d)\}$, kjer smo s posebnim zapisom (a, b) hoteli poudariti usmerjenost povezave med vozliščema a in b ; ta povezava je usmerjena od vozlišča a do vozlišča b . Če bi pisali (b, a) , bi to pomenilo ravno nasprotno usmerjenost.

Spoznajmo še pojem **sprehoda** v grafu oz. digrafu. Tega si lahko predstavljamo kot zaporedje vozlišč, ki nam določa, po kakšnem vrstnem redu

se po povezavah »sprehajamo« od vozlišča do vozlišča. Primera sprehodov v grafu G na sliki 1 sta $abcde$ in $abcdedc$. Ker nam v primeru digrafov puščice nakazujejo, v katero smer je možno prehoditi povezavo, govorimo o **usmerjenih sprehodih**. V digrafu D sta primera usmerjenih sprehodov $abcd$ in $abcdbc$. Opazimo, da ne obstaja usmerjeni sprehod od vozlišča a do vozlišča e , saj lahko po povezavi med d in e gremo le v smeri od e proti d , ne pa tudi obratno.

Sedaj lahko uganke Volk, koza in zelje predstavimo v jeziku teorije grafov. Graf, ki ustreza tej uganke, bomo tvorili tako, da bo vsako stanje predstavljalo eno vozlišče. Recimo, da so na začetku vsi (mož, volk, koza in zelje) na levem bregu reke. To stanje bomo predstavili z vozliščem a . Obratno, končno stanje, ko so torej vsi na desnem bregu reke, označimo z b . Premislimo, kakšna stanja so še dovoljena. Mož seveda ne sme biti sam na enem bregu reke, saj bi bili preostali na drugem bregu brez nadzora. Lahko pa je na enem bregu reke sam volk, preostali pa se nahajajo na drugem bregu reke. Pri tem stanje, ko je volk na levem bregu, ostali pa na desnem, označimo s c , obratno stanje, ko je volk sam na desnem bregu, pa z d . Podobno dobimo še stanja e, f, g, h , katerih pomen je razviden iz tabele 1 (v tej tabeli M predstavlja moža, K kozo, Z zelje in V volka). Ko smo ugotovili vsa možna stanja, v katerih je na enem bregu le en sam, smo seveda tudi opisali že vsa stanja, ko so na bregu trije. Tako nam ostanejo le še stanja, v katerih sta dva na enem, dva pa na drugem bregu. Toda to je možno le, če sta na enem bregu skupaj mož in koza, na drugem pa volk in zelje. Ti stanji v tabeli 1 najdemo pod oznakama i in j . Tako bo imel naš graf 10 vozlišč.



SLIKA 1.

Graf G (levo) in digraf D (desno)



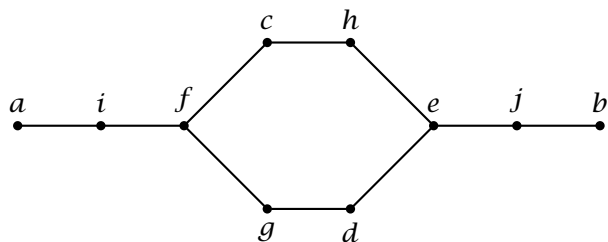
stanje	levi breg	desni breg
<i>a</i>	MKZV	
<i>b</i>		MKZV
<i>c</i>	V	MKZ
<i>d</i>	MKZ	V
<i>e</i>	K	MZV
<i>f</i>	MZV	K
<i>g</i>	Z	MKV
<i>h</i>	MKV	Z
<i>i</i>	ZV	MK
<i>j</i>	MK	ZV

TABELA 1.

Tabela stanj

Sedaj se lotimo še iskanja povezav. Dve vozlišči (stanji) bomo povezali le, če je glede na omejitve iz naloge možen prehod iz enega stanja v drugega. Tako je npr. možen prehod iz stanja *a* v stanje *i*, saj lahko mož prepelje kozo na desni breg, volk in zelje pa ostaneta na levem bregu. Seveda je možen tudi obraten prehod, torej iz stanja *i* v stanje *a*, saj se lahko mož in koza vrmeta na levi breg. Zato bomo v grafu narisali povezavo med vozliščema *a* in *i*. Ne moremo pa npr. povezati vozlišč *a* in *f*, saj bi to pomenilo, da se je koza sama peljala s čolnom. To seveda ni možno, saj lahko s čolnom upravlja le mož. Vozlišča *a* tudi ne moremo povezati z vozliščem *b*, saj na čolnu ni prostora, da bi se vsi štirje prepeljali hkrati. Hitro lahko ugotovimo, da je vozlišče *a* mogoče povezati le z vozliščem *i*. Nato se lotimo premišljevanja, s katerim vozliščem lahko povežemo vozlišče *b*, sledi premislek glede vozlišča *c* itd. Tako sistematično pridemo do vseh povezav v grafu, ki je prikazan na sliki 2.

Da bi poiskali rešitev uganke, je torej potrebno najti sprehod med vozliščema *a* in *b*. Iz grafa hitro razberemo, da je takih sprehodov dejansko zelo veliko (eden je npr. sprehod *aifchedgfchejb*). Najkrajša sprehoda pa sta le dva. To sta sprehoda *aifchejb* in *aifgdej b*. Oba sta dolžine 7 (dolžino sprehoda dobimo tako, da preštejemo število povezav sprehoda), kar ustreza najmanjšemu številu vo-



SLIKA 2.

Graf uganke Volk, koza in zelje

ženj, ki jih mora opraviti mož, da vse prepelje na drugo stran reke. Rešitvi, ki smo jo dobili v prejšnjem razdelku, ustreza sprehod *aifgdej b*.

Misijonarji in ljudožerci

Trije misijonarji in trije ljudožerci morajo prečkati reko. Na razpolago imajo majhen čoln, v katerem sta lahko hkrati največ dve osebi. Če so na katerikoli strani reke prisotni misijonarji (pri čemer je mišljeno, da se lahko nahajajo na samem bregu ali še v čolnu), jih mora biti več ali enako število kot ljudožercev. V nasprotnem primeru ljudožerci misijonarje pojedo. Kako lahko vseh šest ljudi varno prečka reko?

Nalogo lahko rešimo z naslednjimi koraki.

- En ljudožerec in en misijonar prečkata reko.
- Misijonar se vrne na prvotno stran reke.
- Dva ljudožerca prečkata reko.
- Eden od njiju se vrne.
- Dva misijonarja prečkata reko.
- Vrmeta se en ljudožerec in en misijonar.
- Dva misijonarja prečkata reko.
- En ljudožerec se vrne na prvotno stran reke.
- Dva ljudožerca prečkata reko.
- En ljudožerec se vrne na prvotno stran reke po zadnjega ljudožerca.
- Oba ljudožerca se pridružita vsem preostalim osebam na drugi strani reke.

Spet nas bo zanimalo, ali poleg te rešitve obstaja še kakšna. Ali morda obstaja rešitev, kjer bi bilo potrebno manjše število prevozov kot 11, kolikor je potrebnih v zgornji rešitvi?

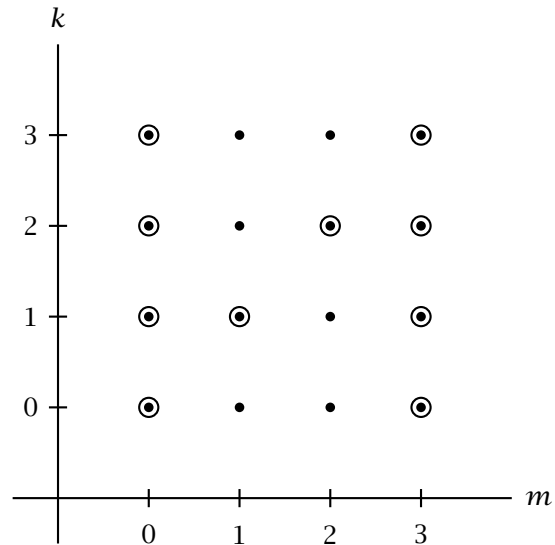
Rešitev s pomočjo grafa

Po zgledu prejšnje naloge bi lahko misijonarje označili npr. z A, B, C , ljudožerce pa z X, Y, Z ter s pomočjo teh oznak zapisali vsa možna stanja. Ker pa misijonarjev ni treba ločiti med sabo in prav tako ne ljudožerev, saj je pomembno le njihovo število na posameznem bregu (glede na besedilo naloge se pri tem štejejo tudi potniki, ki so ob bregu na privezanem čolnu), bo za zapis vseh stanj zadostoval zapis s pomočjo urejenih parov. Tako bo urejeni par (m, k) predstavljal stanje, ko se na levem bregu reke nahaja m misijonarjev in k ljudožercev. Stanj na desnem bregu reke nam ni treba posebej opisovati, saj vemo, da mora biti skupno število misijonarjev in ljudožercev v vsakem trenutku enako 3. Ker velja $0 \leq m \leq 3$ in $0 \leq k \leq 3$, obstaja 16 možnih urejenih parov (m, k) . Toda nekatere od njih je potrebno izločiti, npr. par $(1, 3)$, saj v tem primeru število ljudožercev na levem bregu presega število misijonarjev. Prav tako je treba izločiti par $(2, 1)$, saj to pomeni, da sta na desnem bregu dva ljudožerca, misijonar pa le en. Opazimo, da so torej dovoljeni le pari (m, k) , ki zadoščajo naslednjim pogojem:

- $0 \leq m \leq 3$,
- $0 \leq k \leq 3$,
- $m = k$ ali $m = 0$ ali $m = 3$.

Za boljše razumevanje si jih lahko predstavimo z diagramom na sliki 3, kjer so vsa možna stanja predstavljena s točkami, pri čemer so dovoljena stanja tudi obkrožena.

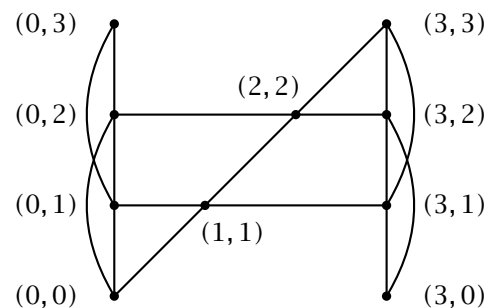
Sedaj premislimo, med katerimi dovoljenimi stanji je mogoče prehajati glede na omejitve, da se s čolnom lahko peljeta največ dve osebi. Če je prehod iz enega stanja v drugega možen, bomo v grafu, kjer vozlišča predstavljajo stanja, ustrezni vozlišči povezali. Povežemo lahko npr. vozlišči $(3, 3)$ in $(3, 2)$, saj se lahko en ljudožerec pelje iz levega na desni breg, ali pa tudi obratno. Vozlišče $(3, 3)$ lahko povežemo še z $(2, 2)$, kar bi v primeru sprehoda po tej povezavi od $(3, 3)$ do $(2, 2)$ pomenilo, da sta se en misijonar in en ljudožerec peljala z levega na desni breg. Če pa bi se po omenjeni povezavi sprehodili v smeri od $(2, 2)$ do $(3, 3)$, bi to pomenilo, da sta se ljudožerec in misijonar peljala z desnega na levi breg. Pri



SLIKA 3.

Diagram (dovoljenih) stanj

iskanju vseh vozlišč, ki so sosednja z danim vozliščem (m, k) , nam pomaga premislek, da bo prevoz čolna z levega na desni breg zmanjšal vrednosti m in k . Števili m in k se skupaj zmanjšata za največ 2, saj lahko gresta hkrati na čoln največ dva človeka. Tako so kandidati za sosedne vozlišča (m, k) vozlišča $(m - 1, k - 1)$, $(m, k - 2)$, $(m - 2, k)$, $(m - 1, k)$ in $(m, k - 1)$, pri čemer posamezna možnost ne pride v poštev, če je v urejenem paru prvo število manjše od drugega ali pa je katero od števil negativno. Tako dobimo graf, prikazan na sliki 4.



SLIKA 4.

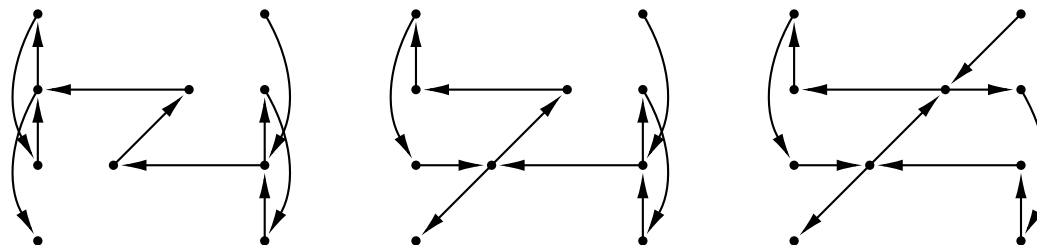
Graf uganke Misijonarji in Ljudožerci



Cilj naloge je poiskati usmerjeni sprehod iz vozlišča (3, 3) do vozlišča (0, 0). Morda nam pritegne pozornost kratek usmerjeni sprehod (3, 3)(2, 2)(1, 1)(0, 0). Toda tako zaporedje vozlišč nam da tri povezave (prva je povezava (3, 3)(2, 2), druga (2, 2)(1, 1) in tretja (1, 1)(0, 0)), ki vse ustrezajo vožnjam čolna z levega na desni breg, kar seveda ne more biti rešitev. V prejšnji nalogi smo se lahko po povezavah sprehajali poljubno, saj so vozlišča ustrezala tako stanjem na levem kot na desnem bregu reke. V tokratnem grafu pa vozlišča predstavljajo le stanja na levem bregu. Kako torej poiskati sprehod od vozlišča (3, 3) do vozlišča (0, 0), da bo upoštevana izmeničnost voženj čolna z levega na desni breg in obratno? Poiskali bomo usmerjeni sprehod, kjer bomo pazili na ustrezno usmeritev povezav. Opazimo namreč lahko naslednje: če v grafu »vertikalno« povezavo usmerimo od spodaj navzgor (taka je npr. povezava med vozliščema (0, 0) in (0, 2)), to pomeni povečanje števila ljudožercev na levem bregu, zato taka povezava predstavlja prevoz (ljudožercev) z desnega na levi breg. Če »vodoravno« povezavo usmerimo od leve proti desni (taka je npr. povezava od (0, 2) do (2, 2)), to ustreza povečanju števila misijonarjev na levem bregu, kar ponovno pomeni vožnjo čolna z desnega na levi breg. Po podobnem premisleku o preostalih možnih usmeritvah pridemo do ugotovitve, da prevozom z desnega na levi breg ustrezajo usmeritve:

- ↑ (od spodaj nazgor),
- → (od leve proti desni) in
- ↘ (od spodaj levo do zgoraj desno),

prevozom z levega na desni breg pa ustrezajo usmeritve:



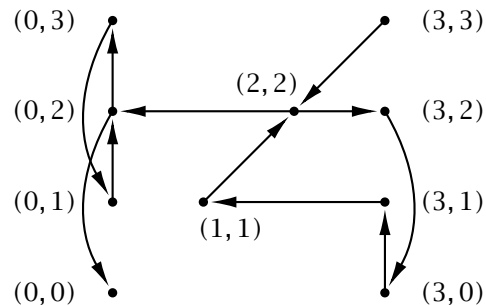
SLIKA 6.
Preostale rešitve uganke

- ↓ (od zgoraj navzdol),
- ← (od desne proti levi) in
- ↙ (od zgoraj desno do spodaj levo).

S pomočjo tega po krajšem premisleku najdemo usmerjeni sprehod

- (3, 3)(2, 2)(3, 2)(3, 0)(3, 1)(1, 1)(2, 2)(0, 2)(0, 3)(0, 1)(0, 2)(0, 0)

na sliki 5, ki ustreza rešitvi, ki smo jo že navedli v razdelku Misijonarji in ljudožerci.



SLIKA 5.
Ena od možnih rešitev

Spet nas bo zanimalo, ali je to edina rešitev ali nemara obstaja še krajša. Do odgovora pridemo s pomočjo grafa na sliki 4, v katerem bomo za lažjo razlago vsa vozlišča grafa razporedili v tri množice:

- $L = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$,
- $S = \{(1, 1), (2, 2)\}$,
- $D = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Ker ni nobene povezave med vozliščem iz množice D in vozliščem iz množice L , mora iskana usmerjena pot od vozlišča $(3, 3)$ do vozlišča $(0, 0)$, ki bo predstavljala rešitev naloge, nujno vsebovati vozlišče iz množice S . Če bi se v vozlišče $(2, 2)$ premaknili iz vozlišča $(3, 3)$ ali $(3, 2)$, se moramo v naslednjem koraku premakniti v vozlišče $(3, 2)$ ali $(3, 3)$. Tako hitro vidimo, da mora iskani usmerjeni sprehod po tem, ko zapusti vozlišča iz D , nujno iti preko vozlišča $(1, 1)$, edini možni način za to pa je preko vozlišča $(3, 1)$. Edini možni način, da iz $(1, 1)$ pridemo do nekega vozlišča iz L , je, da se iz $(1, 1)$ premaknemo v $(2, 2)$ in nato v $(0, 2)$. Tako bo iskani usmerjeni sprehod zagotovo vseboval zaporedje $(3, 1)(1, 1)(2, 2)(0, 2)$. Od $(3, 3)$ do $(3, 1)$ je možno priti na dva različna načina: preko zaporedja $(3, 3)(3, 1)(3, 2)(3, 0)(3, 1)$ ali $(3, 3)(2, 2)(3, 2)(3, 0)(3, 1)$. Prav tako obstajata le dva različna načina, kako iz vozlišča $(0, 2)$ doseči vozlišče $(0, 0)$. Tako ugotovimo, da obstajajo natanko štiri različne rešitve uganke. Eno od rešitev smo že videli na sliki 5, preostale prikazuje slika 6. Vse štiri rešitve zahtevajo 11 voženj čolna.

Nalogi, ki smo si ju ogledali, najdemo tudi na spletni strani www.nauk.si/materials/418/out/index.html#state=1, kjer je še več zanimivih uganek. Morda koga zamika, da se s pomočjo teorije grafov loti še katere.

Literatura

- [1] River crossing puzzle, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/River_crossing_puzzle.
- [2] Fox, goose and bag of beans puzzle, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Fox,_goose_and_bag_of_beans_puzzle.
- [3] Prečkanje reke, dostopno na www.nauk.si/materials/418/out/index.html#state=1.
- [4] Robert Fraley, Kenneth L. Cooke in Peter Detrick, *Graphical Solution of Difficult Crossing Puzzles*, Mathematics Magazine, **39** (1966), 151–157, dostopno na https://www.jstor.org/stable/2689307?seq=1#metadata_info_tab_contents.

× × ×

Naloge na Plemljevi maturi

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ Akademik prof. dr. Josip Plemelj (1873–1967), svetovno znani matematik, prvi rektor ljubljanske univerze, je obiskoval osemrazredno klasično gimnazijo v Ljubljani in na njej uspešno maturiral v šolskem letu 1893/94. Pot do njegove mature pa ni bila gladka, ker se v zadnji razred zaradi incidenta (podrobnosti so opisane v [3]) ni mogel vpisati. Kot privatist je opravljal izpite za prvo polletje osmega razreda na gimnaziji v Novem mestu, za drugo polletje pa na gimnaziji v Ljubljani, kjer je tudi maturiral.

Gimnazije so na koncu šolskega leta objavile poročilo o svojem delu. Letna poročila ljubljanske klasične gimnazije, ki jo je obiskoval Plemelj, so bila tiskana, napisana pa so bila v nemščini. V poročilih so bili objavljeni sezname profesorjev in dijakov po razredih, seznamami vsebin predmetov, potrebnih učbenikov, učil, poljudnih predavanj, šolska statistika, pa tudi maturitetne naloge. Na začetku poročil je bil daljši znanstveni prispevek kakega profesorja, v poročilu za šolsko leto 1894/95 npr. o lomu svetlobe v Zemljini atmosferi z upoštevanjem spremenljivega lomnega količnika avtorja Matevža Voduška.

Kot je razvidno iz letnih poročil [1, 2] ljubljanske gimnazije, so potekali pisni maturitetni izpiti v polletnem roku od 11. do 16. junija, ustni izpiti pa so se začeli 9. julija in končali 14. julija 1894. Za ta

