Bernoullijeva lemniskata

Dr. Marko Razpet
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Izvleček

V članku na kratko opišemo zgodovino Bernoullijeve lemniskate in nekaj njenih geometrijskih konstrukcij, ki jih realiziramo z Geo-Gebro. Izpeljemo enačbo Cassinijevega ovala, ki je v posebnem primeru Bernoullijeva lemniskata. Podane so nekatere njene lastnosti.

Ključne besede: origami, J. Bernoulli, G. D. Cassini, R. Descartes, Cassinijev oval, elastična krivulja, lemniskata, ogrinjača, geometrijska konstrukcija, GeoGebra

Lemniscate of Bernoulli

Abstract

The article briefly describes the history of the lemniscate of Bernoulli and some of its geometric constructions, which are realized with GeoGebra. The equation of the Cassini oval is derived, which is a special case of the lemniscate of Bernoulli. Some of its properties are given.

Keywords: Origami, J. Bernoulli, G. D. Cassini, R. Descartes, Cassini oval, elastic curve, lemniscate, envelope, geometric construction, GeoGebra

Uvod

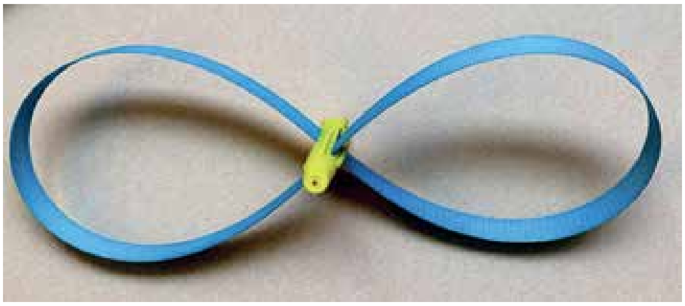
V osemdesetih letih preteklega stoletja sta otroka dobila tanko knjižico, ki obravnava umetnost prepogibanja papirja – origami. Slikovna navodila, kako se prepogiba papir, sta hitro razumela in v nekaj urah je bilo stanovanje polno papirnatih ptičev, tjulnjev, zajčkov in barčic. Če drugega ne, je bil pri hiši nekaj časa mir, otroka pa sta razvijala domišljijo in ročno spretnost. Kasneje smo vsi skupaj spoznali, da je prepogibanje papirja prava matematična znanost, o kateri je nastala in še nastaja obsežna literatura.

Slika 1: Upogib papirja.

Origami je doma na Japonskem in se je od tam razširil po vsem svetu. Po naših šolah je lahko del likovne vzgoje, saj razvija odnos do ustvarjalnega in umetniškega dela. Prepogibanje papirja pa ni le zabava in umetnost, ampak je lahko tema resnega matematičnega raziskovanja. O tem pišejo seminarske naloge, članke, diplomska in magistrska dela ter doktorske disertacije.

V prispevku se ne bomo posebej ukvarjali s prepogibanjem papirja, ampak z neko matematično krivuljo, ki jo opazimo pri upogibu papirja, preden ga do konca prepognemo do ostrega roba. Pravokoten, nezmečkan list nekoliko debelejšega papirja ali prozorne folije previdno upognemo tako, da združimo nasprotna robova pod pravim kotom. Dobimo valjasto ploskev, katere prečni presek je krivulja, ki jo bomo obravnavali v nadaljevanju. Papir je prožen in zanj veljajo zakoni elastomehanike, tako kot na primer tanka prožna palica. Zato zavzame določeno obliko, ki je razvidna na sliki 1.

Upogibamo in prepogibamo pa lahko tudi papirnate in drugačne trakove in dobivamo zanimive oblike. Primerno dolg plastičen trak od embalaže se lepo upogiba in prav tako dobimo oblike, ki spominjajo na sliko 1. Brez težav lahko že otroci naredijo iz takega traku lepo, simetrično pentljo, podobno znaku ∞, kakršna je na sliki 2. Za pravokotno sekanje poskrbi primeren zidni vložek.



Slika 2. Dvojni upogib prožnega traku.

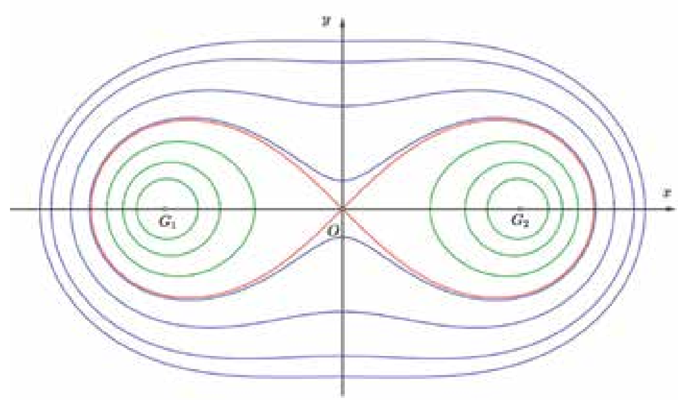
Sredinsko črto upognjenih tankih prožnih palic ali trakov mehaniki imenujejo *elastična krivulja*. Za take krivulje sta se zanimala matematika, brata Jakob (1655–1705) in Johann Bernoulli (1667–1748). Rodbina Bernoullijevih je zanimiva, ker je dala več odličnih matematikov in fizikov. Več stvari so poimenovali po kakšnem Bernoulliju, tako da se včasih težko ugotovi, po katerem. Pogosto sta dva približno v istem času študirala isti problem in objavila podobna članka, celo v isti reviji. Jakob je leta 1694 v reviji *Acta Eruditorum* objavil članek, ki dejansko omenja algebrsko krivuljo, ki ima enačbo $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$. Članek je napisan v latinščini s črkami, ki so jih takrat uporabljali tiskarji. Nastal je sicer ob posebnem problemu elastične krivulje, uporablja pa besedo *lemnisci*, kar je rodilnik ednine samostalnika *lemniscus*. Bernoulli piše, da ima krivulja z enačbo $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$, ki je četrte razsežnosti, obliko »jacentis notæ octonarii ∞, seu complicata in nodum fasciæ, sive lemnisci, d'un noud de ruban Gallis.« Besedilo je deloma v francoščini. Namesto enačba ali krivulja četrte razsežnosti danes rečemo enačba ali krivulja četrte stopnje. Bernoulli piše, da ima omenjena krivulja obliko ležeče osmice, torej ∞, ali v vozel zvitega traku ali *lemniskusa*, obliko vozla francoskega traku. Očitno je bila beseda *lemniscus* matematikom všeč in krivuljo so poimenovali *curva lemniscata*, s trakovi okrašena krivulja, krajše *lemniskata*. Sicer pa je beseda lemniscus grškega izvora. Stari Grki so zmagovalcem na športnih igrah na glavo pripeli lovorjev venec s posebnim volnenim trakom, ki se je v grščini imenoval *lemniskos*. Beseda lemniscus je znana tudi v anatomiji. Navadni ljudje imamo lemniscuse v glavi, ne da bi za to sploh vedeli, na primer *lemniscus medialis* in *lemniscus lateralis*.

V Bernoullijevem prispevku opazimo, da avtor še ni uporabljal znaka za kvadrat, na primer x^2, ampak je pisal je kar xx. Eksponentni zapis se je ustalil v času Leonharda Eulerja (1707–1783). V nekem obdobju so eksponentni zapis x^n uporabljali za naravne $n \geq 3$.

Znanstveno revijo *Acta Eruditorum*, kar v latinščini pomeni dela učenjakov, izobražencev, sta leta 1682 v Leipzigu postavila na noge nemški filozof in znanstvenik Otto Mencke (1644–1707) ter bolj znani filozof in matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Od znanih so poleg Bernoullijev v njej objavljali še Euler, Tschirnhaus, Laplace in Lalande. Revija je objavljala teološke, pravne, medicinske, fizikalne, matematične, zgodovinske, geografske, filozofske in filološke razprave. Besedo lemniskata so uporabili tudi za dve drugi krivulji, Boothovo in Geronovo lemniskato. V tem prispevku bomo razpravljali samo o Bernoullijevi lemniskati, krajše o lemniskati, ki ima v pravokotnih kartezičnih koordinatah enačbo $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Jakob Bernoulli še ni vedel, da je lemniskati sorodne krivulje, *Cassinijeve ovale*, že poznal Giovanni Domenico Cassini (1625–1712), italijansko-francoski matematik in astronom. Več o tem najdemo na primer v [2]. Lemniskata je poseben primer Cassinijevih ovalov. Kako so definirani, bomo spoznali v nadaljevanju.

Analitična obravnava in konstrukcije

Znano je, da je *elipsa* množica točk T v ravnini, za katere je *vsota* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 ($G_1 \neq G_2$) te ravnine konstantna. Podobno je *hiperbola* množica točk T v ravnini, za katere je *razlika* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 te ravnine konstantna. Kaj pa če vsoto oziroma razliko nadomestimo s produktom ali kvocientom? Za *kvocient* je odgovor preprost: krožnica, ki ji pravimo *Apolonijeva krožnica*. Če pa vzamemo produkt, dobimo Cassinijev oval. Torej: *Cassinijev oval* je množica točk T v ravnini, za katere je *produkt* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 te ravnine konstanten.



Slika 3: Družina Cassinijevih ovalov.

Če označimo $r_1 = |G_1T|$ in $r_2 = |G_2T|$ ter izberemo za konstanto neko dolžino k, potem je enačba Cassinijevega ovala $r_1 \cdot r_2 = k^2$. Pri tem smo vzeli k^2 zato, da uskladimo dimenzije obeh strani enačbe. Točki G_1 in G_2 po zgledu elipse in hiperbole imenujemo *gorišči* ovala. S točkama G_1 in G_2 smo v ravnini vzpostavili tako imenovani *bipolarni koordinatni sistem*. Razdalji r_1 in r_2 sta v njem koordinati, ki točke T ne določata enolično, a ju kljub temu pogosto uporabljamo. Točki T in T', ki sta si zrcalni glede na premico skozi G_1 in G_2, imata enaka r_1 in r_2, ki ju imenujemo *prevodnici* ustrezne točke (glej [4]). Elipsa ima v bipolarnem koordinatnem sistemu enačbo $r_1 + r_2 = 2a$, hiperbola pa $|r_1 - r_2| = 2a$.

René Descartes (1596–1650) je uveljavil pravokotni koordinatni sistem Oxy in zapis krivulj v po njem imenovanih *kartezičnih koordinatah*, po navadi x in y. Dejstvo, da ima točka T koordinati x (abscisa) in y (ordinata), zapišemo na kratko s $T(x, y)$. Po Descartesu krivuljo zapišemo z enačbo $f(x, y) = 0$, kjer je $(x, y) \to f(x, y)$ neka funkcija dveh spremenljivk. Kako pridemo do enačbe Cassinijevega ovala? V koordinatnem sistemu Oxy izberemo gorišči $G_1(-c, 0)$ in $G_2(c, 0)$. Pri tem je $c = |G_1G_2|/2 > 0$, kar je polovica medgoriščne razdalje. Prevodnici točke $T(x, y)$ sta

$$r_1 = |G_1T| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ r_2 = |G_2T| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Enačba Cassinijevega ovala v kartezičnih koordinatah je potem

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=k^2.$$

Po odpravi korenov in preureditvi dobimo

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=k^4-c^4.$$

Oval je simetričen glede na os x in glede na os y ter glede na koordinatno izhodišče O, ki je njegovo središče. Oblika ovala je močno odvisna od razmerja k/c. Za $k > c$ je oval enodelna, za $k < c$ pa dvodelna sklenjena krivulja, ki sama sebe ne seka.

Zanimiv je mejni primer $k = c$, ko je krivulja sicer enodelna, toda samo sebe preseka v točki O (Slika 3). To je *Bernoullijeva lemniskata*, ki ima v bipolarnih koordinatah enačbo $r_1 \cdot r_2 = c^2$, v pravokotnih kartezičnih pa

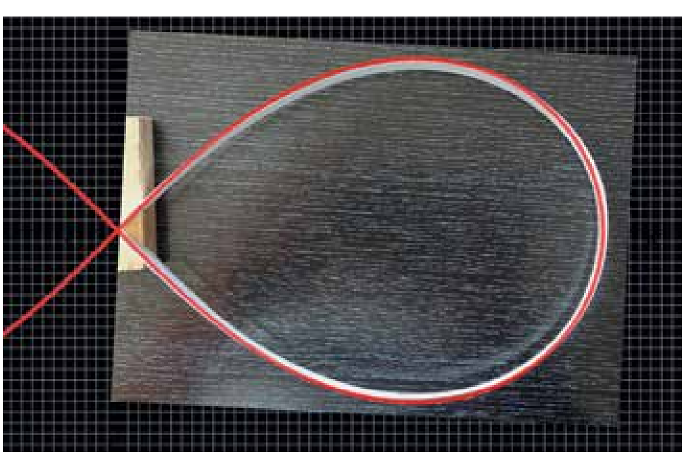
$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2).$$

Krivulja poteka skozi koordinatno izhodišče, je simetrična glede na obe koordinatni osi in glede na svoje samopresečišče O, kjer se seka pod pravim kotom. Tangenti v O sta premici $y = x$ in $y = -x$. Os x preseka v točkah $P(-c\sqrt{2},0)$ in $Q(c\sqrt{2},0)$. To sta temeni lemniskate. Če vpeljemo $a=c\sqrt{2}$, kar je *polos* lemniskate, lahko njeno enačbo zapišemo v obliki

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Z uvedbo polarnih koordinat r in φ, tako da je $x=r\cos\varphi$ in $y=r\sin\varphi$, dobimo enačbo lemniskate v polarni obliki: $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

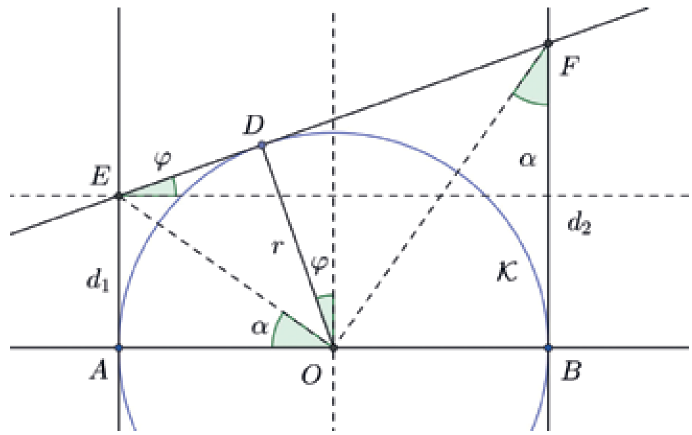
Da bi se prepričali o pravilnosti Bernoullijevih izračunov upogiba prožnega traku, ga fotografiramo in fotografijo postavimo z GeoGebro za podlago, čeznjo pa narišemo lemniskato po enačbi. Za pravokotnost traku poskrbi košček lesa, v katerega pod pravim kotom zažagamo dve zarezi. Fotografijo v GeoGebri po potrebi nekoliko zasučemo, parameter a pa prilagodimo tako, da se izračunana krivulja in tista na fotografiji ujemata v samopresečišču in temenu (Slika 4). Očitno je ujemanje povsod zelo dobro.



Slika 4: Primerjava oblike upognjenega traku in lemniskate.

Posamezne točke lemniskate dobimo geometrijsko na podlagi katerekoli relacije oblike $d_1 \cdot d_2 = c^2$, kjer so d_1, d_2 in c dolžine nekih daljic, pri čemer je c konstanta. Oglejmo si nekoliko manj znan primer iz kitajske matematične zakladnice.

Kitajski matematik Li Ye (1192–1279), morda bolj znan kot Li Zhi, je živel v času vladanja dinastije Song (960–1279). Leta 1248 je Li Ye dokončal zanimivo delo z nenavadnim naslovom *Ceyuan haijing*, kar pomeni *Morsko ogledalo meritev kroga*. V njem obravnava številne geometrijske naloge, ki jih prevede na algebrske enačbe.



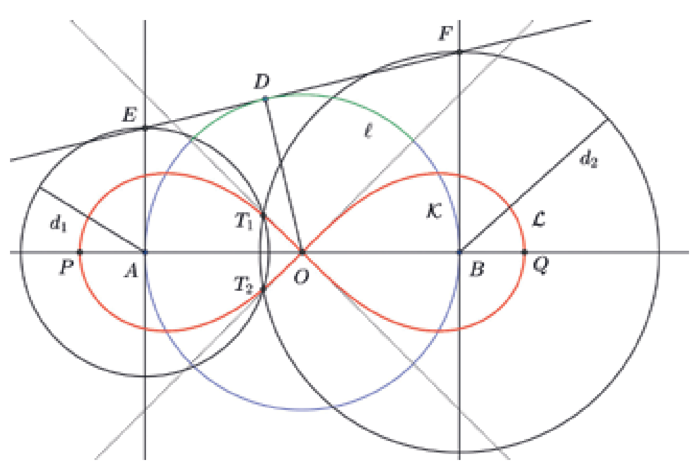
Slika 5: K dokazu enakosti $d_1 d_2 = r^2$.

V eni od nalog (vir [1]) uporabi krožnico $\mathcal{K}$ s polmerom r, v njej premer s krajiščema A in B, v katerih postavi pravokotnici, na krožnici pa izbere točko $D \neq A, B$ in v njej konstruira tangento, ki seka pravokotnici v točkah E in F. Nato trdi, da velja enakost $|AE| \cdot |BF| = r^2$, in sicer neodvisno od izbire točke D (Slika 5).

Da dokažemo enakost v zgornji trditvi, označimo na kratko $d_1 = |AE|$ in $d_2 = |BF|$ ter z O središče krožnice $\mathcal{K}$. Nato načrtamo daljici OE in OF in hitro ugotovimo: $|AE| = |ED|$, $|BF| = |FD|$, $\sphericalangle EOA = \sphericalangle OFB = \alpha$ (Slika 5). Trikotnika AOE in BFO sta pravokotna in sta si podobna, ker se ujemata v kotu α in v pravem kotu. Zato velja relacija $d_1/r = r/d_2$, iz katere sledi $d_1 d_2 = r^2$.

Štirikotnika $OBFD$ in $AODE$ sta deltoida, ker je $|FB| = |FD|$, $|ED| = |EA|$ in $|OA| = |OD| = |OB| = r$. Trikotnik EOF je podoben trikotnikoma AOE in BFO.

Če obstaja trikotnik s stranicami $2r$, d_1 in d_2, se pomožni krožnici s središčema v A in B ter z ustreznima polmeroma d_1 in d_2 sekata v točkah T_1 in T_2, ki ležita simetrično glede na premico skozi A



Slika 6: Nastanek Bernoullijeve lemniskate.

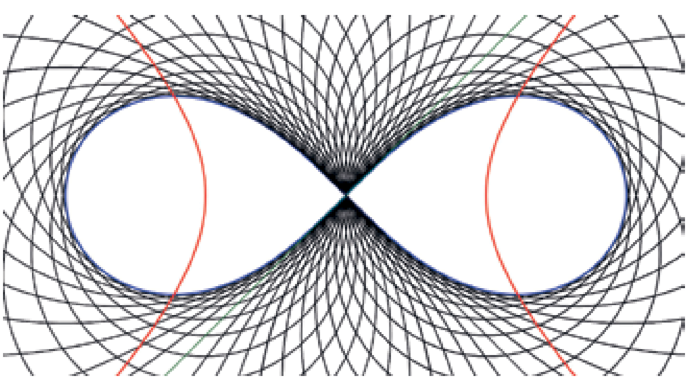
in B. Ko je $d_1 = d_2$, se T_1 in T_2 zlijeta v O, kjer se pomožni krožnici dotikata.

Vedno velja relacija $d_1 + d_2 \geq 2r$, kar sledi iz relacije med aritmetično in geometrično sredino dveh pozitivnih števil: $(d_1 + d_2)/2 \geq \sqrt{d_1 d_2} = \sqrt{r^2} = r$. Pri tem nastopi enačaj natanko tedaj, ko je $d_1 = d_2 = r$. Takrat sta omenjena deltoida kvadrata, polmer OD pravokoten na premer AB, točka D pa razpolavlja daljico EF.

Da točki T_1 in T_2 obstajata, morata biti izpolnjena še pogoja $d_1 + 2r \geq d_2$ in $d_2 + 2r \geq d_1$, kar lahko strnemo v $|d_2 - d_1| \leq 2r$. Ta pogoj velja, če je kot φ, ki ga daljica OD oklepa s simetralo daljice AB, manjši kot 45°. Ustrezni krožni lok na $\mathcal{K}$ je označen z l. To sledi iz relacije $|d_2 - d_1| = 2r \tan|\varphi|$. Pri $|\varphi| = 45°$ se točki T_1 in T_2 spet zlijeta v eno, pomožni krožnici pa se dotikata ena znotraj druge.

Ko spreminjamo dotikališče D po krožnem loku l, opišeta T_1 in T_2 krivuljo $\mathcal{L}$, za katero velja: produkt razdalj katerekoli točke T na $\mathcal{L}$ od točk A in B je stalen, in sicer je enak kvadratu polovične razdalje med A in B. Krivulja je očitno Bernoullijeva lemniskata (Slika 6). Točki A in B sta gorišči lemniskate in določata njeno os. Njeno središče je točka O, temeni P in Q na njeni osi pa sta oddaljeni za $r\sqrt{2}$ od O. Konstrukcijo se da elegantno izvesti z GeoGebro. Poskrbimo samo za to, da točki T_1 in T_2 puščata sled.

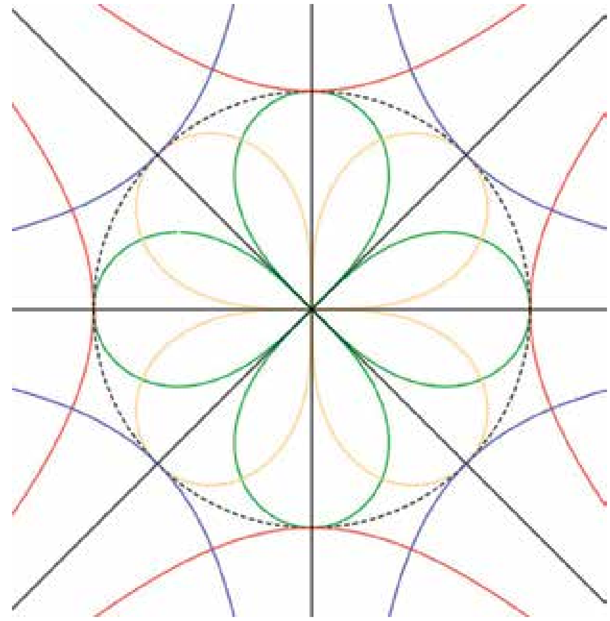
Od mnogih zanimivosti v zvezi z lemniskato jih omenimo samo nekaj. Lemniskata je namreč povezana z enakoosno hiperbolo $x^2 - y^2 = a^2$. Družina krožnic, ki imajo na njej središča in potekajo skozi koordinatno izhodišče O, ogrinjajo lemniskato $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2)$, kar kaže slika 7, do katere pridemo z GeoGebro z nekaj ukazi. V vsaki točki lemniskate se jo dotika natančno ena krožnica iz družine.



Slika 7: Lemniskata kot ogrinjača krožnic.

Omembe vredna zanimivost lemniskate je, da če na krožnici z enačbo $x^2 + y^2 = a^2$ zrcalimo enakoosno hiperbolo $x^2 - y^2 = a^2$, dobimo lemniskato $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Na sliki 8 je na krožnici zrcaljenih več enakoosnih hiperbol, ki se krožnice dotikajo. Tako dobimo več lemniskat, ki so ena glede na drugo zasukane za kot 45° okoli središča krožnice.

Ponovimo, kaj je *zrcaljenje točke na krožnici* s polmerom a in središčem v točki O. To je geometrijska transformacija, ki jo opišemo na kratko takole: zrcalna točka točke T na tej krožnici je točka T', če T' leži na istem poltraku s krajiščem O kot točka T in če je $|OT| \cdot |OT'| = a^2$. Če je T zunaj krožnice, je T' znotraj nje in



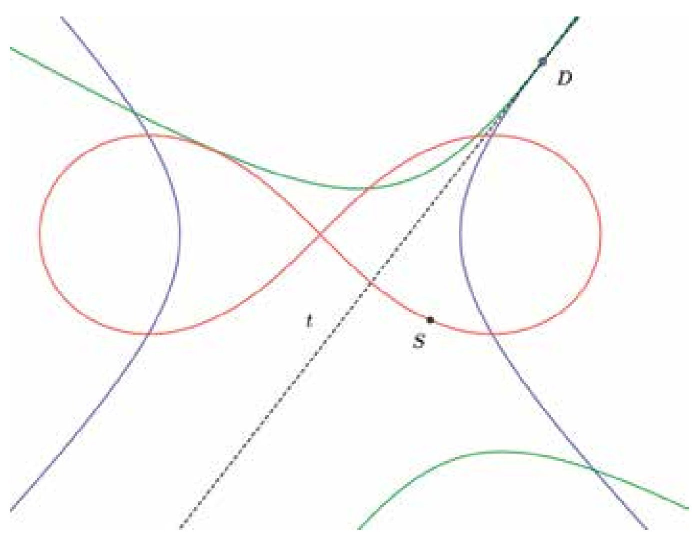
Slika 8: Zrcaljenje hiperbol na krožnici.

obratno. Če je T zelo daleč od O, je T' zelo blizu O in obratno. Če je T na krožnici, potem je $T' = T$. V pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu Oxy imata T in T' koordinate: $T(x, y)$ in $T'(x', y')$. Pri tem velja:

$$x' = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

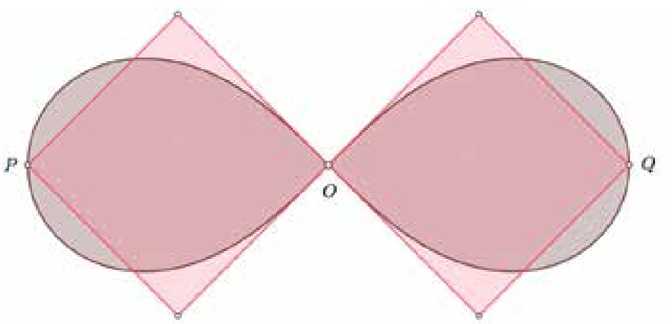
Zrcaliti krivuljo na krožnici seveda pomeni zrcaliti vse točke te krivulje. Rezultat je neka nova krivulja. GeoGebra ima že vgrajeno funkcijo, s katero lahko zrcalimo geometrijske objekte na krožnici. Tako lahko hitro ustvarimo sliko 8.

Oglejmo si še kotaljenje (brez drsenja) enakoosne hiperbole po njej skladni hiperboli, ki miruje. Obe hiperboli se v vsakem položaju dotikata v točki D in imata v njej skupno tangento t. Pri kotaljenju se D pomika po mirujoči hiperboli. Da se dokazati, da središče S kotaleče se hiperbole pri tem opisuje lemniskato. Sliko 9 brez težav realiziramo z GeoGebro.



Slika 9: Kotaljenje hiperbole po hiperboli.

V zvezi z lemniskato je kar nekaj zahtevnejših problemov. Odgovorimo samo na vprašanje, kakšno ploščino omejujeta oba lista lemniskate. Ploščino S dobimo z razmeroma enostavnim integralom, če lemniskato zapišemo v polarnih koordinatah: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Rezultat je preprost: $S = a^2 = 2c^2$. Ploščina je torej enaka skupni ploščini dveh kvadratov s stranico c, ki ju lahko lepo namestimo na lemniskato (Slika 10).



Slika 10: Ploščina lemniskatinih listov.

Težji problem je izračunati dolžino loka lemniskate, kajti naletimo na integral, ki ni elementaren. Zgodovinsko pa je s tem ravno lemniskata poskrbela, da se je začela razvijati teorija eliptičnih funkcij in integralov. Nekaj lažjih pa tudi težjih problemov v zvezi z lemniskato je rešenih v obsežni matematični literaturi, nekaj pa tudi v študijskem gradivu [3].

Lemniskata je tudi uporabna krivulja. Njen gladek prehod skozi središče je vzor graditeljem železnic, ko naredijo prehod iz levega ovinka v desnega ali obratno. Pri konstantni hitrosti tirnega vozila po lemniskati se namreč sredobežna sila lepo zvezno spreminja po velikosti in smeri, ne pa sunkovito.

Zaključek

O Bernoullijevi lemniskati smo v prispevku v resnici povedali bolj malo. Krivuljo so v zadnjih treh stoletjih temeljito raziskovali številni matematiki in prišli do presenetljivih rezultatov, od katerih mnogi niso ravno trivialni, ker zahtevajo kar precej znanja geometrije in analize. Kljub temu pa upamo, da bo marsikdo po branju prispevka le poiskal primerno knjigo, ponovil katero od opisanih konstrukcij z GeoGebro ali pa vsaj vzel v roke papirje in trakove in jih upogibal tako, kot je razloženo v uvodu.

Literatura

[1] P. Y. Ho, Li, Qi in Shu (2000). *An Introduction to Science and Civilization in China*. New York: Dover Publications, Mineola.

[2] A. Ostermann, G.Wanner (2012). *Geometry by Its History*, Springer, Berlin, Heidelberg.

[3] M. Razpet (2019). *Bernoullijeva lemniskata*. Študijsko gradivo http://www.pef.uni-lj.si/matwww/lemniskata01.pdf (24. junij 2019).

[4] I. Vidav (1968). *Višja matematika I*. Ljubljana: DZS.