KRATEK VPOGLED V ZGODOVINO INTEGRACIJE

MARJAN JERMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01-01, 28-03, 97I50

Predstavljene so glavne ideje, ki so vodile do razvoja integracije. Zgodovinski pogled na snov ponuja intuitiven pristop k poučevanju integralov.

A SHORT INSIGHT INTO THE HISTORY OF INTEGRATION

Main ideas which led to the development of integration are presented. This historical point of view can be used as an alternative intuitive approach to teaching integrals.

Uvod

Integrali so od nekdaj obvezna snov gimnazijske matematike pri nas in po svetu. Njihovo znanje je sestavni del splošne izobrazbe za vse dijake in nuja za vse bodoče študente naravoslovja in tehnike. Pri njihovem poučevanju in nasploh pri poučevanju bolj zapletenih poglavij matematike v srednji šoli smo velikokrat v dilemi, kako narediti kompromis med strogo matematično pravilnostjo, motivacijo, intuitivnostjo in dostopnostjo.

V Ameriki je v petdesetih letih, pri nas pa nekaj let kasneje, srednješolsko matematiko zajel val tako imenovane »nove matematike«, ki je skušala matematične pojme predstaviti dijakom na najkrajši, najbolj eleganten in matematično pravilen način. Osnovni namen novih pristopov pri poučevanju matematike je bil na hiter in korekten način čim več dijakov pripraviti na študij tehnike, ki je imel zelo pomembno vlogo pri ogromnih potrebah razvijajoče se industrije po drugi svetovni vojni. Žal se novi pristop v praksi večinoma ni obnesel. Pozitivni učinek je dosegel le pri res najboljših dijakih, preostali pa so matematiko začeli dojemati kot sterilno znanost, ki je večinoma sama sebi namen. Tudi na dobrih ameriških univerzah so se še posebej predavatelji tehnike pritoževali, da matematiki na izpitih pomečejo preveč študentov, večina tistih, ki izpit uspešno opravi, pa svojega znanja ni sposobna uporabiti v praksi. Stanje je zelo lepo opisala izjava profesorja Mortona Browna z Univerze v Michiganu, ki bi jo žal prevečkrat lahko uporabili tudi danes: »*Študentje se naučijo zložiti skupaj nekaj ključnih simbolov, izjav in enačb in kompilacijo predstaviti kot sprejemljivo rešitev, ne da bi pri tem vedeli, kaj počnejo.*« Stvar je šla tako daleč, da je leta 1962 skupina 75 znanih in uspešnih matematikov z vsega sveta napisala ali sopodpisala memorandum [1] v sedmih točkah in pozvala k bistvenim spremembam.

V osemdesetih letih je prišlo do resnih poskusov reforme pouka matematike, ki bi matematiko približali širši množici dijakov in predstavili njeno uporabno vrednost. Tudi nekatere univerze so bistveno zmanjšale število slušateljev v posamezni predavalnici, v predavanja so vključili veliko grafičnih predstavitev, spodbujali so diskusijo med predavanji, v snov so vključili več praktičnih primerov, del ocene pa so predstavljali domači projekti, kjer je bistven del računanja opravil računalnik. Žal so dobronamerni poskusi pogosto vodili v precejšnjo zmedo in napake pri poučevanju, kasneje pa so pogosto ugotovili, da imajo študentje večje luknje pri razumevanju osnovnih teoretičnih konceptov. Čutiti je bilo tudi odpor učiteljev, ki so jim bile nove metode poučevanja ali tuje ali prehud izziv in so jih veliko bolj obremenjevale.

Zanimivo je, da je o pristopih pri poučevanju analize, še posebej integralov, temeljito premišljeval tudi znani matematik Otto Toeplitz (1881–1940). Svoje poglede [8] je leta 1926 v Düsseldorfu predstavil nemškemu matematičnemu društvu. Bil je velik ljubitelj in poznavalec zgodovine matematike. Zagovarjal je tako imenovani »genetski pristop« k pouku matematike, ki nove matematične pojme uvede postopoma, velikokrat s pomočjo briljantnih idej, ki so skozi zgodovino vodile do njihovih odkritij. Pri tem večinoma posamične konkretne probleme naravno vodi do njihovih posplošitev. Eno od njegovih bolj zanimivih spoznanj je tudi, da se pri obravnavi ni nujno izogibati anahronizmom, ki so v očitnem neskladju z zgodovinskim razvojem. Tako včasih za bolj jasno in enostavno matematično obravnavo na primer ni nič narobe smiselno uporabiti matematične simbole ali celo matematične pojme, ki v času reševanja problema še niso bili znani, dijakom in študentom pa so veliko bližje kot originalne včasih nerodne in dolgotrajne izpeljave.

Svoja spoznanja in praktične učiteljske izkušnje je Toeplitz dolga leta skupaj s študenti brusil in spreminjal v knjigo [9], ki naj bi postala univerzitetni učbenik začetnih poglavij analize. Knjige mu žal ni uspelo dokončati. Posthumno jo je uredil Gottfried Köthe (1905–1989). Takoj po drugi svetovni vojni je izšla v nemščini, precej preurejena pa skoraj dvajset let kasneje tudi v angleščini. Vsem, ki jih zanima poučevanje matematike, še posebej analize, toplo priporočam, da preberejo tudi izjemno informativne predgovore v angleški različici knjige, ki so jih napisali uredniki posameznih izdaj Gottfried Köthe, Alfred L. Putnam (1928–1977) in David M. Bressoud (1950).

Žal tudi genetski pristop ni idealna metoda za poučevanje integralov. Vsi trije uredniki se strinjajo, da bi bilo knjigo težko uporabiti kot učbenik za širšo populacijo. Zdi se jim primerna kot dodatek za bolj zainteresirane študente in za tiste, ki so osnovne tečaje analize že poslušali in bi radi svoje znanje videli v drugačni luči. Zelo pa se jim zdi primerna za bodoče in trenutne učitelje matematike.

Bralcem Obzornika, ki jih tema zanima, priporočam tudi Burnov članek

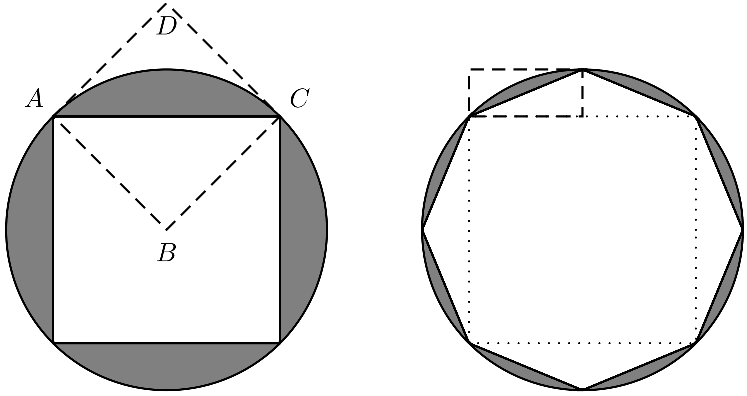
[4], ki presenetljivo izčrpno na zelo malo straneh povzame duh Toeplitzeve knjige.[1]

V naslednjih poglavjih bom poskušal predstaviti nekaj najpomembnejših in najzanimivejših korakov, ki so skozi zgodovino vodili do matematično korektne definicije integrala. Morda bo kakšna od teh idej prišla prav kateremu od učiteljev vsaj kot motivacija, zanimivost ali popestritev pri poučevanju integralov.

Ploščina kroga

Grški sofist Antifon (pribl. 5. stoletje pr. Kr.) je prvi poskušal izračunati ploščino kroga z metodo izčrpavanja ploščine. V krog je zaporedoma včrtoval pravilne večkotnike s čedalje več stranicami in trdil, da je ploščina kroga enaka ploščini ustreznega včrtanega večkotnika z neskončno stranicami.

Danes njegova razlaga ne bi vzdržala stroge matematične presoje, kljub temu pa je ideja prava, njegov rezultat pa ima trdno matematično podlago.



Slika 1. Antifonovo izčrpavanje kroga s pravilnimi 2^n-kotniki. Pri vsakem dvakratnem povečanju števila stranic zmanjšamo površino nepokritega dela za več kot dvakrat.

V krog včrtajmo kvadrat. Ker črtkani kvadrat $ABCD$ na sliki 1 levo vsebuje celoten krožni izsek ABC, je ploščina osenčenega nepokritega dela kroga manjša od ploščine včrtanega kvadrata. Zato včrtani kvadrat pokriva več kot polovico ploščine kroga.

Oglišča kvadrata in preseki simetral stranic kvadrata s krožnico so oglišča pravilnega osemkotnika, ki vsebuje kvadrat in je prav tako včrtan krogu (slika 1 desno). Podobno kot prej je ploščina osenčenega preostanka kroga

[1] Zahvaljujem se dr. Damjanu Kobalu, ki mi je priporočil ta članek.

manjša od polovice ploščine črtkanega pravokotnika. Zato smo z osemkotnikom pokrili več kot polovico dela kroga, ki bi ostal, če bi iz kroga izrezali kvadrat.

S postopkom nadaljujemo. Z indukcijo lahko dokažemo, da po vsakokratni podvojitvi števila stranic ploščino nepokritega ostanka zmanjšamo več kot za polovico. Zato je

$$p(\text{včrtanega } 2^n\text{-kotnika}) > (1 - \tfrac{1}{2^{n-1}})p(\text{kroga}). \tag{1}$$

Od tod vidimo, da je ploščina pravilnega včrtanega 2^n-kotnika poljubno blizu ploščini kroga, če je le n dovolj veliko število.

Antifonovo delo je dopolnil Brison iz Herakleje (pribl. 5. stoletje pr. Kr.), ki je krogu dodatno očrtal pravilni 2^n-kotnik in pokazal, da sta ploščini včrtanega in očrtanega 2^n-kotnika poljubno blizu, če je le n dovolj veliko število. S tem rezultatom mu je uspelo na nekaj točnih decimalnih mest izračunati tudi kasneje uvedeno konstanto π.

Z današnjim znanjem lahko Antifonov rezultat uporabimo za izračun ploščine kroga takole: Pravilni 2^n-kotnik, ki je včrtan v krog s polmerom r, je sestavljen iz 2^n skladnih enakokrakih trikotnikov s kraki dolžine r in ploščino

$$\tfrac{1}{2}(2r\sin\tfrac{\pi}{2^n}\cdot r\cos\tfrac{\pi}{2^n}) = \tfrac{1}{2}r^2\sin\tfrac{\pi}{2^{n-1}},$$

zato je ploščina pravilnega včrtanega 2^n-kotnika enaka

$$p_{2^n} = \pi\tfrac{2^{n-1}}{\pi}r^2\sin\tfrac{\pi}{2^{n-1}}.$$

Z večanjem n in upoštevanjem veljavnosti limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ dobimo, da je ploščina kroga s polmerom r enaka πr^2.

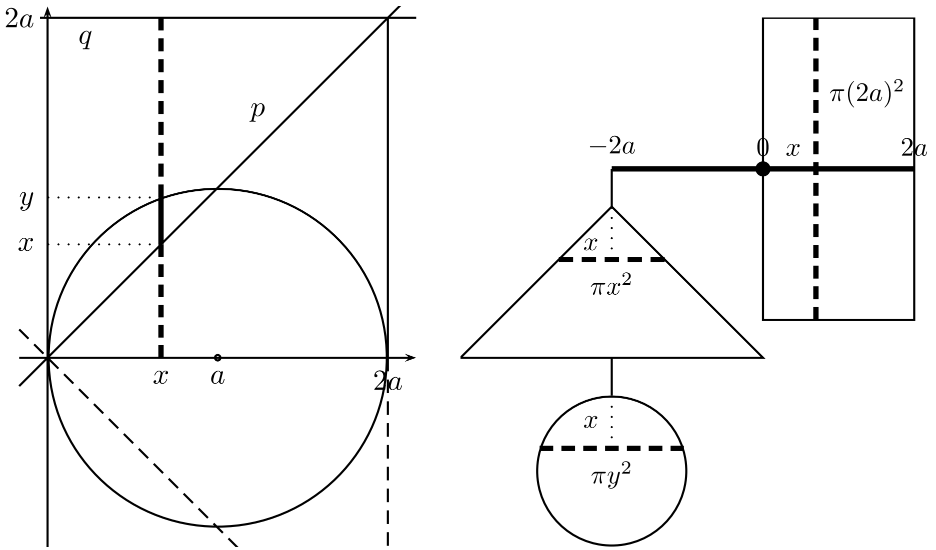
Prostornina krogle

Arhimed (287–212 pr. Kr.) je svoj izjemen občutek za naravo uporabil pri izračunu prostornine krogle. Pri tem si je pomagal z navorom in tedaj že znanima prostorninama valja in stožca.

Na tem mestu bomo zagrešili anahronizem in Arhimedovo ponekod zapleteno premišljevanje utemeljili z uporabo analitične geometrije, ki jo je izumil šele René Descartes (1596–1650) več kot tisočletje kasneje. Valj, stožec in kroglo bomo predstavili kot vrtenine.

Enačba $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ predstavlja krožnico s središčem $(a, 0)$ in polmerom a (slika 2 levo). Prepišemo jo lahko v obliko $x^2 + y^2 = 2ax$. Enačba bo dobila fizikalni pomen, če jo pomnožimo s primernimi konstantami:

$$2a\cdot(\pi x^2 + \pi y^2) = x\cdot\pi(2a)^2. \tag{2}$$



Slika 2. Arhimedov izračun prostornine krogle. Pri vrtenju premic $y = 2a$, $y = x$ in krožnice $x^2 + y^2 = 2ax$ okrog abscisne osi dobimo valj, stožec in kroglo. Ko stožec in kroglo obesimo na ročico $2a$, dobimo ravnovesje navorov s silo teže valja, ki je nameščen na nasprotni strani in ima za os daljico med fiksno točko in skrajno ročico $2a$.

Posamezne količine v enačbi najprej interpretiramo takole: Na sliko narišimo še premici $p\colon\ y = x$ in $q\colon\ y = 2a$. Pri vrtenju premice p, krožnice in premice q okrog abscisne osi na intervalu $[0, 2a]$ dobimo zaporedoma stožec, kroglo in valj. Količine πx^2, πy^2 in $\pi(2a)^2$ so ploščine krogov, ki so prerezi stožca, krogle in valja na oddaljenosti x od ordinatne osi.

Enačbo (2) interpretirajmo fizikalno z navorom. V $\mathbb{R}^3$ postavimo fiksno točko v izhodišče koordinatnega sistema, gugalnica pa naj leži na abscisni osi med $x = -2a$ in $x = 2a$. Prerez z ravnino $y = 0$ je narisan na sliki 2 desno. Tedaj enačba (2) pove, da dosežemo ravnovesje, če na levi strani gugalnice pri ročici $-2a$ obesimo rezino stožca πx^2 in rezino krogle πy^2, na nasprotni strani pa pri ročici $x > 0$ obesimo rezino valja $\pi(2a)^2$. Sedaj seštejmo navore vseh rezin stožca, krogle in valja v ustreznih prijemališčih. Upoštevajmo že tedaj znano dejstvo, da lahko vsoto navorov vseh rezin valja nadomestimo z navorom sile teže celotnega valja, ki prijemlje v njegovem težišču.

Če torej na levi strani na ročico dolžine $2a$ obesimo kroglo in stožec, dosežemo ravnovesje s silo teže valja, ki v celoti prijemlje pri ročici $x = a$. Demokrit (470–360 pr. Kr.) je že poznal prostornini valja in stožca. Enakost navorov zato lahko napišemo z enačbo

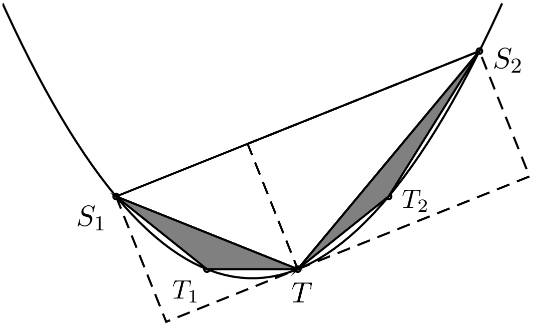
$$2a \cdot \Big(\frac{\pi(2a)^2 \cdot 2a}{3} + V_{\text{krogle}}\Big) = a \cdot \big(\pi(2a)^2 \cdot 2a\big),$$

iz katere izračunamo, da je prostornina krogle s polmerom a enaka

$$V_{\text{krogle}} = \tfrac{4}{3}\pi a^3.$$

Kvadratura parabole

Arhimed je samo s pomočjo elementarne geometrije izračunal tudi ploščino parabole pod njeno sekanto. Sledili bomo njegovim idejam, zaradi enostavnejše obravnave pa si bomo zopet pomagali s koordinatnim sistemom.



Slika 3. Arhimedova kvadratura parabole.

Naj bosta $S_1(a, a^2)$ in $S_2(b, b^2)$, $a < b$, točki na paraboli, podani z enačbo $y = x^2$ (slika 3). Izračunali bomo ploščino p lika, ki ga od parabole odreže sekanta S_1S_2. Liku bomo najprej včrtali trikotnik, nato pa bomo nepokriti del zapolnili s čedalje manjšimi trikotniki.

Prvi, največji včrtani trikotnik naj ima za oglišča točki S_1, S_2 in dotikališče T tiste tangente na parabolo, ki je vzporedna sekanti S_1S_2. Tangenta na parabolo v točki $T(x, x^2)$, ki je vzporedna sekanti S_1S_2, ima naklon

$$2x = \tfrac{b^2-a^2}{b-a} = b + a,$$

zato gre skozi sredinsko točko $T(\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2)$.

Na primer s pomočjo koordinat lahko izračunamo, da je ploščina trikotnika S_1TS_2 enaka

$$p_1 = \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^3. \tag{3}$$

Diagonali S_1T in TS_2 črtkanih pravokotnikov na sliki 3 razdelita ustrezna pravokotnika na ploščinsko enaka dela. Zato trikotnik S_1TS_2 pokriva več kot polovico lika, ki ga določata parabola in sekanta.

V nadaljevanju v levi in desni nepokriti del parabole na enak način včrtamo trikotnika. Prvi manjši včrtani trikotnik S_1T_1T je določen s točkama S_1, T in točko T_1 na paraboli, kjer je tangenta na parabolo vzporedna sekanti S_1T. Podobno je desni trikotnik TT_2S_2 določen s točkama T in S in točko T_2, kjer je tangenta vzporedna sekanti TS_2.

Enačba (3) pove, da je ploščina vsakega tako včrtanega trikotnika enaka kubu polovice dolžine projekcije ustrezne sekante na abscisno os. Zato je ploščina vsakega od trikotnikov S_1T_1T in TT_2S_2 enaka

$$p_2 = \left(\tfrac{1}{2}\tfrac{b-a}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{2^3}p_1.$$

Postopek nadaljujemo s štirimi še manjšimi trikotniki nad sekantami S_1T_1, T_1T, TT_2 in T_2S_2, nato z ustreznimi osmimi trikotniki in tako naprej. Vsakič z novimi trikotniki pokrijemo več kot polovico preostanka ploščine, ki je še ne pokrivajo trikotniki iz prejšnjih korakov.

Ploščina parabole pod sekanto S_1S_2 je manjša od vsote ploščin včrtanih disjunktnih trikotnikov, zato je

$$p \geq p_1(1 + 2 \cdot \tfrac{1}{2^3} + 4 \cdot \tfrac{1}{4^3} + \cdots) = p_1 \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{4^k} = \tfrac{4}{3}p_1. \tag{4}$$

Po drugi strani z novimi trikotniki vsakič pokrijemo več kot polovico nepokritega dela parabole:

$$p < 2p_1,\ p < p_1 + 2 \cdot 2p_2,\ p < p_1 + 2p_2 + 2 \cdot 4p_3,\ \ldots$$

Zato za poljubno število n velja tudi

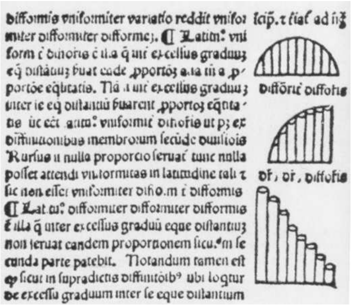
$$p \leq p_1(1 + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{4^{n-1}} + 2\tfrac{1}{4^n}). \tag{5}$$

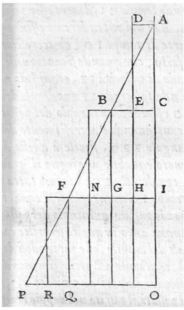
Ker sta si vsoti v ocenah (4) in (5) poljubno blizu, smo s tem izračunali ploščino parabole pod sekanto S_1S_2, $p = \frac{4}{3}p_1$.

Na poti k osnovnemu izreku analize

Nikolaj Oresme (pribl. 1320–1382) je bil eden od najbolj aktivnih in bistrih srednjeveških mislecev. Med drugim je prvi dokazal divergenco harmonične vrste.

Nas bo najbolj zanimalo njegovo delo na področju kinematike. Da bi lahko grafično predstavil hitrost v vsakem času gibanja, je izumil stolpčne diagrame. Kar je danes videti samoumevno, je bilo v tistih časih, ko še niso poznali koncepta funkcije in koordinatnega sistema, revolucionarno odkritje. Privzel je, da se telo na posameznem časovnem intervalu giblje s konstantno hitrostjo. Nato je nad vodoravno os nanašal pravokotnike, katerih širina *(intensio, latitudo)* je bila sorazmerna času, višina *(extensio, longitudo)* pa hitrosti, ki jo je imelo telo na tem časovnem intervalu (slika 4 levo).





Slika 4. Na levi sliki so Oresmejevi diagrami, ki so predhodniki pojmov funkcije in koordinatnega sistema, na desni pa je Galilejev dokaz izreka o srednji hitrosti.

Med preučevanjem teh stolpčnih diagramov je ugotovil, da je vsota ploščin vseh pravokotnikov enaka dolžini prevožene poti. Če bi dovolili zelo kratke časovne intervale, bi lahko njegov rezultat interpretirali takole:

$$\int_a^b s'(t)\,dt = s(b) - s(a).$$

Prav tako je s pomočjo interpretacije diagramov izpeljal *izrek o srednji hitrosti,*[2] ki pove, da enakomerno pospešeno telo naredi enako pot kot telo, ki se istočasno giblje enakomerno s hitrostjo, ki je enaka polovici končne hitrosti pospešenega telesa. Zelo nazoren intuitiven dokaz sledi iz interpretacije enakih ploščin v stolpčnem diagramu. Enak dokaz je podal tudi Galileo Galilei (1564–1642) več kot dvesto let kasneje (slika 4 desno).

Modernizacija metode izčrpavanja

Luca Valerio (1552–1618) se je sistematično lotil računanja težišč, ploščin in prostornin. Pri računanju se ni omejil le na klasične like in telesa. Izračunati je znal prostornine teles, ki imajo veliko simetrije ali pa nastanejo z rotacijo.

[2]Izrek so odkrili matematiki z Merton Collega v Oxfordu okrog leta 1330 in ga zato pogosto imenujemo tudi Mertonov izrek o srednji hitrosti. Walter de Merton (1205–1277) je bil sicer politik, po katerem so poimenovali kolidž.

Pri računanju je antično metodo izčrpavanja pripeljal bližje definiciji Riemannovega integrala. Glede na današnje standarde je malo nerodno napisal: »*Če ravninskemu liku pada širina z obeh strani, mu lahko včrtamo in očrtamo lik, ki je sestavljen iz samih pravokotnikov, pri tem pa se ploščini včrtanega in očrtanega lika poljubno malo razlikujeta.*« Težje razumljivo zahtevo, da širina pada z obeh strani, bi lahko interpretirali z računanjem ploščine pod krivuljo, ki do neke točke raste, potem pa pada. Analogno trditev za prostornino pod ploskvijo je napisal tudi za telesa.

Zapleteno metodo izčrpavanja, ki potrebuje posredno dokazovanje s protislovjem, je prvi skušal prevesti na enostavnejše direktno sklepanje Simon Stevin (1548–1620). S pomočjo Aristotelovih silogizmov je pokazal, da sta količini, ki sta si poljubno blizu, v resnici enaki.

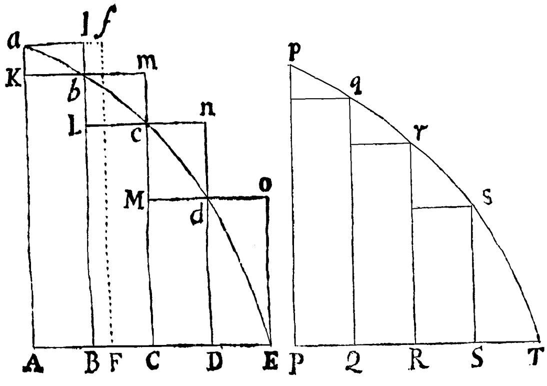
Valerio se je posrednemu sklepanju izognil s premislekom, ki bi ga v današnjem jeziku interpretirali takole: Če za neka konvergentna zaporedja $(a_n)_n$, $(a'_n)_n$, $(b_n)_n$ in $(b'_n)_n$ z neničelnimi členi in limitami a, $a' \neq 0$, b in $b' \neq 0$ velja

$$\frac{a_n}{a'_n} = \frac{b_n}{b'_n} \qquad \text{za vse } n \in \mathbb{N},$$

potem je tudi

$$\frac{a}{a'} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b'_n} = \frac{b}{b'}.$$

Naj bosta L in L' lika, v katera včrtujemo in okrog katerih očrtujemo čedalje boljše aproksimacije z unijo pravokotnikov. Če sta ploščini a_n in a'_n v L in v L' včrtane unije pravokotnikov in ploščini b_n in b'_n očrtane unije vedno v enakem razmerju, sta v istem razmerju tudi ploščini likov L in L'. To



Slika 5. Skica pri četrti lemi v prvi knjigi Newtonovih Principov: Lika sta v enakem ploščinskem razmerju kot ploščine njunih včrtanih in očrtanih unij pravokotnikov.

je vsebina četrte leme v prvi knjigi Newtonovih Principov[3] (slika 5) in kasneje poimenovano *Cavalierijevo načelo,* ki v ravninskem primeru pravi: Če imata lika, ki se nahajata med dvema vzporednima premicama, enako dolge preseke z vsako vmesno vzporedno premico, sta ploščini likov enaki. Danes lahko gledamo na Cavalierijevo načelo kot na poseben primer Fubinijevega[4] izreka.

Infinitezimale in nedeljive količine

Johann Kepler (1571–1630) je sicer dobro poznal grško matematiko in njene stroge standarde dokazovanja, a je bil zelo praktičen znanstvenik, ki je bil za ceno rezultatov pripravljen zamižati na eno oko v primerih, ko z metodami 17. stoletja ni bilo mogoče korektno rešiti kakšnega od težjih problemov. Praktične potrebe pri računanju prostornin sodov so pripeljale do mnogih novih metod in rezultatov, ki jih je leta 1615 objavil v knjigi *Nova stereometrija.* Like in telesa je rezal na infinitezimalno majhne ne nujno vzporedne koščke različnih oblik. S pomočjo izjemne intuicije mu je uspelo kljub zelo liberalnemu delu z infinitezimalno majhnimi količinami vedno priti do pravilnih rezultatov.

Zvezo med površino in prostornino krogle je recimo dobil takole: Najprej je površino krogle razrezal na zelo majhne disjunktne koščke. Te koščke si je predstavljal kot osnovne ploskve nekakšnih stožcev s skupnim vrhom v središču krogle. S tem je kroglo razrezal na te neobičajne stožce. Ko je seštel prostornine vseh stožcev, so se površine njihovih osnovnih ploskev seštele v površino krogle. S povečevanjem števila stožcev so postale njihove osnovne ploskve skoraj ravne, zato je za prostornino teh stožcev vzel kar prostornino običajnega stožca. Tako je dobil

$$V_{\text{krogle}} = \frac{r}{3}(S_1 + S_2 + \ldots) = \frac{r}{3} S_{\text{krogle}}.$$

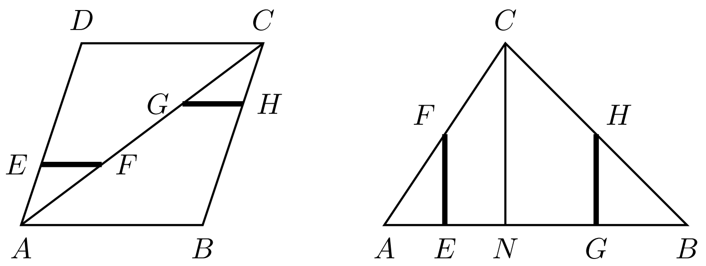
Iz Arhimedovega rezultata za volumen krogle tako lahko izračunamo površino krogle $S_{\text{krogle}} = 4\pi r^2$. Skupaj je Kepler izračunal prostornine 96 teles, ki nastanejo z vrtenjem delov stožnic okrog različnih osi.

Galileo Galilei (1564–1642) je trdil, da je zvezna snov sestavljena iz neskončno kosov nedeljivih delov, do katerih pa ne moremo priti z zaporednim drobljenjem snovi. Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647) je njegovo idejo uporabil tako, da je vsak lik predstavil kot neskončno unijo vzporednih daljic, ki so tako tanke, da jih ne moremo več razdeliti na tanjše dele.

S pomočjo te predstave je recimo pokazal, da imata trikotnika, na katera deli diagonala paralelogram, enako ploščino. Naj bo $ABCD$ paralelogram

[3] Isaac Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica*

[4] Guido Fubini (1879–1943)



Slika 6. Levo je Cavalierijev dokaz, da imata trikotnika, na katera z diagonalo razpade paralelogram, enako ploščino. Desno je primer, kjer metoda ne deluje.

z diagonalo AC (slika 6 levo). Trikotnika ACD in ABC sta sestavljena iz daljic, ki so vzporedne osnovnici AB. Vsaki daljici $EF \parallel AB$, $E \in AD$, $F \in AC$, lahko najdemo natanko eno enako dolgo daljico $GH \parallel AB$, $G \in AC$, $H \in BC$, in obratno. Ker sta trikotnika ACD in ABC sestavljena iz enakih daljic, imata enako ploščino.

Pri previdni uporabi je Cavalierijeva metoda z nekaj sreče vodila do pravilnih rezultatov. Zelo kmalu pa je metoda doživela resne kritike, ko so njegovi sodobniki, med njimi na primer Evangelista Torricelli (1608–1647), našli primere, pri katerih metoda ne deluje pravilno.

Vzemimo recimo neenakokrak trikotnik ABC z osnovnico AB in ga z višino NC razdelimo na trikotnika ANC in NBC (slika 6 desno). Enako kot prej lahko oba trikotnika sestavimo iz daljic, ki so vzporedne višini NC. Vsaki navpični daljici EF v trikotniku ANC lahko najdemo natanko eno enako dolgo navpičnico GH v trikotniku NBC in obratno, vendar trikotnika ANC in NBC očitno nimata enake ploščine.

Z današnjim znanjem analize se da lepo razložiti, zakaj Cavalierijeva metoda enkrat deluje, drugič pa ne. Če si nedeljive daljice predstavljamo kot zelo tanke letvice, ki sestavljajo trikotnike, sta v levem primeru letvici EF in GH enako dolgi in enako visoki. V desnem primeru pa sta letvici EF in GH sicer enako visoki, njuna širina pa je v razmerju $AN : NB$. V današnjem jeziku bi rekli, da v primeru, ko daljici AN in NB parametriziramo s spremenljivko t na intervalu $[0, 1]$, enkrat seštevamo ploščine pravokotnikov z osnovnico $AN \cdot dt$, drugič pa ploščine pravokotnikov z osnovnico $NB \cdot dt$.

Ploščina pod krivuljo

Descartes je v tem času povzročil revolucijo v matematiki z uvedbo koordinatnega sistema. Sam je zaradi nekonsistentnosti zavračal uporabo infinitezimalnih količin.

Arhimedov antični rezultat o kvadraturi parabole pove, da je ploščina med parabolo $y = x^2$ in sekanto $y = a^2$ enaka štirim tretjinam ploščine včrtanega trikotnika, $\frac{4}{3}\frac{2a\cdot a^2}{2} = \frac{4}{3}a^3$, zato je ploščina pod krivuljo $y = x^2$ na intervalu $[0, a]$ enaka

$$\tfrac{1}{2}(2a \cdot a^2 - \tfrac{4}{3}a^3) = \tfrac{1}{3}a^3.$$

Cavalieri je skušal priti do enakega rezultata s pomočjo novih orodij. Interval $[0, a]$ je razdelil na n enakih delov in nad vsakim delom včrtal in očrtal pravokotnik. Tako je v bistvu ponovno uporabil antično metodo izčrpavanja. Ker parabola narašča, je spodnja ocena za ploščino p pod krivuljo enaka

$$\tfrac{a}{n}\big(0 + (\tfrac{a}{n})^2 + (\tfrac{2a}{n})^2 + \ldots + (\tfrac{(n-1)a}{n})^2\big),$$

zgornja pa

$$\tfrac{a}{n}\big((\tfrac{a}{n})^2 + (\tfrac{2a}{n})^2 + (\tfrac{3a}{n})^2 + \ldots + (\tfrac{na}{n})^2\big).$$

Z uporabo tedaj že znane formule $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ je tako dobil oceno

$$\frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3} < p < \frac{a^3n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Takrat sicer še niso poznali koncepta limite, a je bilo Cavalieriju jasno, da od tod sledi pričakovani rezultat $p = \frac{1}{3}a^3$. Podobno je s pomočjo znanih formul za vsoto potenc zaporednih števil izračunal ploščine pod krivuljami $y = x^n$ za $n \leq 9$.

S pomočjo izjemnih izkušenj z analitično geometrijo je Pierre de Fermat (1601–1665) izračunal ploščino pod krivuljo $y = x^m$ tudi v primeru, ko je $m > -1$ realno število. Pokažimo le, kako se je lotil spodnjih vsot (slika 7). Najprej je izbral pozitivno število $\rho < 1$ in interval $(0, a]$ razbil na neskončno različno dolgih podintervalov oblike $(a\rho^i, a\rho^{i-1}]$, $i \in \mathbb{N}$. Vsota ploščin nad temi intervali včrtanih pravokotnikov je enaka

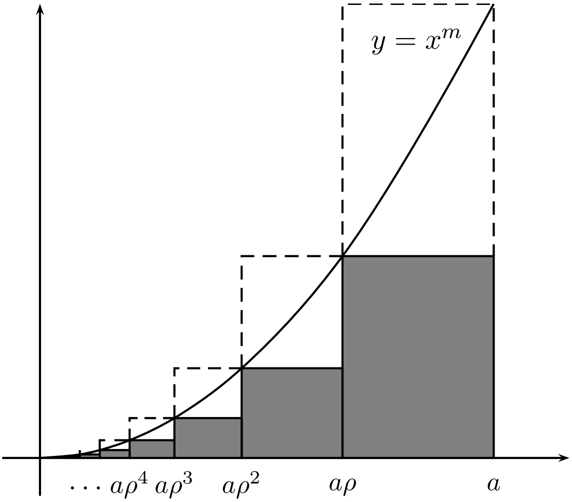
$$S = \sum_{i=1}^{\infty}(a\rho^{i-1} - a\rho^i)(a\rho^i)^m =$$

$$= a^{m+1}\rho^m(1-\rho)\sum_{i=1}^{\infty}(\rho^{m+1})^{i-1} = \frac{a^{m+1}\rho^m(1-\rho)}{1-\rho^{m+1}}.$$

Zadnja enakost drži, ker zaradi $m > -1$ velja $\rho^{m+1} < 1$ in zato vrsta konvergira.

V primeru, ko je m naravno število, lahko zadnjo enakost preoblikujemo v obliko

$$S = \frac{a^{m+1}\rho^m}{1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^m}.$$



Slika 7. Fermatov izračun integrala potenčnih funkcij s pomočjo različno dolgih podintervalov.

Ko pošljemo ρ proti 1, dobimo Cavalierijev rezultat za poljubno naravno število m brez uporabe vsote potenc zaporednih naravnih števil.

Če pa m ni naravno število, je v današnjem jeziku treba izračunati limito

$$\lim_{\rho \to 1} \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho},$$

ki je enaka odvodu funkcije $y = x^{m+1}$ v točki 1. To je Fermat po vseh izkušnjah z iskanjem tangent vedel in dobil rezultat, ki ga danes napišemo kot

$$\int_0^a x^m \, dx = \tfrac{1}{m+1} a^{m+1}, \ m > -1.$$

Ideja z izbiro različno dolgih intervalov je verjetno prišla iz njegovih izkušenj pri računanju ploščine pod krivuljo $y = \frac{1}{x^2}$ na neskončnem intervalu $[a, \infty)$.

Osnovni izrek analize

Osnovni izrek analize po navadi povemo takole: Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$, $x \in [a, b]$ in je

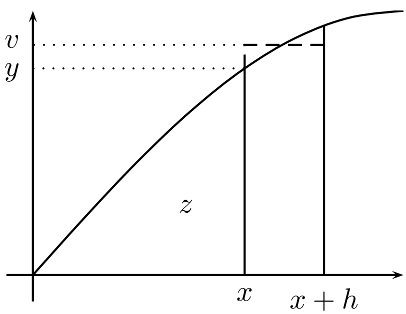
$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt,$$

potem je F odvedljiva in $F' = f$ na intervalu (a, b).

Drugače: če je F primitivna funkcija na intervalu $[a, b]$ zvezne funkcije f, je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Prvi je osnovni izrek analize zapisal James Gregory (1638–1675). V razširjeni verziji ga je objavil Isaac Barrow (1630–1677), njegov učenec Isaac Newton (1643–1727) pa je izrek vključil v matematični kontekst. Napišimo njegov dokaz v modernem jeziku.



Slika 8. Skica k Newtonovemu dokazu osnovnega izreka analize.

Naj bo f nenegativna funkcija, za katero velja $f(0) = 0$. Za $x > 0$ naj bo $y = f(x)$, $h > 0$ pa infinitezimalno majhno število. Naj bo z ploščina pod krivuljo $y = f(x)$ na intervalu $[0, x]$ (slika 8). Izberimo število v, za katero je ploščina pravokotnika s stranico h in višino v enaka ploščini pod krivuljo na intervalu $[x, x+h]$. Ploščina pod krivuljo na intervalu $[0, x+h]$ je enaka vsoti ploščin na intervalih $[0, x]$ in $[x, x+h]$, zato je enaka $z + hv$. Če povečanje ploščine hv delimo z ustreznim povečanjem abscise h, dobimo v. Ker je h infinitezimalno majhno število, lahko vzamemo, da je enako 0, zato je $v = y$ in $\frac{dz}{dx} = y$.

Če prevedemo ploščinske in infinitezimalne argumente v današnji jezik, bomo opazili, da dokaz potrebuje zveznost funkcije f. Glede na argumente v dokazu je Newton verjetno dodatno implicitno privzel, da je funkcija f monotona. Zveznost sta definirala šele Bernard Bolzano (1781–1848) in Augustin-Louis Cauchy (1789–1857).

Po izreku o srednji vrednosti za zvezno funkcijo f obstaja število $\xi_h \in (x, x+h)$, da je

$$v = f(\xi_h) = \tfrac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Sedaj ponovno zaradi zveznosti f velja

$$z'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x) = y.$$

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), ki je uvedel današnjo notacijo za odvode in integrale, je prvi poudaril, da rezultat pove povezavo med določenim integralom in primitivno funkcijo. Interpretacija je tako močno vplivala na poučevanje, da večina dijakov še danes napačno razume določeni integral kot obratno operacijo k odvajanju.

Definicija določenega integrala

George Berkeley (1685–1753) je prvi resno podvomil o logičnih temeljih Newtonove analize. Zapisal je, da tedanji analizi kljub pravilnim rezultatom, ki jih daje, ne moremo zaupati nič bolj kot religiji. Še posebej so ga zmotile neskončno majhne količine, ki jih je primerjal z duhovi umrlih količin. Takrat običajni izračun odvoda funkcije $f(x) = x^2$ je šel recimo takole:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2x \cdot dx + (dx)^2}{dx} = 2x + dx.$$

Potem so na dx nekako pozabili, ker je bilo poljubno majhno število, in dobili $f'(x) = 2x$. Berkeley je pri izračunu ponudil dve možnosti: bodisi je $dx = 0$ in z njim ne smemo deliti bodisi je $2x + dx \neq 2x$, kar pomeni, da je izračun odvoda napačen.

Veliko izjemnih matematikov je skoraj stoletje neuspešno poskušalo utrditi temelje analize, zares pa je uspelo Cauchyju in Karlu Weierstrassu (1815–1897) s korektno definiranima pojmoma limite in odvoda. Tako danes odvod funkcije $f(x) = x^2$ v točki x_0 izračunamo kot limito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0.$$

Zanimivo je, da je Abraham Robinson (1918–1974) šele leta 1966 logično pravilno definiral infinitezimalno majhne količine kot primerne ekvivalenčne razrede zaporedij realnih števil. Robinsonova nestandardna analiza sicer opravičuje klasično računanje z infinitezimalnimi količinami brez danes običajnega ukvarjanja z ε in δ, a je tako nenavadna, da se ni uveljavila niti v poučevanju niti v raziskovanju.

Pred prvo korektno definicijo določenega integrala je prav, da se zavedamo motivacije takratnih matematikov. Integral jim je pomenil ploščino pod grafom funkcije, kot funkcijo pa so si predstavljali predpis $y = f(x)$, ki je bil v večini primerov elementarna funkcija, zagotovo pa zvezna in pogosto tudi nenegativna ter monotona funkcija na integracijskem intervalu. Da so lahko »smiselne« funkcije tudi drugačne, so se zavedeli šele, ko se je pojavila potreba po integraciji vsot Fourierovih vrst.

Cauchy je opazil, da se z ožanjem osnovnic pravokotnikov, ki imajo osnovnico na abscisni osi in so včrtani grafu, vsota njihovih ploščin približuje ploščini pod grafom. Določeni integral je definiral za zvezno funkcijo f na zaprtem intervalu $[a, b]$ kot limito vsot oblike

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}), \tag{6}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

ko gre širina najširšega podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ proti 0. Nato je pokazal, da takšna limita vedno obstaja. Natančen pregled njegovega dokaza pokaže, da je intuitivno pravilen, implicitno pa privzema polnost množice realnih števil, pojem, ki takrat še ni bil znan.

Bernhard Riemann (1826–1866) je določeni integral posplošil na nezvezne funkcije. V primeru, ko je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ in so $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ za $i = 1, \ldots, n$, je izbor $\mathcal{D} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i);\ i = 1, \ldots n\}$ poimenoval *označena delitev* s širino $\max_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$. Za funkcijo f na intervalu $[a, b]$ je nato definiral vsoto

$$R(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Funkcija f je *Riemannovo integrabilna* na intervalu $[a, b]$ in njen integral je enak I, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako označeno delitev $\mathcal{D}$ s širino, manjšo kot δ, velja

$$|R(f, \mathcal{D}) - I| < \varepsilon.$$

Pri nas običajno definiramo integral s primerjavo spodnjih in zgornjih vsot. To definicijo, ki temelji na antičnem izčrpovanju ploščine, je podal Jean-Gaston Darboux (1842–1917). Lahko je videti, da je definicija ekvivalentna Riemannovi.

Izkaže se, da je omejena funkcija Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je zvezna skoraj povsod. *Zveznost skoraj povsod* pomeni, da za vsako (poljubno majhno) število $\varepsilon > 0$ točke nezveznosti ležijo v številni uniji primerno izbranih odprtih intervalov (a_i, b_i) s skupno dolžino $\sum_i |b_i - a_i| < \varepsilon$. Tako na primer Dirichletova funkcija $\chi_{\mathbb{Q}}$, ki je enaka 1 na množici racionalnih števil in 0 drugje, ni zvezna v nobeni točki, zato ni Riemannovo integrabilna. Karl Johannes Thomae (1840–1921) je Dirichletovo funkcijo predelal v funkcijo

$$\tau(x) = \begin{cases} 0; & x \in \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}); \\ \frac{1}{q}; & x = \text{okrajšan ulomek } \frac{p}{q},\ q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

ki je nezvezna le v vsaki neničelni racionalni točki, zato je Riemannovo integrabilna na vsakem intervalu.[5]

Če je funkcija integrabilna v Riemannovem smislu, se za vsako dovolj drobno delitev Riemannova vsota malo razlikuje od določenega integrala, ne glede na izbiro označenih točk. Če torej iz Cauchyjeve definicije izpustimo zahtevo po zveznosti funkcije f, je vsaka Riemannovo integrabilna funkcija integrabilna tudi v Cauchyjevem smislu. Težje je videti, da za omejene funkcije velja tudi obratno.

Praktične probleme, ki so se pojavili pri integraciji bolj neobičajnih funkcij, recimo vsot Fourierovih vrst in funkcij, ki se naravno pojavljajo v verjetnostnem računu, je uspelo rešiti Henriju Léonu Lebesgueu (1875–1941) z vpeljavo merljivih množic in aproksimacijo z enostavnimi funkcijami. V precej površni interpretaciji bi si lahko predstavljali, da pri Riemannovem integralu najprej razdelimo abscisno os na podintervale in seštejemo ploščine pokončnih pravokotnikov, ki imajo te podintervale za osnovnico, pri Lebesgueovem integralu pa najprej na podintervale razdelimo zalogo vrednosti in za osnovnice ležečih pravokotnikov vzamemo ustrezne praslike. V Lebesgueovem smislu je integrabilna tudi Dirichletova funkcija $\chi_{\mathbb{Q}}$. Njen integral na intervalu $[0, 1]$ je enak 0.

LITERATURA

[1] L. V. Ahlfors, ..., A. Wittenberg, *On the mathematics curriculum of the high school*, American Mathematical Monthly **69** (1962), 189–193.

[2] W. S. Anglin, *Mathematics: a concise history and philosophy*, Undergraduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.

[3] M. E. Baron, *The origins of the infinitesimal calculus*, Dover Phoenix Editions, 2003.

[4] R. P. Burn, *Integration, a genetic introduction*, Nordisk Mat. Did., April 1999, 7–27.

[5] E. Carruccio, *Mathematics and logic in history and in contemporary thought*, New Brunswick, NJ Aldine 2006.

[6] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *The MacTutor history of mathematics archive*, `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk`

[7] O. A. Hernandez Rodriguez, J. M. Lopez Fernandez, *Teaching the fundamental theorem of calculus: a historical reflection – Newton's proof of the FTC*, Loci, January 2012.

[8] O. Toeplitz, *Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **36** (1927), 88–99.

[9] O. Toeplitz, *The calculus, a genetic approach*, The University of Chicago Press, 1963.

[5] Množica $\mathbb{Q}$ je števna, zato lahko točke nezveznosti funkcije τ postavimo v zaporedje $(a_n)_n$. Vsak člen a_n zaporedja leži v odprtem intervalu $(a_n - 2^{-n-2}\varepsilon, a_n + 2^{-n-2}\varepsilon)$ z dolžino $2^{-n-1}\varepsilon$. Vsota dolžin intervalov je enaka $\frac{1}{2}\varepsilon$.