PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 1
Strani 11–13

Šefket Arslanagić, Dragoljub M. Milošević, prevod in priredba Tomaž Košir:

OBRAT PTOLOMEJEVEGA IZREKA

Ključne besede: matematika, algebra.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/869-Arslanagic.pdf

OBRAT PTOLEMEJEVEGA* IZREKA

V geometriji je znan *Ptolemejev izrek:*

V vsakem tetivnem četverokotniku ABCD je produkt dolžin obeh diagonal enak vsoti produktov dolžin nasproti ležečih stranic

$$AC \,.\, BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, DA$$

V matematični literaturi najdemo več dokazov tega izreka. V tem članku pa bomo podali dva dokaza obrata Ptolemejevega izreka:

Če v konveksnem četverokotniku ABCD velja

$$AC \,.\, BD = AB \,.\, CD + BC \,.\, DA$$

je ta četverokotnik tetivni.

Dokaz 1. Podan je konveksni četverokotnik $ABCD$. Označimo stranice $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ in $DA = d$, diagonali $AC = e$, $BD = f$ ter kote $\measuredangle DAB = \alpha$, $\measuredangle BCD = \gamma$ in $\measuredangle (AC, BD) = \psi$ (slika 1). Ploščina četverokotnika $ABCD$ je enaka vsoti ploščin trikotnikov ABD in BCD: $P = 1/2\ ad \sin\alpha + 1/2\ bc \sin\gamma$, ali

$$4P = 2ad \sin\alpha + 2bc \sin\gamma \tag{1}$$

Ker je diagonala f skupna stranica trikotnikoma ABD in BCD, z uporabo kosinusovega izreka dobimo $b^2 + c^2 - 2bc \cos\gamma = a^2 + d^2 - 2ad \cos\alpha$ ali

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 = 2bc \cos\gamma - 2ad \cos\alpha \tag{2}$$

Iz enakosti (1) in (2) sledi:

$$(4P)^2 + (b^2 - c^2 - a^2 - d^2)^2 = (2ad \sin\alpha - 2bc \sin\gamma)^2 + (2bc \cos\gamma - 2ad \cos\alpha)^2$$

Od tod z nekaj računanja pridemo do enakosti:

$$16P^2 = 4(ad + bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} \tag{3}$$

Skalarni produkt vektorjev $\vec{AC}$ in $\vec{BD}$ nam bo pomagal najti še drugo enačbo za kvadrat ploščine P:

$$\vec{AC}.\vec{BD} = \vec{AC}.(\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AC}.\vec{AD} - \vec{AC}.\vec{AB}$$

Upoštevajmo pomen skalarnega produkta in uporabimo kosinusov izrek za trikotnika ACD in ABC:

$$ef.\cos\psi = 1/2\,(e^2 + d^2 - c^2) - 1/2(e^2 + a^2 - b^2)$$

ali

$$2ef \cos\psi = b^2 + d^2 - a^2 - c^2 \tag{4}$$

---

* Klavdij Ptolemej (2. stol.), grški matematik, astronom in geograf

Ker je ploščina četverokotnika $ABCD$ enaka $P = 1/2\, ef.\sin\psi$, lahko zapišemo:

$$16P^2 = 4\,e^2 f^2 \sin^2\psi = 4\,e^2 f^2 (1 - \cos^2\psi) \tag{5}$$

Iz (4) in (5) sledi:

$$16P^2 = 4e^2 f^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2 \tag{6}$$

Če izenačimo (3) in (6), dobimo

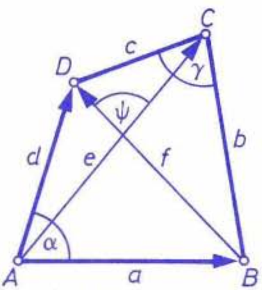
$$4abcd \cos^2 \frac{\alpha+\gamma}{2} = (ac + bd)^2 - e^2 f^2 \tag{7}$$

Upoštevajmo v (7) pogoj izreka $ef = ac + bd$

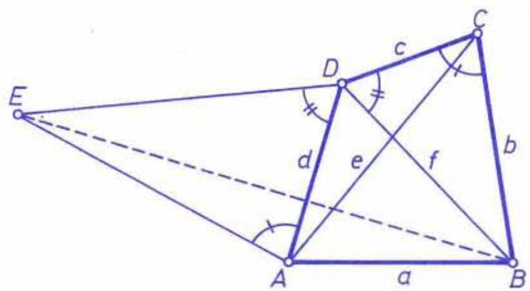
$$4abcd \cos^2 \frac{\alpha+\gamma}{2} = 0$$

Torej mora biti $\alpha + \gamma = 180^0$.

Ker je četverokotnik, v katerem je vsota nasprotnih kotov 180^0, tetivni četverokotnik, je izrek dokazan.



Slika 1



Slika 2

Dokaz 2. Izberimo točko E, da bo veljalo: $\measuredangle EAD = \gamma$ in $\measuredangle EDB = \measuredangle CDB$ (slika 2). Označimo še $\measuredangle EDB = \measuredangle CDA = \delta$. Ker sta si trikotnika AED in DBC podobna, velja

$$\frac{AD}{CD} = \frac{EA}{BC} = \frac{ED}{DB} \quad \text{ali } ED = \frac{d}{c}.f \quad \text{in} \quad EA = \frac{d}{c}.b$$

Uporabimo kosinusov izrek za trikotnike AEB, EDB in ACD:

$$EB^2 = \frac{d^2}{c^2}.\,b^2 + a^2 - \frac{2\,abd}{c}\cos(\alpha+\gamma) \tag{8}$$

$$EB^2 = \frac{d^2}{c^2}.\,f^2 + f^2 - \frac{2d}{c} f^2 \cos\delta \tag{9}$$

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta \tag{10}$$

Če upoštevamo gornje tri enakosti (8), (9) in (10), lahko zapišemo:

$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma) \qquad (11)$$

Ker smo predpostavili zvezo $ef = ac + bd$, iz enakosti (11) sledi $\cos(\alpha + \gamma) = -1$ oziroma $\alpha + \gamma = 180^0$.
Četverokotnik $ABCD$ je tetivni.

Povejmo še to, da dokaz obrata Ptolemejevega izreka s pomočjo inverzije najdemo v knjigah:

1. P.S.Modenov, *Zadači po geometrii,* Nauka, Moskva 1979, str. 254;
2. I.J. Bakeljman, *Inversija,* Nauka, Moskva 1966, str. 52.

Pripomba: S pomočjo enakosti (7) oziroma enakosti (11) zlahka dokažemo tudi Ptolemejev izrek.

Šefket Arslanagić, Dragoljub Milošević
prevedel in priredil *Tomaž Košir*