Numerično računalo pri vsebini integral

Irena Rauter Repija
Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

Povzetek

V prispevku je opisana uporaba numeričnega računala pri raziskovanju geometrijskega pomena določenega integrala in njegovih lastnosti ter uporaba računala pri preverjanju rezultatov rešenih nalog.

Ključne besede: določeni integral, lastnosti določenega integrala, numerično računalo

Using a Calculator to Learn Integrals

Abstract

The article describes calculator use in studying the geometric concept of an integral and its characteristics as well as its use in the verification of the solved tasks.

Keywords: certain integral, characteristics of a certain integral, calculator

Uvod

V srednji šoli je numerično računalo pri pouku matematike skoraj nepogrešljiv pripomoček. Uporabljamo ga za računanje korenov poljubnih stopenj, za računanje vrednosti kotnih funkcij, logaritmov, za preverjanje rezultatov, pri usvajanju novega znanja ter pri preiskovanju in reševanju matematičnih problemov.

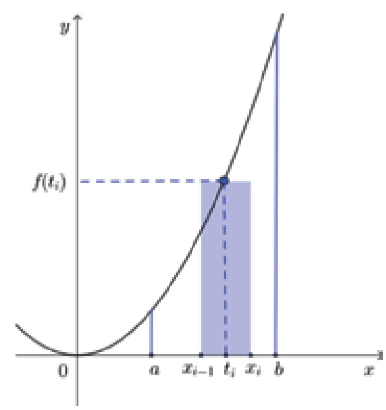
Najprej poglejmo, kako numerično računalo lahko uporabimo za preiskovanje geometrijskega pomena določenega integrala in njegovih lastnosti. Na šoli imamo komplet numeričnih računal, ki jih lahko uporabljamo pri pouku matematike. Večina učencev pa pri opisanem pouku uporablja kar svoje računalo. Na šolskem računalniku imamo nameščen emulator za šolski komplet računal, ki ga uporabimo pri demonstraciji uporabe računala.

Do definicije in geometrijskega pomena določenega integrala

Za uvod v obravnavano snov z dijaki običajno najprej pogledamo eno izmed aktivnih slik, ki prikazuje, kako s pomočjo ploščine pravokotnikov pridemo do ploščine lika med grafom funkcije in abscisno osjo. Dijaki do takrat že znajo izračunati ploščino štirikotnika in nedoločeni integral, ne poznajo pa še zveze med določenim in nedoločenim integralom. Zatem zapišemo definicijo določenega integrala.

Definicija določenega integrala:

Določeni integral zvezne funkcije f na intervalu $[a, b]$, je limita vsote $\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i$, kjer je t_i poljubna točka z intervala $[x_{i-1}, x_i]$, ko gredo širine vseh delnih intervalov Δx_i proti 0, število delilnih točk pa v neskončnost:



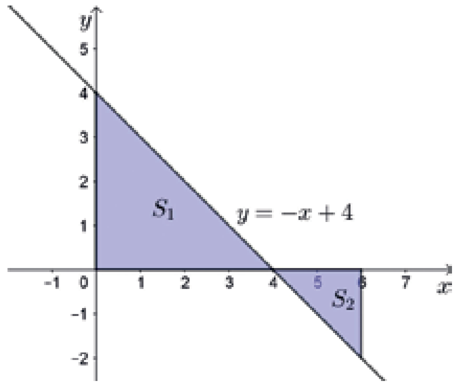
$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

(Bon Klanjšček, 2012).

Preden zapišemo geometrijski pomen določenega integrala, z numeričnim računalom raziščimo, kako je ploščina lika, ki ga graf zvezne funkcije oklepa z abscisno osjo na danem intervalu, povezana z vrednostjo določenega integrala.

V ta namen vzemimo funkcijo f s predpisom $f(x) = -x + 4$ in poglejmo lik, ki ga graf funkcije f na intervalu $[0,6]$ oklepa z abscisno osjo, kot prikazuje slika 1.

Ker ima funkcija f na intervalu $[0, 4]$ pozitivne vrednosti in na intervalu $[4, 6]$ negativne vrednosti, zaradi lažjega razumevanja razdelimo lik med grafom funkcije f in abscisno osjo pri $x = 4$ na dva dela. Ploščino lika S_L, ki ga sestavljata dva pravokotna trikotnika s ploščinama S_1 in S_2 (slika 1) izračunajmo z uporabo obrazca za računanje ploščine pravokotnega trikotnika, za računanje



Slika 1: Lik med grafom funkcije in abscisno osjo.

določenega integrala pa uporabimo numerično računalo, kot je prikazano na sliki 2.

Izračunane ploščine in dobljene vrednosti določenega integrala zapišimo v preglednico 1.

Preglednica 1:

$S_1 =$	$\int_0^4 (-x+4)\,dx =$
$S_2 =$	$\int_4^6 (-x+4)\,dx =$
$S_L =$	$\int_0^6 (-x+4)\,dx =$

Slika 2: Računanje določenega integrala z numeričnim računalom.

Izpolnjena preglednica 1:

$S_1 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$	$\int_0^4 (-x+4)\,dx = 8$
$S_2 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$	$\int_4^6 (-x+4)\,dx = -2$
$S_L = S_1 + S_2 = 8 + 2 = 10$	$\int_0^6 (-x+4)\,dx = 6$

Dijaki nato primerjajo izračunane ploščine in vrednosti določenega integrala. Ugotovimo, da sta na intervalu [0, 4] ploščina in določeni integral oba pozitivna, na intervalu [4, 6] pa je določeni integral negativen. Vprašamo se, zakaj je prišlo do tega. Pogledamo definicijo določenega integrala, kjer vidimo, da je predznak določenega integrala odvisen od predznaka funkcijskih vrednosti na danem intervalu. Na intervalu [4, 6] so vse funkcijske vrednosti negativne, zato je tudi vrednost določenega integrala negativna. Posebej poglejmo, zakaj na intervalu [0, 6] pride do razlike med izračunano ploščino lika in vrednostjo določenega integrala. Ploščina je na celotnem intervalu enaka vsoti ploščin, medtem ko je vrednost določenega integrala enaka razliki med ploščinama likov, ki ležita nad in pod abscisno osjo. Vse skupaj strnemo v geometrijski pomen določenega integrala:

- Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ zvezna in povsod nenegativna ($f \geq 0$), je integral $\int_a^b f(x)dx$ enak ploščini lika, ki je omejen z abscisno osjo, grafom funkcije f ter premicama $x = a$ in $x = b$.
- Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ zvezna in povsod negativna ($f < 0$), je integral $\int_a^b f(x)dx$ negativen in enak nasprotni vrednosti ploščine lika, omejenega z grafom funkcije f, abscisno osjo ter premicama $x = a$ in $x = b$.
- Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ pozitivna in negativna, je določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ enak razliki med ploščinami likov, ki ležijo nad osjo x, in ploščinami likov, ki ležijo pod osjo x (liki so omejeni z grafom funkcije in abscisno osjo na danem intervalu).

(Bon Klanjšček, M. in ostali, 2012).

Raziskujemo lastnosti določenega integrala

Z numeričnim računalom (slika 3 in slika 4) izračunamo še nekaj vrednosti, ki so vezane na lastnosti določenega integrala. Rezultate zapišemo v preglednico 2 in preglednico 3.

Preglednica 2:

$\int_0^4 ((-x) + (4))\,dx =$	$\int_0^4 (-x)\,dx + \int_0^4 (4)\,dx =$
$\int_0^4 2 \cdot (-x+4)\,dx =$	$2 \cdot \int_0^4 (-x+4)\,dx =$

Slika 3: Računanje določenega integrala z numeričnim računalom.

Preglednica 3:

$\int_0^4 (-x+4)\,dx =$	$\int_0^3 (-x+4)\,dx + \int_3^4 (-x+4)\,dx =$
$\int_0^4 (-x+4)\,dx =$	$\int_4^0 (-x+4)\,dx =$
$\int_1^1 (-x+4)\,dx =$	$\int_4^4 (-x+4)\,dx =$

Slika 4: Računanje določenega integrala z numeričnim računalom.

Z dijaki se nato pogovorimo o dobljenih rezultatih in zapišemo naslednje lastnosti določenega integrala.

- Določeni integral vsote dveh funkcij je enak vsoti določenih integralov posameznih funkcij:
$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
- Določeni integral zmnožka funkcije s številom je enak zmnožku števila in določenega integrala funkcije:
$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot \int_a^b f(x)\,dx$$
- Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ in točka c poljubna točka na tem intervalu, je:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
- Če meji določenega integrala med seboj zamenjamo, integral spremeni predznak:
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$
- Če sta meji enaki, ima integral vrednost 0.
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(Bon Klanjšček, 2012).

Prvi del, v katerem smo raziskovali geometrijski pomen in lastnosti določenega integrala, zaključimo z zapisom osnovne formule integralskega računa, ki podaja zvezo med določenim in nedoločenim integralom. Nato nekatere vrednosti določenega integrala, ki smo jih prej dobili z računalom, utemeljimo še računsko.

Osnovni izrek integralnega računa (Newton-Leibnizova formula)

Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$, je $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, kjer je F poljuben nedoločeni integral funkcije f: $F'(x) = f(x)$ (Bon Klanjšček, M. in ostali, 2012).

Preverimo naslednje vrednosti določenega integrala z računanjem določenega integrala po osnovni formuli integralskega računa:

$$\int_0^4 (-x+4)\,dx = -\frac{x^2}{2}+4x\Big|_0^4 = \left(-\frac{4^2}{2}+4\cdot 4\right)-\left(-\frac{0^2}{2}+4\cdot 0\right) = 8$$

$$\int_4^6 (-x+4)\,dx = -\frac{x^2}{2}+4x\Big|_4^6 = \left(-\frac{6^2}{2}+4\cdot 6\right)-\left(-\frac{4^2}{2}+4\cdot 4\right) = -2$$

$$\int_0^6 (-x+4)\,dx = -\frac{x^2}{2}+4x\Big|_0^6 = \left(-\frac{6^2}{2}+4\cdot 6\right)-\left(-\frac{0^2}{2}+4\cdot 0\right) = 6$$

Vidimo, da so izračune vrednosti enake kot v izpolnjeni preglednici 1.

Za vajo izračunamo še določena integrala:

$$\int_0^3 (-x+4)\,dx = -\frac{x^2}{2}+4x\Big|_0^3 = \left(-\frac{3^2}{2}+4\cdot 3\right)-\left(-\frac{0^2}{2}+4\cdot 0\right) = \frac{15}{2}$$

$$\int_3^6 (-x+4)\,dx = -\frac{x^2}{2}+4x\Big|_0^4 = \left(-\frac{6^2}{2}+4\cdot 6\right)-\left(-\frac{3^2}{2}+4\cdot 3\right) = -\frac{3}{2}$$

Vidimo, da je z izbiro delilne točke pri $x = 3$ vrednost določenega integrala na $[0, 6]$ ravno tako enaka 6.

$$\int_0^6 (-x+4)\,dx) = \int_0^3 (-x+4)\,dx + \int_3^6 (-x+4)\,dx = \frac{15}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right) = 6$$

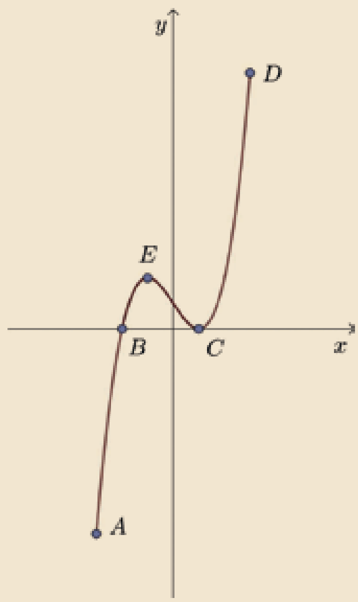
Tudi te rezultate lahko preverimo na sliki 1 s pomočjo ploščin in ustreznim predznakom določenega integrala.

V nadaljevanju si oglejmo še en primer uporabe numeričnega računala, in sicer kako numerično računalo uporabljamo za preverjanje rezultatov.

Pri reševanju naslednje naloge bomo vse rešitve utemeljili računsko, nato pa rezultate preverili še z računalom.

Naloga

Na sliki je narisan graf funkcije f: $[-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$ in na njem točke A, B, C, D in E (slika 5).



Slika 5: Graf funkcije *f*.

a) Izračunajte koordinate točk A, B, C, D in E.
b) Natančno izračunajte koordinati presečišča grafa funkcije f s premico $x - \sqrt{2} = 0$.
c) Izračunajte absciso presečišča grafa funkcije f s premico $y = 3$. Rezultat zapišite na dve mesti natančno.
č) Zapišite vrednosti spremenljivke x, za katere je $f(x) \geq 0$.
d) Izračunajte ploščino lika med grafom funkcije f in abscisno osjo.

Rešitev naloge

a) Izračunajte koordinate točk A, B, C, D in E.

Točki A in D:

Računsko

Ker je funkcija f definirana na intervalu $[-3, 3]$, sta abscisi točk A in D enaki $x_A = -3$ in $x_D = 3$. Izračunajmo njuni ordinati.

$$y_A = f(-3) = \frac{1}{2} \cdot (-3)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-3) + 1 = -8$$

$$y_D = f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3 + 1 = 10$$

Zapišemo koordinati točke A in D: $A(-3, -8)$ in $D(3, 10)$

Rezultat preverimo z računalom

Slika 6 prikazuje, kako z računalom preverimo ordinato točke A. Nato še enkrat uporabimo ukaz CALC in preverimo ordinato točke D.

Vnesemo izraz in uporabimo ukaz CALC.	Izberemo $x = -3$.	Ordinata točke A je -8.

Slika 6: Računanje ordinate točke A z numeričnim računalom.

Točki B in C:

Računsko

V točkah B in C graf funkcije f seka abscisno os. Z uporabo Hornerjevega algoritma izračunamo ničli funkcije f.

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}(x + 2)\,(x - 1)^2 = 0$$

$$x_1 = -2 \text{ in } x_{2,3} = 1$$

Zapišemo koordinati točke B in C: $B(-2, 0)$ in $C(1, 0)$.

Rezultat preverimo z računalom

Na računalu izberemo ukaz za računanje ničel polinoma tretje stopnje.

Vnesemo vrednosti koeficientov *a*, *b*, *c* in *d*.	Preberemo eno ničlo: $x_1 = -2$	Preberemo drugo ničlo: $x_2 = 1$

Slika 7: Računanje ničel z numeričnim računalom.

Točki E in C:

Računsko

Izračunamo prvi odvod funkcije f ter izračunamo abscisi stacionarnih točk.

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(x-1)(x+1)$$

$$\frac{3}{2}(x+1)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1$$

Izračunamo pripadajoči ordinati $y_E = f(-1) = 2$ in $y_C = f(1) = 0$ ter zapišemo koordinati točk E in C: $E(-1, 2)$ in $C(1, 0)$.

Rezultat preverimo z računalom

Zapišemo odvod funkcije f in izraz izenačimo z 0.	Izberemo ukaz SOLVE.	Preberemo absciso prve točke $x_E = -1$ in nato še absciso druge točke $x_C = 1$.

Slika 8: Računanje ničel odvoda z numeričnim računalom.

Z numeričnim računalom preverimo ordinati točk E in C na podoben način, kot smo to naredili za ordinato točke A.

b) Natančno izračunajte koordinati presečišča grafa funkcije f s premico $x - \sqrt{2} = 0$.

Računsko

Iz enačbe $x - \sqrt{2} = 0$ izrazimo $x = \sqrt{2}$ ter izračunamo ordinato presečišča.

$$y = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}^3 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{2} + 1$$

$$y = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Zapišemo koordinati presečišča: $P\left(\sqrt{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

Rezultat preverimo z računalom

Vnesemo izraz in uporabimo ukaz CALC.	Vstavimo $x = \sqrt{2}$.	Preberemo ordinato presečišča $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Slika 9: Računanje ordinate presečišča z numeričnim računalom.

c) Izračunajte absciso presečišča grafa funkcije f s premico $y = 3$. Rezultat zapišite na dve mesti natančno.

Računsko

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 = 3$$

$$x^3 - 3x - 4 = 0$$

Hitro se lahko prepričamo, da enačba nima celoštevilskih rešitev. Iz narisanega grafa lahko razberemo, da bo abscisa presečišča nekje med $x = 2$ in $x = 3$. Uporabimo metodo bisekcije in izračunamo rešitev $x = 2{,}2$ na dve mesti natančno.

Rezultat preverimo z računalom

Z računalom imamo več možnosti za preizkus.

Uporabimo lahko ukaz za reševanje polinomske enačbe 3. stopnje $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ali pa zapišemo enačbo $\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 = 3$ in z ukazom SOLVE dobimo približek $x = 2{,}2$. Lahko pa rezultat preverimo, kot prikazuje slika 9.

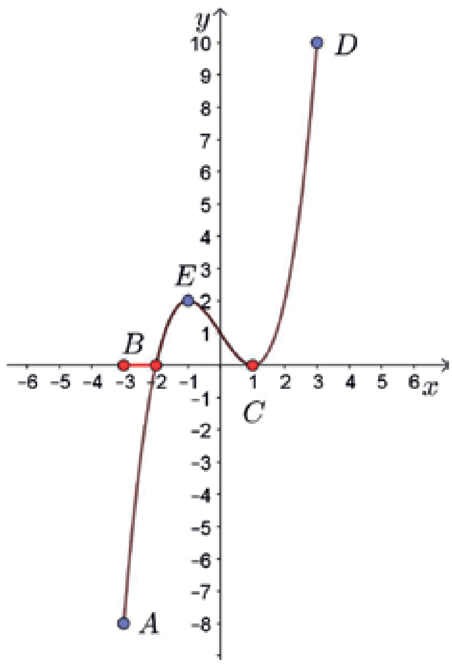
Vnesemo izraz in uporabimo ukaz SOLVE.	Vstavimo $y = 3$.	Preberemo absciso presečišča 2,2.

Slika 10: Računanje abscise presečišča z numeričnim računalom.

č) Zapišite vrednosti spremenljivke x, za katere je $f(x) \geq 0$.

Rešitev preberemo z grafa

Potem, ko smo izračunali koordinate točk na grafu funkcije f, lahko iz slike preberemo $f(x) \geq 0$ rešitev neenačbe: $x \in [-3, -2] \cup \{1\}$



Rezultat preverimo z računalom

Na računalu izberemo ukaz za reševanje polinomske neenačbe tretje stopnje $ax^3 + bx^2 + cx + d \leq 0$.

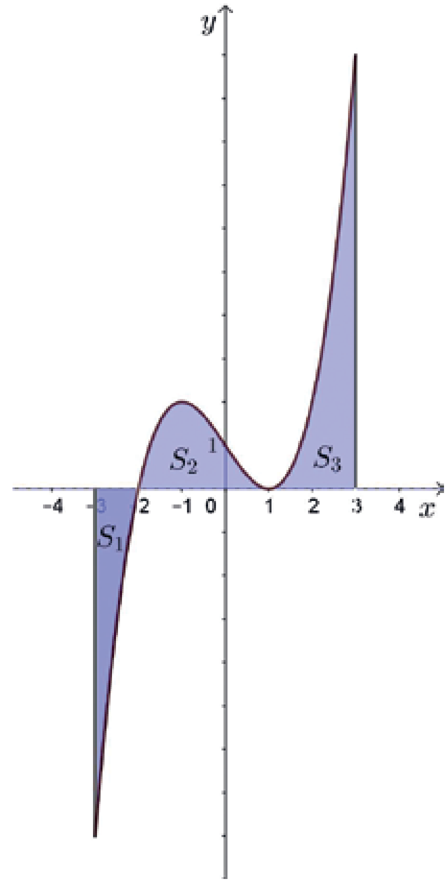
Vnesemo koeficiente a, b, c in d.	Preberemo rešitev: $x \in (-\infty, -2] \cup \{1\}$

Slika 11: Reševanje polinomske neenačbe z numeričnim računalom.

Rezultat, ki je prikazan na računalu za funkcijo f, ki je definirana le na intervalu [3, 3], ni pravilen. Tega se moramo zavedati in predlagane rešitve pravilno uporabiti: $x \in [-3, -2] \cup \{1\}$

d) Izračunajte ploščino lika med grafom funkcije f in abscisno osjo.

Računsko



Slika 12: Lik med grafom funkcije f in abscisno osjo.

Najprej izračunajmo ploščino lika, ki ga graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$ oklepa z abscisno osjo na intervalu $[-3, -2]$:

$$\int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x \Big|_{-3}^{-2} =$$

$$\left(\frac{1}{8}(-2)^4 - \frac{3}{4}(-2)^2 + (-2)\right) - \left(\frac{1}{8}(-3)^4 - \frac{3}{4}(-3)^2 + (-3)\right)$$

$$= -\frac{27}{8}$$

Izračunani integral ima na intervalu $[-3, -2]$ negativno vrednost, saj na tem intervalu graf funkcije f leži pod abscisno osjo. Ploščina lika med grafom funkcije f in abscisno osjo na tem delu enaka $S_1 = \frac{27}{8}$.

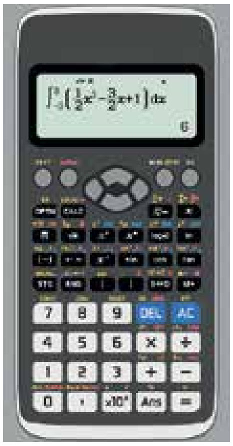
Na podoben način lahko za vajo izračunamo še preostala dva določena integrala ter rezultate vpišemo v preglednico. V preglednico zapišemo še vrednosti pripadajočih ploščin.

Izpolnjena preglednica:

$\int_{-3}^{-2} f(x)\ dx = -\frac{27}{8}$	$S_1 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$
$\int_{-2}^{1} f(x)\ dx = \frac{27}{8}$	$S_2 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$
$\int_{1}^{3} f(x)\ dx = 6$	$S_3 = 6$
$\int_{-3}^{3} f(x)\ dx = 6$	$S_L = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{51}{4} = 12\frac{3}{4}$

Rezultat preverimo z računalom

Z računalom izračunamo določene integrale, npr.:



Slika 13: Računanje določenega integrala z numeričnim računalom.

Zaključek

Predstavljena uporaba numeričnega računala je samo ena od možnosti, ki jih lahko uporabimo v razredu za raziskovanje in reševanje problemov ter utrjevanje znanja. Aktivno učenje dijakom pomaga, da so sami vključeni v proces izgradnje matematičnega znanja, da vsebine bolje razumejo in si jih lažje zapomnijo. Glede na zmožnosti in interese dijakov ter glede na zahtevnost posameznega programa preiskovane lastnosti podkrepimo še z dokazi.

Učitelji matematike od dijakov pričakujemo, da vse rešitve nalog utemeljijo računsko in rezultate kritično ocenijo. Ob tem večkrat pozabimo, da je današnja generacija dijakov drugačna, tako rekoč rojena s tehnologijo. Naša naloga je, da se s smiselno rabo tehnologije pri pouku skušamo čim bolj približati njihovemu načinu učenja in razmišljanja v procesu usvajanja novih vsebin, tudi pri utrjevanju, poglabljanju in ocenjevanju znanja.

Vir

Bon Klanjšček, M. idr. (2012). *Matematika 4. Zbirka nalog za gimnazije.* Ljubljana: DZS.