Bojan Kuzma
ZBIRKA IZPITNIH VPRAŠANJ PRI PREDMETIH ANALIZA III
IN ANALIZA IV

(Zbirka Izbrana poglavja iz matematike, št. 2)

Urednica zbirke: Petruša Miholič

Izdala in založila:
Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje – TeMeNa,
Univerza na Primorskem
Primorski inštitut za naravosloven in tehnične vede Koper
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
UNIVERSITÀ DEL LITORALE
UNIVERSITY OF PRIMORSKA

Titov trg 4, SI – 6000 Koper
Tel.: + 386 5 611 75 00
Fax.: + 386 5 611 75 30
E-mail: info@upr.si
http://www.upr.si

Koper, 2009

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517(075.8)(079.1)

KUZMA, Bojan
Zbirka izpitnih vprašanj pri predmetih Analiza III in Analiza IV [Elektronski vir] / Bojan Kuzma. - El. knjiga. - Koper : Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje - TeMeNa, 2009. - (Zbirka Izbrana poglavja iz matematike ; št. 2)

Način dostopa (URL): http://temena.famnit.upr.si/files/files/zv_2_DS.pdf

ISBN 978-961-92689-1-9

246642432

Zbirka izpitnih vprašanj pri predmetih Analiza III in Analiza IV

Bojan Kuzma

Koper, 2009

Kazalo

1 Predgovor

Zaradi stalnih in ponavljajočih se želja slušateljev po primerkih starih izpitnih vprašanj sem se odločil izdati zbirko vseh kolokvijev in izpitov pri predmetih kjer sem svojčas sam vodil vaje in ki v grobem ustrezajo sedanjima Analiza III in Analiza IV. Zbirka je nastajala skozi več let. V tem času sem vodil vaje na Univerzi v Mariboru in kasneje na Univerzi v Ljubljani, zato najbrž ne bo presenetljivo, da zasledite ponekod naslov "KOLOKVIJ IZ ANALIZE II,"drugod pa "KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE ". Tukaj ni odveč opozorilo, da so bili takrat vsi predmeti celoletni in ne semestrski. Tako npr. Analiza II pokriva celotno področje semestralnih predmetov Analiza III +IV.

Tudi termin predavanja učne snovi je bil na eni univerzi malce drugačen kot na drugi - tako je npr. ponekod v curriculumu tudi delček diferencialnih enačb ali diskretnih struktur. V kolikor je bila večina nalog na kakšnem od izpitov oz. kolokvijev iz teh dveh področij, ga nisem uvrstil v pričujočo zbirko. Če pa so bile naloge iz diferencialnih enačb oz. diskretnih struktur v manjšini, mogoče ena ali dve, sem ga vključil. Na tem mestu bi rad dodal, da naloge niso moje. Večinoma sem jih črpal iz znanih zbirk nalog kot so

(i) M. Ušćumlić, P. Miličić: Zbirka zadataka iz više matematike 1. Beograd. Naučna knjiga, 1984.

(ii) B. G. Sergeevič, B. P. Demidovič (prevajalec I. Uremović): Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke. Zagreb. Tehnička knjiga, 1978.

(iii) M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič: Rešene naloge iz analize I. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1972.

(iv) V. Batagelj: Diskretne strukture. 1 - naloge. Ljubljana, IMFM FNT, Oddelek za matematiko, 1979.

(v) M. Dobovišek, B. Magajna: Naloge iz algebre 1. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, 1984.

(v) M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre. Ljubljana, Pedagoška fakulteta, 1996.

(vi) P. Mizori-Oblak, B. Krušič (avtor dodatnega besedila): Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 1. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1997.

(vii) P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 2. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1991.

(viii) P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 3. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1986.

Tu in tam pa se najde tudi kakšna izvirna naloga.

Glede na raznovrstnost snovi sem bil dolgo časa v dilemi, v katerem vrstnem redu naj zbirko uredim. Odločil sem se za kronološki razpored. Naj na koncu zaželim obilo veselja pri reševanju.

2 Kolokviji

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE II

2.6.1995

1. Naj bo
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}.$$
   (a) Ali je f zvezna?
   (b) Ali je parcialno odvedljiva v točki $(0,0)$?
   (c) Ali je diferenciabilna v tej točki?

2. Poišči ekstremne vrednosti funkcije
$$u := 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$
   na območju, omejenem s krivuljama $y = x^2$ in $y = 4$!

3. Reši diferencialno enačbo
$$(xy^2 - y^3)\,dx + (1 - xy^2)\,dy = 0;$$
   integrirajoči množitelj je funkcija y-na

4. Reši enačbi
   (a) $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3e^x$
   (b) $(1+x)^2 y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE

15.2.1996

1. Izračunaj integral

$$\int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \qquad (b > a > 0)$$

2. (a) Dokaži, da je

$$\int_0^4 x^{\frac{3}{2}} \sqrt{16 - x^2}\, dx = 4^3\, B(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$$

   (b) Dokaži, da je $4^3\, B(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}) = \dfrac{64\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(\frac{1}{4})^2}{21}$.

3. Zamenjaj vrstni red integracije pri

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy$$

KOLOKVIJ IZ ANALIZE II

16.4.1996

1. Dana je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right).$$

   (a) Poišči funkcijo, h kateri konvergira.

   (b) Ali je konvergenca enakomerna?

   (c) Ali lahko vrsto členoma integriramo na intervalu $[0,1]$?

2. Ali konvergira integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$$

3. Napiši enačbo premice skozi koordinatno izhodišče, ki od parabole $y^2 = 4x$ odseče del s ploščino 9.

4. Dokaži, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$$

   konvergira in ji izračunaj vsoto.
   (Nasvet: pomagaj si s funkcijo e^x.)

5. Razvij funkcijo

$$f(x) := \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$$

   v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. Za katere x dobljena vrsta konvergira k $f(x)$?

KOLOKVIJ IZ ANALIZE II za višješolce

16.4.1996

1. Poišči dolžino loka krivulje $y^2 = x^3$, ki ga odseče premica $x = \frac{4}{3}$.

2. Ali konvergira integral
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx$$

3. Napiši enačbo premice skozi koordinatno izhodišče, ki od parabole $y^2 = 4x$ odseče del s ploščino 9.

4. Dokaži, da vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$
konvergira in ji izračunaj vsoto.
(Nasvet: pomagaj si s funkcijo e^x.)

5. Razvij funkcijo
$$f(x) := \frac{x}{x^2 - x - 2}$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. Za katere x dobljena vrsta konvergira k $f(x)$?
(Nasvet: Razbij funkcijo na parcialne ulomke in vsakega razvij v Taylorjevo vrsto. Dobljene vrste nato še seštej.)

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE II

4.6.1996

1. Dana je funkcija
$$f(x,y) := \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$
   (a) Ali jo lahko definiraš v točki $(0,0)$, da bo zvezna?
   (b) Ali je parcialno odvedljiva?
   (c) Ali je diferenciabilna v točki $(0,0)$?

2. Liho nadaljevanje funkcije
$$f(t) := \cos\sqrt{2}t$$
razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi,\pi]$.

3. Razvij funkcijo
$$f(x,y) := \frac{\cos x^3y^4 - 1}{x^5y^2} + (y-1)(x-2)$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$ in izračunaj
$$\frac{\partial^7 f}{\partial x \partial y^6}(0).$$

4. Reši diferencialno enačbo
$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0,$$
ki ustreza pogoju $y(1) = y(-1) = 1$.

5. Bodi
$$u(x,y) := x + \phi(xy),$$
kjer je ϕ diferenciabilna funkcija. Dokaži, da tedaj velja
$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x.$$

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE II za višješolce

4.6.1996

1. Poišči ekstrem funkcije
$$f(x,y) := x^3 + 8y^3 - 6xy + 5;$$
vsakič preveri tudi, ali nastopi lokalni minimum oz. maksimum!

2. Liho nadaljevanje funkcije
$$f(t) := \cos \frac{1}{2} t$$
razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

3. Poišči prve štiri neničelne člene razvoja funkcije
$$f(x,y) := \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke $(1, 2)$.

4. Reši diferencialno enačbo
$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0,$$
ki ustreza pogoju $y(1) = y(-1) = 1$.

5. Bodi
$$u(x,y) := x + \phi(xy),$$
kjer je ϕ diferenciabilna funkcija. Dokaži, da tedaj velja
$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x.$$

KOLOKVIJ IZ ANALIZE II

4.4.1997

1. Izračunaj integrala

   (a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}\, dx$

2. Dokaži, da obstaja in nato izračunaj določeni integral

$$I := \int_0^\pi x \ln \sin x \, dx$$

   (Nasvet: Najprej razbij integral na dva dela: $\int_0^\pi = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^\pi$. V drugi integral lahko uvedeš novo spremenljivko $x = t + \pi/2$, nato pa ga zapišeš kot vsoto dveh integralov. Upoštevaj, da je $\int_0^{\pi/2} \ln \cos t \, dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2$, pa prideš do enačbe $I = \int_0^{\pi/2} x \ln \sin x \, dx + \int_0^{\pi/2} x \ln \cos x \, dx - \frac{\pi}{2}(-\frac{\pi}{2} \ln 2)$. Če sedaj preostala integrala združiš, in upoštevaš adicijski teorem, dobiš $I = \frac{1}{2} I + \ln \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \, dx + \frac{\pi^2}{4} \ln 2$.)

3. Izračunaj dolžino krivulje $y = x - 2\ln(1+x)$ na intervalu $[0,1]$.

4. Dana je funkcija

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & x^2+y^2 \neq 0 \\ A; & \text{sicer} \end{cases}.$$

   Ali lahko definiraš konstanto A, da bo pri vsakem fiksnem $x = x_0$ funkcija $y \mapsto f(x_0, y)$ zvezna povsod. Ali lahko definiraš konstanto A, da bo funkcija f kot funkcija dveh spremenljivk zvezna povsod?

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II

16.4.1997

1. Izračunaj dolžino krivulje, podane parametrično z

$$x(t) := t + t^2 \qquad y(t) := t - t^2$$

   med točkama $T_1(0, -2)$ in $T_2(2, 0)$.

2. Dana je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{A} : (a, b, c, d) \mapsto (c, c, a + b, d).$$

   Zapiši njeno matriko A v standardni bazi in poišči njene lastne vrednosti in lastne vektorje.

3. Poišči Fourierovo vrsto za funkcijo, ki je na intervalu $[-\pi, \pi]$ definirana z

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - x; & -\pi \leq x \leq -\frac{1}{2}\pi \\ x - \frac{\pi}{2}; & \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & \textit{sicer} \end{cases},$$

   in je periodična s periodo 2π.

4. Utemelji, da vrsta konvergira in jo tudi izračunaj na dve decimalki natančno (brez uporabe kalkulatorja!)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$$

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II

2.6.1997

1. Funkcijo
$$f(x,y) := (x-1)^2 + 2y(x-2) + (y-3)^3$$
razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $T(1,2)$.

2. Poišči lokalne ekstreme funkcije
$$f(x,y) := x^2 + xy - y - 32$$

3. Poišči diferencialno enačbo, katere rešitve sestavlja družina krivulj
$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$y'' - 4y' + 13y = x$$

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE II

2.6.1997

1. Naj bo
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}.$$
   (a) Ali je f zvezna?
   (b) Ali je parcialno odvedljiva v točki $(0,0)$?
   (c) Ali je diferenciabilna v tej točki?

2. Poišči ekstremne vrednosti funkcije
$$u := 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$
   na območju, omejenem s krivuljama $y = x^2$ in $y = 4$!

3. Reši diferencialno enačbo
$$(xy^2 - y^3)\,dx + (1 - xy^2)\,dy = 0;$$
   (integracijski faktor je funkcija y-na.)

4. Razvij funkcijo $f(t) := \sin(zt);\ z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Nato pokaži, da je
$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}z}{\sin\pi z} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{k^2-z^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2t+1+1}(2t+1)}{(2t+1)^2-z^2}(-1)^t$$

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II

24.4.1998

1. Določi dolžino krivulje

$$\begin{aligned} x(t) &:= \frac{t^6}{6} \\ y(t) &:= 2 - \frac{t^4}{4} \end{aligned}$$

med njenim presečiščem z abscisno osjo in njenim presečiščem z ordinatno osjo.

2. (a) Z integralskim kriterjem preveri, če vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3n-1)}$$

konvergira.

(b) S kvocientnim kriterijem preveri konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$$

3. Zapiši MacLaurinovo vrsto funkcije

$$f(x) := \frac{1-x}{\sqrt{1-x^4}}$$

4. Razvij funkcijo

$$f(x) := \begin{cases} \pi; & -\pi < x < 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II

8.6.1998

1. Razvij funkcijo
$$f(x,y) := (x^2+y^2)(x^2-y^2) + 2xy(x^2-y^2+y^4)$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$.

2. Naj za funkcijo $z = z(x,y)$ velja:
$$y\frac{\partial z}{\partial x} = x\frac{\partial z}{\partial y}.$$
Napiši gornji izraz v polarnih koordinatah $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$.

3. Poišči ekstreme funkcije $z(x,y) = \cos(x-y)\sin x$.

4. Poišči rešitev diferencialne enačbe
$$y''' - 3y' + 2y = e^x + x$$

5. Poišči vse *usmerjene* grafe na treh in štirih točkah, ki so izomorfni svojemu komplementarnemu grafu.

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

15.3.1999

1. Izračunaj dolžino loka krivulje

$$y = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$$

med točkama $T(1, y(1))$ in $T(2, y(2))$. (35 točk)

2. Izračunaj približno vrednost integrala

$$\int_0^1 \sin x^2$$

tako, da funkcijo $\sin t$ razviješ v Taylorjev polinom do reda 6. Oceni tudi napako. (30 točk)

3. Cestna odseka z enačbo $y = |x|$ pripeljeta vsak s svoje smeri iz neskončnosti do točk $T(0, 0)$ oz. $T(1, 1)$. Poveži ju s krivuljo, da bo dobljena pot dvakrat zvezno odvedljiva. Preveri tudi, če tako sestavljena cesta kdaj seka samo sebe. (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE III
A

2.12.1999

1. Določi prostornino telesa, ki ga omejujejo ploskve z enačbami

$$z = 4 - x, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$

(35 točk)

2. Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

(35 točk)

3. Izračunaj kot med tangento, normalo in binormalo poti

$$\vec{r}(t) := e^t(\sin t, \cos t, 1)$$

in z–osjo, in pokaži, da je neodvisen od parametra. (30 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE III
B

2.12.1999

1. Določi prostornino telesa, ki ga omejujejo ploskve z enačbami

$$z = 4 - x, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 2$$

(35 točk)

2. Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

(35 točk)

3. Izračunaj kot med tangento, normalo in binormalo poti

$$\vec{r}(t) := e(e^t \sin(t+1), e^t, e^t \cos(t+1))$$

in y–osjo, in pokaži, da je neodvisen od parametra. (30 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE I

17.1.2000

1. Rekurzivno definiramo zaporedje na sledeč način:

$$a_1 := 1; \qquad a_{n+1} := \tfrac{1}{2}(a_n^2 - 2a_n)$$

   (a) Pokaži, da je zaporedje alternirajoče (torej so členi z lihimi indeksi pozitivni, s sodimi pa negativni), in da leži na $[-1, 1]$ (15 točk)

   (b) Izrazi a_{n+2} z a_n in odtod pokaži, da je podzaporedje sodih členov padajoče. Pokaži tudi, da je podzaporedje lihih členov monotono. (10 točk)

   (c) Pokaži, da je zaporedje $\big(a_n\big)_n$ konvergentno in poišči limito. (Nasvet: pomagaj si s prejšnjo točko) (10 točk)

2. Pod kakšnimi koti se sekata krivulji

$$y = \sin x, \quad y = \cos x$$

(35 točk)

3. Poišči ploščino lika, ki ga oklepa krivulja $y^2 = x^2 - x^4$. (30 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II
A

12.4.2000

1. Poišči dolžino loka astroide, tj. krivulje z enačbo

$$y^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3}; \qquad x, y \geq 0$$

(30 točk)

2. Potenčno vrsto izrazi z elementarnimi funkcijami (tj. poišči njeno vsoto)

$$s(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^n$$

(Nasvet: Pomagaj si s potenčno vrsto za funkcijo $f(x) := x \cdot s(x)$) (35 točk)

3. Poišči Fourierovo vrsto za funkcijo, ki je na intervalu $[-\pi, \pi]$ definirana z

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - x; & -\pi \leq x \leq -\frac{1}{2}\pi \\ x - \frac{\pi}{2}; & \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{sicer} \end{cases},$$

in je periodična s periodo 2π. (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II B

12.4.2000

1. Poišči dolžino loka astroide, tj. krivulje z enačbo

$$y^{2/3} + x^{2/3} = b^{2/3}; \qquad x, y \leq 0$$

(30 točk)

2. Potenčno vrsto izrazi z elementarnimi funkcijami (tj. poišči njeno vsoto)

$$s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k(k+1)}$$

(Nasvet: Pomagaj si s potenčno vrsto za funkcijo $f(x) := x \cdot s(x)$) (35 točk)

3. Poišči Fourierovo vrsto za funkcijo, ki je na intervalu $[-\pi, \pi]$ definirana z

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x; & -\pi \leq x \leq -\frac{1}{2}\pi \\ -x - \frac{\pi}{2}; & \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{sicer} \end{cases},$$

in je periodična s periodo 2π. (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II
A

11.3.2001

1. Iz kroga z radijem r izrežemo izsek in preostanek zvijemo v stožec. Poišči kot izseka, pri katerem bo prostornina stožca maksimalna. (Nasvet: $V_s = o\,h/3$, kjer je h višina stožca, o pa ploščina osnovnice. Mogoče ti bo tudi koristila identiteta $8\,\pi^3 - 28\,\pi^2\,x + 18\,\pi\,x^2 - 3\,x^3 = (2\,\pi - x)\,(4\,\pi^2 - 12\,\pi\,x + 3\,x^2)$)

   (35 točk)

2. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, če množico

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ -\pi/2 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \cos x\}$$

   zavrtiš okoli y–osi. (30 točk)

3. S pomočjo Taylorjevega polinoma reda $p = 5$ za funkcijo $\sin x/2$ približno izračunaj integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x/2)}{x}\,dx$$

   in oceni napako. (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II
B

11.3.2001

1. Dan je krog polmera a. Iz njega naredimo stožec tako, da najprej odrežemo izsek, in preostanek zvijemo. Poišči kot izseka, pri katerem bo prostornina tako dobljenega stožca maksimalna.
   (Nasvet: $V = ho/3$, kjer je h višina stožca, o pa ploščina osnovnice. Mogoče ti bo tudi koristila identiteta $8\,\pi^3 - 28\,\pi^2\,t + 18\,\pi\,t^2 - 3\,t^3 = (2\,\pi - t)\,(4\,\pi^2 - 12\,\pi\,t + 3\,t^2)$)

   (35 točk)

2. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, če množico

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ -\pi/2 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \cos x\}$$

   zavrtiš okoli x–osi. (30 točk)

3. S pomočjo Taylorjevega polinoma reda $p = 5$ za funkcijo $\sin x/3$ približno izračunaj integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x/3)}{3x}\,dx$$

   in oceni napako. (35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

A

30.5.2001

1. Naj bo $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definirana z $f(x) := \sin(2x)$. Razvij sodo nadaljevanje funkcije f v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Preveri tudi, kdaj je dobljena vrsta enaka $f(x)$.
(Nasvet: Mogoče ti bo v pomoč:
$\cos\alpha \sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$ in pa $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$.) (35 točk)

2. Naj bosta Φ, Ψ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji. Poišči vse točke (x, y), da je
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$
kjer je $z(x, y) := \Phi(xy) + \sqrt{xy}\Psi(y/x)$ (30 točk)

3. Poišči ekstrem funkcije $f(x, y) := y^2 - 3x^2 + 2y$ na območju, omejenem z elipso $x^2/4 + y^2 = 1$.
(35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

A

30.5.2001

1. S pomočjo potenčne vrste izračunaj vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$$

(30 točk)

2. Naj bo $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ definirana z $f(x) := \cos(\frac{x}{2})$. Razvij liho nadaljevanje funkcije f Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi,\pi]$. Preveri tudi, kdaj je dobljena vrsta enaka $f(x)$.
(Nasvet: Mogoče ti bo v pomoč: $\cos\alpha\sin\beta = \frac{-\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$ in pa $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$.) (35 točk)

3. Poišči ekstrem funkcije $f(x,y) := x^2 - 3y^2 + 2x$ na območju, omejenem s krivuljama $y^2 = x$ in $x^2 + y^2 = 5x$. (35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

B

30.5.2001

1. S pomočjo potenčne vrste izračunaj vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n}$$

(30 točk)

2. Naj bo $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definirana z $f(x) := \cos(\frac{x}{2})$. Razvij jo v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Preveri tudi, kdaj je dobljena vrsta enaka $f(x)$.
(Nasvet: Mogoče ti bo v pomoč: $\cos\alpha \sin\beta = \frac{-\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$ in pa $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$.) (35 točk)

3. Poišči ekstrem funkcije $f(x, y) := y^2 - 3x^2 + 2y$ na območju, omejenem s krivuljama $x^2 = y$ in $x^2 + y^2 = 5y$. (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II
A

12.4.2002

1. Območje $\mathcal{D}$ omejujejo krivulje $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = x^3$. Izračunaj površino telesa, ki nastane z rotacijo $\mathcal{D}$ okoli abscise. (30 točk)

2. S pomočjo Euler-McLaurinove formule izračunaj $\sum_{k=0}^{2002} k^2$.
   (Nasvet: $h\sum_{j=0}^{n-1} g(a+jh) - \int_a^b g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{p} \frac{h^j}{j!} B_j \left[g^{(j-1)}(x)\right]_a^b + (-1)^{p+1}\frac{h^p}{p!}\int_a^b P_p(x) g^{(p)}(x)\,dx$;
   poleg tega pa je

$$B_0(x) = 1 \qquad \max_{x\in[0,1]} |B_0(x)| = 1.$$

$$B_1(x) = \left(-\left(\frac{1}{2}\right) + x\right) \qquad \max_{x\in[0,1]} |B_1(x)| = 0.5$$

$$B_2(x) = \left(\frac{1}{6} - x + x^2\right) \qquad \max_{x\in[0,1]} |B_2(x)| = 0.166667$$

$$B_3(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{3\,x^2}{2} + x^3\right) \qquad \max_{x\in[0,1]} |B_3(x)| = 0.0481125$$

$$B_4(x) = \left(-\left(\frac{1}{30}\right) + x^2 - 2\,x^3 + x^4\right) \qquad \max_{x\in[0,1]} |B_4(x)| = 0.0333333)$$

   (35 točk)

3. Razvij $F(x) := \int_0^x \sin t^2\,dt$ v Taylorjevo vrsto okoli $x_0 = 0$. Izračunaj tudi $F^{(7)}(0)$.
   (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II
B

12.4.2002

1. Območje $\mathcal{D}$ omejujejo krivulje $x = 1,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 3x^3$. Izračunaj površino telesa, ki nastane z rotacijo $\mathcal{D}$ okoli abscise. (30 točk)

2. S pomočjo Euler-McLaurinove formule izračunaj $\sum_{k=1902}^{2002} k^2$.
(Nasvet: $h\sum_{j=0}^{n-1} g(a+jh) - \int_a^b g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{p} \frac{h^j}{j!} B_j \left[g^{(j-1)}(x)\right]_a^b + (-1)^{p+1}\frac{h^p}{p!}\int_a^b P_p(x) g^{(p)}(x)\,dx$;
poleg tega pa je

$$B_0(x) = 1 \qquad \max_{x\in[0,1]} |B_0(x)| = 1.$$

$$B_1(x) = \left(-\left(\frac{1}{2}\right) + x\right) \qquad \max_{x\in[0,1]} |B_1(x)| = 0.5$$

$$B_2(x) = \left(\frac{1}{6} - x + x^2\right) \qquad \max_{x\in[0,1]} |B_2(x)| = 0.166667$$

$$B_3(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{3\,x^2}{2} + x^3\right) \qquad \max_{x\in[0,1]} |B_3(x)| = 0.0481125$$

$$B_4(x) = \left(-\left(\frac{1}{30}\right) + x^2 - 2\,x^3 + x^4\right) \qquad \max_{x\in[0,1]} |B_4(x)| = 0.0333333)$$

(35 točk)

3. Razvij $F(x) := \int_0^x \cos t^2\,dt$ v Taylorjevo vrsto okoli $x_0 = 0$. Izračunaj tudi $F^{(9)}(0)$.

(35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II
A

31.5.2002

1. S pomočjo Beta funkcije ($B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$) izračunaj integral
$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2^4 - x^4}}$$
(35 točk)

2. Razvij funkcijo $f(x) := \sin 2x$ po kosinusih na $[-\pi, \pi]$. Kdaj je dobljena vrsta enaka $f(x)$? (20+10=30 točk)
(Nasvet: $\sin(\alpha)\,\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$; $\cos(\beta)\,\sin(\alpha) = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$)

3. Identiteta $u + v = x$; $u^3 + v^3 = y$ določa funkciji $u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$. Pokaži, da je $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v^2}{v^2-u^2}$. S pomočjo tega rezultata izračunaj še $\frac{df}{dx}$, če je $f(u) = u \sin u$.
(10+25=35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II
B

31.5.2002

1. S pomočjo Beta funkcije ($B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$) izračunaj integral
$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3^4 - x^4}}$$
(35 točk)

2. Razvij funkcijo $f(x) := \cos 2x$ po sinusih na $[-\pi, \pi]$. Kdaj je dobljena vrsta enaka $f(x)$? (20+10=30 točk)
(Nasvet: $\sin(\alpha)\,\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$; $\cos(\beta)\,\sin(\alpha) = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$)

3. Identiteta $u + v = x$; $u^3 + v^3 = y$ določa funkciji $u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$. Pokaži, da je $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{3(v^2-u^2)}$. S pomočjo tega rezultata izračunaj še $\frac{df}{dy}$, če je $f(v) = v \sin v$.
(10+25=35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

12.4.2003

1. Izračunaj dolžino loka krivulje

$$y = \arcsin(e^{-x})$$

   med točkama $T(0, y(0))$ in $T(1, y(1))$.
   (Nasvet: $\frac{1}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$ in $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.) (30 točk)

2. Razvij funkcijo $f(x) := \frac{1-\cos(x^2)}{x^2}$ v Taylorjevo vrsto okoli $x_0 = 0$ in izračunaj $f^{(22)}(0)$. Za katere x je vrsta enaka $f(x)$? (35 točk)

3. S pomočjo Hermitove formule

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) = h/2(f(b)+f(a)) - h^2/12(f'(b)-f'(a)) + r(a,b,h)$$

   (kjer je $|r(a,b,h)| \leq \frac{h^4}{384}\int_a^b |f^{(4)}(x)|\,dx$) seštej

$$\sum_{i=11}^{999} \frac{1}{i^3}$$

   in oceni napako. (35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

23.4.2003

1. Izračunaj dolžino loka funkcije

$$y = e^x$$

med točkama $T(0, y(0))$ in $T(1, y(1))$.

(30 točk)

2. Razvij funkcijo $f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ v neskončno Taylorjevo vrsto okoli $x_0 = 0$ in izračunaj $f^{(20)}(0)$. Za katere x je vrsta enaka $f(x)$? (35 točk)

3. S pomočjo Hermitove formule

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) = h/2(f(b)+f(a)) - h^2/12(f'(b)-f'(a)) + r(a,b,h)$$

(kjer je $|r(a,b,h)| \leq \frac{h^4}{384}\int_a^b |f^{(4)}(x)|\,dx$) seštej

$$\sum_{i=21}^{999} \frac{1}{i^4}$$

in oceni napako. (35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

A

2.6.2003

1. Naj bo $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definirana z $f(x) := \cos(2x)$. Razvij liho nadaljevanje funkcije f v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Preveri tudi, kdaj je dobljena vrsta enaka $f(x)$.
(Nasvet: Mogoče ti bo v pomoč:
$\cos\alpha \sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$ in pa $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$.) (35 točk)

2. Naj bosta Φ, Ψ dvakrat zvezno odvedljivi funkciji. Poišči vse točke (x, y), da je
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$
kjer je $z(x, y) := \Phi(xy) + \sqrt{xy}\Psi(y/x)$ (30 točk)

3. Poišči ekstrem funkcije $f(x, y) := x^2 - 3y^2 + 2x$ na območju, omejenem z elipso $x^2 + y^2/4 = 1$.
(35 točk)

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

5.4.2004

1. Lik, omejen s koordinatnima osema in krivuljo $y^{2/3} + x^{2/3} = 1$ zavrtimo okoli abscie (x–osi). Poišči volumen vrtenine.
(Nasvet: $V = \pi \int_\alpha^\beta f(x)^2 \, dx$) (35 točk)

2. Zapiši Taylorjevo formulo reda $n = 10$ okoli $\bar{x} := 0$ za funkcijo $f(x) := \cos(x^2)$ in oceni napako, če $x \in [-1, 1]$. (30 točk)

3. Potenčno vrsto izrazi z elementarnimi funkcijami (tj. poišči njeno vsoto)

$$s(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} x^n$$

(Nasvet: Pomagaj si s potenčno vrsto za funkcijo $f(x) := x \cdot s(x)$) (35 točk)

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

31.5.2004

1. V enačbo $\frac{\partial u}{\partial x} - x = y - \frac{\partial u}{\partial y}$ za funkcijo $u = u(x, y)$ uvedi nove spremenljivke $a := x - y$, $b := xy$.
   Preveri, ali se v novih spremenljivkah enačba glasi $\frac{\partial u}{\partial a} = 0$, ali pa $\frac{\partial u}{\partial b} = 0$.
   (35 točk)

2. S pomočjo Euler-McLaurinove formule

$$h\sum_{j=0}^{n-1} g(a+jh) - \int_a^b g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{p} \frac{h^j}{j!} B_j \Big[g^{(j-1)}(x)\Big]_a^b + (-1)^{p+1}\frac{h^p}{p!}\int_a^b P_p(x) g^{(p)}(x)\,dx$$

   seštej $\sum_{k=1}^{9999} k^4$. (30 točk)

3. Poišči vse lokalne ekstreme funkcije $z = y^2 + \cos(x - y)$. (35 točk)

3 Pisni izpiti

IZPIT IZ MATEMATIKE III

24.1.1994

1. Podana je funkcija $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\text{sicer} \end{cases}$

   (a) Izračunaj smerne odvode funkcije f v izhodišču.

   (b) Ali je funkcija zvezna?

   (c) Ali je odvedljiva v izhodišču?

   Odgovore utemelji!

2. Označimo z J_0 Besselovo funkcijo ničelnega reda. Dokaži, da je

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} J_0(x)\, dx = \begin{cases} \pi/2 & ;a > 0 \\ \arcsin a & ;|a| \leq 1 \\ -\pi/2 & ;a < -1 \end{cases}$$

   (Nasvet: $J_0(x)$ lahko pišemo tudi kot $J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos\theta)\, d\theta$; poleg tega pa bo verjetno potrebno uporabiti znano enakost $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi/2$.)

3. S pomočjo razvoja funkcije

$$f(x) = (\pi^2 - x^2)^2 \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

   v Fourierovo vrsto, izračunajte vsoto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

4. Poišči vse singularne točke diferencialne enačbe II reda

$$(3z^2 + 7z + 4)\omega'' + (18z + 22)\omega' + 18\omega = 0.$$

   V okolici vsake pravilne singularne točke poišči tudi splošno rešitev gornje enačbe!

IZPIT IZ ANALIZE II

13.9.1994

1. Dokaži, da je integral
$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^k}$$
konvergenten le za $k > 1$!

2. Funkcijo
$$f(x) := \begin{cases} 2x; & x < 3\pi \\ (x-\pi)^2; & x \geq 3\pi \end{cases}$$
razvij v Fourierovo vrsto na $[2\pi, 4\pi]$. Koliko je $s(0)$? ($s(x)$ je Fourierova vrsta funkcije f.)

3. Izračunaj vsoto
$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2(k-1)x^k \ .$$
Za katere x vrsta konvergira?

4. Če je $x = r\cos\theta$ in $y = r\sin\theta$, pokaži, da je
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos 2\theta}{r^2} \ !$$

5. Reši diferencialno enačbo $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$, $y(1) = 1$!

IZPIT IZ ANALIZE II

14.2.1995

1. Poišči ekstreme funkcije

$$f(x,y,z) := 2x + 2y - z,$$

znotraj enotske krogle s središčem v izhodišču koordinatnega sistema.

2. Poišči krivulje, kjer je ploščina trikotnika, ki ga tvorijo presečišči tangente z koordinatnima osema in točka $(0,0)$ konstantno enaka a^2.

3. Sklenjeni krivulji

$$r = a(1+\cos\phi) \quad \text{in} \quad r = a(1+\sin\phi)$$

omejujeta dva ravninska lika. Izračunaj ploščino in obseg preseka teh dveh likov.

4. Dana je funkcija

$$f(x,y) := x\log(x^2+y^2)\ .$$

   (a) ali je zvezna?

   (b) ali je zvezno parcialno odvedljiva?

5. Naj bo

$$f(t) := \log\frac{1}{t} \quad \text{in} \quad u(x,y) := f(x^2+y^2).$$

Poišči tiste točke, kjer je

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = 0$$

IZPIT IZ MATEMATIKE III

14.2.1995

1. Izračunaj
$$\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}};$$
kjer integriramo znotraj enotske krogle s središčem v izhodišču.

2. Določi v formuli
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + R$$
uteži a_0, a_1 in vozle x_0, x_1, da bo formula natančna, tj. da bo $R = 0$ za vse polinome stopenj $0, 1, \ldots, n$. Kako velik je sploh lahko n?

3. Dokaži, da je
$$\mathrm{Rot}(\vec{f} \times \vec{a}) = \left(\mathrm{Grad}\,\vec{f}\right)\vec{a} - (\mathrm{Div}\,\vec{f})\vec{a};$$
pri čemer je $\mathrm{Grad}\,\vec{f}$ matrika, v katere vrsticah so gradienti posameznih komponent vektorske funkcije $\vec{f}$

4. Funkcijo $f(x) := \cos(zx)$ razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Odtod izračunaj koeficiente a_k v formuli
$$\mathrm{ctg}(\pi z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{(z-k)}$$

IZPIT IZ ANALIZE II

11.4.1995

1. Poišči krivuljo, ki gre skozi točko $T(1,0)$ in v vsaki točki krivulje velja: odsek tangente na ordinatni osi je enak razdalji med dotikališčem (tangente na krivuljo) in koordinatnim izhodiščem.

2. Dokaži, da funkcija $z = \arctan \frac{x}{y}$ ustreza enačbi
$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2};$$
tu je $x = u + v$ in $y = u - v$!

3. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$. (Nasvet: ena izmed rešitev, y_1 je polinom tretje stopnje. Splošno rešitev dobiš tako, da postaviš $y := y_1 z$ in poiščeš neznano funkcijo z.)

4. Določi najmanjšo in največjo vrednost funkcije
$$f(x,y) := x^2 + y^2 - 3xy$$
na območju $D := \{(x,y); 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2\}$.

5. Razvij liho nadaljevanje funkcije $f(x) := \cos zx$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Odtod izračunaj vsoto
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)^2 - z^2}$$

IZPIT IZ MATEMATIKE III

6.6.1995

1. Krivulja $\vec{r}(s)$ je podana z naravnim parametrom s. Poišči tak vektor $\vec{A}(s)$, za katerega velja:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{A} \times \vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{A} \times \vec{n};$$

tu sta $\vec{t}$ in $\vec{n}$ tangenta oz. normala krivulje $\vec{r}$.
(Nasvet: Frenetove formule.)

2. Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \quad (0 < a < b).$$

3. Poišči neznano diferenciabilno funkcijo f, za katero je $f(0) = 0$, in je polje

$$\vec{U} := (1 + x^2) f(x) \vec{\imath} + 2xy f(x) \vec{\jmath} - 3z\vec{k}$$

solenoidalno. Nato najdi tudi tisti njegov potencial, pri katerem je zadnja komponenta ničelna.
(Nasvet: f je oblike $\frac{p(x)}{(1+x^2)^2}$, kjer je p polinom tretje stopnje.)

4. Poišči prve tri pozitivne korene enčbe

$$x \sin x = 1.$$

Koreni naj bodo izračunani na 5 decimalk natančno.
(Nasvet: nalogo si precej olajšaš s skico.)

IZPIT IZ ANALIZE II

13.6.1995

1. Ali vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{n^n}$$
konvergira?

2. Razvij funkcijo
$$f(x,y) := \frac{1+\sin xy + xy\sin xy}{1+xy}$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$

3. Poišči splošno rešitev diferencialnih enačb
   (a) $y\,dx = \sqrt{y^2+x^2}\,dy$
   (b) $y'' + y = \frac{x^2+2}{x^3}$.

   Ali ima enačba (a) tudi singularno rešitev?

4. Določi ekstremne vrednosti funkcije
$$f(x,y) := x^2 + y^2 - 3xy$$
na območju $D := \{(x,y); x \leq y^2, -2x \geq y\}$.

5. Izračunaj vsoto
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)^2 - z^2}$$
(Nasvet: razvij liho nadaljevanje funkcije $f(x) := \cos zx$ v Fourierovo vrsto)

IZPIT IZ ANALIZE II

11.6.1996

1. Dana je funkcija

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}$$

   (a) Kje je definirana?

   (b) Izrazi jo z elementarnimi funkcijami

   (c) Poišči $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)9^n}$.

   (Nasvet: s substitucijo jo pretvori v potenčno vrsto!)

2. Za pozitivna števila x, y in z velja zveza $x + y + z = 1$. Pri katerih vrednostih doseže funkcija

$$f(x, y, z) := x^{p_1}\, y^{p_2}\, z^{p_3}$$

   največjo vrednost? (Tu je p_1, p_2, $p_3 > 0$.)

3. Razvij funkcijo

$$f(x) := \begin{cases} \pi x - x^2; & x \in (-\pi, 0) \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi^2; & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

   v Fourierovo vrsto in z njeno pomočjo dokaži, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4. Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y$$

IZPIT IZ ANALIZE II za višješolce

11.6.1996

1. Izračunaj
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\frac{x^n}{n!}$$

2. Izračunaj ploščino zanke Descartovega lista
$$x = \frac{3t}{1+t^3} \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

3. Razvij funkcijo
$$f(x) := \begin{cases} \pi x - x^2; & x \in (-\pi, 0) \\ x^2 - 3\pi x + 2\pi^2; & x \in (0, \pi) \end{cases}$$
v Fourierovo vrsto in z njeno pomočjo dokaži, da je
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4. Poišči ekstreme funkcije
$$2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$
na območju, omejenem s krivuljama
$$y = x^2 \quad \text{in} \quad y = 4$$

5. Poišči polinomsko rešitev enačbe
$$(1-2x^2)y'' + 2y' + 4y = 0$$

IZPIT IZ ANALIZE II za višješolce

27.8.1996

1. Izračunaj vsoti
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\,\frac{x^{n+2}}{n!} \qquad \text{oz.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}\,\frac{x^{n}}{n!}$$

2. V trikotniku ABC s koordinatami $A(0,0)$, $B(1,0)$ in $C(0,1)$ poišči točko, katere vsota razdalj do temen trikotnika je maksimalna.

3. Razvij funkcijo
$$f(x) := \begin{cases} e^{tx}; & x \in (0, 2\pi) \\ 1; & x = 0,\ x = 2\pi \end{cases}$$
v Fourierovo vrsto.

4. Bodi funkcija $z = z(x, y)$ podana implicitno z
$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = y^2 z.$$
Poišči totalni diferencial funkcije z.

5. Reši naslednji diferencialni enačbi:
   (a) $y''' + y' = x^4$.
   (b) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^3$.

IZPIT IZ MATEMATIKE II

20.2.1998

1. Razvij funkcijo

$$f(x,y) := (x^2+y^2)(x^2-y^2) + 2xy(x^2-y^2+y^4)$$

   v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$.

2. Poišči prehodno matriko med standardno bazo in bazo, podano z

$$\vec{e}_1 := 4\vec{i} - 6\vec{j}$$
$$\vec{e}_2 := \vec{i} + 12\vec{j}$$

   V novi bazi izrazi tudi matriko

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Določi dolžino krivulje

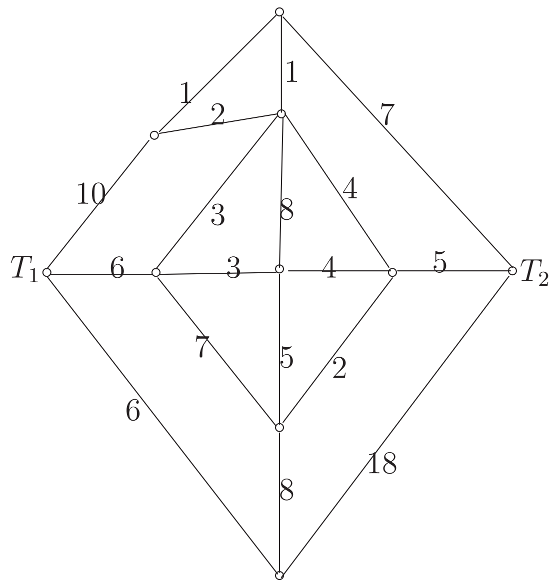
$$\begin{aligned} x(t) &:= \frac{t^6}{6} \\ y(t) &:= 2 - \frac{t^4}{4} \end{aligned}$$

   med njenim presečiščem z abscisno osjo in njenim presečiščem z ordinatno osjo.

4. Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$y''' - 3y' + 2y = e^x + x$$

5. Poišči najkrajše vpeto drevo v grafu



IZPIT IZ MATEMATIKE II

24.6.1998

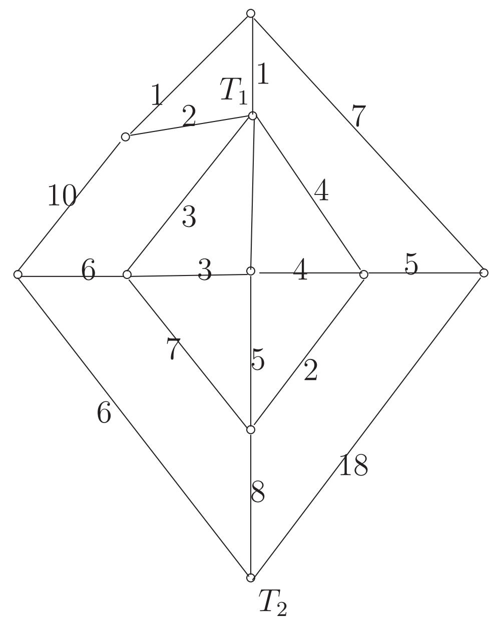
1. Poišči površino vrtenine, ki nastane z rotacijo pozitivnega dela funkcije
$$y = 2 + x - x^2$$
okoli abscisne osi.

2. Liho nadaljevanje funkcije
$$f(x) := 1 \qquad (x \geq 0)$$
razvij v Fouirerovo vrsto na $[-\pi, \pi]$.

3. Razvij funkcijo
$$f(x,y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke $T(0,0)$ do vključno polinoma četrte stopnje.

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$y'' - 4y' + 4y = x$$

5. S pomočjo Dijkstrinega algoritma poišči najkrajši pot med točkama T_1 in T_2 v grafu


T_1
T_2
1
1
7
2
10
3
4
6
3
4
5
7
5
2
6
18
8

IZPIT IZ MATEMATIKE II

7.9.1998

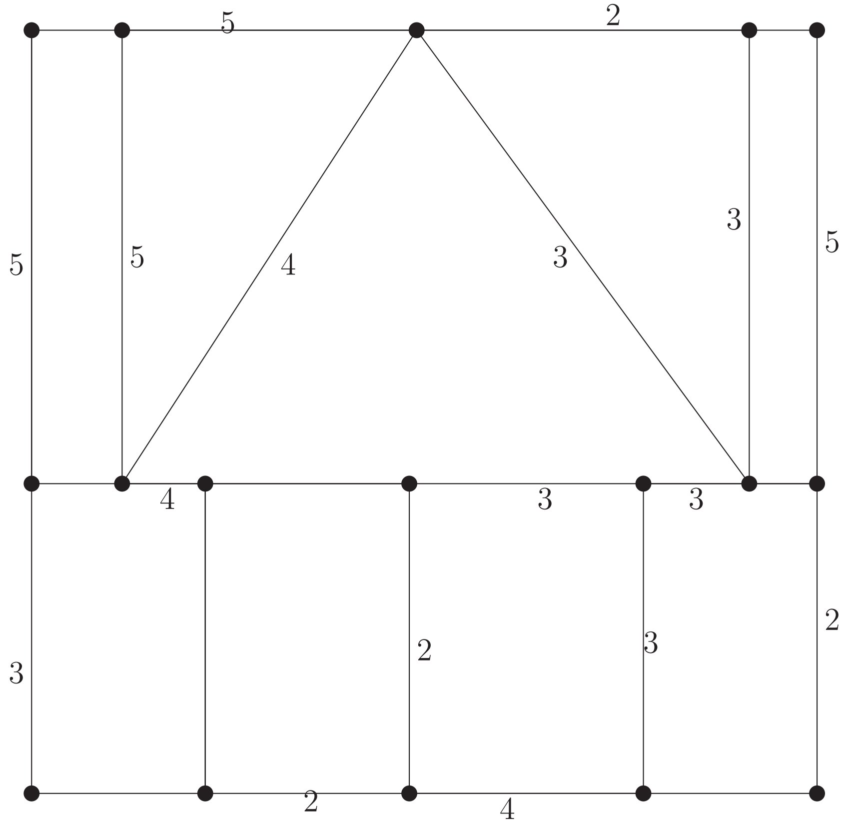
1. Poišči površino lika, ki ga omejujejo krivulja $y = \frac{1}{x \ln^2 x}$ in premice $x = 0,\ x = e^{-1}$ ter $y = 0$.

2. Izračunaj vsoto
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{2^n} \right)$$

3. V diferencialno enačbo
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
za funkcijo $z = z(x, y)$ uvedi nove spremenljivke ξ in η, ki se s starimi izražajo kot: $\xi + \eta = x,\ \ \xi \cdot \eta = y$.

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$y''' - y'' - y' + y = e^x - 1$$

5. Poišči najkrajše vpeto drevo v naslednjem grafu. (Vse daljice brez oznak imajo dolžino 1.)


5
2
5
5
4
3
3
5
4
3
3
3
2
3
2
2
4

IZPIT IZ MATEMATIKE II

20.8.1998

1. Poišči ploščino med krivuljo $y = (x + x^3)e^{-x^2}$ in njeno asimptoto.

2. Poišči ekstreme funkcije

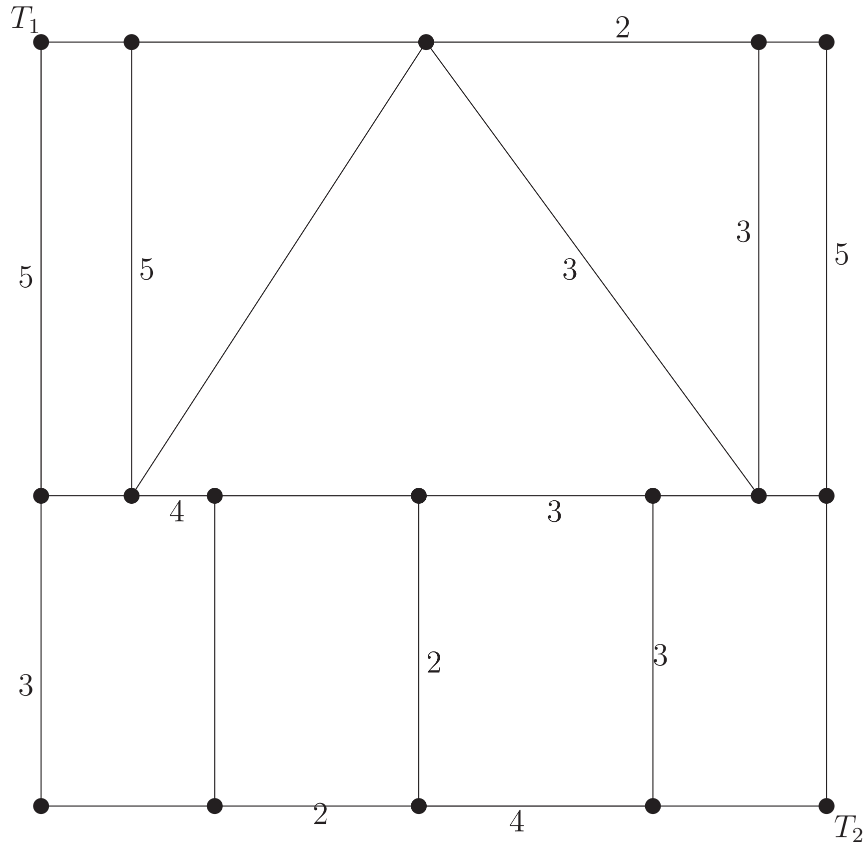
$$f(x, y) := x^2 - 3xy + 2y^2 + y + x - 2$$

3. Razvij funkcijo $f(x, y) := \frac{\sin(x^2y)}{y}$ V Taylorjev polinom okoli točke $T(0, 0)$.

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y''' - 3y' + 2y = x + \cos x$$

5. Poišči najkrajšo pot med T_1 in T_2 v naslednjem grafu. (Vse daljice brez oznak imajo dolžino 1.)



T_1
2
5
5
3
3
5
4
3
3
2
3
2
4
T_2

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

21.6.1999

1. Po metodi najmanjših kvadratov aproksimiraj funkcijo $\sqrt{x}$ s polinomom stopnje največ ena v točkah $x = 0, 1, 4$ in 9.

2. Bodi $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Razvij funkcijo $f(x) := \cos(zx)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Nato izračunaj vsoto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2 - k^2}$$

   (Nasvet: mogoče ti bo v pomoč identiteta $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$)

3. Poišči maksimum funkcije $z = x^2 - x - y^2$ na trikotniku z oglišči v točkah $T(0, 0)$, $T(1, 0)$, $T(0, 1)$.

4. Razvij funkcijo $f(x, y) := \frac{x \sin xy}{y}$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $T(0, 0)$ in poišči vrednost $\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3}(0, 0)$

5. Izračunaj dvojni integral

$$\iint\limits_D \sin\tfrac{x}{y}\, dxdy,$$

   kjer je D območje, omejeno s premicami $x = 0$, $y = \pi$ ter kubično parabolo $y = \sqrt[3]{x}$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ INŽENIRSKE MATEMATIKE (študij ob delu)

30.6.1999

1. Za katera realna števila x velja neenačba
$$|x-1| < |x+1|$$

2. Pokaži s popolno indukcijo, da je
$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

3. Poišči pravokotno projekcijo premice $p : x+y-z=1,\ x+z=2$ na ravnino $\Pi : x-y+z=3$.

4. Poišči lastne vrednosti matrike
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Pri vsaki lastni vrednosti poišči tudi vse linearno neodvisne lastne vektorje.

5. Napiši enačbo tangente in normale na krivuljo $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ v točki $x=2$, kjer krivulja seka abscisno os. V tej točkah poišči tudi kot med krivuljo in absciso.

6. Poišči dolžino loka krivulje
$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln(x)}{2}$$
od $x=1$ do $x=e$.

7. Naj bo $f(x,y) := x^2 \ln(xy)$. Izračunaj
$$-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

8. Skiciraj integracijsko območje, zamenjaj vrstni red integracije in izračunaj dvojni integral:

$$\int_0^{1/2} dx \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} xy\, dy + \int_{1/2}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\, dy$$

Vsaka naloga prinese po 15 točk.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

13.9.1999

1. S pomočjo potenčne vrste poišči vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$$

2. Ravni cesti z enačbama $y = -x + 1$ oz. $y = x$ nas pripeljeta iz neskončnosti do točk $T(0,1)$ oz. $T(1,1)$. Manjkajoči odsek ceste naredi tako, da bo celotna trasa potekala po dvakrat odvedljivi krivulji.

3. Bodi $z \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Razvij funkcijo $f(x) := \sin(zx)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Nato izračunaj vsoto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k \sin(kx)}{z^2 - k^2}$$

(Nasvet: mogoče ti bo v pomoč identiteta $\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$)

4. Poišči pogojni ekstrem funkcije $u(x,y) := ax + by$, če točka leži na krožnici $x^2 + y^2 = 1$.

5. Skiciraj integracijsko območje in zamenjaj vrstni red integriranja

$$\int_0^{1/2} dx \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1+(x-1)^2}} f(x,y)\, dy + \int_{1/2}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\, dy$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

15.11.1999

1. S pomočjo potenčne vrste poišči vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$$

2. Naj dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $u = u(x, y)$ zadošča identiteti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u$$

   Pokaži, da se z uvedbo novih spremenljivk $\xi = x - t,\ \eta = x + t$ identiteta glasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} u = 0.$$

3. Poišči ekstremne vrednosti funkcije

$$g(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

   na območju, omejenem s krivuljama $y = x^2$ in $y = 4$.

4. S pomočjo razvoja funkcije $f(x) := (\pi^2 - x^2)^2$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$, izračunaj

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}.$$

   (Nasvet: $\int x^n \cos(\alpha x)\, dx = \frac{x^n \sin(\alpha x)}{\alpha} + \frac{n x^{n-1} \cos(\alpha x)}{\alpha^2} + \frac{n-n^2}{\alpha^2} \int x^{n-2} \cos(\alpha x)\, dx$)

5. Približno izračunaj integral s pomočjo razvoja funkcije $\sqrt{1+t}$ v binomsko vrsto reda 5 in nato oceni napako.

$$\int_0^1 t^{-4/5} \sqrt{1+t}\, dt$$

IZPIT IZ MATEMATIČNE ANALIZE III
A

14.1.2000

1. Izračunaj
$$\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}};$$
kjer integriramo znotraj enotske krogle s središčem v izhodišču.

2. Dokaži, da obstaja tak neničelni (konstanten) vektor $\vec{a}$, da krivulja
$$\vec{r}(t) := \left(t, \frac{t^2}{3}, \frac{2t^3}{27}\right)$$
oklepa z njim konstanten kot.

3. Izračunaj
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$
(Nasvet: pomagaj si z funkcijo $f(\alpha) := \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}dx$. Odtod je gornji integral enak $f(1) - f(0)$.)

IZPIT IZ MATEMATIKE III

27.1.2000

1. Krivulja $\vec{r}(s)$ je podana z naravnim parametrom s. Poišči tak vektor $\vec{A}(s)$, za katerega velja:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{A} \times \vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{A} \times \vec{n};$$

tu sta $\vec{t}$ in $\vec{n}$ tangenta oz. normala krivulje $\vec{r}$.
(Nasvet: Frenetove formule.)

2. Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \quad (0 < a < b).$$

3. Poišči neznano diferenciabilno funkcijo f, za katero je $f(0) = 0$, in je polje

$$\vec{U} := (1 + x^2) f(x)\vec{\imath} + 2xyf(x)\vec{\jmath} - 3z\vec{k}$$

solenoidalno. Nato najdi tudi tisti njegov potencial, pri katerem je zadnja komponenta ničelna.
(Nasvet: f je oblike $\frac{p(x)}{(1+x^2)^2}$, kjer je p polinom tretje stopnje.)

4. Poišči prve tri pozitivne korene enčbe

$$x \sin x = 1.$$

Koreni naj bodo izračunani na 5 decimalk natančno.
(Nasvet: nalogo si precej olajšaš s skico.)

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE III

9.3.2000

1. Določi spremljajoči trieder $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ za krivuljo
$$\vec{r}(t) := \big(t - \sin t, 1 - \cos t, t\big)$$
pri $t = 0$.

2. S pomočjo integrala poišči volumen telesa, ki ga omejujejo ploskve z enačbami
$$z = 2x^2 + y^2 + 1, \quad x + y = 1, \quad z = 0, \quad x = 0, \quad y = 0$$

3. S pomočjo integrala poišči volumen telesa, ki ga od hiperboloida
$$x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$$
odreže valj $x^2 + y^2 = a^2$.

4. Izračunaj integral
$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \quad (0 < a < b).$$

5. Izračunaj
$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} dx$$
(Nasvet: pomagaj si s funkcijo $f(\alpha) := \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\alpha \tan x)}{\tan x} dx$.)

6. Poišči neznano diferenciabilno funkcijo f, za katero je $f(0) = 0$, in je polje
$$\vec{U} := (1 + x^2) f(x)\vec{\imath} + 2xy f(x)\vec{\jmath} - 3z\vec{k}$$
solenoidalno. Nato najdi tudi tisti njegov potencial, pri katerem je zadnja komponenta ničelna.
(Nasvet: f je oblike $\frac{p(x)}{(1+x^2)^2}$, kjer je p polinom tretje stopnje.)

7. Poišči prve tri pozitivne korene enčbe

$$x \sin x = 1.$$

Koreni naj bodo izračunani na 5 decimalk natančno.
(Nasvet: nalogo si precej olajšaš s skico.)

Izmed 7. izberite 5 nalog. Vaš izbor onzačite na začetku lista.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

20.3.2000

1. Izračunaj dolžino loka funkcije

$$f(x) := 1/4\,x^2 - 1/2\ln x$$

za $1 \leq x \leq e$.

2. Liho nadaljevanje funkcije

$$f : x \mapsto \begin{cases} x; & 0 < x \leq \pi/2 \\ 0; & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

razvij v Fourierovo vrsto na $[-\pi, \pi]$.

3. Naj bodo a, b realna števila in

$$u(x,y) := \ln\frac{1}{r}; \qquad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Za katera števila a, b je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0?$$

4. Dano pozitivno realno število a razdeli na tri pozitivna števila, da bo njihov produkt maksimalen.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATČNE ANALIZE III

28.4.2000

1. Poišči vrednost integrala

$$\iint\limits_D \sqrt{x+y} \cdot (x-y)^5 \, dxdy;$$

   kjer integriramo po območju D, omejenem s premicami $x+y=1,\ x-y=1,\ x+y=3,\ x-y=-1$.

2. Preveri, če je krivulja ravninska, in če je, poišči enačbo ravnine v kateri leži.

$$\vec{r}(t) = (1+3t+2t^2, 2-2t+5t^2, 1-t^2).$$

3. Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \, dx \quad (0 < a < b).$$

4. Izračunaj

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} dx$$

   (Nasvet: pomagaj si s funkcijo $f(\alpha) := \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\alpha \tan x)}{\tan x} dx$.)

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

5.6.2000

1. S pomočjo integrala izračunaj volumen vrtenine, ko se trikotnik z oglišči $T(0,0)$, $T(1,1)$, $T(2,0)$ zavrti okoli ordinate.

2. Razvij funkcijo
$$f(x) := \frac{3}{1+x-2x^2}$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke $x=0$ in poišči konvergenčni polmer.

3. Naj bo $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Sodo nadaljevanje funkcije $f(x) := \sin zx$ razvij v Fourierovo vrsto na $[-\pi, \pi]$, in preveri, za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi transformiranki $s(x)$.

4. Poišči točko na elipsi $x^2 + y^2/4 = 1$, ki je *najdlje* od točke $T(1,0)$. (Nasvet: Lagrangeova metoda iskanja vezanih ekstremov.)

5. Izračunaj integral
$$\iint_S xy\,dxdy$$
kjer integriramo po območju S, omejenem z gornjim delom krožnice $(x-2)^2 + y^2 = 1$ ter abscisno osjo.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE III

8.6.2000

1. Izračunaj $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\, dx$

2. Integriraj
$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy,$$
kjer je D tisto območje, ki leži med srčnico $r = (1+\cos\phi)$ in krožnico $r = 1$, in ki ne vsebuje koordinatnega središča.

3. Pokaži, da vse normalne ravnine na krivuljo $\vec{r}(t) := (\sin^2 t, \sin t \cos t, \cos t)$ potekajo skozi isto točko.
(Normalna ravnina je pravokotna na tagento.)

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $2y'' + 5y' = f(x)$, če je

   (a) $f(x) = 0^{\cdot}1\, e^{-2^{\cdot}5x} - 25\sin(2^{\cdot}5x)$

   (b) $f(x) = 3\cosh(5x/2)$

5. Določi konstanti a in b, da bo izraz
$$\frac{(y^2+2xy+ax^2)\, dx - (by^2+2xy+x^2)\, dy}{(x^2+y^2)^2}$$
totalni diferencial skalarnega polja $u(x,y)$ ter nato določi u.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

19.6.2000

1. Poišči vsoto
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)3^{n-1}}$$
(Nasvet: Pomagaj si s potenčno vrsto $\sum x^{2n}/(2n-1)$.)

2. Enačbe $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$ in $z = u^3 + v^3$ določajo funkcijo $z = z(x, y)$. Ali velja $\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv$?

3. Naj bo $z \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Liho nadaljevanje funkcije $f(x) := \cos zx$ razvij v Fourierovo vrsto na $[-\pi, \pi]$, in preveri, za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi transformiranki $s(x)$.
(Nasvet: $\cos(\alpha)\ \sin(\beta) = \frac{\sin(\beta-\alpha)+\sin(\beta+\alpha)}{2}$.)

4. Poišči točko na elipsi $x^2 + y^2/4 = 1$, ki je *najdlje* od točke $T(0, 2)$.

5. Izračunaj integral
$$\iint\limits_S xy\, dxdy$$
kjer integriramo po območju S, ki leži med enotsko krožnico in srčnico $r = 1 + \cos\phi$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

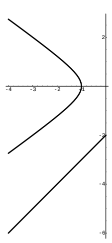
28.8.2000

1. Poišči površino vrtenine, če lik, ki ga omejujeta krivulji $y^2 = x$ ter $x^2 = y$ zavrtimo okoli x–osi.
(Nasvet: $\mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}^2 x - 1 = \frac{\mathrm{ch}(2x)-1}{2}$, poleg tega pa je $\mathrm{sh}'x = \mathrm{ch}x$ ter $\mathrm{ch}'x = \mathrm{sh}x$.)

2. Poišči smerni odvod funkcije $z = \frac{y^2}{x}$ v točki $T = (1/2, 1/\sqrt{2})$, in v smeri normale na elipso $2x^2 + y^2 = 1$.

3. Naj bo $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Funkcijo $f(x) := \sin zx$ razvij v Fourierovo vrsto na $[-\pi, \pi]$, in preveri, za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi transformiranki $s(x)$.
(Nasvet: $\sin(\alpha)\,\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$.)

4. V manjšem naselju imajo dve cesti; prva je oblike $x^2 - 2y^2 = 1$, druga pa $y = x - 2$; tu je $x \leq 0$. Ker je naselje zelo majhno, imajo precej omejen proračun, radi pa bi povezali obe dve cesti med sabo. Ali jim lahko poveš koliko morajo najmanj plačati, če prišepnemo, da je cena nove ceste premosorazmerna z njeno dolžino?
(Nasvet: Kvadrat razdalje od točke $T(x_0, y_0)$ do premice z enačbo $p : aX + bY + c = 0$ izračunamo po formuli $d(p,T)^2 = \frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$. Nato uporabi metodo vezanih ekstremov.)



5. Izračunaj integral
$$\iint\limits_S e^{\frac{x}{y}}\, dxdy$$

kjer integriramo po območju S, ki leži med parabolo $y^2 = x$ in premicama $x = 0$ ter $y = 1$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

11.9.2000

1. S pomočjo integrala izračunaj volumen vrtenine, ko se trikotnik z oglišči $T(0,0)$, $T(1,1)$, $T(2,0)$ zavrti okoli *ordinate*, tj. y–osi.

2. S pomočjo vsote
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}$$
seštej $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)9^n}$.

3. Poišči Fourierovo vrsto za funkcijo
$$f(x) := \begin{cases} 1; & -\pi/2 \leq x \leq \pi \\ 0; & -\pi \leq x < -\pi/2 \end{cases},$$
ki jo periodično nadaljujemo s periodo 2π. Za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi vrsti?

4. V parcialno diferencialno enačbo
$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(y^3-x^3)(x+y)}{x^3y^3} z; \qquad z = z(x,y)$$
uvedi nove neodvisne spremenljivke $u = x^2+y^2$, $v = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

5. Zamenjaj vrstni red integracije
$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)\, dy.$$

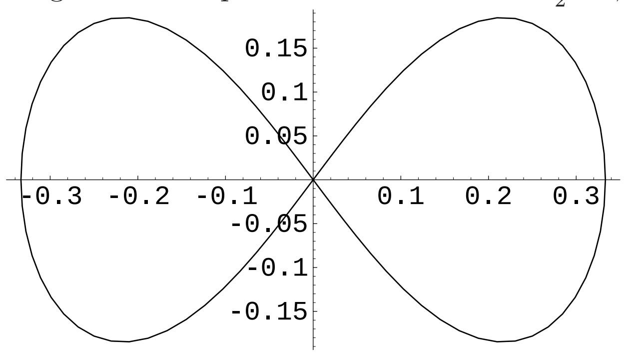
POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE III

13.9.2000

1. Izračunaj ploščino sklenjene krivulje z enačbo

$$\left(\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}\right)^2=\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{5^2}$$

(Nasvet: Uvedi posplošene polarne koordinate $x = 2r\cos t$, $y = 3r\sin t$. Mogoče ti bo v pomoč tudi: $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2\,t)}{2}$, $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2\,t)}{2}$.)



2. Dana je prostorska krivulja $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $z = a\ln(2a/(2a-x))$. Zapiši jo z naravnim parametrom.

3. Izračunaj skalarni pretok polja $\vec{a} := \left(x^2, y-x, yz\right)$ v smeri notranje normale na površino, ki jo omejujejo ploskve

$$z = 0, \quad z = x^2+y^2, \quad x^2+y^2 = 1.$$

4. Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe $2y''+5y' = f(x)$, če je $f(x) = 0{\cdot}1\,e^{-2{\cdot}5x} - 25\sin(2{\cdot}5x)$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

15.11.2000

1. S pomočjo potenčne vrste poišči vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)3^n}$$

2. Naj dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $u = u(x, y)$ zadošča identiteti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u$$

Pokaži, da se z uvedbo novih spremenljivk $\xi = x - t,\ \eta = x + t$ identiteta glasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} u = 0.$$

3. Poišči ekstremne vrednosti funkcije

$$g(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

na območju, omejenem s krivuljama $y = x^2$ in $y = 4$.

4. S pomočjo razvoja funkcije $f(x) := \pi^2 - x^2$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$, izračunaj

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

(Nasvet: $\int x^n \cos(\alpha x)\, dx = \frac{x^n \sin(\alpha x)}{\alpha} + \frac{n x^{n-1} \cos(\alpha x)}{\alpha^2} + \frac{n-n^2}{\alpha^2} \int x^{n-2} \cos(\alpha x)\, dx$)

5. Približno izračunaj integral s pomočjo razvoja funkcije $\sqrt{1+t}$ v binomsko vrsto reda 5 in nato oceni napako.

$$\int_0^1 t^{-2/5} \sqrt{1+t}\, dt$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

20.3.2001

1. S pomočjo potenčne vrste poišči vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^n}$$

2. Poišči Fourierovo vrsto za funkcijo

$$f(x) := \begin{cases} 1; & -\pi \leq x \leq -\pi/2 \\ -1; & \pi/2 \leq x < \pi \\ 0 & \text{sicer} \end{cases},$$

   ki jo periodično nadaljujemo s periodo 2π. Za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi vrsti?

3. V parcialno diferencialno enačbo

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0; \qquad z = z(x, y)$$

   uvedi nove neodvisne spremenljivke $u = x$, $v = x^2 + y^2$.

4. Poišči ekstremne vrednosti funkcije

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

   na območju, omejenem s krivuljo $y^2 + x^2 = 2x$.

5. Zamenjaj vrstni red integracije

$$\int_0^{\pi/2} dx \int_{-\sin x}^{\cos x} f(x, y)\, dy.$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

5.6.2001

1. Funkcijo
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n-1}$$
izrazi z elementarnimi funkcijami (tj. seštej gornjo vrsto).

2. Poišči Fourierovo vrsto za funkcijo
$$f(x) := \begin{cases} 2; & -\pi/2 \leq x \leq \pi \\ 1; & -\pi \leq x < -\pi/2 \end{cases},$$
ki jo periodično nadaljujemo s periodo 2π. Za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi vrsti?

3. Razvij $f(x, y) := 3y^2 + 2xy - x^2 - 6x - 2y - 4$ po potencah $(x + 2)$ in $(y - 1)$.
(Nasvet: Razvij jo v okolici točke $T(-2, 1)$.)

4. Poišči točko na hiperboli $x^2 + 2y + 1 = y^2$, ki je *najbliže* točki $T(1, 1)$.
(Nasvet: Lagrangeova metoda iskanja vezanih ekstremov.)

5. Zamenjaj vrstni red integracije
$$\int_0^1 dy \int_y^{y+2} f(x, y)\, dx.$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

13.6.2001

1. Poišči volumen avtomobilske zračnice, ki nastane, ko zavrtimo krožnico $x^2 + (y-2)^2 = 1$ okoli abscise.
   (Nasvet: Zgornji del krožnice je graf funkcije $y = 2 + \sqrt{1-x^2}$. Pri integriranju pa ti bo mogoče v pomoč $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$.)

2. Razvij funkcijo
$$f_h(x) := \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq h \\ 0; & h < x < \pi \end{cases},$$
   po kosinusih (tu je $h \in (0, \pi)$). Za katere x je $f(x)$ enaka tako dobljeni vrsti?

3. Naj bo $u = u(x, y, z) := x + \frac{x-y}{y-z}$. Poišči vse točke x, y, z, za katere je
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

4. Poišči tri taka pozitivna števila z vsoto 1, da bo njihov produkt največji možen.

5. Zamenjaj vrstni red integracije
$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx.$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

18.6.2001

1. Poišči dolžino odseka, ki ga od tangente na funkcijo $y = x^2$ v točki $x = 2$ odrežeta koordinatni osi.

2. Naj bo $h \in (-\pi, \pi)$. Poišči Fourierovo vrsto za funkcijo

$$f_h(x) := \begin{cases} 1; & -\pi \le x \le h \\ 0; & h < x < \pi \end{cases},$$

ki jo periodično nadaljujemo s periodo 2π. Za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi vrsti?

3. V parcialno diferencialno enačbo

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(y^3 - x^3)(x+y)}{x^3y^3}z; \qquad z = z(x,y)$$

uvedi nove neodvisne spremenljivke u, v, ki so s starimi v povezavi: $u = x^2 + y^2$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

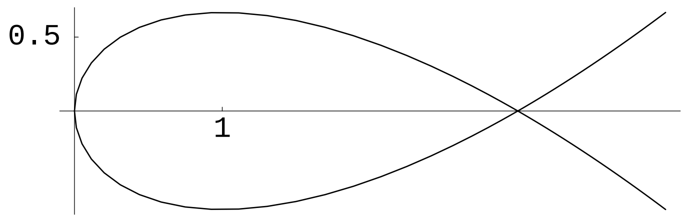
4. Poišči ekstreme funkcije $f(x,y) := \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ na kvadratu $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ 0 \le x, y \le \pi/2\}$

5. Zapiši Taylorjevo formulo reda $p = 2$ za funkcijo $f(x,y) := x^y$ v okolici točke $T(1,1)$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

27.8.2001

1. Poišči površino vrtenine, če zarotiraš pentljo $9y^2 = x(3-x)^2$ okoli x–osi.



(Nasvet: Mogoče ti bo v pomoč $\frac{9+12\,x-2\,x^2-4\,x^3+x^4}{36\,x-24\,x^2+4\,x^3} = \frac{(1+x)^2}{x}$.)

2. Naj bo $h \in (0,\pi)$. Razvij funkcijo

$$f_h(x) := \begin{cases} 1; & 0 \le x \le h \\ 0; & h < x \le \pi \end{cases},$$

po sinusih. Za katere x je $f(x)$ enaka tako dobljeni vrsti?

3. Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Poišči vse točke, ki rešijo enačbo

$$y\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y},$$

če je $\Phi = \Phi(x,y) := f(4x+y^2)$.

4. Poišči razdaljo med koordinatnim izhodiščem in krivuljo z enačbo $xy = 1$.
(Nasvet: Lagrangeova metoda vezanih ekstremov).

5. Zamenjaj vrstni red integracije

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-1+\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

10.9.2001

1. Poišči naravno definicijsko območje funkcije f in izračunaj njeno vsoto (tj., izrazi jo z elementarnimi funkcijami)

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)}$$

2. Funkcijo, ki jo periodično nadaljujemo s periodo 2π, razvij v Fourierovo vrsto

$$f(x) := \begin{cases} |x|; & \pi/2 \leq |x| \leq \pi \\ -1; & -\pi/2 < x < \pi/2 \end{cases}$$

Za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi vrsti?

3. Naj bo g dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Ali je $\Phi(x,y) := g(2x + xy - y^2)$ rešitev enačbe

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - (2+y)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + (x-2y)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0?$$

4. Poišči ekstremne vrednosti funkcije

$$g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

na kvadratu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 2\}$.

5. Za funkcijo

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

uporabi Taylorjevo formulo reda $p = 10$ po potencah $(x-2)$ in $(y+1)$. Oceni ostanek če je $x \in [1,3]$ ter $y \in [-2,2]$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

13.11.2001

1. Izračunaj volumen vrtenine, če polkrožnico $y = \sqrt{2x - x^2}$; $x \in [0, 2]$ zarotiraš okoli ordinate (tj., y–osi).
   (Nasvet: $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2\,t)}{2}$.)

2. Razvij v Fourierovo vrsto funkcijo $f(x) := |\sin x|$ na $[-\pi, \pi]$. Za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi vrsti?

3. Poišči smerni odvod funkcije $f(x, y) := x^2 \ln(xy) - y \sin(\pi x)$ v točki $T(1/2, 2)$ in v poljubni smeri. Pri kateri smeri je odvod *najmanjši*?

4. Naj bo g zvezno odvedljiva funkcija. Preveri, če za $\Phi(x, y) := x \cdot g(2x - y^2)$ velja
$$y \frac{\partial \Phi}{\partial x} + x \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{y}{x} \Phi$$

5. Zapiši funkcijo $f(x, y) := e^y \sin(x/2)$ po Taylorjevi formuli okoli točke $T(0, 0)$ do reda $n = 2$. Oceni napako, če je $x, y \in [-0{\cdot}1, 0{\cdot}1]$.
   (Nasvet: $e \simeq 2.7182 \cdots \leq 3$.)

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

19.11.2001

1. Izračunaj volumen vrtenine, če polkrožnico $y = \sqrt{2x - x^2}; \quad x \in [0, 2]$ zarotiraš okoli ordinate (tj., y–osi).
(Nasvet: $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2\,t)}{2}$.)

2. Razvij v Fourierovo vrsto funkcijo $f(x) := \sin^2 x$ na $[-\pi, \pi]$. Za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi vrsti?
(Nasvet: $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2\,x)}{2}$ ter $\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$.)

3. Poišči smerni odvod funkcije $f(x, y) := x^2 \ln(xy) - y \sin(\pi x)$ v točki $T(1/2, 2)$ in v poljubni smeri. Pri kateri smeri je odvod *najmanjši*?

4. Naj bo g zvezno odvedljiva funkcija. Preveri, če za $\Phi(x, y) := x \cdot g(2x - y^2)$ velja
$$x\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0?$$

5. Zapiši funkcijo $f(x, y) := e^(y/2) \sin x$ po Taylorjevi formuli okoli točke $T(0, 0)$ do reda $n = 2$. Oceni napako, če je $x, y \in [-0{\cdot}1, 0{\cdot}1]$.
(Nasvet: $e \simeq 2.7182 \cdots \leq 3$.)

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

21.3.2002

1. Preveri, kdaj vsota konvergira, in jo nato seštej (tj. izrazi z elementarnimi funkcijami).
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)n!}$$

2. Naj bo $0 < h < \pi$. Razvij funkcijo
$$f_h(x) := \begin{cases} 1; & |x| \le h \\ -1; & \text{sicer} \end{cases}$$
v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Kdaj je dobljena vrsta enaka $f_h(x)$?

3. V parcialno diferencialno enačbo
$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
za funkcijo $z = z(x, y)$ uvedi nove spremenljivke
$$\begin{aligned} u &= \ln\sqrt{x^2+y^2} \\ v &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}$$

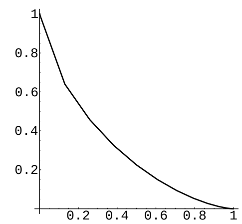
4. V trikotniku ABC s koordinatami $A(0,0)$, $B(1,0)$ in $C(0,1)$ poišči točko, katere vsota *kvadratov* razdalj do oglišč trikotnika je maksimalna.

5. Približno izračunaj integral s pomočjo razvoja funkcije $\sin t$ v Taylorjevo vrsto reda 5 in nato oceni napako.
$$\int_0^1 t^{-2/5} \sin t \, dt$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

3.6.2002

1. Poišči površino, če se astroida, tj. krivulja z enačbo $y^{2/3} + x^{2/3} = 1$ zavrti okoli y–osi.



(Nasvet: $P = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} g(y)\sqrt{1 + g'(y)^2}\, dy$)

2. Razvij funkcijo
$$f(x) := \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. Za katere x dobljena vrsta konvergira k $f(x)$?

3. Razvij funkcijo $f(x) := \cos zx$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Odtod izračunaj vsoto
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^k\, z\, \sin(\pi\, z)}{z^2 - k^2}$$
(Nasvet: $\cos(\alpha)\, \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$)

4. Preveri, če funkcija $z = \arctan \frac{x}{y}$ ustreza enačbi
$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2};$$
tu je $x = u + v$ in $y = u - v$!

5. Določi najmanjšo in največjo vrednost funkcije
$$f(x, y) := x - 3xy$$
znotraj elipse, omejene z $x^2 + 2y^2 + y = 0$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

18.6.2002

1. Dana je funkcija

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}$$

   (a) Kje je definirana?

   (b) Izrazi jo z elementarnimi funkcijami

   (Nasvet: s substitucijo jo pretvori v potenčno vrsto!)

2. Razvij funkcijo

$$f(x) := \begin{cases} \pi; & x \in (-\pi, 0) \\ 0; & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

   v Fourierovo vrsto. Kje je dobljena vrsta enaka $f(x)$?

3. Za pozitivna števila x, y in z velja zveza $x + y + z = 1$. Pri katerih vrednostih doseže funkcija

$$f(x, y, z) := x^2\, y^3\, z^4$$

   največjo vrednost?

4. Izračunaj $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ter $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ za funkcijo $f(x, y) := g(x^2 + x/y)$

5. Zamenjaj vrstni red integracije

$$\int_0^1 dx \int_{x/4}^{x} f(x, y)\, dy + \int_1^2 dx \int_{x/4}^{1/x} f(x, y)\, dy$$

IZPIT IZ ANALIZE II

25.6.2002

1. Dana je funkcija

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}$$

   (a) Kje je definirana?

   (b) Izrazi jo z elementarnimi funkcijami

   (c) Poišči $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)9^n}$.

   (Nasvet: s substitucijo jo pretvori v potenčno vrsto!)

2. Za pozitivna števila x, y in z velja zveza $x + y + z = 1$. Pri katerih vrednostih doseže funkcija

$$f(x, y, z) := x^2\, y^3\, z^4$$

   največjo vrednost?

3. Razvij funkcijo

$$f(x) := \begin{cases} \pi; & x \in (-\pi, 0) \\ 0; & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

   v Fourierovo vrsto. Kje je dobljena vrsta enaka $f(x)$?

4. Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y$$

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

26.8.2002

1. Razvij funkcijo $f(x) := \frac{\cos x - 1}{x^2}$ v Taylorjevo vrsto okoli točke 0. Nato poišči še $f^{(6)}(0)$.

2. Funkcija $z = z(x, y)$ zadošča naslednji identiteti:

$$x^2 + y^2 + z^2 = f(x + 2y + 3z)$$

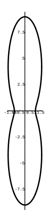
kjer je f zvezno odvedljiva funkcija. Izračunaj

$$(3y - 2z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - 3x)\frac{\partial z}{\partial y}$$

3. Razvij funkcijo $x \sin x$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.
(Nasvet: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$.)

4. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejuje krivulja z enačbo

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{3^2}\right)^2 = x^2 + y^2$$


(Nasvet: Uvedi posplošene polarne koordinate)

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

13.11.2002

1. Elipso $\frac{x^2}{c^2} + \frac{c^2 y^2}{c^2+1} = 1$ zavrtimo okoli osi x. Za katero vrednost parametra $c > 0$ ima dobljeno rotacijsko telo najmanjši možni volumen?

2. Razvij v Fourierovo vrsto funkcijo $f(x) := \sin^2 x$ na $[-\pi, \pi]$. Za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi vrsti?
(Nasvet: $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ ter $\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$.)

3. Naj bo g zvezno odvedljiva funkcija. Preveri, če za $\Phi(x, y) := x \cdot g(2x - y^2)$ velja
$$y\frac{\partial \Phi}{\partial x} + x\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{y}{x}\Phi$$

4. Izračunaj dvojni integral
$$\iint_D \sin\tfrac{x}{y}\, dxdy,$$
kjer je D območje, omejeno s premicami $x = 0$, $y = \pi$ ter kubično parabolo $y = \sqrt[3]{x}$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

21.1.2003

1. S pomočjo potenčne vrste poišči vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)4^n}$$

2. Poišči ekstremne vrednosti funkcije

$$g(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

na območju, omejenem s krivuljama $y = x^2$ in $y = 3$.

3. S pomočjo razvoja funkcije $f(x) := (\pi^2 - x^2)^2$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$, izračunaj

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}.$$

(Nasvet: $\int x^n \cos(\alpha x)\, dx = \frac{x^n \sin(\alpha x)}{\alpha} + \frac{nx^{n-1}\cos(\alpha x)}{\alpha^2} + \frac{n-n^2}{\alpha^2} \int x^{n-2} \cos(\alpha x)\, dx$)

4. Približno izračunaj integral s pomočjo razvoja funkcije $\sqrt{1+t}$ v binomsko vrsto reda 5 in nato oceni napako.

$$\int_0^1 t^{-4/5} \sqrt{1+t}\, dt$$

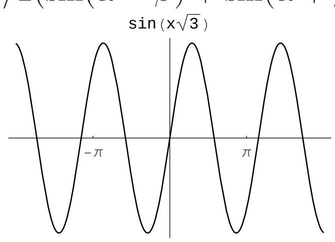
POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

17.3.2003

1. Razvij funkcijo
$$f(x) := \frac{1}{1+3x+2x^2}$$
v Taylorjevo vrsto okoli točke $x = 0$ in poišči konvergenčni polmer.

2. Poišči točko na elipsi $x^2 + y^2/4 = 1$, ki je najdlje od točke $T(0,1)$. (Nasvet: Lagrangeova metoda iskanja vezanih ekstremov.)

3. Razvij $f(x) := \sin(x\sqrt{3})$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Za katere x je $f(x)$ enaka dobljeni vrsti?
(Nasvet: $\sin\alpha\sin\beta = 1/2(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$, ter $\sin\alpha\cos\beta = 1/2(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$.)



4. Izračunaj dvojni integral
$$\iint\limits_D \sin\tfrac{x}{y}\,dxdy,$$
kjer je D območje, omejeno s premicami $x = 0$, $y = \pi$ ter kubično parabolo $y = \sqrt[3]{x}$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

4.6.2003

1. Razvij funkcijo $f(x) := \cos(x^2)$ po Taylorjevi formuli reda $p = 5$ okoli točke $a = 0$ in oceni napako za $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

2. Razvij funkcijo $x \cos x$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. (Nasvet: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$.)

3. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva. Preveri, če funkcija $z(x, y) := e^{2\,x} f(y - \ln x)$ ustreza enačbi
$$\frac{\partial z}{\partial y} + x\,\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,xz$$

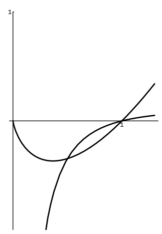
4. Poišči maksimum funkcije $f(x, y) := x + y - 2$ znotraj elipse z enačbo $x^2 + y^2/4 = 1$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

16.6.2003

1. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij

$$y_1(x) = \frac{\ln x}{4x} \quad \text{in} \quad y_2(x) = x \ln x.$$



2. Razvij funkcijo $f(x) := 1 - |x|$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-2, 2]$.

3. V enačbo

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

uvedi nove neodvisne spremenljivke $x = t$ in $y = \frac{t}{1+tu}$ in preveri, da dobiš enačbo

$$t^2 \frac{\partial z}{\partial t} = z^2.$$

4. Določi lokalne minimume funkcije

$$z(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 \quad .$$

5. Dana je funkcijski predpis

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n+1}$$

   (a) Določi definicijsko območje.

   (b) Seštej vrsto (tj. izrazi f z elementarnimi funkcijami)

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

25.8.2003

1. Izračunaj površino vrtenine, če lik, omejen z $y = 0$, $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$ zavrtiš okoli abscise.
   (Nasvet: Najprej uporabi $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$. Nato si lahko pomagaš še z $\mathrm{ch}^2 t = \frac{1+\mathrm{ch}(2\,t)}{2}$)

2. S pomočjo potenčne vrste poišči vsoto
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$$

3. Razvij funkcijo $f(x) := \cos(x/2)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Z njeno pomočjo izračunaj vsoto
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 - 4\,k^2}$$
   (Nasvet: mogoče ti bosta v pomoč identiteti $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$ oz.
   $\cos\alpha\sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$)

4. Poišči ekstrem funkcije $f(x, y) := ax + by$ na krogu, omejenem z enačbo $x^2 + y^2 = 1$.

5. Razvij funkcijo $f(x, y) := 5 - 2\,x + x^2 + 4\,y + y^2$ v Taylorjevo formulo okoli točke $T(1, -2)$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

8.9.2003

1. Skiciraj telo, omejeno s krivuljo $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \quad y \geq 0, y^2 = 1 - 4\,(x-4)^2\}$ in abscisno osjo (x–osjo). Nato izračunaj volumen telesa, ki nastane z rotacijo tega telesa okoli abscise.

2. S pomočjo potenčne vrste poišči vsoto
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)2^n}$$

3. S pomočjo razvoja funkcije $f(x) := (\pi^2 - x^2)^2$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$, izračunaj
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}.$$
(Nasvet: $\int x^n \cos(\alpha x)\,dx = \frac{x^n \sin(\alpha x)}{\alpha} + \frac{n x^{n-1} \cos(\alpha x)}{\alpha^2} + \frac{n-n^2}{\alpha^2} \int x^{n-2} \cos(\alpha x)\,dx$)

4. Naj dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $u = u(x, y)$ zadošča enačbi
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u$$
Pokaži, da se z uvedbo novih spremenljivk $\xi = x - t,\ \eta = x + t$ enačba glasi
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} u = 0.$$

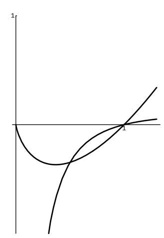
5. Poišči ekstremne vrednosti funkcije
$$g(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$
na območju, omejenem s krivuljama $y = x^2$ in $y = 4$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

12.11.2003

1. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij

$$y_1(x) = \frac{\ln x}{2x} \quad \text{in} \quad y_2(x) = 2x \ln x.$$



2. S pomočjo Euler–MacLaurinove formule reda $p = 2$ približno izračunaj vsoto $\sum_{k=10}^{1000} \frac{1}{k^2}$ in oceni pri tem storjeno napako.

   (Nasvet: Euler–MacLaurinova formula se glasi

$$h\sum_{j=0}^{n-1} f(a+jh) - \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{p} B_j \tfrac{h^j}{j!}\big[f^{(j-1)}(x)\big]_a^b + (-1)^{p+1}\tfrac{h^p}{p!}\int_a^b P_p(\tfrac{x-a}{h}) f^{(p)}(x)\,dx;$$

   tu je še $h = \frac{b-a}{n}$ ter

$B_0(x) = 1$ $\quad \max_{x\in[0,1]} |B_0(x)| = 1.000000;$ $\quad B_1(x) = \left(-\left(\frac{1}{2}\right) + x\right)$ $\quad \max_{x\in[0,1]} |B_1(x)| = 0.5000000$

$B_2(x) = \left(\frac{1}{6} - x + x^2\right)$ $\quad \max_{x\in[0,1]} |B_2(x)| = 0.166667;$ $\quad B_3(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{3\,x^2}{2} + x^3\right)$ $\quad \max_{x\in[0,1]} |B_3(x)| = 0.0481125$

3. Razvij funkcijo

$$f(x) := \begin{cases} x; & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0; & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}$$

   v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi vrsti?

4. V trikotniku z oglišči v točkah $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ poišči takšno točko T, da bo vsota razdalj od T do vseh ogljišč maksimalna.

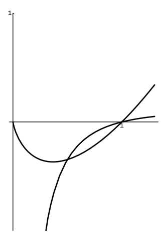
5. Razvij funkcijo $f(x,y) := x^2 \sin(xy)$ po Taylorjevi formuli reda $n = 2$ okoli točke $T(0,0)$. Oceni napako za $x, y \in [-1/10, 1/10]$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

12.11.2003

1. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij

$$y_1(x) = \frac{\ln x}{2x} \quad \text{in} \quad y_2(x) = 2x \ln x.$$



2. S pomočjo Euler–MacLaurinove formule reda $p = 2$ približno izračunaj vsoto $\sum_{k=10}^{999} \frac{1}{k^2}$ in oceni pri tem storjeno napako.

   (Nasvet: Euler–MacLaurinova formula se glasi

$$h\sum_{j=0}^{n-1} f(a+jh) - \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{p} B_j \tfrac{h^j}{j!} \left[f^{(j-1)}(x)\right]_a^b + (-1)^{p+1} \tfrac{h^p}{p!} \int_a^b P_p\left(\tfrac{x-a}{h}\right) f^{(p)}(x)\,dx;$$

   tu je še $h = \frac{b-a}{n}$ ter $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = \left(-\left(\frac{1}{2}\right) + x\right)$ in $B_2(x) = \left(\frac{1}{6} - x + x^2\right)$ ter $\max_{x\in[0,1]} |B_2(x)| = 1/6$)

3. Razvij funkcijo

$$f(x) := \begin{cases} x; & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0; & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}$$

   v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi vrsti?

4. V trikotniku z oglišči v točkah $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ poišči takšno točko T, da bo vsota kvadratov razdalj od T do vseh oglišč maksimalna.

5. Aproksimiraj funkcijo $f(x,y) := x^2 \sin(xy)$ po Taylorjevi formuli reda $n = 2$ okoli točke $T(0,0)$. Oceni napako za $x, y \in [-1/10, 1/10]$.

POPRAVNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

19.1.2004

1. Preveri, za katere z vrsta konvergira, in jo seštej: $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n-1}$.

2. Naj bo $h \in (0, \pi)$. Razvij funkcijo

$$f_h(x) := \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq h \\ 0; & h < x \leq \pi \end{cases},$$

   po sinusih. Za katere x je $f(x)$ enaka tako dobljeni vrsti?

3. Poišči vse točke (x, y), ki rešijo enačbo

$$y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

   če je $\Phi = \Phi(x, y) := f(4x + y^2)$, in je f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija.

4. Poišči razdaljo med $T(-1, 0)$ in krivuljo z enačbo $x^3 + 2y^2 = 0$.
   (Nasvet: Lagrangeova metoda vezanih ekstremov)

RAČUNSKI DEL IZPITA IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

24.3.2004

1. Poišči vsoto
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)}$$

2. Razvij funkcijo $f(x) := \cos(\sqrt{2}x)$ po sinusih na $[0, \pi]$, in preveri, za katere x je $f(x)$ enaka dobljeni vrsti.
(Nasvet: $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\beta-\alpha)+\sin(\beta+\alpha)}{2}$.)

3. Enačbe $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$ in $z = u^3 + v^3$ določajo funkcijo $z = z(x, y)$. Ali velja $\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv$?

4. Poišči točko na elipsi $x^2 + y^2/4 = 1$, ki je *najdlje* od točke $T(0, 2)$.
(Nasvet: Razdalja bo najdaljša, če bo njen kvadrat največji. Pri tem si lahko pomagaš z metodo vezanih ekstremov.)

RAČUNSKI DEL IZPITA IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

21.6.2004

1. Poišči ploščino med krivuljo $y = (x + x^3)e^{-x^2}$ in njeno asimptoto.

2. S pomočjo Taylorjeve formule reda $n = 9$ izračunaj približno vrednost integrala, in oceni napako.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}\, dx$$

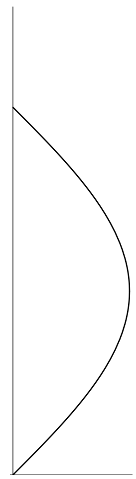
3. V enačbo $(x + y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ za funkcijo $z = z(x, y)$ uvedi nove spremenljivke $u := \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ter $w := \arctan \frac{y}{x}$.

4. Poišči pozitivna števila x, y, z, da bo njihova vsota najmanjša, če vemo, da je produkt enak 1

RAČUNSKI DEL IZPITA IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

30.8.2004

1. Območje $\mathcal{D} := \{(x, y);\ \ 0 \leq x \leq \sin y,\ 0 \leq y \leq \pi\}$ zavrtimo okoli x–osi. Poišči volumen vrtenine. (25 točk)



2. S pomočjo Taylorjeve formule reda $n = 9$ izračunaj približno vrednost integrala, in oceni napako.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x^2)}{x^4}\, dx$$

3. Denimo, da je $\Phi(x, y) := xf(x^2 - y^2)$, kjer je f zvezno odvedljiva funkcija. Poišči vrednost izraza (25 točk)

$$xy\frac{\partial \Phi}{\partial x} + x^2\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

4. Poišči pozitivna števila x, y, z, da bo njihov produkt najmanjši, če vemo, da je vsota enaka 1

RAČUNSKI DEL IZPITA IZ MATEMATIČNE ANALIZE II

13.9.2004

1. S pomočjo potenčne vrste poišči vsoto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$

2. Približno izračunaj integral s pomočjo razvoja funkcije $\sqrt{1+t}$ v binomsko vrsto reda 5 in nato oceni napako.

$$\int_0^1 t^{-4/5}\sqrt{1+t}\,dt$$

3. Naj dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $u = u(x, y)$ zadošča identiteti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u.$$

   Preveri, če se z uvedbo novih spremenljivk $\xi = x-t,\ \eta = x+t$ identiteta glasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{4}u = 0.$$

4. Poišči ekstremne vrednosti funkcije

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2$$

   na območju, omejenem s krivuljo $y^2 + x^2 = 2x$.
   (Nasvet: Najprej poišči lokalne ekstreme znotraj območja, nato pa še morebitne ekstreme na robni krivulji.)

4 Teoretična vprašanja

Kolokvij – teorija 5. november 2008

Analiza 3

Ime in Priimek:

Vpisna številka:

Smer:

1. Kdaj pravimo, da je metrični prostor (M, d) kompakten? Naštej vsaj dve ekvivalentni definiciji. (7 točk)

2. Kaj je robna točka podmnožice metričnega prostora in kaj je njen rob? Kdaj je množica zaprta? Kako to preverimo s pomočjo robu? (7 točk)

3. Kako smo definirali smerni odvod funkcije več spremenljivk? (6 točk)

Izpit – teorija 26. november 2008

Analiza 3

Ime in Priimek:

Vpisna številka:

Smer:

1. Kako poiščemo ekstreme funkcije več spremenljivk, in kako s pomočjo Hessejeve matrike pri funkcijah dveh spremenljivk preverimo, da je v neki točki res ekstrem? (10 točk)

2. Kaj je gradient? Kaj je njegova geometrijska interpretacija? Kakšna je povezava med izohipso in gradientom? (10 točk)

3. Kako smo s pomočjo Darbouxovih vsot definirali dvojni integral $\int_D f\, dv$ po neki omejeni množici $D \subseteq \mathbb{R}^2$? (10 točk)

4. Kdaj pravimo, da je množica v matričnem prostoru (M, d) povezana? Katere so povezane množice v prostoru $(\mathbb{R}, |.|)$ realnih števil z običajno metriko? (10 točk)

5. Katere točke so izolirane in katere so stekališča neke podmnožice v metričnem prostoru? (10 točk)

5 Nekatera vprašanja na ustnih izpitih

1. Zveznost, diferenciabilnost funkcij več spremenljivk.
2. Gradient; Jacobijeva matrika in povezava z odvodom.
3. Smerni odvod, parcialni odvod.
4. Verižno pravilo.
5. Formulacija izreka o lokalno inverzni preslikavi; protiprimer, da v splošnem ne velja globalni izrek.
6. Formulacija izreka o implicitni funkciji; kje ga uporabljamo?
7. Iskanje ekstremov in Lagrangeova metoda iskanja vezanih ekstremov.
8. Definicija dvojnega/mnogoternega integrala.
9. Računanje (Fubinnijev izrek).
10. Formulirajte izrek o uvedbi novih spremenljivk v dvojni integral.
11. Definicija izlimitiranega dvojnega integrala zvezne funkcije konstantnega predznaka po neomejenem območju ?
12. Navedite zadostni pogoj za to, da je funkcija F; $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ za vsak $y \in [c,d]$ odvedljiva. Kako se izraža odvod F s funkcijo f (pri navedenem pogoju) ?
13. Kako bi izračunali odvod funkcije $F(y) := \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$. Kakšne so predpostavke, ob katerih formula velja?
14. Definicija realnih funkcij Γ in B in zveza med njima?
15. Opišite Stirlingovo formulo in povejte zakaj jo uporabljamo.
16. Za skalarne in vektorske funkcije izpeljite formulo za odvod $\frac{d}{dt}\vec{f}(h(t))$, $\frac{d}{dt}(\vec{f}(t)\cdot\vec{h}(t))$, $\frac{d}{dt}(\vec{f}(t)\times\vec{h}(t))$.
17. 12. Če je vektorska funkcija $\vec{f}(t)$ odvedljiva in ima konstantno absolutno vrednost $\|\vec{f}(t)\| = const$ je za vsak t odvod $\frac{d}{dt}\vec{f}(t)$ pravokoten na $\vec{f}(t)$. Dokažite to!

18. Ali je kakšna razlika med pojmoma pot v $\mathbb{R}^3$ in krivulja v $\mathbb{R}^3$? (Razložite oba pojma.)

19. Katero krivuljo imenujemo gladko, katero razreda $\mathcal{C}^r$; katero odsekoma gladko, katero enostavno in katero enostavno sklenjeno?

20. Definicija dolžine poti in ločne dolžine krivulje.

21. Kdaj imenujemo parametrizacijo krivulje naravno?

22. Ali za vsako enostavno krivuljo razreda $\mathcal{C}^1$ obstaja naravna parametrizacija ?

23. Kako sta definirani (analitično) fleksijska in torzijska in ukrivljenost (κ in τ) gladke enostavne krivulje v dani točki te krivulje?

24. Kakšen je geometrijski pomen fleksije in torzije?

25. Razložite pojem osnovnega spremljajočega triedra $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ gladke krivulje razreda $\mathcal{C}^3$.

26. Kdaj je krivulja ravninska?

27. Frenet – Serret-jeve formule in njihov pomen.

28. Definicija krivuljnega integrala 1. vrste; za kaj ga uporabljamo?

29. Definicija enostavne, gladke orientirane krivulje Γ in krivuljnega integrala 2. vrste; zakaj ga uporabljamo?

30. Greenova formula.

31. Gaussov in Stokesov izrek.

32. Nabla formalizem

33. Kdaj ima polje skalarni/vektorski potencial, in definicija potenciala.

34. Kaj je gladka ploskev? Kaj je gladka ploskev z robom?

35. Kaj je prva fundamentalna forma ploskve?

36. Kdaj pravimo, da sta ploskvi izometrični? Kako to preverimo s prvo fundamentalno formo?

37. Kaj je orientacija ploskve? Kdaj je rob ploskve orientiran skladno (koherentno) s ploskvijo?

38. Kdaj Fourierova vrsta funckije f konvergira?

39. Lastnosti Fourierove transformacije.