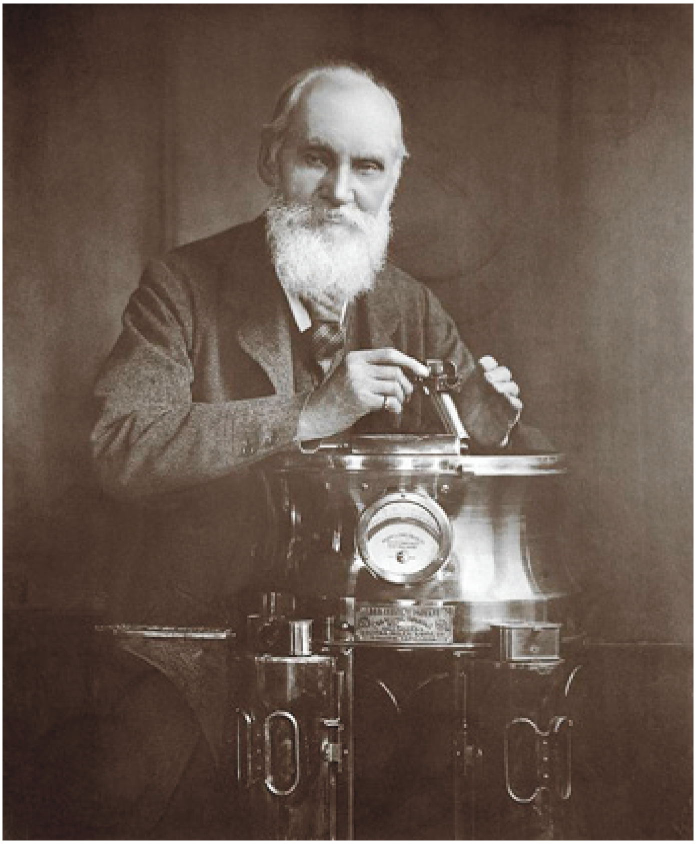
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2013
Letnik 60
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 60 • ŠT. 4 • STR. 121–160 • JULIJ 2013

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2013, letnik 60, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

RIMSKO DOMINANTNO ŠTEVILO

POLONA PAVLIČ[1], JANEZ ŽEROVNIK[2,3]

[1]Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru
[2]Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani
[3]Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2010): 05C69

Na podlagi motivacije iz vsakdanjega življenja predstavimo koncept dominacije ter rimske dominacije. Natančneje se posvetimo slednji. Predstavimo nekaj osnovnih lastnosti koncepta ter jih uporabimo za določitev vrednosti rimskih dominantnih števil nekaterih posebnih družin grafov.

THE ROMAN DOMINATION NUMBER

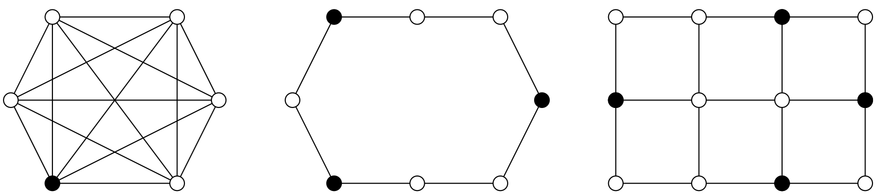
We present a concept of the domination and the Roman domination based on motivation from everyday life. We focus our attention to the Roman domination and present some basic properties of this graph invariant. Using these properties we determine the exact values of the Roman domination number of some special graph classes.

Uvod

Predstavljajmo si, da želimo po državi razporediti centre za reševanje tako, da bo teh čim manj in da bodo reševalci prispeli na pomoč v vsako občino v dogovorjeno kratkem času. Probleme te vrste učinkovito opišemo v jeziku teorije grafov takole: Vsako lokacijo predstavimo s točko, imenovano *vozlišče*, med dvema lokacijama pa narišemo črto (pravimo ji *povezava*), če obstaja (hitra) pot med tema lokacijama. Tako množico vozlišč skupaj s povezavami imenujemo *graf* in jo označimo z $G = (V, E)$, kjer V pomeni množico vozlišč, E pa množico povezav, tj. urejenih parov vozlišč. Če med dvema vozliščema obstaja povezava, pravimo, da sta *sosednji*. Množico vseh sosedov vozlišča u grafa G po navadi označimo z $N(u)$. Naj bo še $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Število sosedov vozlišča u imenujemo *stopnja vozlišča* u. Največjo med vsemi stopnjami vozlišč včasih označimo z $\Delta(G)$.

Problem razporeditev reševalnih enot lahko sedaj opišemo takole: občine predstavimo z grafom, nato pa vsako vozlišče označimo bodisi z 0 bodisi z 1. Pri tem 0 pomeni, da na lokaciji ni reševalne enote, 1 pa, da je. Če te oznake grafa izberemo tako, da je vsaka 0 sosednja z neko 1, potem dobimo zgoraj opisano situacijo. Pravimo, da smo tedaj graf *dominirali*, najmanjšemu možnemu številu enic, ki jih potrebujemo, da bo graf dominiran, pa pravimo *dominantno število grafa*, $\gamma(G)$. Množici vozlišč, označenih z 1 v dominaciji grafa, pravimo tudi *dominantna množica*. Dominantni množici, ki ima $\gamma(G)$ elementov, včasih rečemo tudi γ-*množica*.

Poglejmo sedaj nekaj primerov dominantnih števil preprostih grafov, ki jih najdemo na sliki 1. Prvi primer predstavlja graf, ki ima vse možne povezave na danih vozliščih. Imenujemo ga poln graf na šestih vozliščih. Poln graf na n vozliščih označimo s K_n. Očitno je $\gamma(K_n) = 1$. Vozlišče dominantne množice je obarvano temneje. Na tem mestu definirajmo še *komplement* grafa G, ki ga označimo z $\overline{G}$. To je graf, katerega množica vozlišč je enaka množici vozlišč grafa G, povezave v komplementu pa so med tistimi vozlišči, kjer v osnovnem grafu povezav ni bilo. Komplement polnega grafa $\overline{K_n}$ je graf brez povezav. Očitno je $\gamma(\overline{K_n}) = n$. Drugi graf s slike 1 imenujemo cikel na n vozliščih, C_n. Razmislite, da je v splošnem $\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Podobno velja tudi za grafe, imenovane poti na n vozliščih, P_n. Tak graf ima podobno kot cikel n vozlišč, med njimi pa izpustimo eno izmed povezav cikla. Tudi zanje je $\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. Zadnji graf na sliki 1 imenujemo mreža ter jo označimo z $G_{k,n}$. V našem primeru je $k = 4$ in $n = 3$. Za te grafe je bila določitev dominantnega števila dolga leta neznanka – obstajala je domneva, ki pa ni bila dokazana vse do leta 2011 [3].

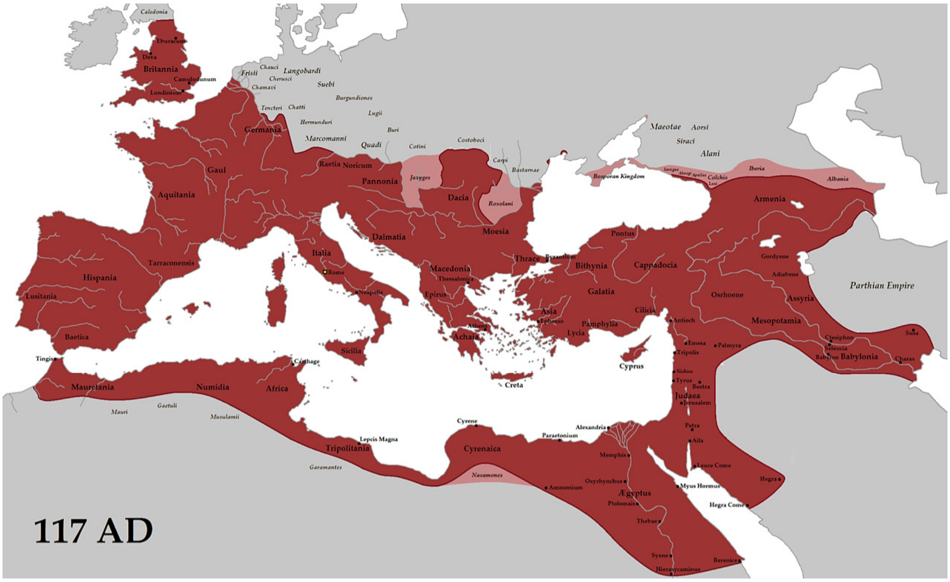


Slika 1. Dominantne množice nekaterih grafov.

Rimska dominacija

S takšnim opisom razporeditev reševalnih enot v mestu se nam lahko zgodi sledeča situacija: reševalna enota iz mesta, označenega z 1, mora posredovati pri nekem sosedu, ki nima svoje reševalne enote (je označeno z 0). Hkrati pa se v tem mestu, ki je poslalo reševalno ekipo k sosedom, zgodi nesreča.

V taki obliki dominacije torej nimamo nikakršne rezerve, ki pa je v realnih situacijah še kako pomembna. Enega takih zanimivih problemov je že v času svojega vladanja rimskemu imperiju v 4. stoletju postavil cesar Konstantin [6, 7, 8]. Ko je prevzel vladanje rimskemu imperiju, se je ta raztezal od severne Afrike, prek Male Azije do polovice Britanije ter čez celotno Iberijo na zahodu (slika 2). Predhodniki so cesarju v dolga leta trajajočih vojnah osvojili ogromno ozemlja, a sosednji narodi so vse močneje vpadali na zavzeta območja in vojska rimskega imperija se je ob posredovanjih prepolovila. Konstantin je tako postavil vprašanje, kako z legijami, ki so mu ostale, zastražiti province tako, da bodo bodisi zastražene z manjšo enoto vojske, bodisi bo v provinco lahko prišel na pomoč del vojske iz so-



Slika 2. Rimski imperij v 2. stoletju [9].

sednje province, ki pa bo zastražena z večjo enoto vojske in tako tudi po posredovanju pri sosedih ne bo ostala nezastražena.

Opazimo, da je tudi to neke vrste dominacija, vendar tukaj dominiramo graf, ki predstavlja na primer ozemlje rimskega imperija, z dvema različnima vrstama vozlišč – takimi, ki dominirajo le sebe, ter takimi, ki dominirajo sebe ter vsa sosednja vozlišča. V jeziku teorije grafov bomo sedaj vozlišča grafa označili z elementi množice $\{0, 1, 2\}$ tako, da bo vsako vozlišče, označeno z 0, sosednje z vsaj enim, ki je označeno z 2. Vozlišča, označena z 1, rabijo le za to, da dominirajo sama sebe in nimajo vpliva na sosede. Tak tip dominacije po zgodbi, ki smo jo navedli zgoraj, imenujemo *rimska dominacija*. Najmanjša izmed vsot takih oznak vozlišč je *rimsko dominantno število* grafa. Poglejmo si še formalno definicijo [2]:

Definicija 1. *Rimska dominantna funkcija* grafa $G = (V, E)$ je taka preslikava $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$, pri kateri je vsako vozlišče u s $f(u) = 0$, sosednje z nekim vozliščem v s $f(v) = 2$. Vrednost rimske dominantne funkcije je število $w(f) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$. Najmanjši vrednosti rimske dominantne funkcije grafa G pravimo *rimsko dominantno število* grafa G in ga označimo z $\gamma_R(G)$.

Rimsko dominantno funkcijo (kratko RDF), ki realizira $w(f) = \gamma_R(G)$, imenujemo tudi γ_R-*funkcija*. Glede na neko rimsko dominantno funkcijo

f lahko množico vozlišč grafa G zapišemo kot urejeno particijo (V_0, V_1, V_2) množice V, kjer je $V_i = \{v \in V \mid f(v) = i\}$ za $i \in \{0, 1, 2\}$. Pišemo tudi $f = (V_0, V_1, V_2)$. Vpeljimo še oznako $n_i = |V_i|$ za število vozlišč v V_i za $i = 0, 1, 2$. V tem jeziku je vrednost rimske dominantne funkcije $f = (V_0, V_1, V_2)$ enaka $w(f) = n_1 + 2n_2$.

Razmislite, da lahko na tak način s pomočjo enega vozlišča z oznako 2 učinkovito odbijemo le en napad na njegovega soseda, ki ima oznako 0. Primer, ko lahko vozlišče posreduje pri več hkratnih napadih na sosednje vozlišče, natančneje pojasnjuje definicija k-rimskega dominantnega števila [4], ki pa je tukaj ne bomo podrobneje opisovali.

Dodajmo še, da je dovolj preučevati povezane grafe (take, pri katerih za poljubni dve vozlišči obstaja pot med njima). Namreč, (rimsko) dominantno število grafa, ki ni povezan, je vsota (rimskih) dominantnih števil njegovih povezanih komponent (delov). Zato, če ne bo posebej pisalo, imejmo v mislih povezane grafe.

Lastnosti rimskih dominantnih funkcij

Začnimo z nekaterimi preprostimi posledicami definicije rimskega dominantnega števila, ki bodo koristne tako pri dokazovanju izrekov kot tudi za boljšo predstavo o konceptu.

Trditev 2 ([1, 2]). *Naj bo $G = (V, E)$ graf na vsaj treh vozliščih in $f = (V_0, V_1, V_2)$ neka γ_R-funkcija grafa G. Potem velja:*

1. *$V_1 \cup V_2$ je dominantna množica grafa G;*
2. *V_2 je γ-množica grafa, induciranega[1] na $V_0 \cup V_2$;*
3. *neko vozlišče iz V_1 je sosednje še največ z enim vozliščem iz V_1;*
4. *med vozlišči množic V_1 in V_2 ni povezav;*
5. *$\gamma_R(G) \leq |V(G)| - \Delta(G) + 1$.*

Dokaz. Točki 1 in 2 sledita direktno iz definicije rimskega dominantnega števila. Točko 3 dokažemo takole: Naj bo $f = (V_0, V_1, V_2)$ γ_R-funkcija grafa G. Če bi bilo neko vozlišče $u \in V_1$ sosednje z dvema različnima vozliščema $v, w \in V_1$, lahko tvorimo novo rimsko dominantno funkcijo g takole: naj bo $g(u) = 2$, $g(v) = g(w) = 0$ ter $g(x) = f(x)$ za vsa druga vozlišča grafa G. Opazimo, da ima rimska dominantna funkcija g vrednost za 1 manjšo od najmanjše možne, kar je protislovje.

[1] Graf, induciran na množici $X \subseteq V(G)$, je graf, katerega množica vozlišč je množica X, povezave med vozlišči iz X pa so vse, ki so bile povezave med temi vozlišči tudi že v grafu G.

Poglejmo še točko 4. Naj bo $f = (V_0, V_1, V_2)$ taka γ_R-funkcija grafa G, da je uv povezava grafa G in je $f(u) = 1$ ter $f(v) = 2$. Potem je tudi $f' = (V_0 \cup \{u\}, V_1 \setminus \{u\}, V_2)$ γ_R-funkcija grafa G z za 1 manjšo vrednostjo, kar pa je protislovje (f je bila γ_R-funkcija, torej RDF najmanjše vrednosti, mi pa smo našli še manjšo).

Nazadnje se lotimo še točke 5. Naj bo vozlišče u vozlišče največje stopnje v G. Potem je $f = (N(u), V(G) \setminus N[u], \{u\})$ RDF grafa G vrednosti $w(f) = (|V(G)| - (\Delta(G) + 1)) + 2 = |V(G)| - \Delta(G) + 1$. ■

Ker očitno obstaja povezava med dominantnim številom ter rimskim dominantnim številom, bomo v nadaljevanju natančneje preučili, kakšen je odnos med tema grafovskima invariantama.

Trditev 3. *Naj bo G graf. Potem velja:*

1. $\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$;
2. $\gamma_R(G) = \gamma(G)$ *natanko tedaj, ko je* $G = \overline{K_n}$.

Dokaz. Naj bo D neka γ-množica grafa G. Potem je $(V(G) \setminus D, \emptyset, D)$ rimska dominantna funkcija grafa G vrednosti $2\gamma(G)$. Zato je $\gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$. Za poljubno γ_R-funkcijo $f = (V_0, V_1, V_2)$ grafa G pa je množica $V_1 \cup V_2$ očitno tudi dominantna množica grafa (ne nujno najmanjša), zato je $\gamma(G) \leq n_1 + n_2 \leq n_1 + 2n_2 = \gamma_R(G)$, in tako je dokazana prva trditev.

Za grafe brez povezav je očitno $\gamma_R(G) = \gamma(G)$. Vzemimo nazadnje še tak graf G, da je $\gamma_R(G) = \gamma(G)$, in naj bo $f = (V_0, V_1, V_2)$ neka njegova γ_R-funkcija. Ker je $V_1 \cup V_2$ dominantna množica, je, podobno kot zgoraj, $\gamma(G) \leq n_1 + n_2 \leq n_1 + 2n_2 = \gamma_R(G)$, vendar morajo po predpostavki, če pogledamo začetek in konec neenakosti, povsod v resnici nastopati enačaji. Zato je $n_2 = |V_2| = 0$. Po definiciji RDF je zato tudi $V_0 = \emptyset$. Torej je $\gamma_R(G) = n_1 = |V(G)| = n$ in zato tudi $\gamma(G) = n$, iz česar pa sledi, da je G nujno graf $\overline{K_n}$. ■

Dodajmo še, da graf G, ki zadošča enakosti $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$, imenujemo *rimski graf.* Ena možnih preprostih karakterizacij rimskih grafov je naslednja:

Trditev 4. *Graf G je rimski graf natanko tedaj, ko obstaja taka γ_R-funkcija grafa G, da je $V_1 = \emptyset$.*

Dokaz. Naj bo G graf in recimo, da obstaja taka γ_R-funkcija $f = (V_0, V_1, V_2)$ grafa G, da je $V_1 = \emptyset$. Potem je vrednost te γ_R-funkcije $w(f) = n_1 + 2n_2 = 0 + 2n_2$, in ker je množica V_2 tudi dominantna množica, je $w(f) = 2n_2 \geq 2\gamma(G)$. Po trditvi 3 je $w(f) = \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$, zato je $w(f) = 2\gamma(G)$. Torej je G rimski graf.

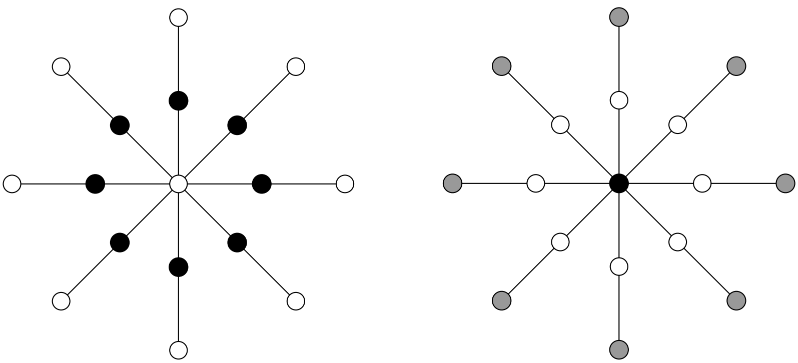
Za dokaz v drugo smer vzemimo rimski graf G. To je tak graf, da je $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$. Ker je $V_1 \cup V_2$ dominantna množica grafa G ter je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, je $\gamma(G) \leq |V_1 \cup V_2| = n_1 + n_2$. Ker pa je G rimski graf, je

$$2\gamma(G) = 2n_1 + 2n_2 = \gamma_R(G) = n_1 + 2n_2,$$

iz česar sledi, da je $n_1 = 0$ oziroma $V_1 = \emptyset$. ∎

Na primerih s slike 1 so rimski grafi polni grafi K_n za $n > 1$ ter cikli C_{3k} in C_{3k+2}. Tretji graf s slike 1, mreža $G_{4,3}$, je primer grafa, ki ni rimski. Razmislite, da je $\gamma_R(G_{4,3}) = 7$.

Glede na trditev 3 bi bilo zanimivo pogledati še, kolikšna je lahko dejanska razlika med γ_R in 2γ. Iz preprostega primera grafa, imenovanega subdividirana zvezda, $\overline{S}_{1,8}$ na sliki 3, lahko vidimo, da je razlika med $\gamma_R(G)$ in $2\gamma(G)$ lahko poljubno velika. Na desni sliki, ki prikazuje γ_R-funkcijo, je črno vozlišče iz V_2 v γ_R-funkciji, siva vozlišča pa so vozlišča iz V_1 v γ_R-funkciji. V splošnem za subdividirano zvezdo velja, da je rimsko dominantno število $\gamma_R\left(\overline{S}_{1,n}\right) = 2 + n$, medtem ko je dvakratnik dominantnega števila $2\gamma\left(\overline{S}_{1,n}\right) = 2n$.



Slika 3. γ-množica in γ_R-funkcija subdividirane zvezde $\overline{S}_{1,8}$.

Določiti rimsko dominantno število poljubnega grafa je zelo težek problem. V matematiki take težke probleme (večina res zanimivih je takih) imenujemo *NP-polni problemi.* Pojasnimo, kaj to pomeni.

Recimo, da imamo neki odločitveni problem. To je tak, na katerega lahko odgovorimo z da ali ne. Če zanj obstaja rešitev, ki jo lahko poiščemo dovolj hitro (v jeziku algoritmov v polinomskem času), pravimo, da ta problem pripada razredu P. Če pa za problem znamo za možno rešitev v polinomskem času preveriti, ali je prava, pravimo, da problem pripada razredu NP. Gotovo je $P \subseteq NP$, ne ve pa se, ali je morda $P = NP$. Večina raziskovalcev deluje, kot da to ni res. Problem, ali je $P = NP$, je eden od sedmih problemov tisočletja, ki jih je leta 2000 objavil ameriški

Clay Mathematics Institute. Za rešitev vsakega od njih je razpisal nagrado milijon ameriških dolarjev. Do danes je bil rešen le eden (Poincaréjeva domneva). Torej ob predpostavki, da je $P \neq NP$, to, da je neki problem NP-poln, nekoliko poenostavljeno rečeno pomeni, da ne obstaja dovolj hiter algoritem (polinomski), ki bi poiskal rešitev zastavljenega problema, le za možno rešitev lahko dovolj hitro preverimo, ali je prava. V našem primeru je tak problem določitev rimskega dominantnega števila poljubnega grafa [1]. Zato so se različni raziskovalci omejevali na iskanje rimskih dominantnih števil manjših družin grafov. O nekaterih rezultatih smo govorili že pri rimskih grafih (za polne grafe in cikle).

Grafi z majhnimi rimskimi dominantnimi števili

Za konec še karakterizirajmo grafe, ki imajo rimsko dominantno število 2 ali 3. Take grafe bomo opisali v jeziku maksimalne stopnje vozlišč grafa. Rimsko dominantno število 2 imajo natanko tisti grafi, ki premorejo vozlišče stopnje $|V(G)| - 1$, rimsko dominantno število 3 pa grafi, ki premorejo vozlišče stopnje $|V(G)| - 2$, ne pa vozlišča stopnje $|V(G)| - 1$.

Trditev 5 ([5]). *Za povezan graf G na vsaj dveh vozliščih so naslednje trditve ekvivalentne:*

1. $\gamma_R(G) = 2$;
2. $\gamma(G) = 1$;
3. $\Delta(G) = |V(G)| - 1$.

Dokaz. Naj bo $n = |V(G)|$. Če graf G vsebuje vozlišče stopnje $n - 1$, potem je očitno $\gamma(G) = 1$ in $\gamma_R(G) = 2$.

Recimo sedaj, da je $\gamma(G) = 1$ in $u \in V(G)$ dominira G. Potem je $f = (V(G) \setminus \{u\}, \emptyset, \{u\})$ γ_R-funkcija grafa G (ker je G povezan in ima vsaj dve vozlišči).

Naj bo nazadnje še $\gamma_R(G) = 2$. Če je $f = (V(G) \setminus \{u\}, \emptyset, \{u\})$ γ_R-funkcija grafa G, potem mora biti vsako vozlišče iz $V(G) \setminus \{u\}$ sosednje z u, z drugimi besedami, u je stopnje $n - 1$. Po drugi strani pa je lahko tudi $f = (V(G) \setminus \{u, v\}, \{u, v\}, \emptyset)$ γ_R-funkcija grafa G, katere vrednost je 2. To pa se lahko zgodi samo v primeru, ko je G graf K_2 (G je povezan). V tem posebnem primeru sta obe vozlišči stopnje $n - 1$. ∎

Trditev 6 ([5]). *Naj bo G povezan graf na vsaj dveh vozliščih. Tedaj je $\gamma_R(G) = 3$ natanko tedaj, ko je $\Delta(G) = |V(G)| - 2$.*

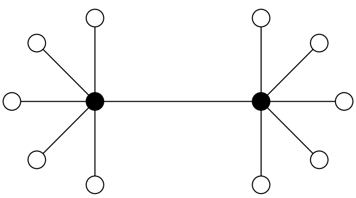
Dokaz. Naj bo $\gamma_R(G) = 3$ in naj bo $f = (V_0, V_1, V_2)$ neka γ_R-funkcija grafa G. Če je $V_2 = \emptyset$, je očitno $|V(G)| = 3$, in ker je G povezan, je to bodisi

P_3 bodisi K_3. Ampak $\gamma_R(P_3) = \gamma_R(K_3) = 2$, kar je protislovje. Zato je $|V_1| = |V_2| = 1$.

Naj bo $u \in V_1$ in $v \in V_2$. Po trditvi 2, točka 4, uv ni povezava grafa G, vsa druga vozlišča grafa G pa morajo biti po definiciji RDF sosednja z v. Zato je v stopnje $|V(G)| - 2$. Trditev 5 zagotavlja, da G nima vozlišča višje stopnje, to je stopnje $|V(G)| - 1$.

Da dokončamo dokaz, recimo, da je $\Delta(G) = |V(G)| - 2$. Potem je po točki 5 trditve 2 $\gamma_R(G) \leq |V(G)| - (|V(G)| - 2) + 1 = 3$, ker velja trditev 5, pa je tudi $\gamma_R(G) \geq 3$. Torej je $\gamma_R(G) = 3$ ∎

Glede na zadnji trditvi je na prvi pogled videti, da bi lahko veljalo, da je $\gamma_R(G) = 4$ natanko tedaj, ko je $\Delta(G) = |V(G)| - 3$. Graf s slike 4 je tak, da je $\gamma_R(G) = 4$, $\Delta(G) = 6$, vozlišč pa ima kar 12. Vsaj v eno smer torej ta trditev ne drži. Sami pa lahko preverite, ali velja, da iz $\Delta(G) = |V(G)| - 3$ sledi, da je $\gamma_R(G) = 4$.



Slika 4. Graf, imenovan dvojna zvezda.

LITERATURA

[1] E. W. Chambers, B. Kinnersley, N. Price in D. B. West, *Extremal problems for Roman domination*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **23** (2009), 1575–1586.

[2] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer, S. M. Hedetniemi in S. T. Hedetniemi, *Roman domination in graphs*, Discrete Mathematics **278** (2004), 11–22.

[3] D. Gonçalves, A. Pinlou, M. Rao in S. Thomassé, *The domination number of grids*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **25** (2011), 1443–1453.

[4] M. A. Henning, *Defending the roman empire from multiple attacks*, Discrete Mathematics **271** (2003), 101–115.

[5] T. Kraner Šumenjak, P. Pavlič in A. Tepeh, *On the Roman domination in the lexicographic product of graphs*, Discrete Applied Mathematics **160** (2012), 2030–2036.

[6] C. S. ReVelle, *Can you protect the Roman Empire*, Johns Hopkins Magazine **49** (1997), 40.

[7] C. S. ReVelle in K. E. Rosing, *Defendens Imperium Romanum: a classical problem in military strategy*, The American Mathematical Monthly **107** (2000), 585–594.

[8] I. Stewart, *Defend the Roman Empire!*, Scientific American **281** (1999), 94–96.

[9] Ancient Rome, `www.en.wikipedia.org/wiki/Ancient_Rome`, ogled september 2012.

VEČ KOT 150 DECIMALK KROŽNE KONSTANTE PRED LETOM 1800

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A50, 01A55

V prispevku je na podlagi nekaterih virov pokazano, da je neznani avtor pred letom 1800 izračunal 152 pravilnih decimalk števila π.

MORE THAN 150 DIGITS OF THE CIRCULAR CONSTANT BEFORE 1800

In this contribution, it is shown on the basis of references, that an uknown author correctly calculated 152 digits of the number π before the year 1800.

Newton in Sharp

O številu π, krožnem številu ali krožni konstanti, to je razmerju med obsegom in premerom kroga, je bilo že veliko napisanega, veliko truda je bilo vloženega v računanje njegovih decimalk, v doseganje rekordov števila leteh in raziskave njegovih lastnosti, kljub temu pa ne bo prav nič odveč, če dodamo še nekatera, morda za marsikoga manj znana dejstva.

Vse do Isaaca Newtona (1643–1727) so število π računali z metodo krogu včrtanih in očrtanih pravilnih večkotnikov, tako kot je to počel že Arhimed iz Sirakuz (živel je približno od leta 287 do leta 212 pred našim štetjem), in posebnega napredka v številu točnih decimalk števila π pravzaprav ni bilo. Nekateri posamezniki so ga računali leta in leta.

Sam Newton števila π sicer ni izračunal na prav veliko decimalk, ker je svoj intelekt usmeril v pomembnejše stvari, je pa uporabil bistveno novost, in sicer številske vrste. Kako? V današnjem jeziku bi rekli, da je vzel krog, omejen s krožnico $x^2 + y^2 = x$, od katerega je s premico $x = 1/4$ odrezal odsek in zapisal njegovo ploščino na dva načina: najprej po srednješolsko kot razliko ploščin krožnega izseka z notranjim kotom 120° in temu včrtanega enakokrakega trikotnika ter z integralom funkcije $x \mapsto \sqrt{x - x^2}$ na intervalu $[0, 1/4]$. Pojem integrala funkcije se je ravno začel porajati v Newtonovem času. Ker je že poznal binomsko vrsto tudi za necele eksponente, mu to ni bilo težko. Brez posebne zadrege jo je členoma integriral in nazadnje dobil za računanje števila π popolnoma uporaben rezultat:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 2 - 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(2n+3)(n-1)!n!2^{4n}}.$$

Seštel je nekaj členov dobljene vrste, izračunal še $\sqrt{3}$, pri čemer je vse delal na primerno število decimalk natančno, in leta 1666 našel pravilen približek za število π na 15 decimalk.

V Newtonovih časih je bila že znana vrsta

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \tag{1}$$

ki absolutno konvergira, če je $|x| < 1$, pogojno pa za $x = \pm 1$. Ponovno jo je odkril škotski matematik James Gregory (1638–1670). *Ponovno* smo zapisali zato, ker jo je poznal že Madhava iz Sangamagrame (1340–1425) v južni Indiji, in sicer v enakovredni obliki, ki jo dobimo, če v (1) vstavimo $x = \operatorname{tg} \varphi$, pri čemer mora za absolutno konvergenco veljati $|x| = |\operatorname{tg} \varphi| < 1$.

Angleški matematik in astronom Abraham Sharp (1653–1742) je v vrsto (1) vstavil $x = \sqrt{3}/3$, dobil po poenostavitvi

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} \tag{2}$$

in uspelo mu je leta 1699 najti 71 točnih decimalk števila π, kar je bil znatno boljši rezultat kot vsi drugi do takrat. Formula (2) je nerodna zaradi faktorja $\sqrt{3}$, ki ga je tudi treba natančno izračunati na veliko število decimalk.

Machin, Jones, de Lagny, Euler in Vega

Na srečo pa imajo trigonometrične funkcije adicijske izreke s svojimi posledicami, s katerimi dosežemo mnogo hitrejšo konvergenco. Ena takih je *Machinova formula* (podrobnosti izpeljave so na primer v [16])

$$\pi = 4\left(4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}\right), \tag{3}$$

poimenovana po angleškem matematiku in astronomu Johnu Machinu (1680–1751), ki je oba člena v (3) po formuli (1) razvil v vrsti, seštel dovolj členov in izračunal število π na 100 pravilnih decimalk. Pri tem je očitno potekal ves račun samo z racionalnimi števili. William Jones (1675–1749) iz Walesa je leta 1706 opisal Machinov uspeh z vsemi stotimi decimalkami števila π, avtorja zelo pohvalil glede natančnosti in predlagal, da se krožno konstanto označi s π, ker je to prva črka grške besede περιφέρεια, kar pomeni *obod, krog*. To besedo uporablja tudi Evklid v svojih Elementih.

Francoz Thomas Fantet de Lagny (1660–1734) je bil še bolj vztrajen kot Sharp, kajti z vrsto (2) je leta 1719 izračunal število π na 127 decimalk, dve leti kasneje pa je bil rezultat objavljen. Prvih 112 decimalk je v de Lagnyjevem rezultatu točnih, 113. decimalka pa je napačna (namesto 8 je zapisano 7), naslednje, od 114. do 127., pa so pravilne. Kljub temu mu priznajo le 112 točnih decimalk. Morda gre pri nesrečni 113. decimalki le za napako pri prepisovanju. Kot kaže, se dolgo vrsto let z računanjem števila π v smislu njegovih novih decimalk nihče ni več resno ukvarjal in kot najboljši dotakratni rezultat so po matematičnih besedilih še kakšnih 70 let navajali objavljeni de Lagnyjev približek z napako na 113. decimalki vred.

Leonhard Euler (1707–1783) je pri vsem svojem obsežnem delu razvil tudi nekaj formul Machinovega tipa za izračun števila π. Sam z računanjem krožne konstante ni izgubljal dragocenega časa, izračunal je le 20 njenih decimalk leta 1755. S svojim velikim vplivom in avtoriteto pa je dosegel, da se jo še danes označuje s π, kar je prvi predlagal omenjeni Jones. Baron Jurij Vega (1754–1802) je uporabil Eulerjevo, tudi Huttonovo formulo

$$\pi = 4\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right), \tag{4}$$

in leta 1789 poslal akademiji znanosti v Sankt Peterburg svoj izračun števila π na 143 decimalk z opisom postopka vred. Bil je prepričan, da je 140 decimalk točnih, v resnici pa jih je bilo točnih samo 126. Je pa odkril, da je 113. de Lagnyjeva decimalka 8, ne pa 7. Akademija je z objavo precej kasnila: namesto leta 1791 je luč sveta Vegov π v Rusiji ugledal šele leta 1795. Toda Vega je najbrž sam ugotovil napako in leta 1794 v dodatku k svoji *Popolni zakladnici logaritmov* [15] objavil število π na 140 decimalk, od katerih pa so zadnje 4 spet napačne. Uporabil je Eulerjevo formulo

$$\pi = 4\left(5\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg}\frac{3}{79}\right). \tag{5}$$

Napako je naredil s tem, da je za arctg(1/7) uporabil kar delni rezultat iz leta 1789, arctg(3/79) pa je izračunal na novo. Oba člena imata napake na zadnjih nekaj mestih, kar prinese 136 pravilnih decimalk števila π. Dobljeni rezultat so ponatisnili še 15 let po Vegovi smrti v njegovem učbeniku. Ker avtoriziranega boljšega rezultata tisti čas ni bilo, nihče pravzaprav ni vedel, katere decimalke od 126. naprej so pravilne.

Lahko rečemo, da je Vega leta 1789 zrušil de Lagnyjev rekord iz leta 1719: 112 točnih decimalk števila π je povečal na 126, če pač za pravilne decimalke štejemo samo tiste, ki so pred prvo nepravilno. Leta 1794 je Vega z objavo pravzaprav podrl svoj lastni rekord, izračunal je število π na 140 decimalk, od teh je 136 pravilnih. Kdo je bil torej tisti, ki je izboljšal Vegov rekord?

Rutherford, Montucla in skrivnostni rokopis

Leta 1841 je angleški matematik William Rutherford (1798–1871) v [12] objavil 208 decimalk števila π, ki ga je izračunal po predelani Machinovi formuli:

$$\pi = 4\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{70} + \operatorname{arctg}\frac{1}{99}\right).$$

Opisal je postopek in zapisal, da se njegov izračun zagotovo ujema v 152 decimalkah z izračunom na rokopisu, ki leži v Radcliffski knjižnici v Oxfordu. Angleški fizik John Radcliffe (1652–1714) pa je tisti, po katerem je knjižnica dobila ime. Žal je bilo kljub vsemu trudu samo teh Rutherfordovih 152 decimalk točnih, vse nadaljnje pa napačne, o čemer pa Rutherford ni mogel vedeti, ker boljšega rezultata takrat še ni bilo. Na vprašanje, ki ga mu je nekdo zastavil leta 1842 glede rokopisa v Oxfordu, je odgovoril, da ga sicer sam ni videl, da pa o njegovem obstoju ne dvomi, češ da je naveden z vsemi do takrat znanimi decimalkami v [7] iz leta 1841. Pod geslom *Quadrature of the circle* je res opisana vsa problematika v zvezi z obsegom in ploščino kroga ter seveda z računanjem števila π. Med drugimi je omenjen tudi Vega in njegovih 140 decimalk. Pomemben pa je zapis, da je astronom, geodet in matematik madžarskega rodu grof Franz Xaver von Zach (1754–1832) informiral Francoza Montucla o Radcliffskem rokopisu. Zach se je med letoma 1783 in 1786, kot priča njegov življenjepis, res mudil v Angliji kot tutor saškega odposlanca.

Sledili smo nekaterim rekordom v številu pravilnih decimalk števila π. Sedaj smo prisiljeni nekoliko pobrskati še po francoskih virih. V njih spet srečujemo de Lagnyja, Vego in Radcliffski rokopis.

Francoz Jean-Étienne Montucla (1725–1799) je bil priznan zgodovinar matematike in je že leta 1754 anonimno izdal knjigo z enakim naslovom kot [9], v kateri je obravnaval kvadraturo kroga, trisekcijo kota in podvojitev kocke, torej tri glavne matematične antične probleme. Nekaj let kasneje je izdal še obsežno delo *Histoire des mathématiques* [10]. Kmalu po njegovi smrti je spravil na svetlo razširjeno verzijo tega dela astronom Joseph Jérôme Lefrançois de Lalande (1732–1807), ki ga je bilo vredno omeniti tudi zato, ker je zelo pohvalil Vegovo *Popolno zakladnico logaritmov* [15]. V 4. zvezku [10] je objavljen de Lagnyjev π na 127 decimalk s podčrtano 113. decimalko. Omenjen je Vega, ki je odkril napako na tem mestu, in njegov izračun 126 oziroma 136 pravilnih decimalk števila π. Nato so objavljene nadaljnje decimalke, vse do 154., ki so vse pravilne razen zadnjih dveh. Te je videl Zach v Radcliffskem rokopisu.

Delo [9] z imenom in priimkom avtorja je v razširjeni in popravljeni obliki izšlo leta 1831. Matematik Sylvestre-François Lacroix (1765–1843) je

Lagny, plus grande que 3,14159|26535 89793 23846 26433 83279 50|288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679|82148 08651 32723 06647 09384 46, et moindre que le même nombre augmenté de l'unité. J'ai séparé par un trait les 32 décimales de Ceulen. L'erreur sur un cercle d'un diamètre cent millions de fois plus grand que celui de la sphère des étoiles fixes, en supposant la parallaxe de l'orbe terrestre d'une seconde seulement, seroit encore plusieurs milliards de milliards de fois moindre que l'épaisseur d'un cheveu. Le 114e. chiffre, ou le chiffre 7 que nous avons marqué, doit être un 8; M. Véga s'en est assuré, comme on le voit dans ses grandes tables de logarithmes, page 633, où il donne les valeurs des séries. M. le baron de Zach a vu dans un manuscrit de la bibliothèque de Ratclif, à Oxford, le calcul poussé encore plus loin, et jusqu'à 155 chiffres; après 446, ajoutez 09 55058 22317 25359 40812 84802.

Slika 1. Del besedila iz leta 1802 v [10].

poskrbel za dodatke v knjigi. V dodatku v zvezi s kvadraturo kroga Lacroix malo pokara Montucla, ker ni izpeljal Machinove formule, in to naredi kar sam. Tudi tu je objavljen de Lagnyjev π na 127 decimalk, toda s pravilno 113. decimalko. Spet je omenjen naš Vega in njegovo računanje števila π. Nato so objavljene nadaljnje decimalke, vse do 154., zapisane v Radcliffskem rokopisu. Ostaja pa popolna skrivnost, kdo je avtor omenjenega rokopisa. Novejše kronologije, ki se ukvarjajo s številom π, Radcliffski rokopis redkokdaj omenjajo, verjetno zato, ker je njegov avtor neznan. So pa tudi svetle izjeme, na primer [1]. Popolnoma dosledni pri tem sicer niso: egipčanski, babilonski in hebrejski približek so po navadi omenjeni, čeprav tudi tu avtorja ne poznamo. Če je vse to res, je nekdo izračunal število π na 152 točnih decimalk že pred letom 1800. Verjetnost, da bi kdo uganil pravilne decimalke od 128. do 152., je le 10^{-25}.

Morda je za marsikoga presenečenje, da je leta 1822 Bernhard Friedrich Thibaut (1775–1832), nemški profesor matematike v Göttingenu, v svojem učbeniku [13] objavil 157 decimalk števila π. Na tamkajšnji univerzi je takrat deloval tudi Carl Friedrich Gauß (1777–1855), najboljši takratni matematik sploh. Pravijo, da Gauß ni nič kaj rad predaval, kajti Thibaut ga je kot izvrsten predavatelj popolnoma zasenčil. Od kod sedaj Thibautu število π na toliko decimalk? Očitno so ga prepisovali in pošiljali naokoli, in tako ga je dobil tudi Thibaut in uporabil v svojem učbeniku, tako kot še marsikdo. Sicer pa je opisal postopek za izračun, ni pa navedel, od kod mu toliko decimalk. Sam si s tem ni belil glave, povedal je le to, da gre za najnatančnejši podatek. Če pa pozorno pogledamo v njegov učbenik, opazimo napako že na 10. decimalki: namesto 5 piše 9. Naslednja napaka je pri 108. decimalki: namesto 6 stoji 3. Potem sledijo pravilne decimalke vse do 127. Sledita popolnoma napačni decimalki 4 in 6, za katerima pa je 6 pravilnih decimalk, samo za dve mesti pomaknjene v desno. Sledi decimalka 1, ki je napačna, nato pa kar 19 pravilnih decimalk, za tri mesta pomaknjene v desno. Zadnji dve, 156. in 157., pa sta napačni. Verjetno so napake nastale pri prepisovanju ali stavljenju v tiskarni, kajti v naslednji izdaji učbenika [13] leta 1831 sta popravljeni 10. in 108. decimalka, izpuščene so v prejšnji izdaji vrinjene decimalke 4, 6 ter 1, in tako natiskano število π je popolnoma pravilno na 152 decimalk. Napačni sta le zadnji dve, 0 in 2, kar se lepo vidi v tabeli, v kateri je zapisanih nekaj decimalk od vključno 107. naprej.

	110 · 120 · 130 · 140 · 150 (stolpčne oznake, navpično)
prav	865132823066470938446095505822317253594081284811174...
L 1719	$865132\underline{7}23066470938446$
V 1789	$86513282306647093844\underline{47672138611733138}$
V 1794	$865132823066470938446095505822\underline{6136}$
T 1822	$8\underline{3}5132823066470938446\underline{46095505182231725359408128480 2}$
T 1831	$8651328230664709384460955058223172535940812848\underline{02}$
R 1841	$8651328230664709384460955058223172535940812848\underline{47378}$...
D 1844	865132823066470938446095505822317253594081284811174...

Pri tem kratica in letnica pomenita, kdo in kdaj je število π objavil oziroma poslal v objavo: L — de Lagny, V — Vega, T — Thibaut, R — Rutherford, D — Dase. Podčrtane decimalke so napačne.

Dase in Straßnitzki

Leta 1844 je Johann Martin Zacharias Dase (1824–1861), tudi Dahse, izračunal 200 točnih decimalk števila π po formuli

$$\pi = 4\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right). \tag{6}$$

Formulo (6) je izpeljal Leopold Karl Schulz von Straßnitzki (1803–1852). Rezultat je bil objavljen v nemški reviji *Crelle's Journal*, kar je popularno ime revije *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ki izhaja še danes, ustanovil pa jo je v Berlinu leta 1826 matematik August Leopold Crelle (1780–1855).

Straßnitzki takoj za petimi vrsticami decimalk števila π predstavi Daseja iz Hamburga kot nadpovprečnega računarja, sposobnega izredno hitrega računanja na pamet z dolgimi večmestnimi števili. Dase se je preživljal s tem, da je po gostilnah za denar na pamet računal s takimi števili. Ravno zaradi izjemne sposobnosti je Straßnitzki najel Daseja kot nekakšno živo računalo, da mu je izračunal krožno konstanto na 200 decimalk, in to v dveh mesecih. Tako hitro morda tudi zato, ker v (6) nastopajo preprosta, za računanje lepa števila. Mimogrede omeni tudi dokument v Radcliffski knjižnici in ujemanje Dasejevega izračuna na prvih 152 decimalkah. Prosil je celo oblasti, da bi mlademu Daseju pomagale najti primerno službo, češ da ga bodo sicer Avstrijcem in Nemcem speljali Francozi ali Angleži. Žal je Dase prej umrl, preden je dobil stalno zaposlitev.

Straßnitzki, rojen v Krakovu, je študiral matematiko, fiziko in še nekatere druge vede na Dunaju. Ko je končal študij, sta se hkrati sprostili mesti učitelja na liceju v Salzburgu in Ljubljani. Kot razberemo v [17], je delo leta 1827 dobil v Salzburgu, tam pa so ga posodili Ljubljani, kjer je med letoma 1827 in 1834 predaval elementarno matematiko na liceju in Franca Močnika (1814–1892), našega izvrstnega matematičnega pedagoga in pisca učbenikov, navdušil za študij matematike. Morda ravno zaradi vmesnega Salzburga v delu [2] najdemo podatek, da je v Ljubljani deloval od leta 1828 do 1834.

Ko je prišel v Ljubljano, je zapisal, da je znanstveno življenje v tem mestu precej na dnu. V Ljubljani je imel poleg svojega rednega dela tudi več neobveznih predavanj o matematiki in astronomiji. Iz Ljubljane se je preselil v Lvov, kjer je leta 1834 doktoriral in postal univerzitetni profesor. Nazadnje pa se je ustalil na Dunaju, kjer je razmeroma mlad umrl. Tudi na Dunaju je nadaljeval z neobveznimi predavanji. Pravijo, da je bilo zanimanje zanje tolikšno, da je zaradi pomanjkanja prostora v predavalnicah nekatera predavanja tudi ponavljal.

Sklepne besede

Za konec omenimo, da je Rutherford še enkrat zbral svoje moči in število π leta 1853 izračunal na 440 točnih decimalk. Takrat je bilo drugače: primerjal se je lahko z amaterskim angleškim matematikom Williamom Shanksom (1812–1882), ki je istega leta izračunal 517 točnih decimalk.

V zvezi z najbolj popularno matematično konstanto povejmo, da se zadnja desetletja ne le računa vedno več in več njenih decimalk, ampak se odkrije tu pa tam še kakšna njena preprosta skrivnost. Tako je na primer šele leta 1989 Ko Hajaši objavil naslednjo povezavo števila π s členi Fibonaccijevega zaporedja $\{F_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2k+1}} + \operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2m+2}}. \tag{7}$$

Dokažemo jo z metodo matematične indukcije, z upoštevanjem lastnosti Fibonaccijevih števil in funkcije arctg. Za $m = 2$ dobimo iz (7) znano formulo (6).

LITERATURA

[1] R. P. Agarwal, H. Agarwal in S. K. Sen, *Birth, growth and computation of pi to ten trillion digits*, Advances in difference equations 2013, **2013**:100.

[2] J. Ciperle, *Podoba velikega učilišča ljubljanskega. Licej v Ljubljani 1800–1848*, Slovenska matica, Ljubljana, 2001.

[3] Z. Dahse, *Der Kreis-Umfang für den Durchmesser 1 auf 200 Decimalstellen berechnet*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **27** (1844), str. 198.

[4] P. Eymard in J.-P. Lafon, *The number* π, AMS, Providence, Rhode Island, 1999.

[5] W. Jones, *Synopsis palmariorum matheseos*, London, 1706.

[6] T. F. de Lagny, *Sur la quadrature du cercle, & sur la mesure de tout arc, tout secteur, & tout segment donné*, Histoire de l'Académie royale des sciences (1719), 135–145, Paris 1721.

[7] G. Long (urednik), *The Penny Cyclopaedia of the Society for the diffusion of useful knowledge* **XIX**, Charles Knight & Co., London, 1841.

[8] U. C. Merzbach, C. B. Boyer, *A history of mathematics*, Wiley, Hoboken, 2011.

[9] J.-E. Montucla, *Histoire de recherches sur la quadrature du cercle*, Bachelier Père et Fils, Pariz, 1831.

[10] J.-E. Montucla, *Histoire des mathématiques*, 4. del, Henri Agasse, Pariz, 1802.

[11] A. V. Popov in M. Žargi, *Jurij Vega in njegove povezave s St. Petersburško akademijo znanosti*, v zborniku *Jurij baron Vega in njegov čas*, DMFA – založništvo in Arhiv Republike Slovenije, Ljubljana, 2006.

[12] W. Rutherford, *Computation of the ratio of the diameter of circle to its circumference to 208 places of figures*, Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1841, 281–283.

[13] B. F. Thibaut, *Grundriß der reinen Mathematik zum Gebrauch bey academischen Vorlesungen*, Göttingen, Vandenhoek und Ruprecht, 1822 (četrta izdaja), 1831 (peta izdaja).

[14] G. Vega, *Détermination de la demi-circonférence d'un cercle, dont le diamètre = 1, exprimée en 140 figures décimales*, Nova acta Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae **IX** (1791), Sankt Peterburg, 1795.

[15] G. Vega, *Thesaurus logarithmorum completus*, Weidmann, Leipzig, 1794.

[16] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.

[17] C. Wurzbach, *Biographisches Lexikon des Kaiserthums Oesterreich* **32**, Verlag der Universitäts-Buchdruckerei, Dunaj, 1876.

NA POTI DO NOVEGA KELVINA

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 06.20.fa, 06.20.Jr

Generalna konferenca za uteži in mere je priporočila, naj bi kelvin vezali na Boltzmannovo konstanto. V angleškem Državnem fizikalnem laboratoriju so to konstanto izmerili z relativno negotovostjo, manjšo od milijonine. Pri tem so morali premagati precej težav. Tudi v drugih metroloških laboratorijih so konstanto izmerili kar se da natančno. Nekateri so uporabili enak, drugi pa drugačen merilni način. Odločitev o novem dogovoru bo odvisna od merjenj v prihodnosti.

ON THE WAY TO A NEW KELVIN

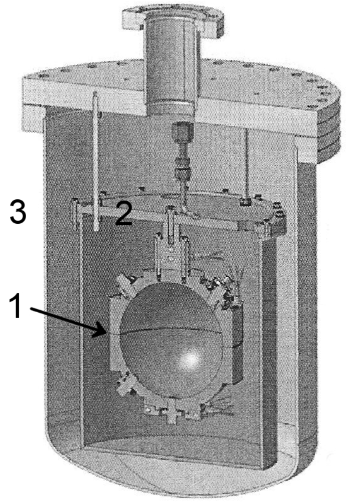
The General Conference on Weights and Measures has recommended that the kelvin should be based on the Boltzmann constant. At the British National Physical Laboratory this constant was measured with a relative uncertainty less than 1 ppm. Thereby some difficulties had to be surmounted. The constant was measured in other metrological laboratories as well. Some used the same method of measurement and some used other ones. The decision concerning a new definition will depend on future measurements.

Po sedanjem dogovoru je kelvin vezan na trojno stanje vode pri temperaturi 273,16 K, to je 0,1 °C. Če bi ga vezali na Boltzmannovo konstanto, se ne bi bilo treba sklicevati na lastnost snovi [7]. V angleškem Državnem fizikalnem laboratoriju NPL v Teddingtonu so natančneje kot doslej izmerili Boltzmannovo konstanto [5]. O tem so poročale številne s fiziko povezane revije [6] in internet. Kot pri vseh zelo natančnih merjenjih so morali premagati vrsto težav. Opišimo nekaj pomembnih korakov pri tem merjenju in omenimo druga prizadevanja v tej smeri.

Pred šestimi leti so v omenjenem laboratoriju razmišljali, kako bi pri merjenju Boltzmannove konstante dosegli relativno negotovost 10^{-6}. Odločili so se za merjenje hitrosti zvoka v plinu. Hitrost zvoka c v enoatomnem plinu pri majhnem tlaku je povezana z Boltzmannovo konstanto k_B:

$$k_B T = \frac{3Mc^2}{5N_A}. \tag{1}$$

Pravzaprav so izmerili velikost produkta $k_B T$, v katerem se konstanta v statistični mehaniki pojavi skupaj s temperaturo. Po starem dogovoru je temperatura trojnega stanja vode natančno določena in je z znanim produktom mogoče izračunati Boltzmannovo konstanto. Po novem dogovoru bi postala Boltzmannova konstanta natančno določena in bi s produktom izračunali temperaturo.

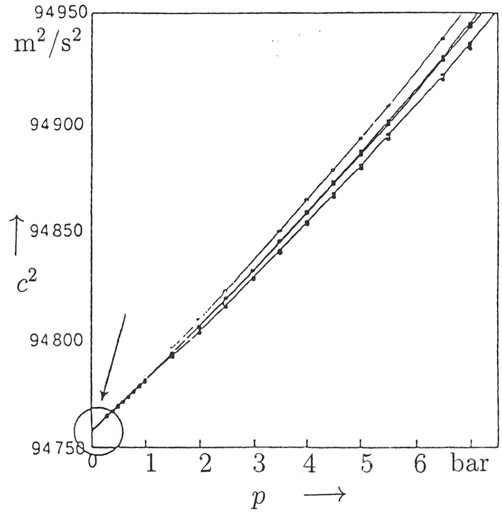


Slika 1. Bakreni resonator visi v tlačni posodi, ta pa v 25 litrski izotermni posodi: resonator 1, tlačna posoda 2, izotermna posoda 3. Resonator ima več odprtin za anteni, zvočnik in mikrofon ter dovod in odvod plina [5].

Avogadrovo konstanto N_A poznamo z relativno negotovostjo $0{,}044 \cdot 10^{-6}$. Maso mola plina M je mogoče natančno izmeriti. Temperaturo T je smiselno držati čim bliže temperature trojne točke vode. Za plin so izbrali argon z gostoto, bliže gostoti zraka, v katerem so preizkusili merilne naprave. Helij bi imel prednost, da ga sestavlja en sam izotop.

Hitrost zvoka so izmerili z akustičnim resonatorjem. Ta hitrost je v plinu le malo odvisna od tlaka. Merili so pri konstantni temperaturi, a različnih tlakih. V krogelnem resonatorju je preprosto ugotavljati resonance, pri katerih se tlak spreminja samo z razdaljo od središča. Težavno pa je natančno izmeriti polmer, pravzaprav prostornino resonatorja. Kaže, da je to najzahtevnejši del naloge. Velikost resonatorja so kolikor mogoče natančno ugotovili tako, da so ga uporabili hkrati kot resonator za mikrovalove. Elektromagnetne resonance v krogelnem resonatorju pa so degenerirane, se pravi, da dani resonančni frekvenci ustreza več različnih stoječih valovanj. Zato so uporabili resonator v obliki triosnega elipsoida, pri katerem ni degeneracije.

Za polmer na eni osi so izbrali 62 mm, na drugi osi za 31 μm več in na tretji osi za 62 μm več. Resonator s prostornino približno 1 litra so izdelali na univerzi Cranfield, kjer so si izkušnje pridobili pri izdelovanju zrcal za vesoljske teleskope. Bakreni polkrogli so spojili potem, ko so ju dodatno postružili. Hkrati so stružili na notranji in na zunanji strani, da so ju lahko dobro spojili. Iz štirih polkrogel so sestavili dva resonatorja. S prvim so se privajali na merjenja, glavna merjenja pa naredili z drugim. Z natančnim



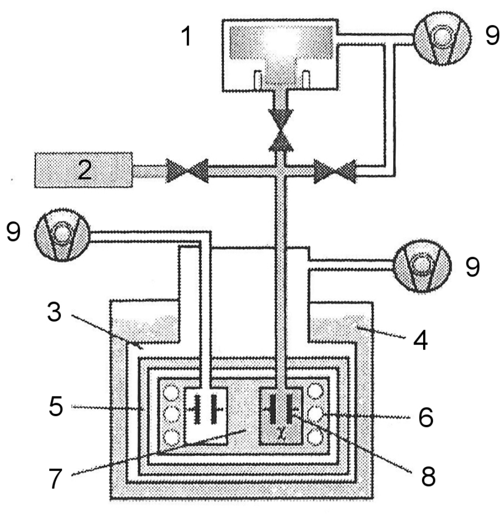
Slika 2. Pri konstantni temperaturi so spreminjali tlak in z akustičnimi resonancami ugotavljali kvadrat hitrosti zvoka. Odločilni podatek je dala ekstrapolacija k tlaku 0. Kvadrat hitrosti zvoka se je s tlakom le malo spreminjal [6].

merjenjem so se prepričali, da notranje površje resonatorjev od predvidene oblike ni odstopalo za več kot 1,5 μm.

Resonator je visel v tlačni posodi in ta v večji izotermni posodi s prostornino 25 litrov (slika 1). Po izotermni posodi je krožila tekočina s temperaturo $-0{,}2$ °C. Skozi resonator so v tlačno posodo in iz nje poganjali šibek tok argona, da nečistoče iz tlačne posode niso zašle v resonator. Tok so nadzorovali z merilniki pretoka. Tlak so merili v tlačni posodi. Tlak v resonatorju je bil za malenkost večji kot v tlačni posodi. To so ugotovili po spremembi impedance zaradi spremembe dielektričnosti argona.

Mikrovalovni anteni so skrbno vgradili v resonator tako, da je ostalo njegovo notranje površje gladko. Ko je ena od anten oddajala mikrovalove, je ob resonanci druga sprejela močno povečan signal. Pri tem so razločili tri resonance, povezane s tremi osmi elipsoida. Podrobno so merili pri devetih mikrovalovnih resonancah na območju od 2 do 20 GHz. Rezultate so uskladili in tako dobili ekvivalentni polmer resonatorja na 3,5 nm natančno. Z njim so izračunali prostornino resonatorja z enačbo $V = 4\pi r_e^3/3$.

V resonator so na enak način vgradili drobna zvočnik in mikrofon in opazovali akustične resonance. Pri opazovanih resonancah je argon nihal krogelno simetrično in na stenah viskoznost ni motila. Motilo pa je, da se je v zgoščini plin segrel in v razredčini ohladil in v 0,01 mm tanki toplotni mejni plasti izmenjal toploto s steno. Pojav so upoštevali s popravki. V ta namen so opazovali sedem akustičnih resonanc pri konstantni temperaturi



Slika 3. Risba naprave, s katero merijo v nemški Fizikalno-tehniški zvezni ustanovi: merjenje tlaka 1, plin 2, vakuumska posoda 3, termostatska tekočina 4, izotermni ščit 5, uporovni termometer 6, baker 7, merilni kondenzator 8, vakuumske črpalke 9 [1].

pri različnih tlakih in ekstrapolirali podatke k tlaku 0 (slika 2). To je poslabšalo natančnost ekvivalentnega polmera na 11,7 nm. Naposled so dobili hitrost zvoka na $0{,}09 \cdot 10^{-6}$ natančno.

Najprej je motilo, da so bile resonančne krivulje ožje, kot so pričakovali. Resonanca pri $3548{,}8095\ \mathrm{s}^{-1}$ je na primer imela razpolovno širino $2{,}864\ \mathrm{s}^{-1}$, ko so pričakovali $2{,}868\ \mathrm{s}^{-1}$. Če bi bile resonance širše od pričakovanih, bi pomislili na dušenje, ki ga niso upoštevali. Ožje resonance pa so namigovale na neznani pojav. Leta 2012 se je na mednarodnem simpoziju pokazalo, da stari račun ni ustrezno upošteval učinka toplotne mejne plasti. Novi račun je skladno z merjenji dal ožje resonančne krivulje.

Izotopsko sestavo plina so izmerili z masnim spektrometrom na Raziskovalnem okoljskem središču škotskih univerz v East Kilbridu. Argon je vseboval izotope $^{36}\mathrm{Ar}$, $^{38}\mathrm{Ar}$ in $^{40}\mathrm{Ar}$. Skrbno so ugotovili primesi drugih žlahtnih plinov in vodne pare in jih s filtri in z adsorpcijo odstranili.

Glavne podatke so zbrali pri treh merjenjih pri konstantni temperaturi $-0{,}2\ ^\circ\mathrm{C}$, ki so jo nadzorovali s šestimi uporovnimi termometri. Te so prej podrobno preizkusili in nato prenesli v napravo, ne da bi prekinili en sam kovinski stik. Dobljene rezultate so uskladili med seboj. Upoštevali so še nekatere manjše popravke in nazadnje prišli do Boltzmannove konstante $k_B = 1{,}38065156 \cdot 10^{-23}$ J/K z relativno negotovostjo $0{,}71 \cdot 10^{-6}$.

Mike Moldover in sodelavci na ameriškem Državnem inštitutu za standarde in tehnologijo v Gaithersburgu so leta 1988 merili splošno plinsko konstanto $R = N_A k_B$. Hitrost zvoka so ugotovili s kroglastim akustičnim resonatorjem. Njegovo prostornino so izmerili tako, da so ga napolnili z živim srebrom in potem živo srebro stehtali. Za Boltzmannovo konstanto so navedli $1{,}3806513 \cdot 10^{-23}$ J/K z relativno negotovostjo $1{,}8 \cdot 10^{-6}$. Zapisali so, da so „pripravljeni pojesti napravo, če bi se pokazalo, da je vrednost napačna za več kot $10 \cdot 10^{-6}$“ [2].

Laurent Pitre in njegovi sodelavci na francoskem Državnem laboratoriju za metrologijo in preizkušanje so leta 2011 merili na enak način kot na NPL in za Boltzmannovo konstanto dobili $1{,}38064774 \cdot 10^{-23}$ J/K z relativno negotovostjo $1{,}24 \cdot 10^{-6}$ [4].

Bernd Fellmuth in sodelavci s Fizikalno-tehniške zvezne ustanove v Berlinu so leta 2011 izmerili Boltzmannovo konstanto po drugi poti [1]. Izhajali so iz Clausius-Mossottijeve enačbe:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{N\alpha}{V \cdot 3\varepsilon_0} \tag{2}$$

za dielektričnost ε plina z molekulami, ki nimajo lastnega električnega dipolnega momenta in ki dobijo moment $\vec{p}_{e1} = \alpha\vec{E}$ v električnem polju z jakostjo $\vec{E}$. Pri tem je α polarizirnost molekule. Za plin z majhno gostoto števila molekul N/V velja enačba $\varepsilon - 1 = \alpha N/(V\varepsilon_0)$. Iz nje izračunamo gostoto molekul $N/V = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)/\alpha$ in jo vstavimo v plinsko enačbo $p = (m/M)RT/V$:

$$k_B T = \frac{p}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}. \tag{3}$$

V termostatu s kubičnim metrom vode pri temperaturi blizu trojnega stanja vode sta v dveh enakih posodah enaka jeklena valjasta kondenzatorja s kapaciteto 10 pF (slika 3). Temperaturo so nadzorovali z uporovnimi termometri. Ena od posod je izsesana, v drugi je helij pri tlaku od 10 bar do 70 bar. Glavna težava je dovolj natančno meriti tlak. Z razmerjem kapacitet izmerijo dielektričnost $C(p)/C(p = 0) = \varepsilon$. Ta je zelo majhna, pri tlaku 1 bar in trojnem stanju vode doseže $7 \cdot 10^{-5}$. Kapaciteto merijo z mostičkom in izmeničnim tokom.

Upoštevali so razne popravke, med njimi spremembo prostornine kondenzatorja zaradi povečanega tlaka in zaradi enačbe (2) ter plinsko enačbo razvili po virialih. Za Boltzmannovo konstanto so dobili $1{,}380657 \cdot 10^{-23}$ J/K z relativno negotovostjo $9{,}2 \cdot 10^{-6}$. To so povezali s podatkom, ki so ga dobili pri prejšnjem merjenju pri temperaturi okoli 24 K. Nazadnje so navedli $1{,}380655 \cdot 10^{23}$ J/K z relativno negotovostjo $7{,}9 \cdot 10^{-6}$.

Raziskovalna skupina s člani univerz v Caserti in Milanu in italijanskega Državnega inštituta za metrološka raziskovnja je Boltzmannovo konstanto izmerila na optični način [3]. Z zapleteno lasersko napravo so merili spektralno gostoto pri prehodu pri valovni dolžini 1,39 μm v vodni pari. V vodi so obogatili izotop kisika ^{18}O. Tako so dobili *celotno širino spektralne črte na polovični višini* $\Delta\nu_D$ zaradi Dopplerjevega pojava, ker se molekule gibajo. Merili so pri pri temperaturi 0,1550 °C in spreminjali tlak. Z upoštevanjem vrste popravkov so dobili širino črte in so iz enačbe zanjo $\Delta\nu_D = \nu\sqrt{2\ln 2 k_B T/Mc^2}$ izračunali produkt:

$$k_B T = \frac{Mc^2}{2\ln 2}\left(\frac{\Delta\nu_D}{\nu}\right)^2 . \tag{4}$$

Pri tem je ν frekvenca, ki ustreza težišču spektralne črte. Za Boltzmannovo konstanto so navedli $1{,}380631 \cdot 10^{-23}$ J/K z relativno negotovostjo $16 \cdot 10^{-6}$.

Skupina CODATA je ob zadnjem izravnavanju podatkov leta 2012 za Boltzmannovo konstanto navedla $k_B = 1{,}3806488 \cdot 10^{-23}$ J/K z relativno negotovostjo $0{,}94 \cdot 10^{-6}$. Primerjava meritev pokaže, da so vsaj nekateri merilci relativno negotovost ocenili prenizko. Pri zelo natančnih merjenjih to ni redek pojav.

Na enak način kot angleški Državni fizikalni laboratorij, a z različnimi napravami, merijo v francoskem Državnem laboratoriju za metrologijo in preizkušanje in italijanskem Državnem inštitutu za metrološka raziskovanja v Torinu. Vse raziskovalne skupine sodelujejo in izmenjujejo podatke. To se je primerilo na primer na Mednarodni delavnici o napredku pri določanju Boltzmannove konstante jeseni 2009 v Torinu.

V letu 2014 pričakujejo nova natančna merjenja Boltzmannove konstante. Odbor za podatke za naravoslovje in tehnologijo bo presodil njihovo skladnost in morebiti priporočil novo vrednost za Boltzmannovo konstanto in njeno relativno negotovost. Če se bodo odbori in pododbori Urada za uteži in mere s tem strinjali, bo Mednarodni odbor za uteži in mere oblikoval predlog novega dogovora o kelvinu. Dogovor bo sprejet, če bo zanj glasovala Generalna konferenca za uteži in mere, ki se bo sestala leta 2014 ali leta 2018.

LITERATURA

[1] B. Fellmuth, J. Fischer, Ch. Gaiser, O. Jusko, T. Priruenrom, W. Sabuga in Th. Zandt, *Determination of the Boltzmann constant by dielectric-constant gas thermometry*, Metrologia **48** (2011) 382–390.

[2] M. R. Moldover, J. P. M. Trusler, T. J. Edwards, J. B. Mehl in R. Davis, *Measurement of the universal gas constant R using a spherical acoustic resonator*, Journal of Research of the National Bureau of Standards **93** (1988) 85–144.

[3] L. Moretti, A. Castrillo, E. Fasci, M. D. De Vizia, G. Casa, G. Galzerano, A. Merlone, P. Laporta in L. Gianfrani, *Determination of the Botzmann constant by means of precision measurements of* $H_2^{18}O$ *line shapes at 1,39* μm, Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 060803 1–5.

[4] L. Pitre, F. Sparasci, D. Truong, A. Guillou, L. Risegari in M. E. Himbert, *Measurement of the Boltzmann constant* k_B *using a quasi-spherical acoustic resonator*, International Journal of Thermophysics **32** (2011) 1825–1886.

[5] M. de Podesta, R. Underwood, G. Sutton, P. Morantz, P. Harris, D. F. Mark, F. M. Stuart, G. Vargha in G. Machin, *A low-uncertainty measurement of the Boltzmann constant*, Metrologia **50** (2013) 354–376.

[6] M. de Podesta, *Redefining temperature*, Physics World **26** (2013) 28–32 (8).

[7] J. Strnad, *Sistem enot na poti sprememb*, Obzornik mat. fiz. **59** (2012) 95–99.

KAJ OBSEGA SREDNJEŠOLSKA FIZIKA?

ALEŠ MOHORIČ

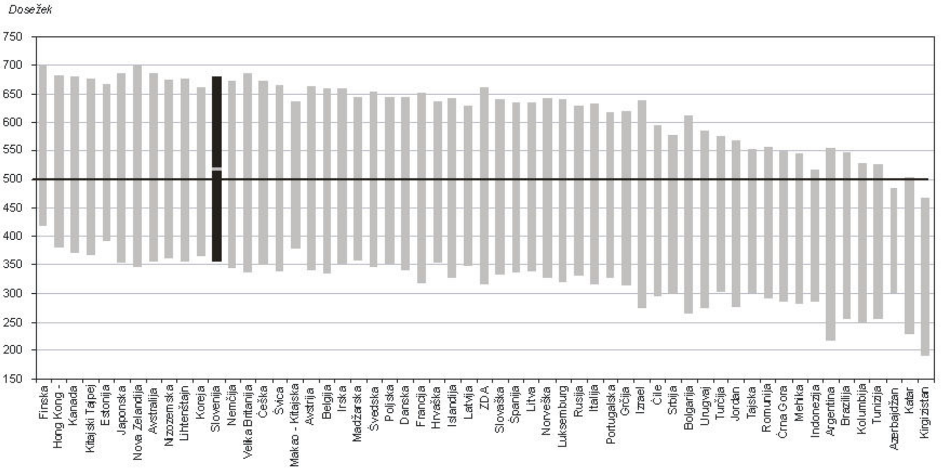
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Vsak učitelj pri svojem delu stoji pred izzivi. Njegova naloga je ustvariti razmere, v katerih dijaki konstruirajo znanje na način, da bodo čim več snovi čim bolje razumeli. Razumevanje snovi preverjajo testi in pogosto je pouk usmerjen v povečanje uspešnosti na teh testih. To ni nujno slabo, vendar tak način dela večinoma vkalupi pouk. Nekateri testi, npr. matura, so za dijake zelo pomembni in temu se prilagodi pouk, tako da se eno šolsko leto nameni utrjevanju snovi z dijaki, ki predmet izberejo na maturi.

Pri poučevanju nas veže več omejitev. Najbolj nas pri pouku omejuje razpoložljivi čas. Pri naporu, da bi ta čas čim bolje izkoristili, moramo poskrbeti za pravo mero, saj so sposobnosti dijakov omejene, njihovi interesi so različni in prevelik poudarek na določenem predmetu lahko privede do odpora. Sprememba števila ur je vedno plod dolgotrajnih in tehtnih usklajevanj med predstavniki različnih strok. Nekaj svobode imajo na voljo ravnatelji, ki lahko določenim predmetom namenijo več časa, in dijaki, ki si lahko izberejo predmete, ki jih bolj zanimajo in jih bodo spoznavali podrobneje. Logično je, da večje število ur pripomore k boljšemu prenosu znanja. Obseg fizikalnega znanja je vedno večji in naravna težnja je, da bi povečevali tudi obseg pouka fizike. Ker so dijaki v srednjih šolah vedno bolj obremenjeni z vsemogočimi vsebinami, to ni smiselno.

Druga omejitev je nivo znanja, do katerega poučujemo. Znanje pomeni konceptualno razumevanje in koherentno/povezano znanje in tudi sposobnost uporabiti naučeno v situaciji, ki ni identična šolski. Znanje in časovna omejitev se medsebojno izključujeta. Vse snovi nikoli ne moremo obravnati v celoti. Zato se omejimo le na nekaj tem in različne teme pokrijemo do različnih znanj. Pomembna je tudi pravilna izbira vrstnega reda. Nekatere teme zahtevajo predznanje drugih, marsikdaj pa smo pri fiziki omejeni tudi z matematičnim znanjem dijakov. Marsikatero snov bi lahko obravnavali drugače, bolj poglobljeno, če bi prišla na vrsto kasneje.

Pri izbiri tem in vrstnem redu nam pomaga in nas omejuje učni načrt [1]. Učni načrt je konservativen dokument in njegove spremembe niso pogoste in zaželene, saj vplivajo na način dela in terjajo prilagoditve. Zato so



Slika 1. Doseženi rezultati testiranja naravoslovne pismenosti na raziskavi PISA 2006.

spremembe vedno premišljene in ne preobsežne. Vodilo pri prenovi učnih programov mora biti previdnost. Spremembe morajo biti majhne in v smereh, za katere nas izkušnje iz drugih držav ali pilotnih projektov učijo, da so prave. Nova spoznanja in izboljšave morajo temeljiti na kritični presoji preteklih posegov v načrt. Spremembe pogosto sproži pristojno ministrstvo. Pri tem tudi prisluhne pripombam učiteljev in strokovnih združenj ter upošteva privlačnost za učence. Od sprememb želimo, da bi ujeli korak z naprednimi učnimi načrti drugih držav in sledili razvoju znanosti. Posreden vpliv pri razmisleku o novih učnih načrtih imajo mednarodna primerjanja znanj, kot npr. mednarodna raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja TIMMS (Trends in International Mathematics and Science Study). TIMMS izvajajo na vsaka tri leta [2], naslednji pa bo leta 2015. Druga, podobna primerjava je program mednarodne primerjave dosežkov učencev PISA (programme for international student assessment) [3], kjer se je Slovenija leta 2006 kar dobro uvrstila (slika 1) [4].

Zadnjič je bil učni načrt za fiziko posodobljen leta 2008. Poudarki pri tej prenovi so temeljili na vsebinski razbremenitvi v korist večjega razumevanja vsebin ter pridobivanja manjkajočih kompetenc,[1] npr. kompetence digitalne pismenosti, učenja učenja, samoiniciativnosti in podjetnosti, poleg že ustaljenih temeljnih kompetenc v naravoslovju in tehnologiji ter matematične kompetence. Vsebinska razbremenitev omogoča večjo izbirnost na maturi z

[1]Kombinacija znanja, spretnosti in odnosov (Uradni list Evropske unije št. 3 3 94/10).

okrog 30 % zmanjšanim obsegom vsebin, na katere se morajo dijaki v okviru maturitetnega dela programa pripraviti v 4. letniku [5]. Spremembe so prinesle zmanjšan obseg obveznih znanj v prvih treh letnikih za okrog 20 %, kar omogoča več časa za doseganje večjega razumevanja konceptov, razvijanja kritičnega mišljenja, spoznavanje naravoslovnega pristopa pri reševanju problemov in za eksperimentiranje. Namen učnega načrta fizike za gimnazije je podati smernice učiteljem, kako dijake učiti fiziko. To pomeni, da dijaki razumejo osnovne zakone, izreke, definicije, ki veljajo v fiziki, in obvladajo mehanizme komuniciranja o teh pojmih. Razumevanje ne pomeni samo reprodukcije pojma, ampak tudi uporabo pojma za razumevanje in napoved njegovih posledic. Pomemben del pouka pa ni le razumevanje pojmov, ampak tudi seznanjanje s pojavi in relevantnimi količinami. Razlog za posodobitev načrta so nova spoznanja v pedagoških konceptih in razvoj polja (fizike), saj naj bi pri pouku fizike dijake seznanili tudi z novejšimi spoznanji. V starem učnem načrtu je bila snov razdeljena na jedro, izbirni del in maturitetni del, v novem načrtu pa ločimo med splošnimi znanji, posebnimi znanji in izbirnim delom. Splošna znanja so potrebna za splošno izobrazbo in jih obravnavajo vsi dijaki. Obsegajo podatke, koncepte, definicije fizikalnih količin in razumevanje fizikalnih zakonov, ki sodijo v splošno izobrazbo. Sem sodijo tudi temeljna procesna znanja: kompleksno razmišljanje, osnove eksperimentiranja, iskanje, obdelava in vrednotenje podatkov iz različnih virov, predstavljanje projektov, timsko delo in učenje učenja. Posebna znanja dopolnjujejo splošna znanja s poudarkom na kvantitativni obravnavi. Izbirne vsebine so zaključene, zahtevnejše vsebine in niso del obveznega znanja. Učitelj nekatere vsebine lahko poglablja do posebnih znanj, ne pa nujno vseh, ki pridejo v poštev na maturi – od tu izhaja izbirnost na maturi. Nekatera znanja na maturi preverjamo poglobljeno, vendar dijaki ne potrebujejo poglobljenega znanja vseh vsebin. Določene teme spadajo v izbirne vsebine, ki jih učitelj priredi sebi in potrebam šole. V razdelitvi učnega načrta po vsebinah je jasno zaznati izkustveno naravnanost (poudarek na eksperimentalnem delu, projektnem delu, seminarskih nalogah). V posodobljenem načrtu se večji poudarek daje aktivnim metodam poučevanja. Pri aktivnem pouku dijaki večino časa aktivno sodelujejo s pogovorom, razmišljanjem in poskusi. Izmenjava mnenj poteka tudi med dijaki. Učitelj dijaku sproti podaja povratno informacijo o njegovem znanju. Učitelj vzpodbuja aktivno sodelovanje in diskusijo z vprašanji, kjer k razvoju znanja pomembno prispevajo tudi stranpoti in napačni odgovori.

Učni načrt ne predpiše vrstnega reda, je pa dobro premisliti, kdaj in kako obravnavamo posamezne teme. Če neko temo obravnavamo prezgodaj, ne moremo graditi na predznanju, ki ga pridobimo drugje. Učitelji si do neke mere lahko izberejo svojo pot. Zgled je npr. geometrijska optika, ki zahteva najmanj matematičnega predznanja in jo lahko obravnavamo že na začetku. Tematsko sodi za poglavji o valovanju in o svetlobi, ki pa za samo obravnavo nista nujni. Termodinamike npr. ne obravnavamo pred mehaniko, saj uporabljamo koncept energije, ki ga običajno vpeljemo preko dela sile. Pri vrstnem redu se oziramo tudi na matematično znanje dijakov. Učitelji fizike želimo, da bi matematična znanja, ki so potrebna pri pouku fizike (npr. vektorji, funkcije, trigonometrične funkcije, eksponentna in logaritemska funkcija in kasneje tudi odvod in integral), pri matematiki obravnavali usklajeno. Nekaj prizadevanj za usklajevanje učnih načrtov za fiziko in matematiko je že bilo, vendar ni težava le v načrtih. Znotraj načrta je učitelj suveren, saj lahko sam izbere vrstni red, in najtežje učitelji naredimo spremembo pri sebi. Težko je spreminjati ustaljen način dela. Marsikje pa se učitelji matematike in fizike dogovorijo za usklajen vrstni red. Pri vrstnem redu in znanjih, ki jih želimo doseči pri posamezni temi, se je treba zavedati, da je učenje proces in da vsega želenega ne moremo narediti naenkrat. Naraščajoče znanje – tako matematike kot fizike – upoštevamo v zgledih, ki jih obravnavajo pri pouku fizike. S tem pridobi tudi matematika, saj se izkaže kot vsebina, ki je uporabna tudi zunaj svojega področja. Pri tem koristijo primerni učbeniki.

Aktualni učni načrt razdeli fiziko na našteta poglavja, kjer je z velikostjo črk nakazano število ur, priporočeno za obravnavo določene tematike:

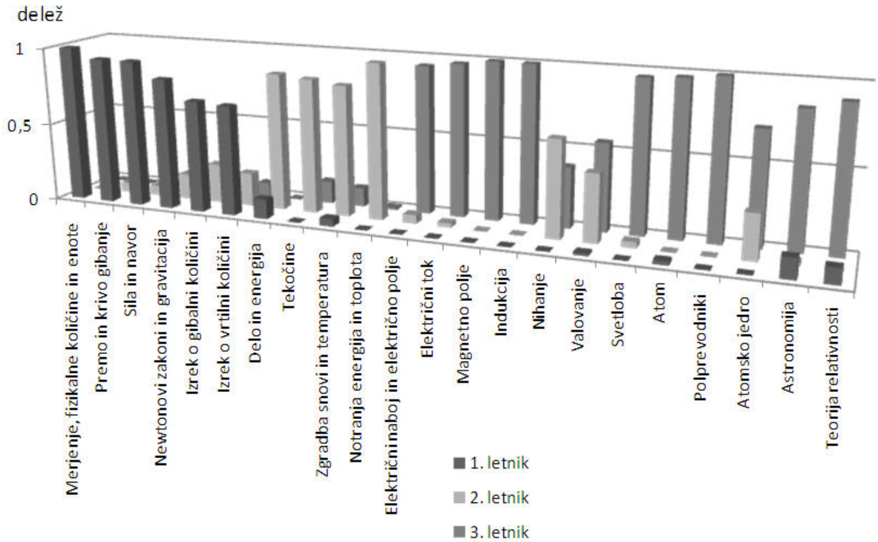
1. Merjenje, fizikalne količine in enote
2. Premo in krivo gibanje
3. Sila in navor
4. Newtonovi zakoni in gravitacija
5. Izrek o gibalni količini – posebna znanja in izbirne vsebine
6. Izrek o vrtilni količini – izbirno poglavje
7. Delo in energija
8. Tekočine – izbirno poglavje
9. Zgradba snovi in temperatura

10. Notranja energija in toplota
11. Električni naboj in električno polje
12. Električni tok
13. Magnetno polje
14. Indukcija
15. Nihanje
16. Valovanje
17. Svetloba
18. Atom
19. Polprevodniki – izbirno poglavje
20. Atomsko jedro
21. Astronomija
22. Teorija relativnosti – izbirno poglavje

Ko sem lani na dveh strokovnih srečanjih, ki jih je organiziral Zavod za šolstvo Slovenije, anketiral 80 srednješolskih učiteljev fizike, sem imel priložnost, da sem ugotovil njihov razpored poglavij po letnikih.

Zastavil sem jim vprašanje, v katerem letniku, če sploh, učijo določeno poglavje učnega načrta. Odgovori so zbrani v histogramih 1 in 2. Histogram 1 kaže deleže, v katerih učitelji določeno snov obravnavajo po letnikih. V poštev pridejo le trije letniki, saj je četrti letnik namenjen dijakom, ki fiziko izberejo na maturi in tam obravnavajo določene teme do posebnih znanj. Kaj in kako obravnavajo v četrtem letniku, se od generacije do generacije lahko spreminja.

Rezultati so dokaj pričakovani in učitelji v dokajšnji meri sledijo razdelitvi učnega načrta. Največje odstopanje se pokaže pri poglavjih Nihanje in Valovanje, saj učitelji tematiko pogosto uvrstijo pred elektriko in magnetizem (in termodinamiko) v drugi letnik. Razlog je v tem, da se sama snov navezuje na mehaniko, ki se obravnava v prvem in deloma v drugem letniku. Težava je v tem, da v drugem letniku dijaki še ne poznajo dovolj dobro trigonometričnih funkcij. Zato nekateri učitelji s snovjo počakajo do tretjega letnika. Seveda potem za tretji letnik ostane preveč snovi in je treba

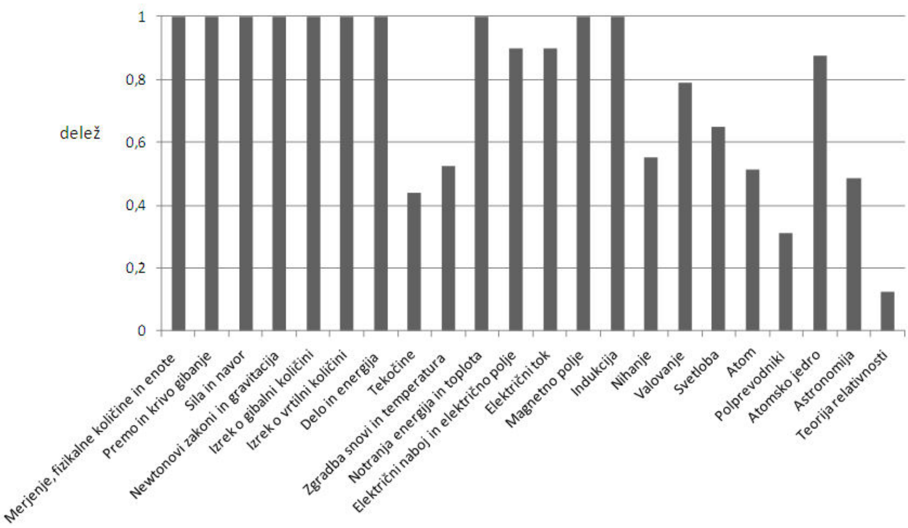


Slika 2. Histogram deležev poglavij po letnikih.

v drugega prestaviti relativno težka poglavja elektrike (in deloma magnetizma). Ena od rešitev je, da se v drugem letniku obravnava električni tok. Težava tega načina pa je, da se to stori brez utrjene predstave o električnem naboju.

Histogram 2 kaže deleže učiteljev, ki izberejo določena poglavja. Zavedati se je treba, da so določena poglavja sestavljena iz posebnih in splošnih znanj. Splošna znanja morajo obravnavati vsi učitelji in 100-odstotni deleži so tam pričakovani. Podrobnejša analiza, katera od posebnih znanj so izpuščena, žal ni na voljo. Učni načrt daje učiteljem možnost, da obseg snovi zmanjšajo in na ta račun poglobijo drugo snov in poudarijo učenje naravoslovne metode. Ker je celotni čas omejen, se mora učitelj zavestno odločiti in določena poglavja izpustiti, kar je marsikomu še vedno težko. Vendar se naredi več škode s hitro in površno obravnavo vseh poglavij kot s poglobljeno obravnavo manjšega števila poglavij. Očitno je, da se pri pouku največ izpušča poglavja moderne fizike. To je snov, ki je izkušnjam dijakov najbolj tuja. Pri izpuščanju snovi je pazljivost na mestu, saj ne želimo ustvariti vtisa, da je fizika zastarela znanost, čeprav so osnove stare že stoletja.

Anketa pokaže, da se vrstni red poglavij med učitelji v veliki meri ujema. Največja razlika je v uvrstitvi poglavij o nihanju in valovanju. Analiza pokri-



Slika 3. Histogram deležev učiteljev, ki obravnavajo določena poglavja.

tosti snovi zgolj po poglavjih, naštetih v učnem načrtu, ni dovolj natančna, da bi zajela porazdeljenost posebnih znanj. Določene tematike, ki imajo v učnem načrtu svoje poglavje, se lahko obravnavajo pod drugimi poglavji, tekočine se npr. lahko vsaj deloma obravnava v poglavju Temperatura in snov, del astronomije pa se lahko obravnava hkrati z gravitacijskim zakonom.

LITERATURA

[1] J. Strnad, *O poučevanju fizike*, DMFA – založništvo, 2006.

[2] *Naravoslovni, bralni in matematični dosežki slovenskih učencev*, Nacionalno poročilo, Pedagoški inštitut, 2007.

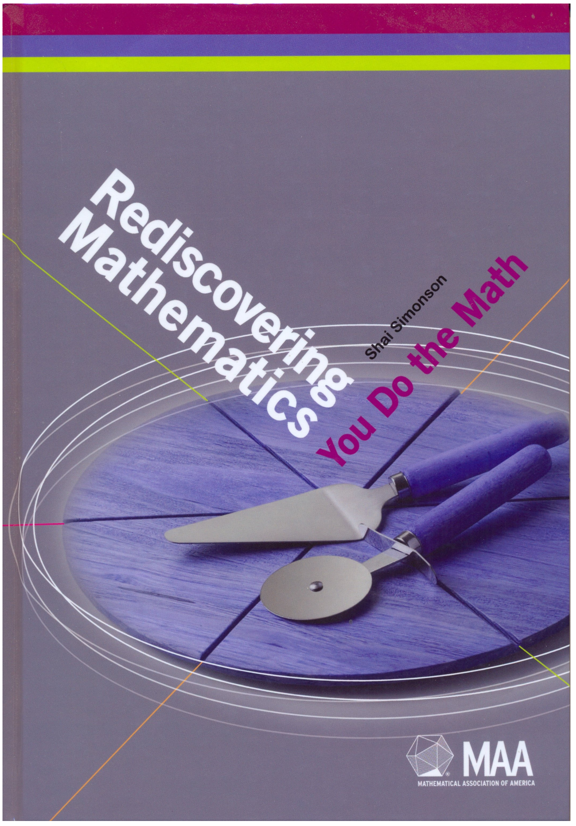
[3] `http://portal.mss.edus.si/msswww/programi2010/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_fizika_strok_gimn.pdf`, ogled 24. 10. 2013.

[4] `http://193.2.222.157/UserFilesUpload/file/raziskovalna_dejavnost/TIMSS/TIMSSAdvanced/TIMSS_A_nacPorVSE.pdf`, ogled 24. 10. 2013.

[5] `http://www.pisa.oecd.org/`, ogled 22. 10. 2013.

[6] `http://www.ric.si/mma/M-FIZ-2014\%20ISSN/2012092610040371/`, ogled 24. 10. 2013.

Shai Simonson, Rediscovering Mathematics – You Do the Math, The Mathematical Association of America, 2011, 240 strani.



Knjiga je namenjena širšemu krogu bralcev, ki jih zanima matematika: dijakom, študentom, njihovim učiteljem, pa tudi tistim, ki v svojem prostem času radi rešujejo matematične naloge. Morda jo bodo vzljubili celo tisti, ki jim je šola v mladih letih grenila življenje. Mogoče bodo učitelji našli v njej celo navdih za boljše poučevanje matematike, lahko jo uporabljajo za delo z nadarjenimi, o katerih se zadnje čase veliko govori. Pa še sami se bodo verjetno pri tem naučili kaj novega. Knjiga je naravnana namreč tako, da skozi naloge preiskuje, preizkuša in ponovno odkriva sicer že znane matematične resnice. Veliko nalog je iz vsakdanjega življenja, denarništva in športa, tako da niso le same sebi namen. Ob njih spoznamo tudi precej zanimivosti iz zgodovine matematike, tako da dobimo nekaj občutka, kako se je matematika razvijala, pa tudi nekaj podrobnosti o nekaterih matematikih.

Že bežen pogled na kazalo knjige pove, da naloge, zbrane v njej, pokrivajo več matematičnih področij. Naštejmo nekatera: geometrija, algebra, teorija števil in njena uporaba v komuniciranju na medmrežju, kombinatorika in verjetnostni račun z igrami na srečo, algoritmi. Knjiga vsebuje v vsakem poglavju tudi naloge za samostojno reševanje. Nekatere lahko uženemo, če se zgledujemo po rešenih primerih v knjigi, nekatere pa terjajo samostojen razmislek. Precej nalog zahteva tudi, da kakšno trditev, do katere pridemo sami, tudi dokažemo.

Avtor nam polaga na srce tudi nekaj splošnih misli. Zavedati se moramo, da je matematika jezik, katerega se je treba naučiti in privaditi. Običajno nas mora v njegove skrivnosti nekdo vpeljati. Za dobro razumevanje matematičnega besedila je pogosto treba kakšen njegov del večkrat prebrati, včasih se moramo vrniti nekaj strani ali poglavij nazaj, sem in tja se prileže premor, pogosto pa ne kaže drugega, kot vzeti v roke še kakšno drugo knjigo. Usvajanje matematičnega znanja pač ni premočrtno. Ne nazadnje pa je pomembno tudi to, da se matematike ne učimo samo z gledanjem, ampak s papirjem in svinčnikom v roki.

Kot primer zanimivosti v knjigi navedimo v bistvu egipčanski postopek množenja naravnih števil. Zmnožek dveh naravnih števil lahko izračunamo tako, da enega od faktorjev, po navadi manjšega, brez ostanka zaporedno delimo z 2, dokler ne pridemo do 1, večjega pa ravno tolikokrat zaporedno pomnožimo z 2. Rezultate zapišemo v dveh stolpcih. Na koncu seštejemo tiste dvakratnike, pri katerih je v isti vrstici liho število, ki je nastalo z deljenjem z 2. Postopek pojasnimo na primeru računa $19 \times 11\,760$:

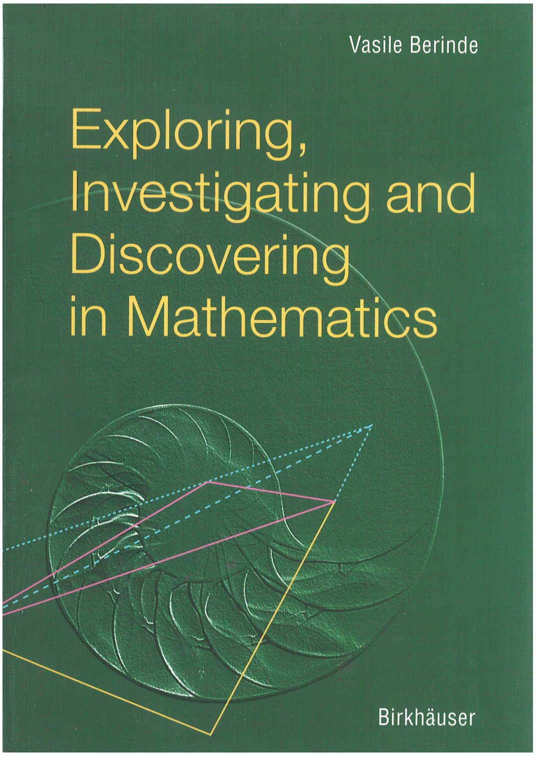
19	11 760	←
9	23 520	←
4	47 040	
2	94 080	
1	188 160	←
19×11 760 =	223 440	

Seštejemo samo tista števila v drugem stolpcu, ki so označena z znakom ←. Pravilnost postopka se zlahka preveri, če prvi faktor zapišemo v dvojiškem številskem sistemu, to se pravi kot vsoto različnih potenc z osnovo 2 in s koeficientoma 0 in 1, v našem primeru $19 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4$. Lihim številom v levem stolpcu ustreza koeficient 1, sodim pa 0.

Marko Razpet

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Vasile Berinde: Exploring, Investigating and Discovering in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004, 246 strani.



Po besedah avtorja, dolgoletnega navdušenega reševalca nalog elementarne matematike in sestavljavca problemov za revijo *Gazeta Matematica*, je glavni cilj knjige (z več kot 100 natančno rešenimi problemi in 150 vajami iz 24 skrbno izbranih tem s področja aritmetike, algebre, geometrije, analize, pa tudi uporabne matematike): podrobno predstaviti ustvarjalne tehnike reševanja in opažanja novih problemov s posebnim poudarkom na tem, kako razvijati inventivne veščine študentov. Sistematično razloži, kako organizirati in omogočiti mladim matematikom gladek prehod od reševanja problemov, ki jim jih zastavi nekdo drug, k samostojnemu raziskovanju in odkrivanju novih problemov in rezultatov.

Med posebnostmi knjige, ki je namenjena študentom in učiteljem matematike, pa tudi tistim, ki se pripravljajo na matematična tekmovanja ter vsem, ki jih zanima sam ustvarjalni proces in način, kako matematik od že znanega prehaja k osvajanju neznanega, velja omeniti predvsem: natančno in ustvarjalno obdelan *izvorni problem*, katerega *rešitev* je najprej podrobno analizirana, potem pa preoblikovana v *metodo*, ki je lahko uporabljena pri mnogih sorodnih problemih; poudarek je na učenju raziskovalnih veščin, izhajajoč iz izvornega problema in njegove rešitve, ki naposled omogoči bralcu, da sam odkrije nove in tehtne probleme, ki terjajo nadaljnje raziskovanje; razlaga sicer ostaja na elementarni ravni, vendar pa omogoča raziskovanje tako na elementarni ravni kot tudi z uporabo višje matematike.

Vseh 24 tem in njihovih variacij (komponiranih po zgledu ustvarjalnosti glasbenikov pri pisanju fuge), pa tudi rezultati, ki jih ilustrirajo, so pospremljeni z navedbami člankov, v katerih so bili obravnavani problemi rešeni. Vsako od ustreznih 24 poglavij knjige je torej tudi kratek pregledni članek o razvoju posamezne teme v matematični literaturi.

Avtor uporablja na lastni izkušnji zasnovan izvirni hevristični pristop. Po njegovem mnenju mora reševalec problemov poleg matematične strogosti in natančnosti spoštovati še najmanj tri načela: 1) *algoritmičnost* (rešitev mora biti jasno strukturirana in razdeljena na posamezne faze, posamezne operacije morajo biti grupirane in procesno urejene, kar vodi k jasni rešitvi, ki je uporabna tudi za druge probleme), 2) *splošnost* (ko smo problem že rešili, moramo najti čim več sorodnih problemov, ob katerih lahko preverimo splošnost rešitvene metode) in 3) *posplošitev* (problema nikoli ne smemo imeti za rešenega, dokler natančno ne analiziramo vseh komponent problema, potrebnost oziroma zadostnost uporabljenih predpostavk, in dokler ne ugotovimo, do katere mere so bili različni podatki uporabljeni v posameznih fazah rešitve).

Če bi knjigo brali le kot zbirko razmeroma preprostih metod za reševanje težkih problemov, bi spregledali njeno pravo poslanstvo: zapolniti vrzel v izobraževanju študentov matematike, od katerih se do diplome pogosto zahteva predvsem neustvarjalno reševanje problemov, od podiplomcev pa se naenkrat pričakuje odskok na višjo raven, kjer se začne njihovo prvo raziskovalno delo, na katero pa niso bili primerno pripravljeni. Avtor verjame, da je njegova knjiga lahko primerna odskočna deska za takšno samostojno raziskovanje. K pisanju so ga spodbudila pogosta vprašanja študentov, ali je v matematiki sploh še ostalo kaj neraziskanega, kar je vredno oziroma mogoče raziskovati nekomu, ki še nima širokega znanja v matematiki.

Knjiga bo všeč tistim, ki so jim blizu npr. knjige G. Polye (npr. *How to Solve It?*, *Discoveries in Mathematics* in *Patterns of Plausible Inference*). Mladim raziskovalcem pomaga zgraditi natančno delovno metodo, s katero lahko sistematično prehajajo od začetnega problema k njegovim vse zahtevnejšim različicam in celo novim problemom.

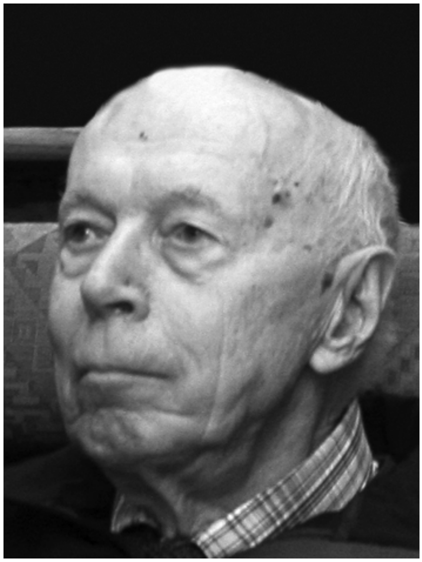
In kakšne so obravnavane teme? Ker ne moremo našteti vseh, omenimo le nekatere tipične primere. Kar nekaj se jih nanaša na rekurzivna oziroma *diferenčna zaporedja* (tako npr. od rešitve diferenčne enačbe $x_{n+1} = x_n + a_n, n \geq 0$, pri danem zaporedju (a_n) preidemo k rešitvi splošnejše enačbe $x_{n+1} = bx_n + a_n$ ter k ustreznim integralskim in matričnim različicam istega problema), *geometrijske konstrukcije*, *konvergentna zaporedja*, *neenakosti*, *sistemi nelinearnih enačb*, *determinante*, *harmonična vrsta*, *metoda teleskopiranja*, *polinomska aproksimacija zveznih funkcij*, *funkcijske* *enačbe*, *posplošena Newton-Leibnizeva formula*, itd. *Razvedrilna matematika* je zastopana z znanim izvornim problemom merjenja: „Iz 12-litrskega vrča, polnega vina, s pomočjo praznega 5-litrskega vrča prelij 4 litre v prazen 7-litrski vrč,“ katerega rešitev je posplošena do rešitve problema: „Iz vrča z več kot $2m - n$ litri vina prelij $2(m - n)$ litrov v m-litrski vrč s pomočjo n-litrskega vrča.“ *Uporaba računalnika* ne le pri reševanju, ampak tudi pri odkrivanju novih problemov je ilustrirana npr. na primeru enačbe $\frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k} = 1$, kjer so $n_1, \ldots, n_k$ različna naravna števila; s pomočjo računalnika generirana tabela določenih kvantitativnih vidikov rezultatov je omogočila formulacijo različnih teoretičnih rezultatov, kot je npr. ta, da enačba $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} = 1$ nima celoštevilskih rešitev. Avtor torej predlaga uporabo računalnikov po shemi: izvorni problem $\rightarrow$ tabela kvantitativnih podatkov, dobljenih z računalnikom $\rightarrow$ teoretični rezultati (izreki, formule), ki jih na podlagi analize teh zbranih podatkov oblikuje raziskovalec. Med zanimivejše probleme sodi tudi iskanje prve decimalke izrazov, kot je npr. $N = \sqrt{n^2 + 11n + 30}, n \in N, n \geq 3$ (ki jo najdemo z uvedbo nove spremenljivke $x = n + 5$, za katero dokažemo $x + \frac{4}{10} < N < x + \frac{5}{10}$, torej je prva decimalka števila N enaka 4).

Avtor v predgovoru pravi, da vsakdo od nas premore ustvarjalno iskro, vendar potrebujemo tudi primerna orodja za to, da se naše latentne ustvarjalne sposobnosti lahko razvijejo; upa, da je ta knjiga takšno orodje, in verjame, da si lahko z njenimi načeli algoritmičnosti, splošnosti in posplošitve oziroma predstavljeno metodo pomagamo ne le v matematiki, temveč povsod, kjer potrebujemo ustvarjalen pristop k reševanju problemov.

Iz prve roke lahko z bralci delim tudi lastno izkušnjo s to knjigo, ki jo vsake toliko časa ponovno pregledam in v njej še vedno najdem kaj novega: z njo si namreč lahko pomagamo ne le pri samem raziskovanju, ampak tudi pri pisanju oziroma strukturiranju člankov. Ob njej se npr. naučimo, da mora imeti raziskovanje jasno določen cilj, da šteje prav vsak korak in da je treba napredovati z majhnimi koraki ter pozorno oprezati za novimi problemi v različnih smereh. Čeprav vse to ne more nadomestiti poglobljenega znanja, ki pride le kot rezultat dolgoletnega vztrajnega študija (in ki je tista prava *vsebinska* osnova, iz katere sčasoma začno poganjati dobre ideje ter se začno kazati presenetljive povezave med na videz različnimi področji matematike), pa je vsaj na začetku tudi takšna *formalna* fokusiranost na *ustvarjalno metodo* lahko v določeno pomoč in motivacijo. Osnove, tudi metodološke, so potrebne, dajo nam varnost in orientacijo, a potem je treba iti onstran njih.

Jurij Kovič

PROFESOR PETER GOSAR – DEVETDESETLETNIK



V mesecu oktobru je praznoval devetdesetletnico akademik prof. dr. Peter Gosar.

Peter Gosar je bil rojen 15. oktobra 1923 v Ljubljani. Po končani klasični gimnaziji je študiral fiziko na Univerzi v Ljubljani in diplomiral leta 1951 iz fizike in matematike. Leta 1956 je bil promoviran za doktorja fizikalnih znanosti z disertacijo o razširjanju svetlobe v optično nehomogenem sredstvu.

V letih 1953–1957 je delal pri razvoju polprevodniških elementov v laboratoriju za polprevodnike pri Inštitutu za elektrozveze v Ljubljani, nato pa je leta 1957 postal sodelavec Nuklearnega instituta Jožef Stefan. V letu 1961 je pričel predavati na Univerzi v Ljubljani in njegova predavanja iz fizike trdnih snovi so kmalu vzbudila veliko zanimanje. Oktobra 1966 se je redno zaposlil kot izredni profesor na Matematično-fizikalnem oddelku Fakultete za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani ter bil leta 1971 izvoljen v naziv rednega profesorja. Na univerzi je predaval vse do upokojitve v letu 1993.

Profesor Gosar sodi v našem okolju med pobudnike znanstvenih raziskav v fiziki trdnih snovi. V obdobju do leta 1960 je objavil več člankov o eksperimentalnih in teoretičnih raziskavah površinskega fotoefekta pri polprevodnikih in njihovih površinskih lastnostih. S tega področja ima tudi dva patenta. Kasneje se je usmeril na področje teoretičnih raziskav v fiziki trdnih snovi, kjer je obravnaval vrsto transportnih in dinamičnih problemov, npr. električne in mehanske lastnosti ledu, električno prevodnost polprevodnikov in molekulskih kristalov, teorijo majhnih polaronov, električne lastnosti amorfnih snovi, električno prevodnost v plastnih molekulskih kristalih, teorijo večelektronskih preskokov med primesmi v zmerno kompenziranih polprevodnikih, relaksacijo paraelastičnih centrov, korelacijske funkcije za gostoto tokovnih izvorov v amorfnih snoveh in teorijo koherentnega sevanja kanaliziranih nabitih delcev v kristalih. Posebno pozornost so vzbudila njegova dela o protonski prevodnosti ledu, o elektronskem transportu v molekulskih kristalih, o večelektronskem preskakovanju v polprevodnikih ter o relaksaciji paraelastičnih centrov. Med prvimi pri nas je vpeljal metodo termodinamskih Greenovih in odzivnih funkcij s področja kvantne statistične mehanike, ki jo je dopolnjeval in uporabljal pri reševanju problema kinetike paraelastičnih centrov in električne prevodnosti amorfnih snovi.

Kot gostujoči znanstvenik je profesor Gosar sodeloval v več tujih centrih: 1958–1959 v Laboratoire de Magnétisme et de Physique de Solide, Bellevue, Francija; 1964–1966 na University of North Carolina, Chapel Hill, ZDA; 1972–1973 v Laboratoire de Spectrométrie, Université I de Grenoble, Francija. Poročal je na številnih mednarodnih in domačih srečanjih, večkrat tudi z vabljenimi in uvodnimi predavanji.

S svojim raziskovalnim delom na področju fizike trdnih snovi ter s predavanji in mentorskim delom na Univerzi v Ljubljani je profesor Peter Gosar odločilno prispeval k razvoju fizike in k dvigu kvalitete visokošolskega študija pri nas. Njegova predavanja na dodiplomskem in podiplomskem študiju fizike so med študenti in profesorji veljala kot vzor skrbno pripravljenih in razumljivih predavanj. Na vsa vprašanja slušateljev je vedno odgovarjal z natančnimi pojasnili, ki so bila odraz njegove široke razgledanosti in poglobljenega znanja. Ključna je bila tudi vloga profesorja Gosarja kot predsednika komisije in glavnega izpraševalca pri diplomskih in magistrskih izpitih. Prav tako je bilo neprecenljivo njegovo pretehtano mnenje pri usmerjanju pedagoškega dela in pri kadrovskih vprašanjih. Profesor Gosar je bil mentor pri petih doktorskih delih ter pri številnih diplomskih in magistrskih delih.

Leta 1964 je profesor Peter Gosar prejel Kidričevo nagrado za raziskave protonske prevodnosti ledu, leta 1994 pa državno nagrado Republike Slovenije za življenjsko delo na področju teoretične fizike. Prejel je tudi številne druge nagrade in priznanja: zaslužni član Instituta Jožef Stefan (1979), red dela z zlatim vencem (1980), zaslužni znanstvenik Instituta Jožef Stefan (1994), častni član Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (1994), zaslužni profesor Fakultete za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani (1994). Slovenska akademija znanosti in umetnosti ga je leta 1969 izvolila za dopisnega člana in leta 1976 za svojega rednega člana.

Ob svojem pedagoškem in raziskovalnem delu je profesor Gosar prevzemal tudi številne druge odgovorne naloge. Na Institutu Jožef Stefan je bil v letih 1967–1969 načelnik Oddelka za fiziko, kasneje pa vodja Odseka za fiziko, član Znanstvenega sveta instituta in v času 1980–1982 njegov predsednik. V letih 1971–1972 ter 1973–1975 je bil predstojnik Oddelka za fiziko FNT Univerze v Ljubljani, v času 1970–1971 pa predsednik Društva matematikov, fizikov in astronomov. Bil je član komisije za Kidričeve nagrade, član predsedstva Raziskovalne skupnosti Slovenije in več let tudi predsednik njene področne komisije za matematično-fizikalne vede.

Profesor Peter Gosar velja za enega od utemeljiteljev sodobne slovenske fizikalne šole. S svojim raziskovalnim delom na področju fizike trdnih snovi se je izkazal kot vrhunski znanstvenik, hkrati pa kot izjemen predavatelj, mentor in pedagog. Ob visokem jubileju želimo slavljencu še veliko zdravih in uspešnih let.

Peter Prelovšek in Raša Pirc

MARS 2013

Od 18. do 24. avgusta letos je potekal že osmi tabor za srednješolce MARS (matematično raziskovalno srečanje). Marsovci smo se zbrali ob Bohinjskem jezeru, natančneje v Centru šolskih in obšolskih dejavnosti Bohinj. Odpravo smo vodili Maja Alif, David Gajser, Lara Kozarski, Nejc Rosenstein in Jana Vidrih z UL FMF ter Matej Roškarič z UM FNM. Pri organizaciji je pomagal dr. Boštjan Kuzman, UL PeF, ki je bil tudi odgovorna oseba. Ne le vodstvo, tudi udeleženci so bili po spolu zelo uravnoteženi: devet dijakinj, prav toliko dijakov, dve študentki in en študent. Študenti, vsi iz prvega letnika UL FMF, so sestavljali t. i. študentsko skupino, ki je prevzela tudi manjše vodstvene naloge.

Osrednja dejavnost tabora so bili, kot vsa leta doslej, marsovski projekti. Mentorji (posadka) smo pripravili sedem matematičnih tem, ki so jih udeleženci raziskovali v skupinah po trije – vsaka skupina svojo temo. Vsak dan smo nekaj ur namenili delu pri svojem projektu. To delo je poleg reševanja matematičnih problemov vključevalo pisanje krajšega sestavka, izdelavo morebitne računalniške aplikacije in pripravo predstavitve projekta. Ta je bila izvedena na zaključnem dogodku tabora – pristanku, na katerega so bili vabljeni tudi starši in učitelji udeležencev.

Eden izmed projektov se je ukvarjal z naslednjim problemom. *Organizatorji nagradne igre imajo na voljo neskončno belih kap, neskončno črnih kap, neskončno modrih kap … Možnih barv je neskončno. Kandidati za nagrado, ki jih je števno neskončno, vse te barve poznajo. Vedo tudi, kako bo izbor nagrajencev potekal, in se pred začetkom lahko dogovorijo za strategijo. Izbor se začne tako, da so kandidati postavljeni v vrsto in imajo hrbet obrnjen proti začetku vrste, torej gledajo proti neskončnemu delu. Med postavljanjem v vrsto lahko preštejejo, koliko kandidatov je za njimi. Nato jim organizatorji dajo na glavo kape in vsi kandidati morajo hkrati zapisati barvo svoje kape na list. Kdor barvo kape zadane, dobi nagrado.* Za kakšno strategijo naj se dogovorijo?[1] Več informacij o projektih najdete na spletni strani http://mars.famnit.upr.si/projekti.html.

Dva dni je bil z nami na MARS-u dr. Uroš Kuzman, UL FMF, ki je pripravil dve dveurni delavnici z naslovom Kompleksna števila. Predstavil je polarni zapis kompleksnih števil ter grafično interpretacijo seštevanja in množenja. Razvita orodja je uporabil za reševanje geometrijskih problemov v koordinatni ravnini. Udeleženci so spoznali nekaj lepih primerov, pri katerih se začetni problem reducira na preproste in enostavno rešljive enačbe v množici kompleksnih števil.

[1] V strategiji, ki je opisana pri projektu *Turistična agencija Mars*, vsi, razen končno mnogo kandidatov, dobijo nagrado. Strategija uporablja aksiom izbire.

Skupinska slika

Večere smo imeli rezervirane za gostujoče predavatelje. Prvi je, edini že zgodaj popoldne, pred mladino stopil dr. Milan Hladnik, ki je predaval o geometrijskih konstrukcijah s pomanjkljivim evklidskim orodjem. Najprej smo izvedeli, kaj lahko načrtamo z evklidskim orodjem, nato pa smo temu orodju bodisi kaj odvzeli, bodisi ga malo spremenili. Ali ste vedeli, da lahko le s šestilom skonstruiramo iste točke kot s šestilom in neoznačenim ravnilom? Sledilo je predavanje dr. Boštjana Kuzmana, ki je predstavil končna polja. Začeli smo s konstrukcijo končnih polj reda 2, 3 in 4 ter končali s konstrukcijo Galoisovih polj. Sergio Hiroki Koike Quinatar, UP IAM in FAMNIT, nas je na tretjem predavanju popeljal v svet politopov: od starih Grkov pa do rezultatov dvajsetega stoletja. Zadnji nam je predaval dr. Andrej Bauer, UL FMF. Predstavil je osnove lambda računa: sintakso, β-redukcijo, uvedel je urejene pare, števila, seštevanje, množenje ... Povedal nam je tudi, do kakšnih izkušenj je prišel pri pisanju knjige HoTT, ki pomeni izjemen, še vroč dosežek matematikov.

Med strokovnim delom programa MARS 2013 omenimo še tri delavnice, ki so udeležencem pomagale pri projektih. Delavnico LaTeX je vodila Jana, delavnico GeoGebre je vodila Lara, delavnico retorike pa sta pripravila Nejc in Maja.

Kljub zgoščenemu urniku je bilo razpoloženje na taboru izjemno. V prostem času smo igrali razne družabne igre, začenši z Mafijo ter letošnjim odkritjem Hanabijem. Bil je tudi čas za sprehode, kopanje v Bohinjskem

Posadka. Sedijo: Maja, Lara, Jana. Stojijo: Nejc, Matej, David.

jezeru, igranje košarke, namiznega tenisa ... Vsak dan je bil objavljen problem dneva, s katerim smo si proste urice krajšali tako posadka kot udeleženci. Podali smo se tudi na pohod po koritih Mostnice, kjer smo namočili noge v ledeno hladen potok, za zadnje popoldne pa je bila pripravljena tradicionalna Velika marsovska avantura. Na njej je sodelovalo šest ekip udeležencev ter pet ekip povabljencev. Šlo je za orientacijski pohod s sedmimi kontrolnimi točkami, na katerih so ekipe reševale različne matematične in praktične probleme.

Zvečer nam je nekaj povabljenih udeležencev srednješolske mednarodne matematične olimpijade ter študentskega matematičnega tekmovanja predstavilo svoje izkušnje. Sledila je razglasitev rezultatov avanture in piknik ob tabornem ognju, harmoniki ter dveh kitarah.

V imenu vse ekipe se zahvaljujem DMFA Slovenije za podporo. MARS 2013 sta finančno podprla ŠOU v Ljubljani ter ŠO FMF.

David Gajser

ACAT POLETNA ŠOLA IZ RAČUNSKE TOPOLOGIJE

Med 1. in 5. julijem 2013 je v Ljubljani potekala poletna šola *Summer school on computational topology and topological data analysis* pod okriljem raziskovalne mreže *Applied and Computational Algebraic Topology* (ACAT) v sodelovanju s Fakulteto za matematiko in fiziko UL, Fakulteto za računalništvo in informatiko UL ter Institutom Jožef Stefan. Organizacijski odbor so sestavljali S. Cabello, P. Pavešić (FMF), A. Franc, G. Jerše, N. Mramor Kosta (FRI) in P. Škraba (IJS).

Predavanja so zajemala različna področja računske topologije in topološke analize podatkov:

- vztrajnostno homologijo (Ulrich Bauer, Institute of Science and Technology Austria; Sara Kališnik, Stanford University),
- diskretno Morsovo teorijo (Bruno Benedetti, Freie Unversität Berlin),
- algoritme na različnih razredih grafov (Jeff Erickson, University of Illinois at Urbana-Champaign),
- računalniški vid (Massimo Ferri, Universitá di Bologna),
- topološko robotiko (Danica Kragić in Florian Pokorny, KTH Royal Institute of Technology) in
- topološke metode v strojnem učenju (Marinka Žitnik, FRI).

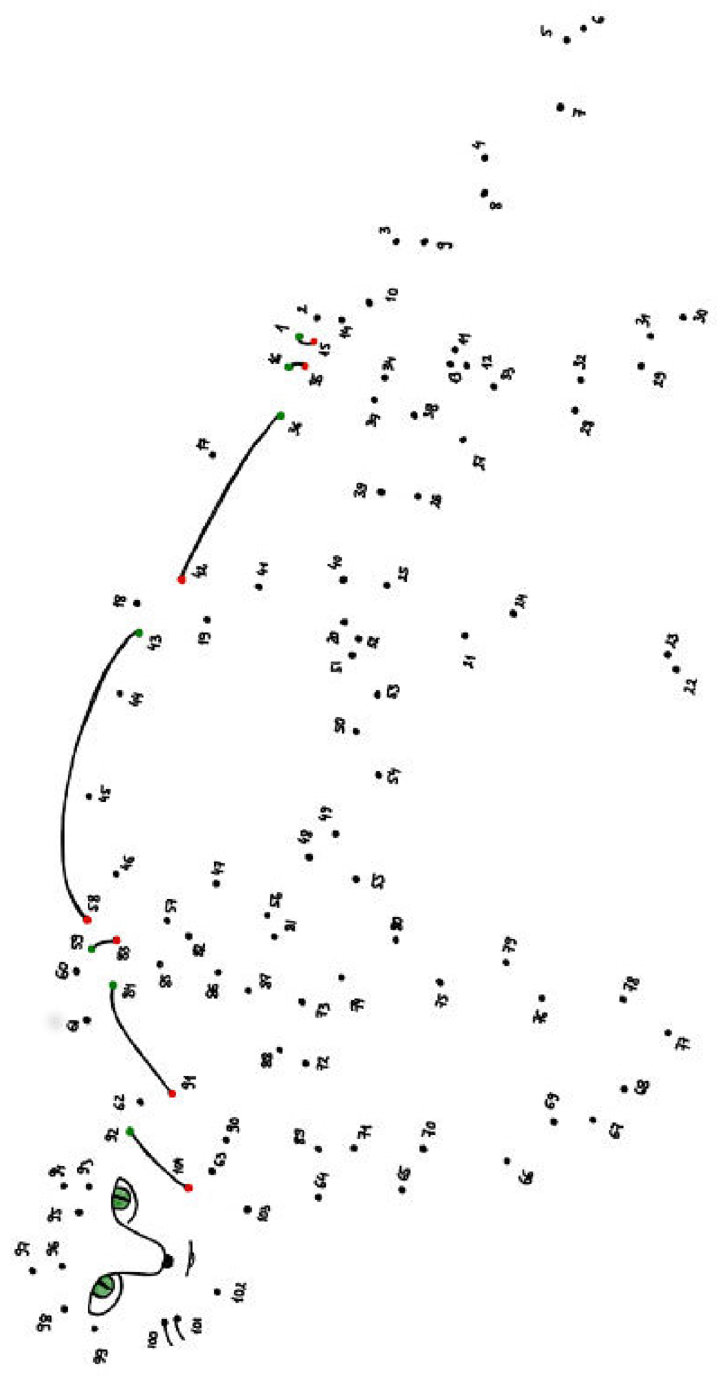
Uvodno predavanje o pomembnosti ravninskih grafov v uporabni matematiki in računalništvu je pripravil Bojan Mohar (Simon Fraser University), zaključno predavanje o kvalitativni analizi, modeliranju in simulaciji dinamičnih sistemov pa Ivan Bratko (FRI).

Predavanja so bila namenjena predvsem podiplomskim študentom. Poleg glavnih tečajev so svoje delo predstavili tudi nekateri doktorandi, v poznem popoldanskem času pa so potekale projektne delavnice za študente, kjer so se študenti lahko preizkusili v npr. implementaciji cik-cak vztrajnosti, proučevanju topologije omrežja slovenskih znanstvenikov, prepoznavi rokopisa z uporabo topoloških metod ali pa rekonstrukciji topologije in geometrije stavb iz podatkov o jakosti wi-fi signala.

Povzetki predavanj so že objavljeni na `http://acat2013.fmf.uni-lj.si/`, videoposnetki pa bodo dostopni na `http://videolectures.net/`.

Aleksandra Franc

Naloga za ogrevanje z ACAT poletne šole. Zelene točke označujejo začetke, rdeče pa konce poti, ki skupaj z že narisanimi krivuljami tvorijo nek objekt. Določi njegovo homologijo.



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JULIJ 2013
Letnik 60, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: William Thomson, lord Kelvin Larški, 1824–1907.