POT NA LUNO

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 45.20.dg, 45.50.Pk

Gibanja izstrelka z Zemlje na Luno z najmanjšo mogočo začetno kinetično energijo zlahka opišemo z energijske plati. Na težavo pa naletimo pri računanju časovne odvisnosti. Izstrelek v tem primeru ne bi dospel na Luno v doglednem času, ker gre skozi labilno ravnovesno lego. Drugi preprost zgled je fizično nihalo. Gre za dinamične sisteme, ki so močno občutljivi za začetne pogoje.

MOON TRAVEL

The motion of a projectile from the earth to the moon with minimal initial kinetic energy is easily described with respect to energy. Diffuculties arise, however, in calculating the time dependence. The projectile in this case would not reach the moon in reasonable time because it is passing through a labile equilibrium point. Another simple example is the physical pendulum. These are dynamical systems that are highly sensitive to initial conditions.

Ob štiridesetletnici prvega pristanka ljudi na Luni se zdi poučno obdelati preprost model potovanja z Zemlje na Luno. Mislimo na izstrelek, ki ga s površja Zemlje izstrelimo proti Luni. Izberemo najmanjšo mogočo začetno kinetično energijo, ki se zdi potrebna, da izstrelek dospe na Luno. Ne upoštevamo upora v ozračju in vrtenja Zemlje. Pokaže se, da je primer zanimiv, ker gre izstrelek skozi labilno ravnovesno lego.

Po izreku o kinetični in potencialni energiji se vsota kinetične in potencialne energije ohrani, če na izstrelek delujeta le Zemlja in Luna z gravitacijo. Energijo preračunamo na enoto mase izstrelka:

$$W/m = \frac{1}{2}v^2 - \mathcal{G}M/r - \mathcal{G}M'/(R-r) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}V^2(1/x + a/(1-x))\,.$$

$\mathcal{G} = 6{,}67428 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg s^2) je gravitacijska konstanta, $M = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg masa Zemlje, $M' = 7{,}3477 \cdot 10^{22}$ kg masa Lune in $R = 384\,400$ km povprečna razdalja med njunima središčema. Razmerje med maso Lune in maso Zemlje meri $a = M'/M = 0{,}01230$. Enačbo smo zapisali tudi v brezdimenzijski obliki z $x = r/R$ in ubežno hitrostjo z Zemlje na razdalji Lune, če Lune ne bi bilo tam: $V = \sqrt{2\mathcal{G}M/R} = 1{,}4403$ km/s. Srednji polmer Zemlje meri $r_0 = 6371{,}0$ km, tako da je $x_0 = 0{,}01657$, in srednji polmer Lune $r'_0 = 1731{,}1$ km, tako da je $x'_0 = 0{,}004503$ in $1 - x'_0 = 0{,}9955$. Za gravitacijsko konstanto je naveden podatek CODATA iz leta 2008, vsi drugi podatki pa so iz Wikipedije. Čeprav navajamo podatke in rezultate s petimi mesti, je treba upoštevati, da se Luna giblje okoli Zemlje po elipsi in sta Zemlja in Luna ob ekvatorju odebeljeni.

Potencialna energija je največja v nevtralni točki, v kateri je $\partial W/\partial x = 0$ in je rezultanta sil enaka nič. Iz zveze $1/x_1^2 = a/(1 - x_1)^2$ sledi $x_1 = 1/\left(1 + \sqrt{a}\right) = 0{,}90017$. Tam je vrh potencialnega nasipa, na katerem je na enoto mase izstrelka preračunana potencialna energija enaka $-(\mathcal{G}M/R)$ $(1/x_1 + a/(1 - x_1)) = -\frac{1}{2}V^2(1 + \sqrt{a})^2$. Izstrelek ima v nevtralni točki kinetično energijo 0. V tej točki prepoznamo labilno ravnovesno lego.

Na površju Zemlje je začetna hitrost v_0:

$$
\begin{aligned}
v_0 &= v_u\sqrt{1 + ax_0/(1 - x_0) - \left(1 + \sqrt{a}\right)^2 x_0} = \\
&= V\sqrt{1/x_0 + a/(1 - x_0) - \left(1 + \sqrt{a}\right)^2}\,.
\end{aligned}
$$

$v_u = \sqrt{2\mathcal{G}M/r_0} = 11{,}1875$ km/s je ubežna hitrost na površju Zemlje. V našem primeru je začetna hitrost $v_0 = 11{,}0736$ km/s malo manjša od ubežne hitrosti.

Formula za hitrost, s katero izstrelek zadene površje Lune, je podobna:

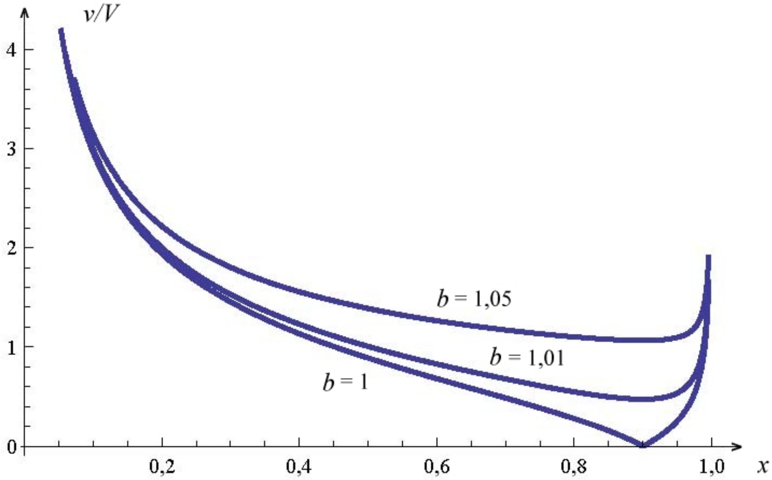
$$
\begin{aligned}
v'_0 &= v'_u\sqrt{1 - a'x'_0(1 - x'_0) - \left(1 + \sqrt{a'}\right)^2 x'_0} = \\
&= V'\sqrt{1/x'_0 + a'/(1 - x'_0) - \left(1 + \sqrt{a'}\right)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Pri tem je $V' = \sqrt{2\mathcal{G}M'/R} = \sqrt{a}V = 0{,}1597$ km/s ubežna hitrost z Lune na razdalji Zemlje, če Zemlje ne bi bilo tam. Ubežna hitrost na površju Lune meri $v'_u = \sqrt{2\mathcal{G}M'/r'_0} = 2{,}3803$ km/s, hitrost ob padcu je nekoliko manjša: $v'_0 = 2{,}2787$ km/s. Pri tem je $a' = 1/a$. S to hitrostjo bi izstrelili izstrelek s površja Lune, da bi z najmanjšo kinetično energijo dosegel Zemljo. V splošnem si pri pojavih, ki jih opišemo z navedenimi enačbami, lahko mislimo, da teče čas tako ali obrnjeno. Klasična mehanika – in druge teorije razen termodinamike in teorije šibke interakcije – so namreč invariantne na obrat časa.

Iz izraza za kinetično energijo izračunamo hitrost izstrelka:

$$v/V = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{a}{1-x} - \left(1+\sqrt{a}\right)^2} = \frac{1-(1+\sqrt{a})\,x}{\sqrt{x(1-x)}}\,. \tag{1}$$

Zadnja enačba jasno pokaže, da je hitrost v labilni legi enaka 0. Razprava o izreku o kinetični in potencialni energijie in hitrosti, ki smo jo izračunali iz njega, ni pripeljala do težav (slika 1). Težave so se pojavile, ko smo se zanimali za časovni potek gibanja.



Slika 1. Hitrost izstrelka je odvisna od kraja in od parametra b. Pri tem je $V = 1{,}4403$ km/s in $b = 1$ ustreza mejnemu primeru.

Na težave naletimo, ko poskusimo izračunati čas v odvisnosti od razdalje:

$$Vt/R = \int_0^x \frac{\sqrt{x(1-x)}\,dx}{1-(1+\sqrt{a})\,x} = -\frac{1}{(1+\sqrt{a})^2}\int_1^u \frac{\sqrt{(1-u)(u+\sqrt{a})}}{u}\,du \tag{2}$$

Vpeljali smo novo spremenljivko $u = 1-(1+\sqrt{a})\,x$. Spremenljivka u teče od 1 do $\sqrt{a}$, v labilni ravnovesni legi pa je enaka 0. Zadnji nedoločeni integral najdemo v tabelah [1]. Nazadnje preidemo na staro spremenljivko in upoštevamo začetni pogoj $t(x=0)=0$ ter dobimo:

$$Vt/R = \sqrt{2\mathcal{G}M/R^3}\,t = \left(1+\sqrt{a}\right)^{-2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{a}\right)\arcsin(2x-1) + \right.$$

$$+\sqrt{\sqrt{a}}\,\ln\frac{(1+\sqrt{a})\Big(1-(1-\sqrt{a})\,x-2\sqrt{\sqrt{a}x(1-x)}\Big)}{1-(1+\sqrt{a})\,x} -$$

$$- (1+\sqrt{a})\sqrt{x(1-x)} - \sqrt{\sqrt{a}}\,\ln\left(1+\sqrt{a}\right) + \left(1-\sqrt{a}\right)\frac{\pi}{4}\Bigg]. \quad (3)$$

Člen z logaritmom v labilni legi pri $x_1 = 1/(1+\sqrt{a})$ naraste čez vse meje. Zaradi tega za naš primer ne moremo izračunati, koliko časa bi potoval izstrelek. Izstrelek se z Zemlje giblje s pojemajočo hitrostjo in v nevtralni točki obmiruje. Zelo majhna motnja na eno stran zadostuje, da se iz labilne lege začne gibati proti Luni ali na drugo stran proti Zemlji. Opraviti imamo z dinamičnim sistemom, ki je močno občutljiv za začetne pogoje. Taki sistemi imajo pomembno vlogo v teoriji kaosa.

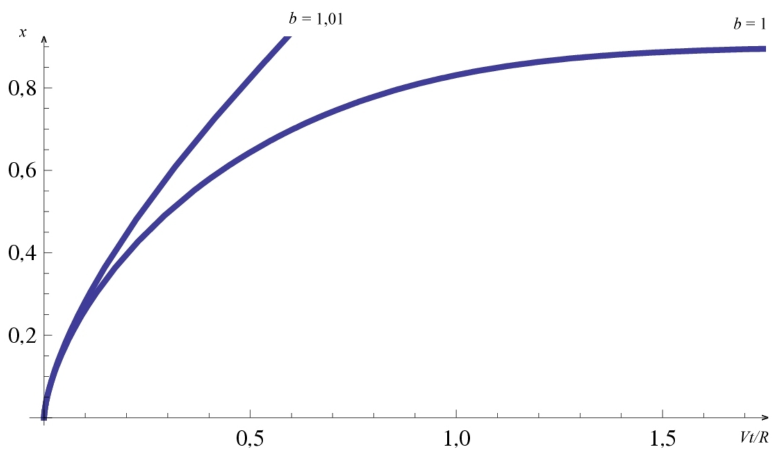
Najhitreje pojasni razmere približek enačbe (2) za $u \ll 1$:

$$Vt/R = -\frac{\sqrt{\sqrt{a}}}{(1+\sqrt{a})^2}\int_1^u \frac{du}{u} = -\frac{\sqrt{\sqrt{a}}}{(1+\sqrt{a})^2}\ln u \quad (4)$$

z rešitvijo $u \propto \mathrm{e}^{-t/\tau}$ in $\tau = R\sqrt{\sqrt{a}}\Big/\left(V(1+\sqrt{a})^2\right)$. V našem primeru meri relaksacijski čas $\tau = 20$ ur. Relaksacijski čas za izstrelek, ki bi ga s hitrostjo v_0' izstrelili z Lune, meri

$$\tau' = R\sqrt{\sqrt{a'}}\Big/\left(V'\left(1+\sqrt{a'}\right)^2\right) = (R/V)\sqrt{a'}\sqrt{\sqrt{a'}}\Big/\left(1+\sqrt{a'}\right)^2 = \tau\,.$$

Ugotovimo, da se faktorja z razmerjema mas ujemata, če upoštevamo, da je $a' = 1/a$. Izstrelek se z enakim relaksacijskim časom bliža labilni ravnovesni legi, ko ga izstrelimo z Zemlje ali z Lune.



Slika 2. Odvisnost razdalje x od t za mejni primer $b = 1$ in za $b = 1{,}01$

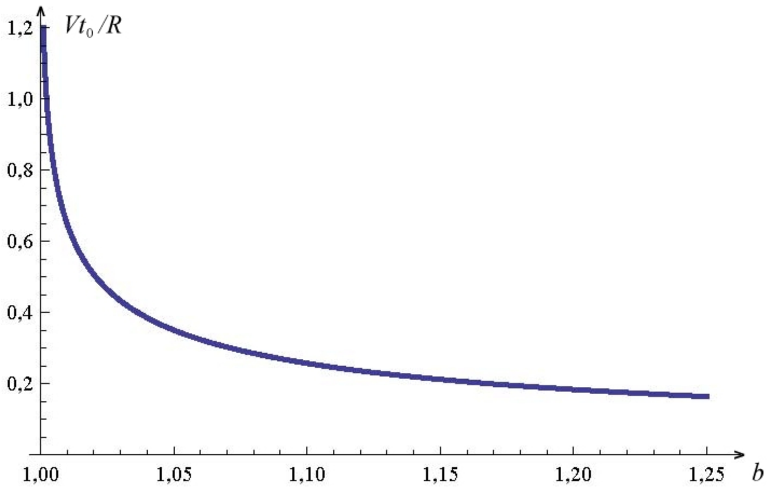
Vzamemo malo večjo začetno hitrost bv_0, $b > 1$ (slika 1):

$$v/V = \sqrt{1/x + a/(1-x) - A}\,, \quad A = \left(1+\sqrt{a}\right)^2 - \left(b^2-1\right)(v_0/V)^2.$$

Integralu damo za numerično računanje pripravno obliko:

$$Vt/R = \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{x(1-x)}{1-(1-a)x - Ax(1-x)}}\, dx\,.$$

Razdalja v odvisnosti od časa je inverzna funkcija $x(t)$, ki jo nariše *Mathematica* (slika 2). Trajanje potovanja t_0 z Zemlje na Luno v odvisnosti od parametra b izračunamo z numerično integracijo med $x = 0{,}01656$ in $0{,}9955$ (slika 3).

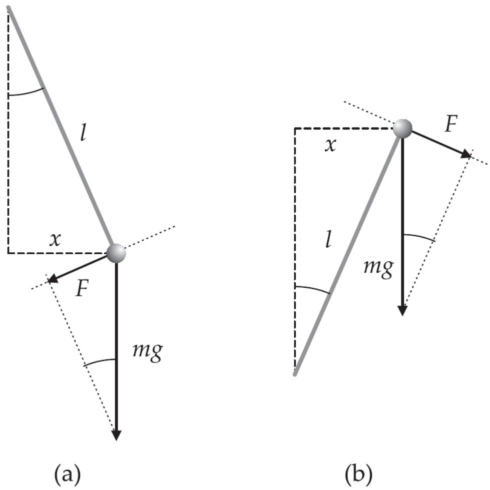


Slika 3. Trajanje potovanja t_0 je odvisno od parametra b. Hitrost v nevtralni točki meri $v_1 = \sqrt{b^2-1}\,v_0$. Izstrelek s hitrostjo 11 km/s ne bi dosegel Lune, ampak bi se obrnil že na polovici razdalje do nje. Pri $b = 1{,}01$ bi trajalo potovanje na Luno 2 dneva. Z ubežno hitrostjo pa bi pri $b = v_u/v_0 = 1{,}0103$ potovanje trajalo $t_0 = 1{,}906$ dneva. Na abscisno os je nanesena brezdimenzijska količina Vt/R z $R/V = 74{,}14$ ure.

Kot bolj domač zgled z enakim ozadjem si oglejmo fizično nihalo.[1] Zaradi preprostosti vzemimo tog drog z zanemarljivo majhno maso in dolžino l, ki ima na enem krajišču drobno utež z maso m in je vrtljiv okoli pravokotne

[1]Mimogrede pripomnimo, da je dvojno fizično nihalo eden od najpreprostejših sistemov, pri katerih zasledimo kaos. Način, s katerim je gibanje takega nihala opisal Henri Poincaré že davno pred časom računalnikov, so po njihovi uvedbi uporabili pri opisu kaosa.

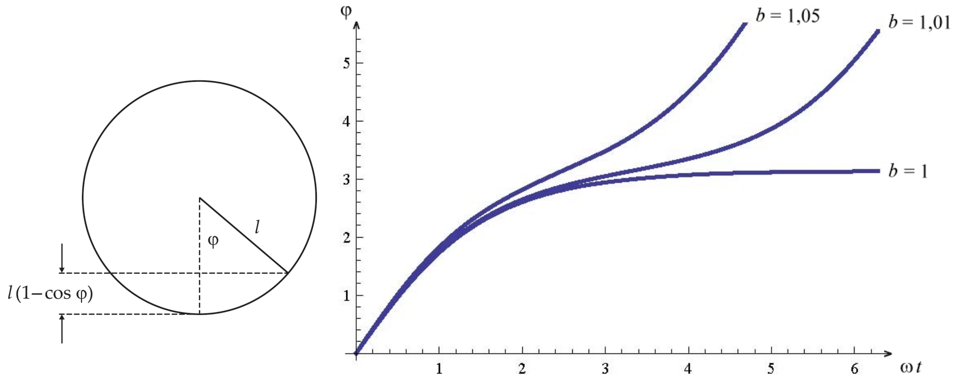
osi na drugem krajišču. Najprej drog izmaknemo za majhen odmik x iz stabilne lege (slika 4a). Komponenta teže $F = -mgx/l$ vrača utež v to lego. Iz Newtonovega zakona $F = md^2x/dt^2$ sledi enačba $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ z $\omega = \sqrt{g/l}$. Njena rešitev je sinusno nihanje: $x = x_0 \cos \omega t$, ki ustreza zahtevama, da je v času $t = 0$ odklon enak x_0 in hitrost enaka 0.



Slika 4. Zelo lahek drog z drobno utežjo na krajišču izmaknemo iz stabilne ravnovesne lege (a) in iz labilne ravnovesne lege (b). Komponenta teže v prvem primeru utež vrača v ravnovesno lego, v drugem pa ne. Zaradi podobnosti trikotnikov velja $F/(mg) = x/l$. Odklona sta narisana pretirano.

Nato opazujmo nihalo blizu labilne lege. Na utež deluje komponenta teže $F = mgx/l$ vstran od labilne lege, ko ga izmaknemo za majhen odmik x (slika 4b). Iz Newtonovega zakona sledi enačba $d^2x/dt^2 = \omega^2 x$. Njena rešitev $x = x_0 \operatorname{ch} \omega t$ ustreza zahtevama, da je v času $t = 0$ odklon enak x_0 in hitrost enaka 0.

Potem ko smo obdelali gibanje nihala okoli obeh ravnovesnih leg, obravnavajmo njegovo gibanje po enakem kopitu kot gibanje izstrelka proti Luni. Za ta namen določimo lego uteži na krožnici s polmerom l z odklonom φ od stabilne lege (slika 5 levo). Hitrost uteži je $v = ld\varphi/dt$ in njena kinetična energija $W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2(d\varphi/dt)^2$ ter potencialna energija $W_p = mlg(1 - \cos \varphi)$. Polna energija, preračunana na enoto mase $W/m = \frac{1}{2}v^2 + gl(1 - \cos \varphi)$, je konstantna. Če naj utež labilno lego doseže s hitrostjo 0, je v tej točki polna energija enaka potencialni energiji $W = 2mgl$. Tolikšna mora biti tudi začetna kinetična energija, tako da je začetna hitrost



Slika 5. Lego nihala na krožnici pri večjem odklonu opišemo z zasukom φ (levo). Odvisnost zasuka nihala φ od t za mejni primer in nekaj vrednosti parametra b (desno). Hitrost v nevtralni točki meri $v_1 = \sqrt{b^2-1}v_0$.

$v_0 = 2\sqrt{gl}$. Enačba gibanja se glasi:

$$\frac{1}{2}l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = gl(1+\cos\varphi) = 2gl\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,,$$

če nazadnje kot izrazimo z dvojnim polovičnim kotom. Korenjenje da $d\varphi/dt = 2\omega\cos\frac{1}{2}\varphi$. Tako dobimo

$$\omega t = \int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi} = \ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(x+\pi)\right|.$$

V labilni legi pri $\varphi = \pi$ čas zrase čez vse meje.

Razmere okoli labilne lege raziščemo, če v integralu vstavimo $\varphi = \pi - \delta$ z odmikom od labilne lege $\delta \ll 1$. Z njim velja $\cos\frac{1}{2}\varphi = -\sin\frac{1}{2}\delta \approx -\frac{1}{2}\delta$. Tako smo naposled prišli do enačbe:

$$\int\frac{d\delta}{\delta} = \ln\delta - \text{konst.} = -\omega t$$

z rešitvijo $\delta \propto \mathrm{e}^{-t/\tau}$ s $\tau = 1/\omega = \sqrt{l/g}$, ki spominja na enačbo (4) in njeno rešitev.

Zopet vzamemo malo večjo hitrost od v_0, to je bv_0, $b > 1$. V tem primeru sledi enačba $\frac{1}{2}(d\varphi/dt)^2 = 2\omega^2(b^2 - \sin^2\frac{1}{2}\varphi)$. Njeno rešitev izrazimo z eliptičnim integralom prve vrste $F(x,k) = \int\limits_0^x dx/\sqrt{1-k^2\sin x}$ takole: $(1/b)F(\frac{1}{2}\varphi, 1/b) = \omega t$. V tem primeru lahko inverzno funkcijo zapišemo v zaključeni obliki z Jacobijevo amplitudo, za katero velja: če je $u = F(x, k)$, je $x = \mathrm{am}(u, k)$. Tako je $\varphi = 2\,\mathrm{am}(b\omega t, 1/b)$. Slika 5 (desno) ustreza sliki 2.

Za razpravo in koristne nasvete se zahvaljujem profesorju Antonu Ramšaku.

LITERATURA

[1] I. S. Grashteyn in I. M. Ryshik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, San Diego 1979, str. 81, 84 (2.267, 2.261, 2.266)

NOVE KNJIGE

Lars Lindberg Christensen: VELIKE OČI, ZAZRTE V NEBO (EYES ON THE SKIES), ESA, 2009, DVD, 68 minut.

Se še spomnite časov, ko so bili dokumentarci najboljše, kar je ponujal televizijski program? Kam so izginili? Ja, kam, na posebne kanale. Predvajajo jih dneve in dneve. Kanalov pa niti na prste ene roke ne moremo več prešteti. Pri tem zasičenju se pojavi težava. Čas je treba z nečim zapolniti, dobri dokumentarci pa ne rastejo na drevesih. Sicer pa so produkcijo vzeli v roke filmarji. Ti se spoznajo na posel! Iz „parkiranja" čezoceanke tako naredijo polurni dokumentarec, kjer se isti kadri neštetokrat ponavljajo. Čeprav so razbiti z reklamnimi bloki, je to vseeno moteče. Pa tisto razvlečeno, umetno ustvarjanje napetosti. Ali bo ladji, ki krmari v pristanišče, uspelo zgrešiti zid za 200 metrov? To ni zanimivo; ustvarimo raje paniko, da pelje le za mišjo dlako stran od zidu in tudi posnemimo iz takega kota, da bo tako res videti. Ustvari se lažni vtis, da je vsako pristanje ladje prava mala avantura, kar pa seveda ni res.

Vse našteto: obilica, površnost, trivialnost, dramatiziranje … manjša užitek odkrivanja novega.

No, vse te navlake na DVD-ju *Eyes on the Skies* (v prevodu: Velike oči, zazrte v nebo), ki ga je ob mednarodnem letu astronomije pripravila Evropska vesoljska agencija (ESA), ne boste našli. Kar ponuja več od dejstev, je vrhunska estetika, zasanjan sprehod skozi čare astronomije.