# PRESEK

**List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje**

ISSN 0351-6652
Letnik **33** (2005/2006)
Številka 5
Strani 4–6

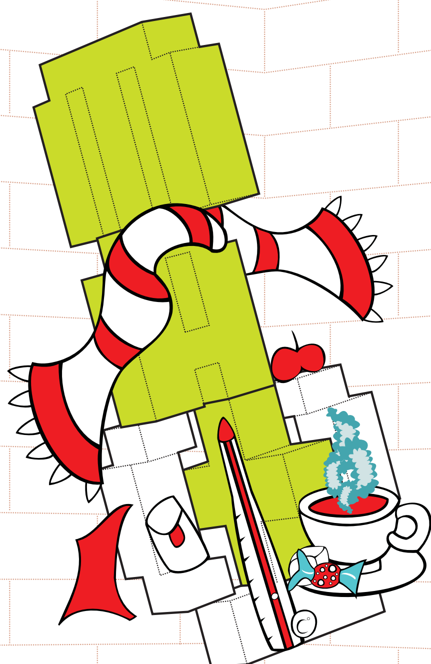
Irena Kosi – Ulbl:

## NEZEMLJSKI OBJEKT $n$-KOCKA

Ključne besede: matematika, geometrija, kocka, n-razsežen prostor, oglišča, robovi, mejne plosve.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/33/1631-Kosi-Ulbl.pdf

# Nezemeljski objekt n-kocko



Irena Kosi-Ulbl

**Na kaj pomislite, ko slišite besedo kocka? Na leseni model geometrijskega telesa, ki vam ga je pokazala učiteljica pri matematiki? Na tisto malo rdečo kocko, ki vam je zadnjič prinesla srečo in s katero ste zmagali pri »Človek, ne jezi se«? Ali pa morda na kocko sladkorja, ki se počasi raztopi v skodelici vročega, dišečega čaja? Videli bomo, da je lahko kocka tudi precej drugačna od naših vsakodnevnih predstav – odvisno od tega, v koliko razsežnem prostoru jo opazujemo.**

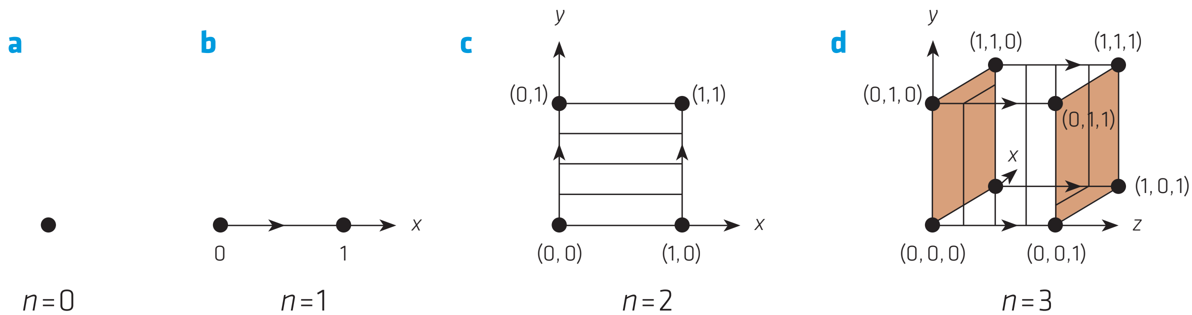
## Konstrukcija n-kocke

Prvi del prispevka bomo namenili konstrukciji večrazsežne kocke. Zgradili jo bomo postopoma in tako začeli z najenostavnejšo kocko – to je točka, ki jo proglasimo za 0-razsežno kocko. Nato bomo v vsakem koraku konstrukcije dodali eno dimenzijo.

Vzemimo torej točko (slika 1a) in jo naravnost povlecimo za dolžino ene enote. Sled, ki jo pusti vleka, je daljica oz. 1-razsežna kocka (slika 1b). Predstavljamo si jo lahko tudi kot interval $0 \leq x \leq 1$ na osi $x$. Sedaj primemo to daljico in jo vlečemo eno enoto v smeri pravokotno na os $x$ (slika 1c). Sled, to je kvadrat, je 2-razsežna kocka. V pravokotnem koordinatnem sistemu z osema $x$ in $y$ lahko to kocko predstavimo kot množico urejenih parov $(x, y)$, pri čemer veljata naslednji neenačbi: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Nato primemo kvadrat in ga povlečemo za dolžino ene enote pravokotno na ravnino, v kateri leži (slika 1d). Sled, ki jo pri tem pusti kvadrat, je 3-razsežna kocka, ki jo lahko opišemo kot množico točk s koordinatami $(x, y, z)$, za katere velja $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.



PRESEK **33** (2005/2006) 5, strani 4–6




**Slika 1 a, b, c, d.** Prve štiri stopnje v konstrukciji večrazsežne kocke

Nadaljujemo po analogiji – 3-razsežno kocko premaknemo naravnost za razdaljo ene enote in dobimo 4-razsežno kocko. Ker si te kocke več ne znamo predstavljati, se opremo na analogijo dodajanja posameznih dimenzij v vsakem koraku konstrukcije večrazsežne kocke in na formalno definicijo.

S premikanjem običajne kocke smo torej prišli do 4-razsežne kocke, ki nam generira 5-razsežno kocko, ta 6-razsežno in tako naprej. V $n$-tem koraku konstrukcije torej k obstoječim $n$–1 koordinatam točk kocke dodamo še eno, ki pa spet variira znotraj intervala $[0, 1]$. Tako je $n$-razsežna (enotska) kocka definirana kot množica točk $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pri čemer veljajo neenačbe $0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, \ldots, 0 \le x_n \le 1$. V nadaljevanju bomo $n$-razsežno kocko krajše imenovali kar $n$-kocka.

## Število oglišč, robov in mejnih ploskev n-kocke

Dogovorimo se, da bomo pri $n$-kocki delno ohranili terminologijo, ki jo uporabljamo za običajno kocko (oglišče, rob), ploskve višjih razsežnosti, ki tvorijo površje $n$-kocke, pa bomo imenovali $k$-razsežne ploskve, $k = 2, 3, \ldots, n$–1. Najprej opazimo, da je število oglišč $V_n$ enako $2^n$, preprosto zato, ker ugotovimo, da postopek premikanja podvoji število oglišč naše kocke v vsakem koraku konstrukcije: k ogliščem trenutne kocke dodamo oglišča njene dvignjene kopije. Do enakega zaključka pridemo tudi z razmislekom o koordinatah oglišč. Vsako oglišče $n$-kocke je točka z $n$ koordinatami, za vsako izmed njih pa imamo na razpolago le dve vrednosti: 0 in 1.

Podobno, kot smo določili število oglišč $n$-kocke, lahko določimo tudi število njenih robov. Opazujmo spreminjanje števila robov od koraka do koraka konstrukcije $n$-kocke. Številu robov trenutne kocke dodamo število robov dvignjene kopije in število robov, ki predstavljajo sledi oglišč pri dvigovanju. Število robov $E_{n+1}$ v $(n+1)$-razsežni kocki je tako enako

$$E_{n+1} = 2E_n + V_n,$$

pri čemer sta $E_n$ in $V_n$ število robov oz. število oglišč v $n$-kocki. Število robov v $n$-kocki lahko zapišemo tudi kot funkcijo števila $n$:

$$E_n = n2^{n-1}.$$

Obrazec dokažemo z enostavno indukcijo. Najprej preverimo, da je trditev pravilna za $n = 1$:

$$E_1 = 1 \cdot 2^{1-1} = 1.$$

1-razsežna kocka (daljica) ima zares en rob. Prav tako se hitro prepričamo o pravilnosti trditve za $n = 2$:

$$E_2 = 2 \cdot 2^{2-1} = 4.$$

2-razsežna kocka (kvadrat) ima zares štiri robove. Predpostavimo sedaj, da je trditev pravilna za neko naravno število $n$, torej $E_n = n\,2^{n-1}$. Potem je

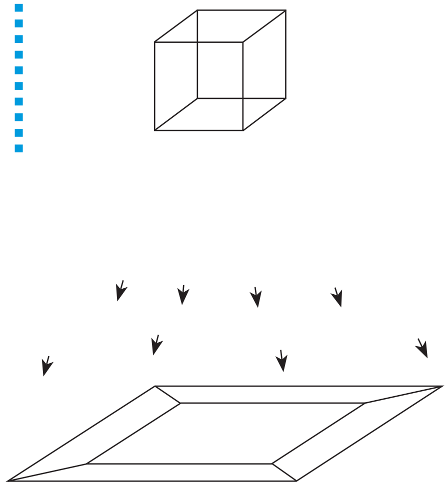
$$E_{n+1} = 2E_n + V_n = 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} + 2^n = (n+1)\,2^n.$$

Dokaz z indukcijo je končan.

Z namenom, da določimo število ploskev višjih razsežnosti v $n$-kocki, še enkrat opišimo njen skelet. Robovi so povezani z dvorazsežnimi ploskvami, te s trirazsežnimi in tako naprej vse do $(n-1)$-razsežnih ploskev, ki predstavljajo mejne ploskve $n$-kocke. Vsaka ploskev, ki je del površja $n$-kocke, je kocka določene razsežnosti. Naše prostorske predstave zadoščajo za nazorno predstavitev navedenega do $n = 3$, pri 4-kocki si bomo pomagali s projekcijo v trirazsežni prostor, »zgradba« višje razsežnih kock pa je preveč zapletena, da bi jih skušali narisati.

V nadaljevanju bomo torej opisali centralno projekcijo 4-kocke v trirazsežni prostor. Za lažje razumevanje najprej razložimo pojem centralne projekcije na primeru 3-kocke, ki si jo znamo dobro predstavljati.

Običajno s pojmom *projekcija* mislimo na preslikavo trirazsežnega prostora na ravnino. Če so premice skozi točke telesa, ki ga projiciramo, in njihove slike vzporedne, govorimo o *vzporedni projekciji*. Če pa se te premice sekajo v isti točki, govorimo o *centralni projekciji.* Na sliki 2 je prikazana centralna projekcija 3-kocke na ravnino.



**Slika 2.** Centralna projekcija 3-kocke na ravnino

Oglejmo si še centralno projekcijo 4-kocke v trirazsežni prostor (narisano v ravnini), ki je prikazana na sliki 3. Šest od osmih mejnih ploskev projicirane kocke so prisekane štiristrane piramide. Prav tako lepo vidimo 24 dvorazsežnih ploskev omenjene kocke (osem 3-kock s šestimi ploskvami, pri čemer smo vsako ploskev šteli dvakrat:

$$\frac{(8 \cdot 6)}{2} = 24).$$

V nadaljevanju prispevka bomo zapisali obrazec za izračun števila $k$-razsežnih ploskev v $n$-kocki. V obrazcu bo zapisano tudi t. i. *binomsko število*. Za bralce, ki teh števil še ne poznajo, jih bomo na kratko predstavili.

Binomsko število označimo z *binomskim simbolom* $\binom{n}{k}$ in preberemo $n$ nad $k$. To je število neurejenih izbir $k$ elementov brez ponavljanja iz množice z $n$ elementi. Število $\binom{n}{k}$ izračunamo kot

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

pri čemer smo z $n!$ označili produkt $n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$. Glede na zgornji zapis je očitno, da je $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Za lažje razumevanje binomskih simbolov si oglejmo še naslednji primer. Zapišimo vse neurejene izbire dveh elementov izmed elementov množice $\{A, B, C, D\}$:

*AB, AC, AD, BC, BD, CD.*

Izračunajmo še njihovo število:

$$\# = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6.$$

Sedaj pa bomo binomska števila uporabili še v obrazcu za izračun števila $k$-razsežnih ploskev v $n$-kocki. Povedali smo že, da se v vsakem koraku konstrukcije $n$-kocke razen $(n-1)$-razsežnih ploskev pojavljajo tudi $k$-razsežne, $k=0, 1, \ldots, n-2$. Posamezno $k$-razsežno ploskev si predstavljajmo kot množico točk, katerih $n-k$ koordinat je fiksnih z vrednostmi 0 ali 1, medtem ko preostalih $k$ koordinat variira od 0 do 1. Če torej računamo število mejnih ploskev (kvadratov) v običajni enotski kocki, si bomo posamezen kvadrat predstavljali kot množico točk s tremi koordinatami. Ena koordinata med njimi je fiksna (z vrednostjo 0 ali 1), ostali dve koordinati pa pretečeta vse vrednosti med 0 in 1, vključno s tema vrednostima. Pri zapisu obrazca za izračun števila $k$-razsežnih ploskev v $n$-kocki si bomo pomagali z elementarno kombinatoriko. Izmed $n$ koordinat posamezne točke izberemo $n-k$ koordinat na $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ načinov. Za vsako izmed njih pa imamo dve možnosti (0 ali 1), skupaj torej $2^{n-k}$ možnosti. Število $k$-razsežnih ploskev v $n$-kocki je tako enako

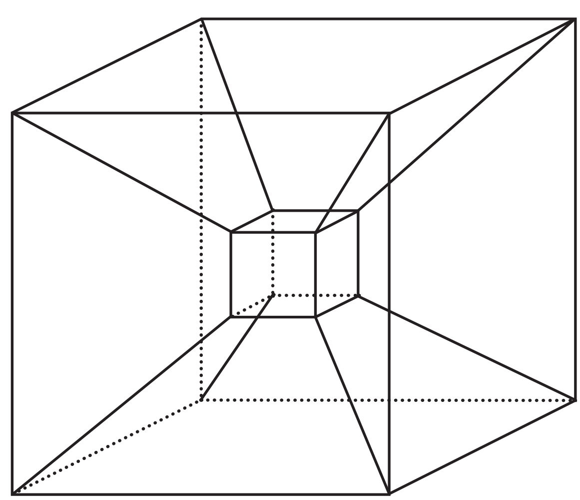
$$N_{n,k} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

S tem obrazcem izračunajmo še število mejnih ploskev v običajni kocki:

$$N_{3,2} = \binom{3}{2} \cdot 2^{3-2} = 3 \cdot 2 = 6.$$

## Literatura


- V. Dubrovsky, *»The multidimensional cube«*, Quantum, Sept.–Oct., (1996), 4–9.

**Slika 3.** Centralna projekcija 4-kocke v trirazsežni prostor (narisano v ravnini)