POMNOŽITEV HIPERKOCKE

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 14H45, 51M15

Antični geometrijski problem podvojitve kocke lahko posplošimo na problem njene poljubne pomnožitve. Še več, problem lahko razširimo na pomnožitev hiperkocke. V ta namen bomo uporabili primerno posplošeno cisoido.

MULTIPLYING THE HYPERCUBE

The ancient geometric problem of doubling the cube can be extended to a problem of an arbitrary multiplying. Moreover, the problem can be extended to multiplying the hypercube. To this purpose we will use a suitable generalized cissoid.

Uvod

Podvojitev kocke je klasični grški geometrijski problem, ki se ga ne da rešiti evklidsko, to je samo z neoznačenim ravnilom in šestilom, kar so dokazali šele v 19. stoletju. Problem zahteva določiti rob kocke, ki ima prostornino enako dvakratniku prostornine dane kocke. To pomeni, da je treba za dano daljico a konstruirati tako daljico b, za katero je $b = a\sqrt[3]{2}$. Problem podvojitve kocke so Grki znali rešiti na več načinov. Eden od njih je možen s posebno ravninsko krivuljo, z Dioklovo cisoido (več v [1, 4, 6, 8]).

Povsem smiselno se je vprašati, kako bi pomnožili s faktorjem $\lambda > 0$ poljubno r-razsežno hiperkocko z robom a. Njena prostornina je a^r, zato je $b = a\sqrt[r]{\lambda}$ rob hiperkocke, katere prostornina je λ-kratnik prostornine hiperkocke z robom a. Dva primera sta trivialna. Za $r = 1$ imamo daljico, njena »prostornina« je kar njena dolžina a, za $r = 2$ pa kvadrat, čigar »prostornina« je kar njegova ploščina a^2. Za $r = 3$ imamo opraviti z običajno kocko z običajno prostornino a^3. V prvih dveh primerih množenje s faktorjem λ ni problematično, saj ga ob izbiri enote 1 geometrijsko lahko opravimo s podobnimi trikotniki in z višinskim izrekom v pravokotnem trikotniku.

Za $r \geq 4$ si r-razsežno hiperkocko teže predstavljamo, ker je ne moremo realizirati z običajno geometrijo. To pa ni ovira pri pomnožitvi take hiperkocke s številom λ, ker moramo znati geometrijsko pomnožiti samo njen rob

a s številom $\sqrt[r]{\lambda}$, kar pa lahko naredimo v običajni ravnini. V matematični analizi je r-razsežna hiperkocka z robom a na primer kar r-kratni kartezični produkt intervala $[-a/2, a/2]$ s samim seboj, to je množica

$$[-a/2, a/2]^r = \{(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r : |x_1| \leq a/2, |x_2| \leq a/2, \ldots, |x_r| \leq a/2\}.$$

V nadaljevanju se bomo omejili na enotske hiperkocke, ki imajo rob 1 in prostornino 1. Če namreč znamo le-te geometrijsko pomnožiti s faktorjem λ, znamo geometrijsko pomnožiti s tem faktorjem tudi hiperkocke z robom a. Za to je treba uporabiti podobne trikotnike. S tem se ob izbrani enoti 1 in konstruktibilnim številom λ ves problem zreducira na konstrukcijo števila $\sqrt[r]{\lambda}$. To pa ne gre vedno evklidsko, zato privzamemo obstoj posebnih krivulj, ki to omogočajo. Število λ je konstruktibilno, če lahko daljico dolžine λ evklidsko konstruiramo v končno mnogo korakih iz daljice z dolžino 1. Števila $\sqrt[r]{\lambda}$ so konstruktibilna v razširjenem smislu, namreč po potrebi tudi ob pomoči teh posebnih krivulj.

S konstrukcijo tretjega korena so se ukvarjali že v antiki, na primer Nikomedes (3. stol. p. n. št.), Diokles (3.–2. stol. p. n. št.) in Papos (3.–4. stol.) (glej na primer [3, 5, 7]).

Na splošno ne delajo težav razsežnosti $r = 2^p$, kjer je $p \geq 2$ naravno število, ker je tedaj $\sqrt[r]{\lambda}$ rezultat p-kratnega zaporednega kvadratnega korenjenja števila λ, kar lahko geometrijsko realiziramo na primer s p-kratno uporabo višinskega izreka v pravokotnem trikotniku. Če je $r = 2^p q_1 q_2 \cdots q_k$, kjer je p naravno število, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ pa liha praštevila, ne nujno med seboj različna, lahko uporabimo zvezo

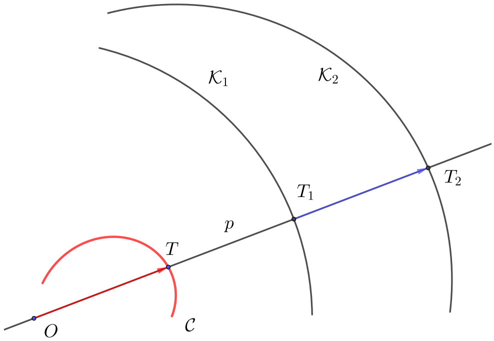
$$\sqrt[r]{\lambda} = \sqrt[q_k]{\sqrt[q_{k-1}]{\ldots \sqrt[q_1]{\sqrt[2^p]{\lambda}}}}$$

in postopoma konstruiramo $\delta_0 = \sqrt[2^p]{\lambda}$, $\delta_1 = \sqrt[q_1]{\delta_0}$, $\delta_2 = \sqrt[q_2]{\delta_1}, \ldots$, $\delta_k = \sqrt[q_k]{\delta_{k-1}}$ in nazadnje je $\sqrt[r]{\lambda} = \delta_k$.

Cisoide

Do ravninskih krivulj pridemo na različne načine. Eden od njih je *cisoidni način*. Do nove krivulje pridemo z uporabo znanih krivulj $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ ter točke O, ki ležijo v isti ravnini. Pri tem sta $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ taki krivulji, da vsaka premica p skozi O, ki seka $\mathcal{K}_1$ v neki točki T_1, seka tudi $\mathcal{K}_2$, recimo v točki

T_2 (slika 1). Za vsak T_1 označimo na p točko T tako, da velja $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{T_1T_2}$. Ko T_1 potuje po $\mathcal{K}_1$, T opiše krivuljo $\mathcal{C}$, ki jo imenujemo *cisoida krivulj* $\mathcal{K}_1$ *in* $\mathcal{K}_2$ *glede na točko* O. Definicije take cisoide se nekoliko razlikujejo od vira do vira, zgornja je povzeta po [2]. Ime krivulje $\mathcal{C}$ bomo obrazložili v nadaljevanju.



Slika 1. Krivulja $\mathcal{C}$ je cisoida krivulj $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ glede na točko O.

V nadaljevanju je, če ni drugače rečeno, r vedno liho število, večje ali enako 3. Dovolj bi bilo sicer obravnavati le liha praštevila, kot smo videli v uvodu, da bi konstruirali r-ti koren, toda konstrukcija bi lahko zahtevala veliko zaporednih korenjenj. Cisoide, ki jih bomo pri tem potrebovali, bomo obravnavali z metodami analitične geometrije v ravnini. V ta namen postavimo ravninski pravokotni kartezični koordinatni sistem Oxy. Krivuljo, ki ima v tem koordinatnem sistemu enačbo

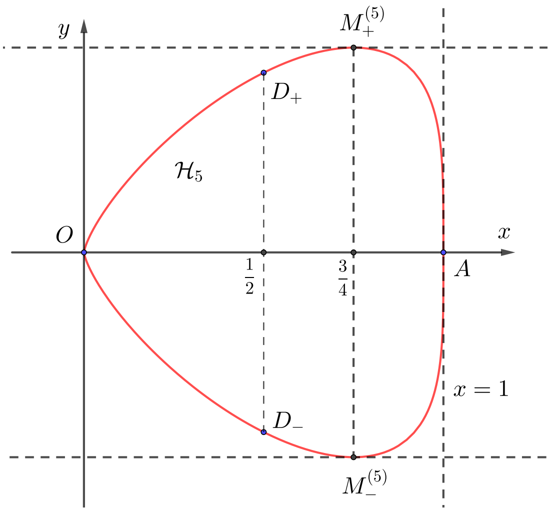
$$x^{r-1} + y^{r-1} = x^{r-2}, \tag{1}$$

označimo s $\mathcal{H}_r$. To je algebrska krivulja stopnje $r-1$. Če vstavimo v (1) $y = tx$, dobimo parametrični enačbi krivulje $\mathcal{H}_r$:

$$x(t) = \frac{1}{1+t^{r-1}}, \quad y(t) = \frac{t}{1+t^{r-1}}. \tag{2}$$

Krivulja $\mathcal{H}_r$ je sklenjena, leži v prvem in četrtem kvadrantu, poteka skozi točke $O(0,0)$, $A(1,0)$ in $D_\pm(1/2, \pm 1/2)$ (slika 2). Točko A doseže za $t = 0$, točki $D_\pm$ za $t = \pm 1$, točko O pa v limiti $|t| \to \infty$. Iz (2) izračunamo

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{(r-2)t - t^{2-r}}{r-1}, \quad \frac{dx}{dy}(t) = \frac{(r-1)t^{r-2}}{(r-2)t^{r-1} - 1}. \tag{3}$$



Slika 2. Krivulja $\mathcal{H}_5$.

Iz prvega izraza v (3) ugotovimo, da ima krivulja vodoravni tangenti za $t = \pm 1/\sqrt[r-1]{r-2}$ v točkah

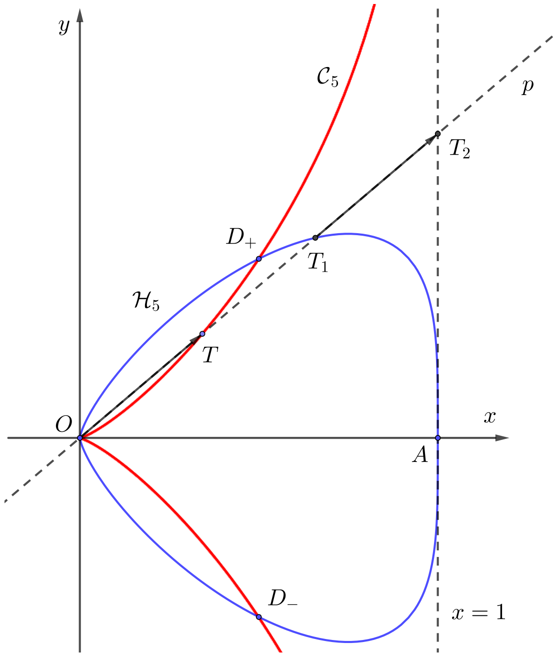
$$M_\pm^{(r)}\left(\frac{r-2}{r-1}, \pm\frac{\sqrt[r-1]{(r-2)^{r-2}}}{r-1}\right).$$

Z rastočim r se točki $M_\pm^{(r)}$ pomikata proti asimptoti krivulje (slika 5). Račun pokaže, da točke $M_\pm^{(r)}$ ležijo na nealgebrskih krivuljah $\mathcal{L}_\pm$, ki imata enačbi $y = \pm x^x(1-x)^{1-x}$ in sta simetrični glede na premico $x = 1/2$. Pri tem je $0 < x < 1$. Absolutni vrednosti ordinat točk $M_\pm^{(r)}$ sta manjši kot 1 za vsak $r \geq 3$.

Iz drugega izraza v (3) izračunamo $\frac{dx}{dy}(0) = 0$, kar pomeni, da ima $\mathcal{H}_r$ v točki A za tangento premico $x = 1$. Ker pa $\frac{dx}{dy}(t) \to 0$, ko $|t| \to \infty$, ima $\mathcal{H}_r$ za tangento v točki O ordinatno os $x = 0$, kar sicer na sliki 2 ni očitno.

Poiskali bomo cisoido $\mathcal{C}_r$ krivulj $\mathcal{H}_r$ in $x = 1$ glede na točko $O(0,0)$ (slika 3). Premica p skozi O naj ima enačbo $y = tx$. Krivuljo $\mathcal{H}_r$ preseka v točkah O in $T_1(1/(1+t^{r-1}), t/(1+t^{r-1}))$, premico $x = 1$ pa v točki $T_2(1,t)$. Koordinati točke T iskane cisoide $\mathcal{C}_r$ sta potemtakem

$$x_T = 1 - \frac{1}{1+t^{r-1}} = \frac{t^{r-1}}{1+t^{r-1}}, \quad y_T = t - \frac{t}{1+t^{r-1}} = \frac{t^r}{1+t^{r-1}}.$$



Slika 3. Nastanek cisoide stopnje 5.

To pomeni, da smo našli parametrični enačbi cisoide $\mathcal{C}_r$:

$$x(t) = \frac{t^{r-1}}{1 + t^{r-1}}, \quad y(t) = \frac{t^r}{1 + t^{r-1}}. \tag{4}$$

Če vstavimo v prvo enačbo $t = y/x$, dobimo po poenostavitvi enačbo cisoide $\mathcal{C}_r$ še v implicitni obliki:

$$x(x^{r-1} + y^{r-1}) = y^{r-1}. \tag{5}$$

Krivuljo $\mathcal{C}_r$, ki je algebrska krivulja stopnje r, je smiselno imenovati *cisoida stopnje* r. Ker se krivulja $\mathcal{C}_r$ da parametrizirati s parom racionalnih funkcij, jo uvrščamo med racionalne krivulje. Prav tako je krivulja $\mathcal{H}_r$ racionalna.

Cisoida $\mathcal{C}_3$ je cisoida krivulje $\mathcal{H}_3$, ki ni nič drugega kot krožnica z enačbo $x^2 + y^2 = x$, in premice $x = 1$ glede na točko O. Krožnica ima središče v točki $S(1/2, 0)$ in polmer $\varrho = 1/2$. Cisoida $\mathcal{C}_3$ je znana že iz antičnih časov.

Imenuje se *Dioklova cisoida.* Besedo cisoida so začeli uporabljati tudi za krivulje, ki nastanejo na prej opisani cisoidni način z dvema krivuljama glede na neko točko. Beseda *cisoida* izvira iz grške besede *kissós*, kar pomeni *bršljan.* Del kroga med $\mathcal{H}_3$ in cisoido ima namreč obliko bršljanovega lista. Diokles, po katerem se krivulja imenuje, je bil starogrški matematik, ki je z njo znal podvojiti kocko. Spoznali bomo, da se z njo da kocko ne samo podvojiti, ampak tudi potrojiti, početveriti in celo pomnožiti s poljubnim konstruktibilnim številom λ.

Ideja, zakaj za $\mathcal{H}_r$ vzeti ravno krivuljo z enačbo (1), izvira iz enačbe $x^2 + y^2 = x$, ki pomaga konstruirati Dioklovo cisoido. V izrazu $x^2 + y^2$ je eksponent 2, kar je za 1 manj kot 3, to je od razsežnosti običajne kocke, ki jo znamo podvojiti. Na desni strani enačbe pa je eksponent 1, kar je za 2 manj kot 3. Zato smo za naš namen, kot se bo izkazalo, pravilno predvidevali, da sta za r-razsežno hiperkocko res dobra ravno eksponenta $r-1$ in $r-2$ v enačbi (1).

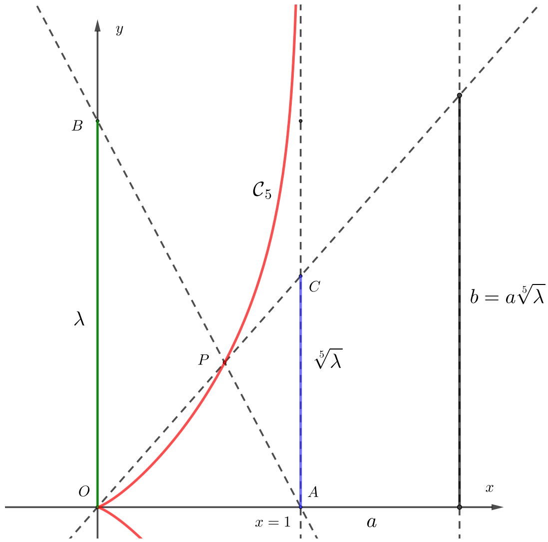
Krivulja $\mathcal{C}_r$ je simetrična glede na os x, definirana je nad intervalom $[0,1)$, poteka tako kot krivulja $\mathcal{H}_r$, skozi točko $O(0,0)$, ki jo doseže pri $t=0$, in skozi točki $D_\pm(1/2,\pm 1/2)$ pri $t=\pm 1$. Ko $|t|$ narašča proti ∞, se x približuje vrednosti 1, y pa gre v ∞. To pomeni, da je premica $x=1$ navpična asimptota krivulje $\mathcal{C}_r$. Iz (4) izračunamo še

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{rt + t^r}{r-1},$$

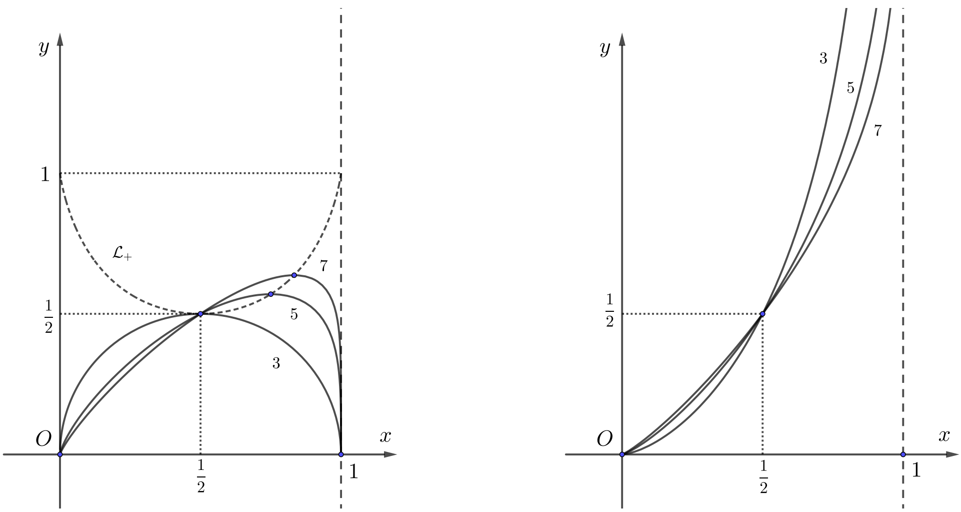
iz česar ugotovimo, da ima cisoida $\mathcal{C}_r$ v točki O, ko je $t=0$, ost z vodoravno tangento, kar na slikah sicer ni očitno.

Pomnožitev hiperkocke

Poglejmo, kako lahko z uporabo cisoide $\mathcal{C}_r$ konstruiramo $\sqrt[r]{\lambda}$. Izberimo na osi y točko $B(0,\lambda)$ in načrtajmo premico skozi A in B. Tu je potrebna konstruktibilnost števila λ, sicer točke B ne bi znali vedno geometrijsko določiti, na primer za $\lambda=\pi$. Poiščimo presečišče P cisoide $\mathcal{C}_r$ s to premico. Če prepišemo (5) v obliko $(1-x)y^{r-1} = x^r$, premico skozi A in B pa izrazimo v obliki $1-x = y/\lambda$, takoj dobimo enačbo $x^r = y^r/\lambda$. Ordinata in abscisa presečišča P sta zato v razmerju $\sqrt[r]{\lambda}$. Premica skozi O in P ima enačbo $y = x\sqrt[r]{\lambda}$ in preseka asimptoto cisoide $\mathcal{C}_r$ v točki $C(1,\sqrt[r]{\lambda})$. S tem smo konstruirali število $\sqrt[r]{\lambda}$, kar omogoča konstruirati še rob $b = a\sqrt[r]{\lambda}$ hiperkocke,



Slika 4. Geometrijska konstrukcija petega korena.



Slika 5. Krivulje $\mathcal{H}_r$ (levo) in $\mathcal{C}_r$ (desno) za $r = 3, 5, 7$ v prvem kvadrantu.

katere prostornina je λa^r. Če izberemo $\lambda = 2, 3, 4, \ldots$, lahko hiperkocko podvojimo, potrojimo, početverimo itd. Na sliki 4 je predstavljen primer za $r = 5$.

Za vsa liha števila $r \geq 3$ lahko torej z uporabo cisoide $\mathcal{C}_r$ konstruiramo $\sqrt[r]{\lambda}$ za vsak pozitiven λ. To omogoča pomnožitev r-razsežne hiperkocke.

Za konec

Lepo se dajo izračunati ploščine likov pod krivuljami $\mathcal{C}_r$ in $\mathcal{H}_r$ nad intervalom $[0,1]$ za $r \geq 3$. Označimo ploščino pod $\mathcal{C}_r$ s P_r, pod $\mathcal{H}_r$ pa s S_r. Izrazimo ju lahko prek Eulerjevih funkcij $\mathbf{\Gamma}$ in $\mathbf{B}$. Za $r \geq 3$ dobimo:

$$P_r = \int_0^1 x^{\frac{r}{r-1}}(1-x)^{\frac{1}{1-r}}\,dx = \frac{1}{2}\mathbf{\Gamma}\left(\frac{2r-1}{r-1}\right)\mathbf{\Gamma}\left(\frac{r-2}{r-1}\right) = \frac{\pi r}{2(r-1)^2 \sin\frac{\pi}{r-1}},$$

$$S_r = \int_0^1 x^{\frac{r-2}{r-1}}(1-x)^{\frac{1}{r-1}}\,dx = \frac{1}{2}\mathbf{\Gamma}\left(\frac{2r-3}{r-1}\right)\mathbf{\Gamma}\left(\frac{r}{r-1}\right) = \frac{\pi(r-2)}{2(r-1)^2 \sin\frac{\pi}{r-1}}.$$

Točke, ki ustrezajo posameznim parametrom t racionalnih krivulj $\mathcal{H}_r$ in $\mathcal{C}_r$, se v načelu da konstruirati evklidsko. Točke krivulje $\mathcal{H}_r$ pa lahko enostavneje konstruiramo evklidsko z uporabo višinskega izreka v pravokotnem trikotniku, cisoide $\mathcal{C}_r$ pa še s podobnostjo trikotnikov, če je r za 1 povečana potenca števila 2, to se pravi, če je $r = 2^n + 1$, kjer je n naravno število, na primer $r = 3, 5, 9, 17$.

Oglejmo si primer $r = 5$. Krivulja $\mathcal{H}_5$ ima enačbo $x^4 + y^4 = x^3$. Konstruirajmo jo po točkah v prvem kvadrantu. Enačbo preuredimo v $y^4 = x^3(1-x)$. Za $0 \leq x \leq 1$ vpeljemo geometrijsko sredino $y_1 = \sqrt{x(1-x)}$ in dobimo $y^4 = x^2 y_1^2$, kar še korenimo: $y^2 = xy_1$. Ordinata y, ki ustreza x, je geometrijska sredina za x in y_1. Geometrijske sredine pa evklidsko realiziramo z višinskim izrekom v pravokotnem trikotniku.

Prav tako delamo s krivuljo $\mathcal{C}_5$, ki ima enačbo $x(x^4 + y^4) = y^4$. Konstruirajmo jo po točkah v prvem kvadrantu. Enačbo preuredimo v $x^6 = y^4 x(1-x)$. Za $0 < x < 1$ vpeljemo geometrijsko sredino $y_1 = \sqrt{x(1-x)}$ in dobimo $x^6 = y^4 y_1^2$ in s korenjenjem še $x^3 = y^2 y_1$. Pomnožimo z x, da dobimo: $x^4 = y^2 x y_1$. Nato vpeljemo geometrijsko sredino $y_2 = \sqrt{xy_1}$ in dobimo $x^4 = y^2 y_2^2$. Korenimo in dobimo $x^2 = yy_2$, kar zapišemo v obliki sorazmerja: $y/x = x/y_2$. Očitno do y pri danem x pridemo z dvakratno uporabo višinskega izreka v pravokotnem trikotniku, sorazmerje pa realiziramo s podobnimi trikotniki in dobimo y.

Kako pa je v primerih $r = 1$ in $r = 2$? Za $0 < x < 1$ dobimo iz (1) v prvem primeru $x^0 + y^0 = x^{-1}$, kar je poenostavljeno isto kot $x = 1/2$, iz (5) pa

$x(x^0+y^0) = y^0$ oziroma $x = 1/2$. Krivulji $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{C}_1$ imata isto enačbo, $x = 1/2$, ki predstavlja premico. Rezultat je v soglasju s konstrukcijo $\sqrt[1]{\lambda} = \lambda$.

Za $r = 2$ in $0 < x < 1$ dobimo za $\mathcal{H}_2$ del premice $x + y = 1$, za $\mathcal{C}_2$ pa del hiperbole $x(x + y) = y$, ki ima asimptoti $x = 1$ in $x + y = -1$ ter središče v točki $(1, -2)$. Točke krivulje $\mathcal{C}_2$ najlaže konstruiramo, če enačbo $x(x+y) = y$ zapišemo najprej v obliki $x^2 = y(1 - x)$, nato pa v obliki sorazmerja $y/x = x/(1 - x)$. Točke krivulje konstruiramo s podobnimi trikotniki. Seveda pa $\sqrt{\lambda}$ najlaže konstruiramo z višinskim izrekom v pravokotnem trikotniku, ne pa s krivuljo $\mathcal{C}_2$.

Če je r sodo število, sta krivulji (1) in (5) »grši« kot za lihi r, sta brez simetrije in segata v področja zunaj pasu $(0, 1) \times \mathbb{R}$. Edino v prvem kvadrantu lepo potekata med ustreznima krivuljama za $r - 1$ in $r + 1$.

Kot zanimivost poglejmo, kaj se zgodi, če v enačbi (1) za r formalno dopustimo katerokoli celo število in opazujemo ustrezne krivulje $\mathcal{H}_r$ in $\mathcal{C}_r$ nad intervalom $(0, 1)$ v prvem kvadrantu. Če nadomestimo r z $2 - r$ v (1), dobimo

$$x^{1-r} + y^{1-r} = x^{-r}.$$

Množenje obeh strani te enačbe s faktorjem $x^r y^{r-1}$ nas privede do

$$x(x^{r-1} + y^{r-1}) = y^{r-1}.$$

Formalno to pomeni enakost $\mathcal{H}_{2-r} = \mathcal{C}_r$.

LITERATURA

[1] P. Eymard in J.-P. Lafon, *The number π*, AMS, Providence, Rhode Island, 2004.

[2] D. Haftendorn, *Kurven erkunden und verstehen*, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017.

[3] T. Heath, *A history of Greek mathematics*, Vol. 2, Dover Publications, New York, 1981.

[4] J. D. Lawrence, *A catalog of special plane curves*, Dover Publications, New York, 2014.

[5] G. E. Martin, *Geometric constructions*, Springer, New York, 1998.

[6] U. C. Merzbach in C. B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2011.

[7] A. Ostermann in G. Wanner, *Geometry by its history*, Springer, Heidelberg, 2012.

[8] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.