Uporaba virialnega teorema v astrofiziki

Krištof Skok

V eni od prejšnjih številk Preseka ste bralci spoznali virialni teorem in njegovo izpeljavo. Predstavili smo primer izračuna astronoma Fritza Zwickya, da mora biti gostota mase v jati galaksij v Berenikinih kodrih veliko večja, kot so kazale meritve. Tokrat si poglejmo še več primerov uporabe virialnega teorema, ki bodo koristila srednješolcem za pripravah na mednarodna tekmovanja iz znanja astronomije in tudi fizike.

Virialni teorem uporabimo za sisteme več delcev ali teles, ki so vezani. To pomeni, da jih skupaj veže sila, najpogosteje gravitacijska; deli sistema nimajo zadosti energije, da bi sistem zapustili in postali prosti. Sistem mora biti v statističnem ravnovesju. Ravnovesje si po navadi zamislimo kot izenačenje sil med telesi, tako da deli sistema mirujejo. Denimo, da na vzmetno tehtnico postavimo vrečo krompirja. Teža krompirja potiska ploščo tehtnice navzdol, sila skrčene vzmeti potiska krompir navzgor; ker sta sili nasprotno enaki, tehtnica in vreča krompirja mirujeta. Lahko pa vrečo vržemo na tehtnico in ta zaniha. Recimo, da ni nobenega trenja ali dušenja; tehtnica tako niha, perioda in amplituda nihanja se ne spreminjata. Ta sistem ne miruje, a ko ga opazujemo dlje časa, opazimo, da se statistično ne spreminja. Gibanje krompirja se ponavlja na enak način ves čas, njegova povprečna lega in deviacija se ne spreminjata. Podobno si lahko predstavljamo vesoljski sistem v statističnem ravnovesju. Galaksije v jati ali zvezde kopici neprenehoma frčijo po prostoru, a težišče, deviacija hitrosti, skupna energija in vztrajnostni moment celotnega sistema so konstantni.

Kroglasta kopica

Kroglaste kopice so skupine zvezd, ki jih medsebojni gravitacijski privlak povezuje v zaključeno krogelno obliko. Gre za zelo stare strukture, po več milijard let, ki vsebujejo na sto tisoče ali milijone zvezd. Tipični polmeri kopic so nekaj parsekov ali nekaj deset parsekov. Zvezde so tako nagnetene, da središčnih predelov kopic ne moremo razločiti, le proti robu kopice vidimo posamezne zvezde. Pri opazovanjih dinamike zvezd lahko izmerimo le njihovo radialno komponento hitrosti iz Dopplerjevega premika, tj. komponento vektorja hitrosti v smeri pogleda oziroma projekcijo na zveznico med nami in zvezdo. Sveže astrometrične meritve misije Gaia so nam odprle novo okno v vesolje, saj so opazovanja tega vesoljskega observatorija dovolj natančna, da imamo na voljo veliko podatkov o gibanjih zvezd v naši Galaksiji v prečni smeri. Gibanje posameznih zvezd je kompleksno, zato ne moremo točno izračunati kinetične in potencialne energije kopice, lahko pa naredimo dobro oceno. Najprej se lotimo kinetične energije. V kopici imamo N zvezd z masami m_i, legami $\mathbf{r}_i$ in hitrostmi $\mathbf{v}_i$. Paziti moramo na razliko med $\mathbf{v}_i$ in v_i, prvo je vektor hitrosti i-tega delca, drugo pa velikost vektorja. Masa celotne kopice je $M = \sum_i m_i$. Ta zapis vsote pomeni, da seštevamo po vseh možnih vrednostih indeksa i, torej od 1 do N. Potemtakem velja

$$\langle K \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_i m_i \langle v_i^2 \rangle. \qquad (1)$$

Ker je število zvezd kopice res veliko ($N \approx 10^6$), lahko rečemo, da so hitrosti porazdeljene po neki zvezni porazdelitvi. Prav tako velja za posamezne komponente hitrosti, v_x, v_y, v_z. Kako so koordinatne osi postavljene, je povsem poljubno, saj nimamo preferenčne smeri gibanj zvezd, ampak se te gibljejo v vse smeri. Recimo, da je os x usmerjena proti opazovalcu, tako da je radialna hitrost $v_r = v_x$. Koordinatno izhodišče pa je samoumevno v težišču kopice. Kopica se giblje tudi po prostoru, po navadi na zelo velikih oddaljenosti od središča Galaksije, nekaj deset kiloparsekov. Hitrost kopice naj bo sistemska hitrost z vektorjem $\mathbf{v}_{sis}$, njena radialna komponenta pa $v_{sis,r}$. Če pomerimo radialne hitrosti vseh zvezd, bo povprečje ravno $v_{sis,r}$. To povprečno vrednost moramo odšteti od vseh radialnih hitrostih zvezd, kajti virialni teorem smo izpeljali v (lastnem) koordinatnem sistemu obravnavanega sistema. Ker se zvezde gibljejo v vse mogoče smeri, bodo ene izmerjene radialne hitrosti večje od $v_{sis,r}$, druge pa manjše, torej bodo po odštevanju $v_{sis,r}$ razpršene okoli ničle. To razpršenost opišemo s standardno deviacijo σ_x. Poimenujmo jo z indeksom x, ker smo rekli, da je radialna smer vzdolž x osi. Kvadrat standardne deviacije radialnih hitrosti v lastnem sistemu je varianca, ki je

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_i (v_{r,i} - \overline{v}_r)^2 = \frac{1}{N}\sum_i v_{r,i}^2 = \overline{v_r^2} = \overline{v_x^2}. \quad (2)$$

Prvi izraz je definicija variance, v drugem smo upoštevali, da je $\overline{v}_r = 0$, saj smo od radialnih hitrosti že odšteli sistemsko radialno hitrost. Ker razmišljamo ves čas v duhu, da potujejo zvezde v vse smeri, velja $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2$. Vrnimo se k naši oceni kinetične energije, k enačbi 1. $\langle v_i^2\rangle$ je časovno povprečje kvadrata hitrosti ene zvezde. Gibanja ene zvezde ne moremo spremljati toliko časa, da bi izračunali povprečje po času; opazovanja nam dajo le stanje kopice v določenem trenutku. Kar pa lahko storimo, je da izračunamo povprečje vseh zvezd $\overline{v^2}$ in privzamemo, da je enako kot časovno povprečje ene zvezde, $\langle v_i^2\rangle = \overline{v^2}$. Velja $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2} = 3\sigma_x^2$. Končno lahko izračunamo povprečno kinetično energijo kot

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2}\sum_i m_i\langle v_i^2\rangle = \frac{1}{2}\sum_i m_i\overline{v^2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i 3\sigma_x^2 = \frac{3}{2}M\sigma_x^2. \quad (3)$$

Potencialna energija para delcev (točkastih teles) i in j je $U_{ij} = -\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}$, kjer je G gravitacijska konstanta, m_i ter m_j sta masi delcev in r_{ij} je razdalja med njima. Zvezde res niso točkasta telesa, a kaj pravzaprav to pomeni? Točkasto telo je telo, katerega velikost ni pomembna za obravnavani problem. Enako velja v kroglasti kopici, razdalje med zvezdami so mnogo večje od njihovih velikosti, zato lahko računamo z enačbo za potencialno energijo dveh točkastih teles. Potencialna energija kopice je $U = \sum_i\sum_j U_{ij}$, kar lahko ocenimo na podlagi razmisleka. Kroglasta kopica je krogla s polmerom R. Zvezde so posejane po prostornini te krogle in njihove medsebojne razdalje so od skoraj nič do kvečjemu $2R$. Recimo, da je povprečna razdalja med dvema poljubnima zvezdama kar R. Lahko da je povprečje $0{,}7\,R$, $0{,}92R$ ali pa tudi $1{,}2R$, a vsakem primeru reda velikosti R. Hočemo priti le do približne ocene za energijo. Velja

$$\langle U\rangle = -\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\left\langle\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}\right\rangle \approx -\frac{G}{2R}\sum_i\sum_j m_im_j = -\frac{GM^2}{2R}. \quad (4)$$

Dobili smo dva preprosta izraza za kinetično in potencialno energijo, ki ju lahko uporabimo v virialnem teoremu in izračunamo maso kopice M. Seveda, ostali dve količini poznamo. σ_x je disperzija radialnih hitrosti, ki jo pridobimo s spektroskopskimi opazovanji, polmer kopice R pa tudi poznamo, ker lahko izmerimo kotno velikost in oddaljenost kopice. Računajmo:

$$2\langle K\rangle + \langle U\rangle = 0$$
$$2\frac{3}{2}M\sigma_x^2 - \frac{GM^2}{2R} = 0$$
$$M = \frac{6\sigma_x^2 R}{G}$$

Če vzamemo podatke za kroglasto kopico M 71 [2, 3], dobimo $\sigma_x = 3{,}21$ km/s, polmer kopice je 4,19 pc, kar nam da $M \approx 10^4 \mathrm{M}_\odot$. Rezultat se dobro ujema z natančnejšimi meritvami, ki dajo vrednost $1{,}7\cdot 10^4\mathrm{M}_\odot$.

Nižanje orbite satelita

Po virialnem teoremu velja $2K + U = 0$, ter $E = K + U = -K = -\frac{1}{2}U$. Enaka zveza pa velja za spremembe energije $\Delta E = \Delta K + \Delta U = -\Delta K = -\frac{1}{2}\Delta U$ ter $2\Delta K + \Delta U = 0$. Poglejmo si, kaj se dogaja z →

umetnim satelitom, ki kroži blizu Zemlje, in nanj deluje zračni upor, zato satelit počasi izgublja energijo. Potencialna energija satelita je $U = -\frac{GMm}{r}$, pri čemer je M masa Zemlje, m masa satelita in r polmer njegove krožne orbite. Manjši kot je polmer orbite, nižja je energija. To pomeni, da je satelit bolj vezan na Zemljo. Ko enačimo centripentalno silo kroženja $F_c = \frac{mv^2}{r}$ z gravitacijsko silo Zemlje $F_g = \frac{GMm}{r^2}$, lahko izpeljemo krožilno hitrost $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. Kinetična energija satelita je $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$. Seveda, saj mora biti po virialnem teoremu $K = -\frac{1}{2}U$. Celotna mehanska energija satelita je $E = K + U = -\frac{GMm}{2r}$. Rekli smo, da satelit izgublja energijo zaradi zračnega upora, torej postane E manjša, kar pomeni, da se njena absolutna vrednost $|E|$ poveča, ker ima sama energija E negativen predznak. Da pa je $|E| = \frac{GMm}{2r}$ večje, se mora r zmanjšati. A potem se krožilna hitrost v poveča in s tem tudi kinetična energija. Torej satelit kroži po vse nižjih orbitah z vse višjo hitrostjo! Čeprav se celotna energija E zmanjša, se kinetična K poveča. Tako, kot pravi virialni teorem, je ΔE negativna, torej mora biti $\Delta K = -\Delta E$ pozitivna. Nižje kot je satelit, gostejša je atmosfera in večji zračni upor, zato se satelit še hitreje približuje Zemlji. Tako imamo pozitivno povratno zanko, zaradi katere satelit na koncu zgori v ozračju. Delujoče satelite spremljajo operaterji na Zemlji in seveda ne dopustijo, da bi se kaj takega prehitro zgodilo. Od časa do časa prižgejo motorje na plovilu in dvignejo njegovo orbito.

Eliptična orbita

V prejšnjem poglavju smo obravnavali umetni satelit na krožni orbiti, za katerega so izrazi za energije enostavni, in kar je pomembneje, neodvisni od časa. Ni nam bilo treba razmišljati, kaj je časovno povprečje potencialne energije satelita, ker kroži na fiksni orbiti in je potencialna energija konstanta. Za konec pa si oglejmo drugačen primer. Planeti, kometi in asteroidi v Osončju potujejo po elipsah. Oddaljenost od Sonca in hitrost telesa se spreminjata v času, zato ne moremo enostavno vstaviti trenutnih energij v virialni teorem, ampak časovna povprečja. Z malo ponovitve orbitalne mehanike in telovadbe z diferencialnim računom bomo v naslednjih vrsticah izračunali povprečno potencialno energijo telesa na eliptični orbiti.

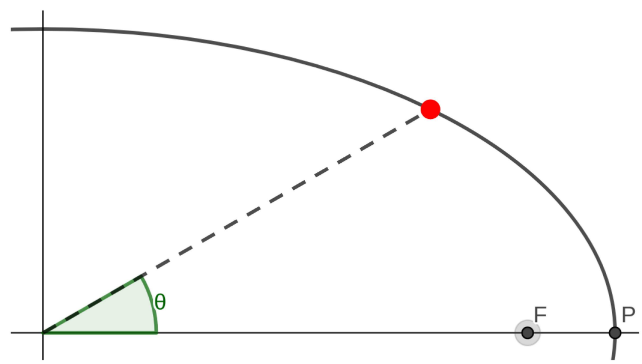
Telo, ki kroži okoli Sonca, obravnavamo kot točkasto telo in njegovo potencialno energijo zapišemo kot

$$U = -\frac{GMm}{r}, \tag{5}$$

pri čemer je G gravitacijska konstanta, M masa Sonca, m masa telesa in r njegova oddaljenost težišča Sonca. Obliko eliptične orbite opredeljujeta dva parametra, velika polos a, ki podaja velikost elipse, in ekscentričnost e. Razdalja med goriščem in središčem elipse je ea. Če je $e = 0$, imamo krožnico. Večja kot je ekscentričnost, bolj je elipsa »raztegnjena«. Lego telesa na orbiti podaja kot ϑ, ki mu rečemo prava anomalija. To je kot med zveznicama telo-Sonce in perihelij-Sonce. Perihelij pa je točka orbite, kjer je telo najbližje Soncu in njena oddaljenost je $d_p = a(1 - e)$, glej sliko 1. Najbolj oddaljena točka je afelij, $d_a = a(1 + e)$. S parametri a, e in ϑ lahko izračunamo razdaljo krožečega telesa od Sonca kot funkcijo prave anomalije:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\vartheta}. \tag{6}$$

Kako pa dobimo hitrost za poljubno točko na orbiti? Najlažje iz energijskega zakona, ker vemo, da



SLIKA 1.
Shema orbite kometa 2P/Encke, ki ima veliko polos 2,22 astronomske enote in ekscentričnost 0,8471. Točka F označuje gorišče elipse, P perihelij, rdeča točka je komet, z zeleno pa je označena prava anomalija.

je celotna mehanska energija $E = -\frac{GMm}{2a}$:

$$
\begin{aligned}
E &= K + U \\
-\frac{GMm}{2a} &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \\
\frac{1}{2}v^2 &= GM\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{a}\right) \\
v &= \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Enačbo v zadnji vrstici imenujemo vis-viva enačba.

Ker želimo dobiti $\langle U\rangle$, moramo najprej izračunati $\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle$. Pozor, ni nujno, da je povprečje obratne vrednosti kar obratna vrednost povprečja spremenljivke, $\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle \neq \frac{1}{\langle r\rangle}$. Ker je gibanje periodično s periodo t_0, lahko izračunamo časovno povprečje kot

$$\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0}\frac{1}{r}\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Ker ne poznamo r kot funkcijo časa, moramo to spremenljivko v integralu zamenjati s pravo anomalijo. Pomagajmo si z vrtilno količino, ki je definirana kot

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}\times\mathbf{v} = J\boldsymbol{\omega}. \tag{9}$$

L je konstanta gibanja, kar pomeni, da se s časom ne spreminja. To je jasno, ker ni nobenih zunanjih navorov, ki bi vplivali na krožeče telo. J je vztrajnostni moment, ki je za točkasto telo $J = mr^2$. Velikost kotne hitrosti je $\omega = \dot{\vartheta}$, tj. časovni odvod prave anomalije. Diferencial prave anomalije je povezan z diferencialom časa kot

$$\mathrm{d}\vartheta = \dot{\vartheta}\,\mathrm{d}t = \omega\,\mathrm{d}t = \frac{L}{mr^2}\,\mathrm{d}t\,, \tag{10}$$

kar izkoristimo v integralu v enačbi 8

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle &= \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0}\frac{1}{r}\mathrm{d}t = \frac{1}{t_0}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\frac{mr^2}{L}\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{m}{Lt_0}\int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\vartheta\,.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Iz enačbe 10 smo izrazili $\mathrm{d}t$ in ga vnesli v enačbo 8. Ker ne integriramo več po času ampak po pravi anomaliji, smo zamenjali integracijske meje. Ko je čas 0, je tudi anomalija 0, in ko preteče perioda kroženja t_0, telo naredi eno orbito in se anomalija poveča za 2π. V zadnji integral vstavimo izraz za r iz enačbe 6 in računamo

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle &= \frac{ma\left(1-e^2\right)}{Lt_0}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{1+e\cos\vartheta} \\
&= \frac{ma\left(1-e^2\right)}{Lt_0}\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}} \\
&= ma\sqrt{1-e^2}\,\frac{2\pi}{t_0}\frac{1}{L}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Vrednost integrala prepišemo iz matematičnega priročnika. V zadnjem izrazu imamo $\frac{2\pi}{t_0}$, kar je po tretjem Keplerjevem zakonu $\sqrt{\frac{G(M+m)}{a^3}} \approx \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$. Kar še potrebujemo, je vrednost za vrtilno količino. Ker je konstanta gibanja, jo lahko izračunamo v katerikoli točki orbite. Najprikladnejše je v periheliju:

$$
\begin{aligned}
L &= md_pv_p = md_p\sqrt{GM\left(\frac{2}{d_p} - \frac{1}{a}\right)} \\
&= ma\,(1-e)\sqrt{GM\left(\frac{2}{a\,(1-e)} - \frac{1}{a}\right)} \\
&= ma\,(1-e)\sqrt{GM\frac{1+e}{a\,(1-e)}} \\
&= m\sqrt{GMa\left(1-e^2\right)}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Sedaj lahko končno izračunamo časovno povprečje obratne vrednosti r:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle &= ma\sqrt{1-e^2}\,\frac{2\pi}{t_0}\frac{1}{L} \\
&= ma\sqrt{1-e^2}\sqrt{\frac{GM}{a^3}}\frac{1}{m\sqrt{GMa\left(1-e^2\right)}} = \frac{1}{a}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Toliko računanja za tako enostaven rezultat! Časovno povprečje potencialne energije je tako enake oblike kot potencialna energija telesa na krožni orbiti s polmerom a:

$$\langle U\rangle = \left\langle -\frac{GMm}{r}\right\rangle = -GMm\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle = -\frac{GMm}{a}. \tag{15}$$

SLIKA 2.
Kroglasta kopica NGC 1466, kot jo je posnel vesoljski teleskop Hubble. Foto: ESA, NASA

Izračunajmo še časovno povprečje kinetične energije. Ker poznamo vis-viva enačbo (zadnja vrstica iz 7), je to enostavno:

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2}m\left\langle v^2\right\rangle = \frac{1}{2}GMm\left(\left\langle\frac{2}{r}\right\rangle - \frac{1}{a}\right) = \frac{GMm}{2a}. \tag{16}$$

In kot vidimo, ponovno velja $2\langle K\rangle + \langle U\rangle = 0$.

Literatura

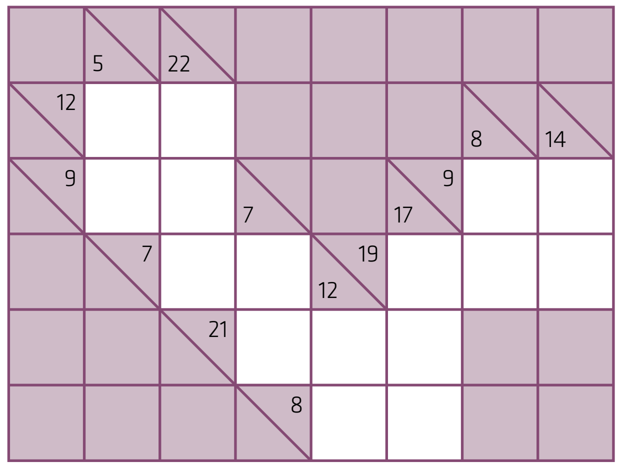
[1] B. W. Carroll, D. A. Ostlie, *Introduction to modern stellar astrophysics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1996.

[2] *Messier 71*, dostopno na `en.wikipedia.org/w/index.php?title=Messier_71&oldid=961065192`, ogled 22. marca 2022.

[3] *Using the virial theorem: mass of a globular cluster*, dostopno na `spiff.rit.edu/classes/phys440/lectures/glob_clus/glob_clus.html`, ogled 22. marca 2022.

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



REŠITEV KRIŽNE VSOTE