PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **21** (1993/1994)
Številka 2
Strani 82–85

Bogdan Kejžar:

EULERJEVA FUNKCIJA φ

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/21/1169-Kejzar.pdf

EULERJEVA FUNKCIJA φ

Govorili bomo o funkciji iz teorije števil, ki nosi ime velikega matematika Eulerja. Leonhard Euler je živel v 18. stoletju in je delal ter ustvarjal na vseh področjih uporabne in teorijske matematike. Sodi med najplodnejše matematike vseh časov.

Eulerjeva funkcija φ preslikuje naravna števila v naravna števila. Vrednost funkcije pri danem naravnem številu n je definirana takole: Med števili 1, 2, 3, ... n poiščemo vsa z n tuja števila, jih preštejemo in rezultat je $\varphi(n)$.

Torej, vrednost $\varphi(n)$ nam pove, koliko je pod n števil, ki so tuja z n.

Navedimo nekaj primerov: $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(7) = 6$ in $\varphi(10) = 4$, saj so števila 1, 3, 7 in 9 tuja z 10.

Naloga 1. *Izračunaj* $\varphi(5)$, $\varphi(8)$, $\varphi(17)$ *in* $\varphi(18)$.

Sedaj pa izračunajmo še $\varphi(40)$. Število 40 razstavimo na praštevila: $40 = 2^3 \cdot 5$. To nam pove, da je neko število tuje s 40, če ni deljivo niti z 2 niti s 5. Med števili 1, 2, 3, ... 40 jih je polovica (vsako drugo število), to je 20, deljivih z 2. Vsako peto število po vrsti je deljivo s 5, zato jih je petina (torej 8) deljivih s 5. Štiri števila pa so deljiva z 2 in s 5 hkrati, saj je vsako deseto število po vrsti deljivo z 2 in s 5. Zato je $20 - 4 = 16$ števil deljivih samo z 2 in ne s 5, $8 - 4 = 4$ pa je deljivih s 5 in ne z 2. Torej je s 5 ali z 2 (vsaj z enim od teh dveh števil) deljivih natanko $16 + 4 + 4 = 24$ števil. Zato je $\varphi(40) = 40 - 24 = 16$.

Naloga 2. *Izračunaj* $\varphi(55)$ *in* $\varphi(63)$.

Vrednost $\varphi(315)$ pa izračunajmo skupaj. Najprej število 315 razstavimo na produkt samih praštevil: $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Razcep nam pove da je neko število tuje s 315 natanko tedaj, ko ni deljivo z nobenim od števil 3, 5 in 7. Vrednost $\varphi(315)$ bomo poiskali tako, da bomo med števili 1, 2, 3, ... 315 "prečrtali" najprej vsa števila, ki so deljiva s 3, nato med preostalimi še neprečrtanimi vsa tista, ki so deljiva s 5, in končno še vsa, ki so deljiva s 7. Ostala bodo samo še števila tuja s 315.

Ko med števili 1, 2, 3, ... 315 prečrtamo števila, ki so deljiva s 3, to so števila $1 \cdot 3$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 3$, ... $\frac{315}{3} \cdot 3$, ostane še

$$315 - \frac{315}{3} = 315 \cdot (1 - \frac{1}{3})$$

števil.

Sklep 1. *Če med prvimi 315 števili prečrtamo vsa s 3 deljiva števila, potem ostane še* $315 \cdot (1 - \frac{1}{3})$ *neprečrtanih števil.*

Preštejmo, koliko je v tem ostanku števil, ki so deljiva s 5. Vsa števila (med prvimi tristo petnajstimi) deljiva s 5 so $1 \cdot 5$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, ... $\frac{315}{5} \cdot 5$. Med temi števili so bila v prvem koraku prečrtana vsa s 3 deljiva števila. To je natanko toliko števil, kolikor je med števili 1, 2, 3, ... $\frac{315}{5}$ takih, ki jih 3 deli. Ostalo je torej še (glej **Sklep 1.** - namesto 315 vzameš $\frac{315}{5}$) $\frac{315}{5} \cdot (1 - \frac{1}{3})$ števil deljivih s 5. Prečrtamo še ta in ostane

$$315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) - \frac{315}{5} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5})$$

števil.

Sklep 2. *Ko med prvimi 315 števili prečrtamo vsa števila, ki so deljiva s 3 ali s 5, ostane še* $315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5})$ *števil.*

Sedaj pa poglejmo, koliko večkratnikov števila 7 moramo še prečrtati. Med prvimi tristopetnajstimi števili so deljiva s 7 naslednja: $1 \cdot 7$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 7$, ... $\frac{315}{7} \cdot 7$. V prvih dveh korakih smo med temi števili prečrtali vsa števila deljiva s 3 in s 5. Med njimi je ostalo še (**Sklep 2.**) natanko $\frac{315}{7} \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5})$ neprečrtanih števil. Ko prečrtamo še ta, nam ostane

$$315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) - \frac{315}{7} \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) = 315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) \cdot (1 - \frac{1}{7})$$

števil. Ta števila so tuja s 315 in zato je

$$\varphi(315) = 315 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) \cdot (1 - \frac{1}{7}) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = 144.$$

Naloga 3. *Podobno kot zgoraj izračunaj* $\varphi(1000)$, $\varphi(1001)$ *in* $\varphi(770)$.

Razstavimo število n na produkt različnih praštevilskih potenc:

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdots p_k^{e_k}.$$

S pomočjo tega razcepa izračunajmo $\varphi(n)$. Najprej med števili 1, 2, 3, ... n odvržemo vsa, ki so deljiva s p_1. Ostane še

$$n - \frac{n}{p_1} = n(1 - \frac{1}{p_1})$$

števil. Sedaj med preostalimi odvržemo tista, ki so deljiva s p_2 in niso hkrati deljiva s p_1. Števila, ki so deljiva hkrati s p_1 in s p_2, smo odvrgli že na prejšnem koraku. Tako nam po drugem koraku ostane še

$$n(1 - \frac{1}{p_1}) - \frac{n}{p_2}(1 - \frac{1}{p_1}) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})$$

števil.

Med preostalimi števili nato odvržemo tista števila, ki so deljiva s p_3. To so natanko tista števila med števili 1, 2, 3, ... n, ki so deljiva s p_3 in niso deljiva niti s p_1 niti s p_2. Ostane še

$$n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) - \frac{n}{p_3}(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})(1 - \frac{1}{p_3})$$

števil. Ta postopek nas po k korakih, ko nam ostanejo samo še z n tuja števila, pripelje do formule:

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})(1 - \frac{1}{p_3}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k}).$$

Ob upoštevanju razcepa števila n na prafaktorje lahko to formulo zapišemo tudi nekoliko drugače:

$$\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1) p_1^{e_1 - 1} \cdots p_k^{e_k - 1}.$$

Naloga 4. *S pomočjo pravkar izpeljane formule preveri rezultate, ki si jih dobil pri prejšnih nalogah.*

Naloga 5. *Dokaži, da velja*

$$\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1)\varphi(n_2),$$

če sta števili n_1 in n_2 med seboj tuji.

Za bralce, ki poznajo osnove verjetnostnega računa, dodajmo še nalogo, ki jim bo razkrila še eno razlago formule za $\varphi(n)$.

Naloga 6. *Izračunaj verjetnost dogodka, da na slepo izbereš iz množice prvih n naravnih števil število, ki je tuje z n.*

Bogdan Kejžar