Širokokotni objektivi in deformacije teles

Peter Legiša

Ko je moja prateta praznovala stoletnico, so sorodniki priredili slovesnost z velikim številom povabljenih. Na koncu je bilo treba seveda narediti »gasilsko« sliko ob vhodu na borjač, saj je bilo znotraj ograjenega dvorišča premalo prostora. Tudi zunaj borjača se v kraški vasi fotografi nismo mogli kaj dosti odmakniti od množice. Ljubiteljski fotografi navadno nimamo dovolj avtoritete, da bi lahko optimalno razporedili ljudi. Tako so se prisotni razporedili nekoliko po svoje. S širokokotnim objektivom jih ni bilo težko zajeti, a ob pregledu na računalniku se je pokazala težava. Dve osebi, ki sta se postavili povsem zase na robu slike, sta bili grdo raztegnjeni v vodoravni smeri, tako da nad sliko ne bi bili ravno navdušeni. Stavbe v ozadju pa so bile upodobljene praktično brezhibno – okna tudi na robu niso bila raztegnjena.

V resnici sem čudne deformacije oseb na robu vidnega polja širokokotnega objektiva srečal že prej, a temu nisem posvečal pozornosti. Literatura ([1], str. 220–221) in zapisi na internetu [2] povedo, da je problem v tem, da ljudje nismo ploščati. Podobno ali še bolj bi se na robu raztegnile slike, denimo, navpičnih stebrov. Privzemimo, da je naša kamera vodoravno poravnana. Na sliki 1 si lahko ogledamo, kako objektiv v horizontalni ravnini skozi središče O objektiva »vidi« steber v obliki valja s polmerom r, katerega os stoji v ravnini Φ. Ta navpična ravnina je vzporedna ravnini senzorja aparata in oddaljena za a od optičnega središča O objektiva. Na sliki 1 se ta ravnina projicira v premico skozi M in točko S, ki leži v osi stebra. Sam steber je na sliki 1 viden kot krožnica s središčem S in s polmerom r. Objektiv vidi in upodobi steber kot navpični pas (v ravnini Φ), ki sega od točke A do točke B. Že $|AS|$ je večji od r, še toliko bolj pa $|SB|$. To je pač ta neprijetni učinek, ki ga imenujejo tudi *deformacija teles* (angleško *volume deformation*). Izračunajmo razdaljo $|AB|$ in jo primerjajmo z $2r$.

Na sliki 1 smo s φ označili kot $\angle SOM$ in z 2ω kot, pod katerim vidimo vodoravni prerez stebra iz točke O.

V nadaljevanju nam bosta prišli prav dve približni formuli. Trdimo, da je za število h, ki je blizu 0,

$$\frac{1}{1-h} \approx 1+h. \tag{1}$$

Res, $(1-h)(1+h) = 1-h^2 \approx 1$. Če je namreč h blizu 0, je $h^2 = hh$ še toliko bliže 0. Fiziki bi rekli, da je h^2 zanemarljiv (v primerjavi s h). Npr., če je $h = 0{,}1$, je $h^2 = 0{,}01$. Manjša je razdalja števila h od 0, bolj točna je ta približna enakost. Vsekakor približna formula daje malenkost premajhne rezultate, saj produkt ni ena, ampak nekaj manj, npr. $1 : 0{,}98 \approx 1{,}02$. Točni rezultat je 1,0204...

Podobno vidimo, da je za h blizu 0:

$$\sqrt{1+h} \approx 1+\frac{h}{2}. \tag{2}$$

Res,

$$\left(1+\frac{h}{2}\right)^2 = 1+h+\frac{h^2}{4} \approx 1+h. \tag{3}$$

Vidimo, da približna formula (2) daje malce prevelik rezultat, saj je v (3) leva stran natančno koren srednjega izraza, ta izraz pa je nekoliko večji od $1+h$, npr. $\sqrt{1{,}03} \approx 1{,}015$. Točni rezultat je 1,014889...

Če še ne poznate kotnih funkcij sinus, kosinus, tangens, lahko večino naslednjih formul preskočite in vsaj nekatere številske rezultate preverite s kotomerom in ravnilom.

Iz pravokotnega trikotnika OMS na sliki 1 vidimo, da je $|OS|\cos\varphi = a$, iz pravokotnega trikotnika OT_1S pa, da je $|OS|\sin\omega = r$. Od tod je

$$\sin\omega = \frac{r}{a}\cos\varphi, \quad \cos\omega = \sqrt{1-\sin^2\omega}.$$

Označimo

$$q = \frac{r^2}{a^2} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad \text{in} \quad y = \cos^2\varphi,$$

pa je

$$\cos\omega = \sqrt{1-qy}. \qquad (4)$$

Seveda je $0 \le y < 1$. Privzeli bomo tudi, da je $r < a$, torej $0 < q < 1$.

Velja, da je $\angle AST_1 = \varphi-\omega$ in $|AS|\cos(\varphi-\omega) = r$ in podobno $\angle BST_2 = \varphi+\omega$, zato $|BS|\cos(\varphi+\omega) = r$. Tako je

$$|AB| = \frac{r}{\cos(\varphi-\omega)} + \frac{r}{\cos(\varphi+\omega)}.$$

Če je ω majhen v primerjavi s φ, je torej

$$|AB| \approx \frac{2r}{\cos\varphi}.$$

Če je φ blizu 0, je $\cos\varphi$ blizu 1 in je razteg majhen. Za $\varphi = 45^\circ$ je $1/\cos\varphi = \sqrt{2}$ in se na sliki steber raztegne za več kot 40 odstotkov v primerjavi z ozadjem.

Veliki senzor »full frame« fotoaparata – ti so zdaj postali cenovno dostopni tudi navdušenim amaterjem – meri približno toliko kot nekdaj sličica na 35 milimetrskem filmu, se pravi približno $u = 36$ mm $\times$ $v = 24$ mm. Za objektiv z goriščno razdaljo $|ON| = f = 16$ mm lahko maksimalni φ določimo s slike 2: $\operatorname{tg}\varphi = (u/2) : f = u/2f = |UN|/|NO| = 18 : 16$, od tod $\varphi = \operatorname{arctg}(9/8) \approx 48^\circ$. Iz

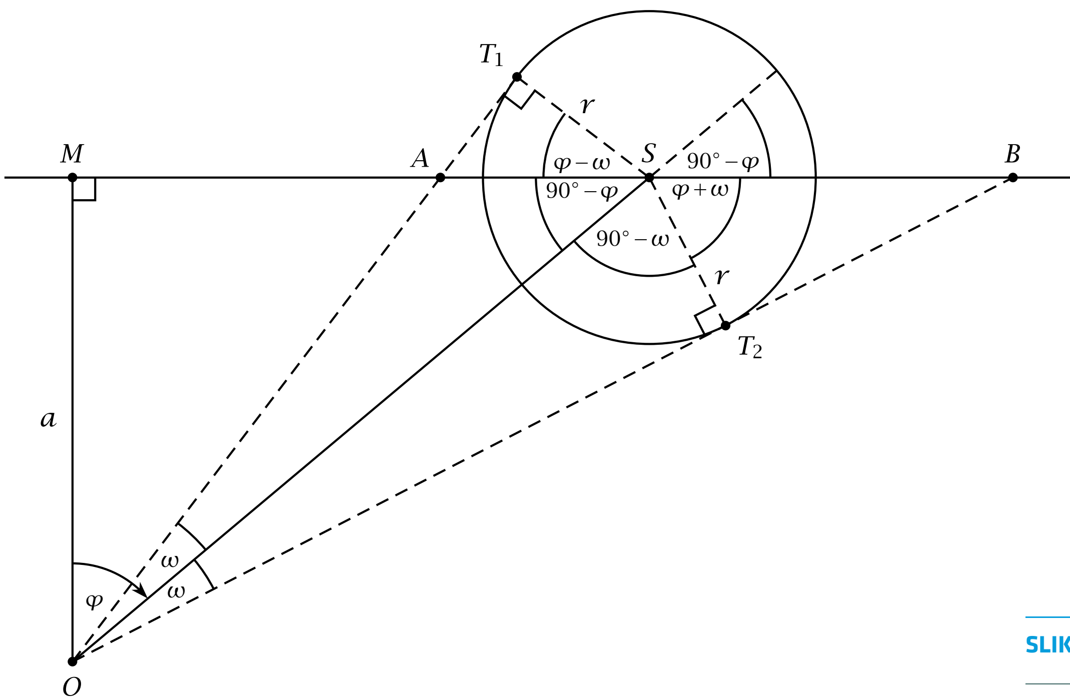
$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1 + \frac{81}{64} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

je

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{145}}{8} \approx \frac{12}{8} = 1{,}50.$$

(Mimogrede, z (2) lahko brez računala izračunamo $\sqrt{145}$ precej natančno:

$$\sqrt{145} = \sqrt{12^2+1} = 12\sqrt{1+\frac{1}{12^2}} \approx 12\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12^2}\right) = 12 + \frac{1}{24} \approx 12{,}04.$$



SLIKA 1.

Za naše namene taka natančnost seveda ni potrebna.)

Deformacije valjev na robu so res hude – razteg v vodoravni smeri za kakih 50 odstotkov. Po drugi strani lahko s takim objektivom iz vogala sobe zajamemo celoten prostor: 48 stopinj desno in 48 stopinj levo, skupaj 96 stopinj v vodoravni smeri.

Za profesionalce obstajajo dragi fiksni in tudi zoom objektivi s še nekoliko manjšo goriščno razdaljo. Za zrcalno refleksne aparate znamk Canon, Nikon z velikim senzorjem je minimum pri originalnih objektivih trenutno 14 mm in temu odgovarja kot vodoravnega zajema $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(9/7) \approx 52°$ desno od osi aparata (in ravno toliko levo). Tu moramo računati s še večjimi deformacijami prostorskih objektov – za vajo faktor raztega na robu izračunajte sami. (Mimogrede, krožijo govorice, da se bo pojavil objektiv z minimalno goriščno razdaljo 11 mm!) Ti objektivi, še posebno tisti s fiksno goriščno razdaljo, pa vseeno ravne črte upodobijo bolj ali manj kot ravne

črte. Ne smemo jih mešati z objektivi tipa *ribje oko*, ki močno ukrivijo ravne črte ob robu, da bi na sliko spravili, kar se da veliko območje.

Na koncu izračunajmo še razteg za »normalni« objektiv, ki ima (pri senzorju velikosti 36 × 24 mm) goriščno razdaljo $f = 50$ mm. Tu za maksimalni φ velja $\operatorname{tg}\varphi = 18 : 50 = 0{,}36$ in $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 1{,}1296$, od tod po (2)

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1{,}1296} \approx 1{,}06.$$

Povsem zanemarljiv tudi ta razteg na robu ni.

Opozarjam, da *vidni kot* fotografskega objektiva sicer navadno merimo na diagonali slike, se pravi, vzamemo kot, pod katerim objektiv gleda v ravnini skozi diagonalo tipala. Ta za senzor velikosti 24 × 36 mm meri $d = \sqrt{24^2 + 36^2}$ mm ≈ 43 mm. Vidni kot je enak $\alpha = 2\operatorname{arctg}(d/2f)$. Tako je vidni kot za 14 milimetrski objektiv enak približno 114°. V vodoravni smeri, ki je v praksi pomembnejša, ta objektiv vidi »le« 104 stopinje, kar pa vseeno zagotavlja precej nenavadno perspektivo.

Sam premorem star širokokotni zoom objektiv, ki ima deklarirano najmanjšo goriščno razdaljo 20 mm. Za maksimalni φ je $\operatorname{tg}\varphi = 18 : 20 = 0{,}9$. Torej je $1/\cos\varphi = \sqrt{1{,}81} \approx 1{,}35$. S tem objektivom sta bili posneti tudi fotografiji v članku: obe z istega mesta, ob nespremenjeni legi aparata. Na slikah in obeh izrezih razen popravkov osvetlitve niso bile narejene nikakršne spremembe. Kot lahko preverite, se na robu opeke v zidu niso raztegnile, oseba (moja malenkost) pa kar opazno, še posebej glava.

Za bolj zahtevne bralce izračunajmo zdaj razteg natančno:

$$\begin{aligned}|AB| &= \frac{r}{\cos(\varphi-\omega)} + \frac{r}{\cos(\varphi+\omega)}\\ &= r\frac{\cos(\varphi+\omega)+\cos(\varphi-\omega)}{\cos(\varphi+\omega)\cos(\varphi-\omega)}.\end{aligned}$$

Z znanimi formulami za pretvorbo vsote v produkt in obratno vidimo, da je števec enak $2r\cos\varphi\cos\omega$, imenovalec pa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\cos(2\varphi)+\cos(2\omega)) =\\ &\quad = \frac{1}{2}(2\cos^2\varphi - 1 + 1 - 2\sin^2\omega)\\ &\quad = \cos^2\varphi - \sin^2\omega.\end{aligned}$$

Upoštevajmo izračun za $\cos\omega$ (4), pa je

- $$|AB| = \frac{2r\cos\omega}{\cos\varphi(1-q)} = \frac{2r}{\cos\varphi}P,$$

kjer je

- $$P = \frac{\sqrt{1-qy}}{1-q},$$

kjer smo označili $y = \cos^2\varphi$ in $q = \frac{r^2}{a^2}$.

Lahko zapišemo

- $$P = \frac{1}{\sqrt{1-q}}\sqrt{\frac{1-qy}{1-q}}.$$

Prvi količnik je večji od ena in v velikem korenu je števec večji od imenovalca (zakaj?). Torej je $P > 1$.

Če je q blizu 0, je po naših približnih formulah P blizu 1:

- $$P \approx \left(1-\frac{1}{2}qy\right)(1+q) = 1+q-\frac{1}{2}qy-\frac{1}{2}q^2y \approx 1+q-\frac{1}{2}qy = 1+q\left(1-\frac{1}{2}y\right).$$

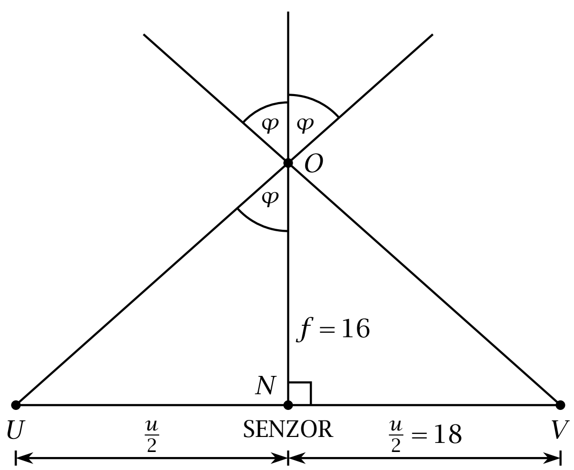
Tudi sicer se v praksi faktor P ne bo kaj dosti razlikoval od 1. Privzeli smo, da je $q < 1$. Izraz P bo največji, ko bo P^2 največji. Fiksirajmo q. Iz

- $$P^2 = \frac{1-q+q-qy}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q} + \frac{q}{(1-q)^2}(1-y) = \frac{1}{1-q} + \frac{q}{(1-q)^2}\sin^2\varphi$$

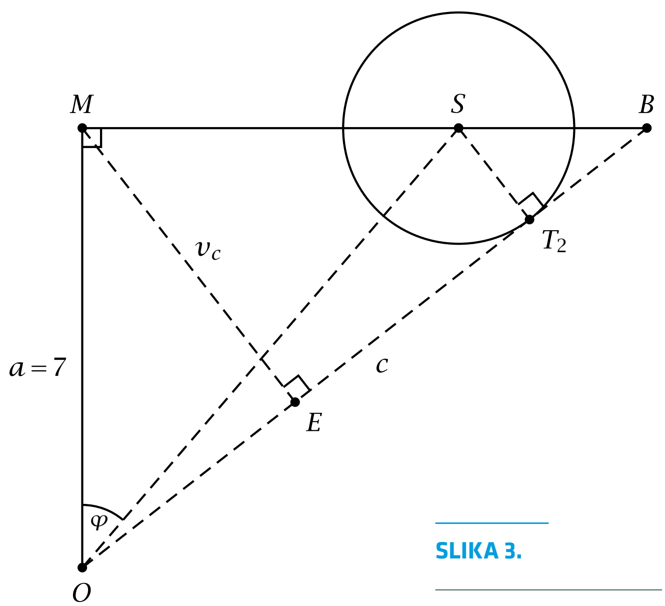
vidimo, da bo pri danem q izraz P največji, ko bo φ največji, saj funkcija sinus strogo narašča na intervalu $[0, 90°]$. Največje P torej lahko pričakujemo pri maksimalnem φ. To tudi pomeni pri minimalni goriščni razdalji. Fiksirajmo zdaj y, torej fiksirajmo φ. Iz

- $$P^2 = \frac{y-qy+1-y}{(1-q)^2} = \frac{y}{1-q} + \frac{1-y}{(1-q)^2}$$

vidimo, da bo P maksimalen, ko bo q maksimalen. (No, stvari so v resnici bolj zapletene, saj pri dani goriščni razdalji z večanjem kvocienta $q = \frac{r^2}{a^2}$ zmanjšujemo največji mogoči φ – slika 3.) Vzemimo torej 14 mm objektiv na velikem senzorju, tako da na sliki 3 velja $|OM| : |MB| = 14 : 18$. Naj bo recimo $a = |OM| = 7$, $|MB| = 9$. Narisali smo primer, ko je r in s tem q tako velik, da valj zavzame več kot četrtino slike. (Kaj več zame težko pride v poštev – širokokotni objektivi niso ravno primerni za slikanje posameznih oseb ali debelih teles. O tem kasneje. Poleg tega z večanjem spremenljivke r zmanjšujemo φ in s tem P. Rekli smo tudi, da nas zanimajo le razširitve teles na robu vidnega polja, kjer q ni prevelik.) Na sliki 3 je $|MB| = 9$, $|SB| = 3$. Od tod izračunamo $c = |OB| = \sqrt{130}$. Dve ploščini pravokotnega trikotnika OMB sta enaki $ab = cv_c$. Zato je $|EM| = v_c = 63/c$. Iz podobnih trikotnikov MEB in ST_2B izračunamo $r = |ST_2| \approx 1{,}8$. Iz $\operatorname{tg}\varphi = \frac{6}{7}$ dobimo $\cos^2\varphi = 49/85$ in končno $P \approx 1{,}05$.



SLIKA 2.



SLIKA 3.

Sam težave z raztegnjenima osebama takrat nisem znal hitro odpraviti in sem ju zato enostavno odrezal. Pred kakim letom se je na trgu pojavila rešitev, ki pa ni ravno poceni. Razvil jo je francoski laboratorij, ki tudi sicer ponuja programe za izboljšave digitalno zajetih slik. Orodje popravi razteg oseb, a bolj ali manj popači ozadje – kar pa praktično ne moti. Kot smo videli, je razteg valja malce odvisen tudi od polmera in zato ustrezen popravek širšega valja malce preveč skrči ožje valje, tako da popolnih popravkov ni mogoče pričakovati. Demonstracijo si lahko ogledate na [2].

Ostane pa nenavadna perspektiva: zelo širokokotni objektivi bližnje predmete upodobijo nesorazmerno velike, oddaljene nesorazmerno majhne (za naš pogled, ki se bolj ali manj pokriva s pogledom »normalnega« objektiva). Tako je na slikah modela, ki sedi postrani, glava videti nekoliko premajhna glede na telo v ospredju. Širokokotni objektivi so neprimerni za portrete posameznih oseb! Če s takim objektivom, recimo, frontalno, z razdalje nekaj decimetrov, slikamo obraz, bo nos velikanski, ušesa minimalna in obraz povsem deformiran. Prav to pa se pogosto dogaja pri tako imenovanih »selfijih«, se pravi pri avtoportretih, pri katerih pametni telefon ali fotoaparat držimo v roki.

Kakorkoli že, če vam je videz pomemben, se na skupinski sliki postavite bolj v sredino. Ko sami fotografirate, se odmaknite od skupine. Kadar to ni mogoče, razporedite ljudi kot poklicni fotografi. Skrbno načrtovane kompozicije starih »gasilskih« slik, na katerih so nekateri sedeli, drugi stali in tretji ležali, so poskrbele, da skupina ni bila preširoka in da je tako fotoaparat zajel vse pod majhnim kotom. Nihče se ni mogel pritoževati, da se je na sliki nemarno razširil.

Literatura

[1] S. F. Ray, *Applied photographic optics*, Second ed., Focal Press, Oxford 1995.

[2] *Correcting volume deformation with DxO ViewPoint*, `http://www.dxo.com/intl/photography/tutorials/correcting-volume-deformation-dxo-viewpoint`, ogled: 8. 1. 2015.

×××

Barvni sudoku

V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh 8 števil.

		8		3		5	
		4				6	
3		7	2				
	2		7				
	8	3			2		
				4		8	1
			1		6		7

REŠITEV BARVNI SUDOKU

7	3	6	5	8	1	2	4
2	1	8	4	3	7	5	6
1	5	4	8	7	3	6	2
3	6	7	2	5	4	1	8
5	2	1	7	6	8	4	3
4	8	3	6	1	2	7	5
6	7	2	3	4	5	8	1
8	4	5	1	2	6	3	7

×××