# Predikatna logika[1]

*FRANE JERMAN*

*UVOD*

Če hočemo izraziti logično strukturo stavčnih povezav, kot jih pozna npr. Aristotelova logika, potem nam sredstva stavčne logike ne zadostujejo. To lahko vidimo iz klasičnega primera: *Če so vsi ljudje umrljivi in so vsi belci ljudje, potem so vsi belci umrljivi.* V njem čutimo logično nujnost, ki pa je z zgolj stavčno logičnimi sredstvi ni mogoče izraziti. Kar poglejmo:

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

Stvar je v tem, da tiči logičnost v **notranji** strukturi teh stavkov in ne samo v medstavčnih odnosih. Kar oglejmo si začetni stavek:

**Vsi ljudje so umrljivi**

V njem razločimo subjekt, predikat in besedico, ki govori o tem, na koliki del subjekta se predikat nanaša. Besedica "ljudje" ima splošni značaj, je pojem, ki ga lahko pojmujemo kot "množico" individuumov, ali kot "razred" individuumov. Takšnim pojmom pravimo v logiki *individualne variable*. Služijo nam prav za oznako takšnih pojmov ter jih ponazarjamo s črkami iz konca latinske abecede:

**x z y.**

Ti pojmi označujejo neko abstraktno množico (skratka "**nekaj**"), ki jo je treba pobliže kvalificirati, ker ima lahko takšne ali drugačne lastnosti. To storimo s tako imenovanimi **predikati**, ali kakor jih v logiki imenujemo **s predikatnimi konstantami**, ki jih simboliziramo z latinskimi črkami iz sredine abecede:

**f g h.** F, G, H

1 Članek je nastal na podlagi predavanj iz logike, kjer se je pokazala potreba po dopolnitvi v slovenščini dosegljivih besedil o predikatnem računu na eni in Aristotelovo silogistiko na drugi strani. Članek seveda predpostavlja poznavanje temeljnih simbolov stavčne logike in načel tako imenovane naravne dedukcije. Uporabil sem različne učbenike logike od poljskih preko ameriških do nemških.

Lahko pa jih ponazorimo kako drugače npr. z velikimi črkami z začetka abecede (A, B, C) itd., kar bomo storili tudi mi pri obravnavi teorije silogizmov. Pomenijo pa **lastnosti** množice ali razreda.

Nadaljna posebnost predikatne logike so **kvantifikatorji**. To so izrazi, ki povedo, na koliki del subjekta se predikat nanaša. Tu nam logika ponuja nekaj možnosti, izmed katerih se bomo odločili za najbolj preprosto. Predikat se lahko namreč nanaša na subjekt predvsem na **dva** načina: tako da se nanaša na **ves** subjekt ali pa samo na njegov del. V prvem primeru imamo opraviti s **splošnim kvantifikatorjem**, v drugem pa z delnim, ali kakor tudi pravimo **eksistencialnim kvantifikatorjem**. Lahko pa uvedemo tudi kvantifikatorje z omejenim delovanjem - to možnost s pridom izkorišča sodobna matematika. V tej predstavitvi predikatne logike bomo obravnavali samo dva kvantifikatorja in sicer splošnega in delnega (eksistencialnega). Simboliziramo jih takole:

**(x)** je splošni kvanifikator

**(Ex)** je eksistencialni kvantifikator

Oba kvantifikatorja vežeta individualno variablo in **samo** njo. Ni si mogoče zamisliti, da bi jo uporabili v individualnem ali singularnem stavku, to je stavku, katerega subjekt je lastno ime.

Poleg kvantificiranih stavkov pa poznamo vsaj še dve vrsti stavkov. To so na eni strani **individualni** stavki, po drugi pa **nedoločni**. Individualni stavki so tisti, ki jih uvaja **lastno ime**, kar - kot vemo - pomeni **izključno** nekaj individulnega. V logiki je lastno ime vsak izraz, ki določa nekaj posameznega, torej ne samo imena in priimki! Lastna imena označujemo z malimi latinskimi črkami z začetka abecede, torej

a b c.

Individualni stavki imajo veliko vlogo v predikatni logiki, ker služijo kot argumenti v teoriji dokazovanja. Tako je npr. dokazana resničnost nekega eksistencialnega stavka, če lahko navedemo vsaj en resničen individualni primer.[2]

Nedoločni stavki nimajo kvantificiranega subjekta, ki pa je nujno splošno ime (če bi bilo lastno, bi bil stavek pač individualni ali - kot tudi rečemo - singularni stavek). Zavoljo njihove nedoločnosti in s tem tudi eliptičnosti jih običajno v logiki prevajamo v eksistencialne stavke.[3] Tako smo obogatili slóvar tèrminov stavčne logike za nekaj novih izrazov. Tako dobimo naslednji seznam logiških tèrminov:

1. Individualne variable **a,b,c** ... x, y, z
2. Individualne konstante ~~**A, B, C... ali f, g, h**~~ a, b, c
3. Univerzalni kvantifikator **(x)** ali "Za vse x velja, da..."
4. Eksistencialni kvantifikator **(Ex)** ali "Za vsaj en x velja, da...)
5. Stavčne variable **p, q, r** ...
6. Logične konstante * Predikatne konstante f, g, h ali F, G, H

$\wedge$ = konjunkcija

$\vee$ = disjunkcija

$\rightarrow$ = implikacija

$\leftrightarrow$ = ekvivalenca, ter

$\neg$ = negacija (ki je edini **monadični** logični veznik!)

7. Običajna oklepajna znamenja. ((.))

---

[2] Trditev "Nekatere kovine so tekoče" verificira obstoj živega srebra!

[3] Če rečemo "Rože so lepe", to pravzaprav pomeni, da je "vsaj ena roža lepa"!

V slovenščini poznamo več vrst predikatnih stavkov, nastane pa problem, kako jih prevajati v logično predikatno formo. Vzamimo za primer stavek

**Vsi ljudje so umrlivi.**

Ta stavek poznajo vsi učbeniki tradicionalne logike, vidimo pa, da ga sestavljajo predikat "so umrljivi", subjekt "ljudje" in splošni ali univerzalni kvantifikator "vsi". Vse to so elementi, ki smo jih našteli v seznamu predikatne logike. Predikat bomo označili kar s "P", subjekt s "S", splošni kvantifikator pa s formulo "(x)". Najbolj jasno opredelimo splošnost stavka z implikacijskim odnosom med subjektom in predikatom, pri čemer imamo tudi subjekt za lastnost neke množice. Ta kvantifikator uvaja individualno spremenljivko ali variablo "Za vse x velja...", kar pomeni naslednje: če je **nekaj** človek, potem mora biti to **nekaj** tudi umrljivo bitje. Subjekt in predikat sta torej **dve** lastnosti omenjene variable ("nekaj"!). Zato prevedemo gornji stavek v predikatno formo takole:

**Za vse x velja: če je x človek, potem je tudi umrljiv**
kar izrazimo z logičnimi sredstvi v naslednji formuli

$$(x)(Sx \rightarrow Px).$$

**Malce drugače** prevedemo eksistencialni ali delni stavek. Vzemimo naslednji primer
**Nekateri učitelji so telovadci.**

Gre pravzaprav za presek dveh razredov in sicer razreda učiteljev in razreda telovadcev. Z njunim presekom dobimo poseben "presečni" razred tistih učiteljev, ki so telovadci in tistih telovadcev, ki so učitelji. Ali s simboliko predikatnega računa:

$$(Ex)(Sx \wedge Px)$$

**Presečni razred označujemo s konjunkcijo**, saj gre za razred tistih elementov, ki so eno in drugo, torej v našem primeru učitelji **in** telovadci.

S tem lahko prevedemo v logično formo vse stavke, ki jih poznamo iz tako imenovanega logičnega trikotnika: A, E, I in O stavke (splošno trdilne, splošno nikalne, delno trdilne in delno nikalne).

$$A = (x)(Sx \rightarrow Px)$$
$$E = (x)(Sx \rightarrow \neg Px)$$
$$I = (Ex)(Sx \wedge Px)$$
$$O = (Ex)(Sx \wedge \neg Px)$$

Glede na to nastane vprašanje, ali lahko **ponazorimo** s sredstvi predikatne logike tudi Aristotelovo teorijo kategoričnega silogizma? Odgovor je seveda pritrdilen, toda ne brez "preostanka", kot bomo videli kasneje.

Logika ni sama sebi namen, ampak služi predvsem kot **instrument dokaza**. Zato mora imeti posebej zgrajeno teorijo. Za zdaj je najbolj prikladna oblika takšne teorije dokaza **sistem naravne dedukcija**, ki temelji na uporabi posebej izbranih logičnih pravil in posebej izbranih pravil zgradbe dokaza. Ker je naravna dedukcija teorija dokaza za stavčno logiko, ki je temelj **vsake** logike (torej tudi predikatne), že zgrajena, se tudi sistem naravne dedukcije za predikatno logiko začne z njo.

Naravna dedukcija pozna tako imenovana primarna in sekundarna pravila izpeljevanja. Najprej si oglejmo deset primarnih stavčnih deduktivnih pravil.

| LK | Priključitev | Opustitev |
|---|---|---|
| $\rightarrow$ | Iz izpeljanega $\beta$ ob predpostavki $\alpha$ (ali drugih predpostavk), izpeljemo $\alpha \rightarrow \beta$ | Iz $\alpha \rightarrow \beta$ in $\alpha$ sledi $\beta$ |
| $\wedge$ | Iz $\alpha$ in $\beta$ sledi $\alpha \wedge \beta$ | Iz $\alpha \wedge \beta$ sledi ali $\alpha$ ali $\beta$ |
| $\vee$ | Iz $\alpha$ sledi ali $\alpha \vee \beta$ lahko pa tudi $\beta \vee \alpha$ | Iz $\alpha \vee \beta$ ter $\neg \beta$ sledi $\alpha$ ali iz $\alpha \vee \beta$ ter $\neg \alpha$ sledi $\beta$ |
| $\leftrightarrow$ | Iz $\alpha \rightarrow \beta$ in $\beta \rightarrow \alpha$ sledi $\alpha \leftrightarrow \beta$ | Iz $\alpha \leftrightarrow \beta$ sledi $\alpha \rightarrow \beta$ ali $\beta \rightarrow \alpha$ |
| $\neg$ | Iz izpeljanega izraza $\beta \wedge \neg \beta$ na podlagi hipoteze $\alpha$ sledi $\neg \alpha$ | Iz izpeljanega izraza $\beta \wedge \neg \beta$ na podlagi hipoteze $\neg \alpha$ sledi $\alpha$ |

Izraza $\alpha$ in $\beta$ nadomestujeta **katerikoli** logično pravilno oblikovan izraz. Pravilo za opustitev implikacije imenujemo tudi **Modus ponens** ali s kratico kar **MP**, za druga pravila pa uporabljamo oznake kot so **PI** (Priključitev implikacije), **PK** in **OK** (Priključitev in opustitev konjunkcije), **OD** in **PD** (Priključitev in opustitev disjunkcije) ter analogno **PE** (ekvivalence) in **OE**, ter pravilo, ki zadeva tako imenovano posredno sklepanje in ga imenujemo kar (KON)(-tradikcija).

Razen teh primarnih pravil za izpeljevanje poznamo še nekaj pomembnih sekundarnih, se pravi izpeljanih pravil:

| | | |
|---|---|---|
| Modus tolens | Iz $\alpha \wedge \beta$ in $\neg \beta$ sledi $\neg \alpha$ | MT |
| Pravilo prehodnosti | Iz $\alpha \wedge \beta$ in $\beta \wedge \gamma$ sledi $\alpha \wedge \gamma$ | PP |
| Dvojna negacija | Iz $\alpha$ izpeljemo $\neg \neg \alpha$ in narobe | DN |
| De Morganovi zakoni | Iz $\alpha \wedge \beta$ sledi $\neg (\neg \alpha \vee \neg \beta)$ in na narobe<br>Iz $\neg$ (a $\wedge$ ß) sledi $\neg \alpha \vee \neg \beta$ in narobe<br>Iz $\neg \alpha \wedge \neg \beta$ sledi $\neg (\alpha \vee$ ß ) in narobe<br>Iz $\neg (\neg \alpha \wedge \neg \beta)$ sledi $\alpha \vee \beta$ in narobe | DM |
| Definicijska substitucija | $\alpha \rightarrow \beta = \neg \alpha \vee \beta$<br>$\neg \alpha \rightarrow \beta = \alpha \vee \beta$<br>$\alpha \rightarrow \beta = \neg (\alpha \wedge \neg \beta)$<br>$\neg (\alpha \rightarrow \beta) = \alpha \wedge \neg \beta$ | DS |
| Kontrapozicija | Iz $\alpha \rightarrow \beta$ sledi $\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$ in narobe<br>Iz $\alpha \rightarrow \neg \beta$ sledi $\beta \rightarrow \neg \alpha$ in narobe<br>Iz $\neg \alpha \rightarrow \beta$ sledi $\neg \beta \rightarrow \alpha$ in narobe. | KP |

Pravila gradnje dokaza so preprosta. Najprej izpisujemo v vsako posebej oštevilčeno vrsto *hipoteze* (prve člene implikacij). To označimo ob strani s črko **h**. Ko dobimo z uporabo pravil in že dokazanih tez zadnji člen implikacije (konsekvens), smo dokaz zaključili. Za dokazovanje uporabljamo navedena pravila in vse že dokazane teze, ki nam služijo kot **sekundarna** pravila, zakaj vsako pravilo sklepanja ali dedukcijsko pravilo sledi iz dokazane teze in je njeno **preoblikovanje**.

Sistem narave dedukcije za predikatni račun temelji na istih pravilih. Razlika je samo v tem, da tu veljajo še posebna pravila, ki zadevajo **oba kvantifikatorja**.

Prvo pravilo je pravilo opustitve splošnega kvantifikatorja. Če je izraz opremljen s splošnim kvantifikatorjem, potem lahko **izpeljemo iz njega katerikoli primer**, kar pomeni, da lahko v izrazu nadomestimo individualne variable z individualnimi **konstantami** (lastnimi imeni) **brez kakršnekoli omejitve**. To pravilo zapišemo s kratico **OUK**. Pravilo za priključitev univerzalnega kvantifikatorja praviloma ne moremo upoštevati, razen tam, kjer gre za končno število preverljivih primerov. Iz posameznega primera namreč ne moremo sklepati na njegovo splošno veljavnost, razen v primeru, ko gre za končno število primerov, kar pa je treba posebej dokazati.

Pri pravilu opustitve eksistencialnega kvantifikatorja pa moramo upoštevati naslednjo omejitev: **Iz eksistencialno opremljenega izraza lahko izpeljemo posamezen primer, če se uvedeno ime (individualna konstanta) ne nahaja že v samem izrazu ali v vrsti argumentov pred njim. Pravilo** simboliziramo s simbolom **OEK**. Da bi se izognili možni napaki, vedno opravimo (kjer je to mogoče) najprej **OEK** in šele nato **OUK**. Razlog te omejitve je seveda možen napačen sklep. Saj npr. iz trditve "Nekateri politiki so demokrati" ali

$$(Ex)(Px \wedge Dx)$$

ne moremo sklepati brez posebnega razloga, da je poljubni politik (a) demokrat.

Oba kvantifikatorja med seboj lahko zamenjujemo. Če predpostavljamo končno število stavkov, potem lahko predstavimo izraz, opremljen s splošnim kvantifiktorjem kot **konjunkcijo** končne množice individualnih stavkov, torej

$$fa_1 \wedge fa_2 \wedge fa_3 \wedge ... \wedge fa_n$$

Za eksistencialni kvantifikator pa lahko vzamemo disjunkcijo končnega števila stavkov, saj je disjunkcija resnična, če je vsaj en stavek resničen. Torej:

$$fa_1 \vee fa_2 \vee fa_3 \vee ... \vee fa_n.$$

Da vladajo med konjunkcijo in disjunkcijo posebni odnosi, ki jih označujejo De Morganovi zakoni, že vemo. Iz tega spoznanja tudi sledi, da konjunkcijo lahko izrazimo z disjunkcijo in narobe. Na podlagi tega premisleka lahko postavimo med univerzalnim in eksistencialnim kvantifikatorjem naslednja dva relevantna odnosa:

$$\text{Iz} \neg (x)\alpha \text{ sledi } (Ex) \neg \alpha \text{ in iz } \neg (Ex)\alpha \text{ sledi } (x) \neg \alpha.$$

Oba sledita iz De Morganovih zakonov o odnosu med konjunkcijo in disjunkcijo vključno z vsemi možnimi kombinacijami z negacijo. Sam postopek zamenjave kvantifikatorjev označimo s kratico **ZQ**.

Naj to ponazorimo še s tabelo:

| | |
|---|---|
| Opustitev splošnega kvantifikator **OUK** | Iz sploš. stavka lahko izpeljemo katerikoli primer |
| Opustitev eksistencialnega kvantifikatorja **OEK** | Iz eksistencialnega stavka lahko izpeljemo katerikoli primer, **ob pogoju** da se uvedeno ime ne nahaja niti v simbolizaciji preverjanega stavka niti v vrstah dokaza pred njim. |
| Zamenjava kvantifikatorjev **ZQ** | Iz $\neg(x)\alpha_x$ izpeljemo $(Ex)\neg\alpha_x$<br>Iz $\neg(Ex)\alpha_x$ izpeljemo $(x)\neg\alpha_x$ |

Kako dokazujemo znotraj predikativne logike z uporabo pravil naravne dedukcije, naj pokažemo na teoriji kategoričnega silogizma.

*KATEGORIČNI SILOGIZEM*

Kategorični silogizem je tročlensko sklepanje iz dveh premis na sklep. Sklep omogoča termin, ki je skupen za obe premisi, in ga označujemo z znakom M (terminus medius). Glede na njegovo mesto, poznamo štiri **figure**: v **prvi** je M subjekt prve in predikat druge premise (M - P, S - M); v **drugi** figuri je M predikat obeh premis; v **tretji** je M subjekt obeh premis, v **četrti** figuri pa je M predikat prve in subjekt druge premise. Aristotel ni priznaval četrte figure in je imel za veljavne samo štirinajst silogizmov. V predikatni logiki je mogoče dokazati petnajst silogizmov, v tradicionalni logiki, z uporabo sholastičnih transformacijskih pravil, je mogoče dokazati devetnajst silogizmov.

Ob upoštevanju sholastičnega poimenovanja silogizmom, je mogoče dokazati v 1. figuri naslednje **moduse**: bArbArA[4], cElArEnt, dArII in fErIO, v 2. figuri moduse cEsArE, cAmEstrEs, fEstInO, bArOcO; v 3. figuri moduse dArAptI, dIsAmIs, dAtIsI, fElAptOn, bOcArdO, fErIsOn in v četrti figuri moduse brAmAntIp, cAmEnEs, dImArIs, fEsApO, frEsIsOn, torej devetnajst modusov.

V predikatni logiki moramo izvzeti naslednje štiri moduse: darapti, felapton, bramantip in fesapo. Razloge bomo še navedli.

Omenjenih silogizmov pa ne moremo dokazovati **neposredno**, se pravi tako, da zadnji člen izpeljemo neposredno. Dokazovanje je **posredno**, kar pomeni, da dokazujemo **negacijo** tega, kar hočemo dokazati. Če izpeljemo **protislovje**, potem smo dokazali, da drži negacija naše negacije, torej trditev, ki smo jo hoteli dokazati.

Oglejmo si dokaze vseh štirih veljavnih modusov prve figure:

bArbArA

$(x)\,(Mx \rightarrow Px);\ (x)\,(Sa \rightarrow Mx);\ \vdash (x)\,(Sx \rightarrow Px)$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(x)\,(Mx \rightarrow Px)$ | h |
| 2. | $(x)\,(Sa \rightarrow Mx)$ | h |
| 3. | $\neg(x)\,(Sx \rightarrow Px)$ | hpd |
| 4. | $(Ex)\,\neg(Sx \rightarrow Px)$ | ZQ 3 |
| 5. | $\neg(Sa \rightarrow Pa)$ | OEK 4 |
| 6. | $Sa \rightarrow Ma$ | OUK 2 |
| 7. | $Ma \rightarrow Pa$ | OUK 1 |
| 8. | $Sa \wedge \neg Pa$ | DS 5 (def. sub.) |
| 9. | $\neg Pa$ | OK 8 |
| 10. | $\neg Ma$ | Mt 7,9 |
| 11. | $\neg Sa$ | Mt 6,10 |
| 12. | $Sa$ | OK 8 |
| 13. | $Sa \wedge \neg Sa$ | PK 11,12: (KON), torej |
| 14. | $(x)\,(Sx \rightarrow Px)$ | 3 |

[4] Inicialke pomenijo vrsto predikatnega stavka glede na tako imenovani logični kvadrat. Navidezno nesmiselne besede pa vsebujejo tudi navodila za dokazovanje v okviru Aristotelovega načina dokazovanja. Glej npr. mojo knjižico **Logika za mlade**, 1979, str. 81/82.

### cElArEnt

$(x)\,(Mx \rightarrow \neg Px);\ (x)\,(Sx \rightarrow Mx);\ \vdash (x)\,(Sx \rightarrow \neg Px)$

| | |
|---|---|
| 1. $(x)\,(Mx \rightarrow \neg Px)$ | h |
| 2. $(x)\,(Sx \rightarrow Mx)$ | h |
| 3. $\neg(x)\,(Sx \rightarrow \neg Px)$ | hpd |
| 4. $(Ex)\,\neg(Sx \rightarrow \neg Px)$ | ZQ 3 |
| 5. $\neg(Sa \rightarrow \neg Pa)$ | OEK 4 |
| 6. $Sa \rightarrow Ma$ | OUK 2 |
| 7. $Ma \rightarrow \neg Pa$ | OUK 1 |
| 8. $Sa \wedge Pa$ | DS 5 |
| 9. $Sa$ | OK 8 |
| 10. $Ma$ | Mp 6,9 |
| 11. $\neg Pa$ | Mp 7,10 |
| 12. $Pa$ | OK 8 |
| 13. $Pa \wedge \neg Pa$ | PK 11,12 (KON), torej |
| 14. $(x)\,(Sx \rightarrow \neg Px)$ | 3 |

### dArII

ad 3

$(x)\,(Mx \rightarrow Px);\ (Ex)\,(Sx \wedge Mx);\vdash (Ex)\,(Sx \wedge Px)$

| | |
|---|---|
| 1. $(x)\,(Mx \rightarrow Px)$ | h |
| 2. $(Ex)\,(Sx \wedge Mx)$ | h |
| 3. $\neg(Ex)\,(Sx \wedge Px)$ | hpd |
| 4. $(x)\,\neg(Sx \wedge Px)$ | ZQ 3 |
| 5. $Sa \wedge Ma$ | OEK 2 |
| 6. $\neg(Sa \wedge Pa)$ | OUK 4 |
| 7. $Ma \rightarrow Pa$ | OUK 1 |
| 8. $Sa \rightarrow \neg Pa$ | DS 6 |
| 9. $Sa$ | OK 5 |
| 10. $\neg Pa$ | Mp 8,9 |
| 11. $Ma$ | OK 5 |
| 12. $Pa$ | Mp 7,11 |
| 13. $Pa \wedge \neg Pa$ | PK 10,12 (KON); torej |
| 14. $(Ex)\,(Sx \wedge Px)$ | 3 |

### fErIO

ad 4

$(x)\,(Mx \rightarrow \neg Px);\ (Ex)\,(Sx \wedge Mx);\vdash (Ex)\,(Sx \wedge \neg Px)$

| | |
|---|---|
| 1. $(x)\,(Mx \rightarrow \neg Px)$ | h |
| 2. $(Ex)\,(Sx \wedge Mx)$ | h |
| 3. $\neg(Ex)\,(Sx \wedge \neg Px)$ | hpd |
| 4. $(x)\,\neg(Sx \wedge Px)$ | ZQ3 |
| 5. $Sa \wedge Ma$ | OEK 2 |
| 6. $\neg(Sa \wedge \neg Pa)$ | OUK 3 |
| 7. $Ma \rightarrow \neg Pa$ | OUK 1 |
| 8. $Sa \rightarrow Pa$ | DS 6 |
| 9. $Sa$ | OK 5 |
| 10. $Pa$ | Mp 8,9 |

| | |
|---|---|
| 11. Ma | OK 5 |
| 12. ¬Pa | Mp 7,11 |
| 13. Pa ∧ ¬Pa | PK 10, 12 (KON), torej |
| 14. (Ex) (Sx ∧ ¬Px) | 3 |

Na podoben način lahko dokazujemo tudi druge moduse preostalih figur. Tako npr. dokažemo modus druge figure

cEsArE

(x) (Px ¬Mx); (x) (Sx → Mx); ⊢ (x) (Sx → ¬Px)

| | |
|---|---|
| 1. (x) (Px → ¬Mx) | h |
| 2. (x) (Sx → Mx) | h |
| 3. ¬(x) (Sx → ¬Px) | hpd |
| 4. (Ex) ¬(Sx → ¬Px) | ZQ 3 |
| 5. ¬(Sa → ¬Pa) | OE 4 |
| 6. Pa → ¬Ma | OU 1 |
| 7. Sa → Ma | OU 2 |
| 8. Sa ∧ Pa | DS 5 |
| 9. Pa | OK 8 |
| 10. ¬Ma | Mp 5,9 |
| 11. Sa | OK 8 |
| 12. Ma | Mp 6, 11 |
| 13. Ma ∧ ¬Ma | PK 10, 12 (KON): |
| 14. (x) (Sx → ¬Px) | 3 |

Zdaj se lahko vrnemo k vprašanju nedokazljivosti prej omenjenih štirih modusov.

Gre za štiri moduse, pri katerih sklepamo iz dveh splošnih premis na delni sklep. Ker sklepamo tako, da izpeljemo posredni dokaz, se pravi, da izhajamo iz negacije tega, kar hočemo dokazati, dobimo kot hipotezo posrednega dokaza (hpd) zanikani kvantifikator. Ker na njem ne moremo uporabiti nobene operacije, ga moramo spremeniti s postopkom zamenjave kvantifikatorjev. Tako dobimo iz I in O stavkov splošne stavke. Iz dveh implikacij pa v tem primeru ni mogoče dobiti ustreznega sklepa, torej takega, ki bi pomenil negacijo naše hipoteze posrednega dokaza. Primer:

fElAptOn (3. figura)

(x) (Mx → ¬Px); (x) (Mx → Sx); ⊢ (Ex) (Sx ∧ ¬Px)

| | |
|---|---|
| 1.(x) (Mx → ¬Px) | h |
| 2.(x) (Mx → Sx) | h |
| 3.¬(Ex)(Sx ∧ ¬Px) | hpd |
| 4.(x)¬(Sx ∧ ¬Px) | ZQ 3 |
| 5.Ma → ¬Pa | OUK 1 |
| 6.Ma → Sa | OUK 2 |
| 7. ¬(Sa ∧ ¬Pa) | OUK 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 8. $Sa \rightarrow Pa$ | DS 7 | |

Iz treh implikacij ne moremo dobiti negacije hipoteze posrednega dokaza. Tu nam ne pomaga niti pravilo o kontrapoziciji in prehodnosti. Protislovje dobimo samo, če dodatno predpostavljamo **Ma**.

| | | |
|---|---|---|
| 9. Ma | dh | (dodatna hipoteza) |
| 10. $\neg Pa$ | MP | 9,5 |
| 11. Sa | MP | 9,6 |
| 12. Pa | MP | 11,8 |
| 13. $Pa \wedge \neg Pa$ | PK | 11,12 (KON), torej |
| 14. $(Ex)(Sx \wedge \neg Px)$ | 3 | |

S tem postopkom lahko rešimo tudi preostale tri silogizme. To pa nam dokazuje še enkrat, da je Aristotelova teorija kategoričnega silozima vendarle poseben logiški račun, ki ga s sodobnimi sredstvi lahko samo **ponazarjamo**, in nič drugega.

Predikatna logika je sicer zelo močno orodje, s katerim pa je treba znati ravnati vešče pa tudi previdno. O tem, kaj nam prinaša, pa v naslednji številki.