UGANKE IZ ODDAJE UGRIZNIMO ZNANOST

Dobra uganka je vedno dobrodošla! Morda ne toliko v raziskovalnem, zagotovo pa v pedagoškem svetu. Uporabimo jo lahko na številne načine: za motivacijo, za promocijo, za preverjanje potencialnega kadra ali zgolj za »utišanje« petletnika med vožnjo na morje. To spoznavam vsakič, ko s pridom žanjem sadove svojega udejstvovanja v oddaji Ugriznimo znanost (TV SLO). V njej jih gledalcem zastavljam vsak teden in tako je v treh letih moj nabor postal res raznolik, zato sem se odločil, da nekaj matematično najbolj zanimivih s tem prispevkom v nadaljnjo uporabo predam tudi vam. Seveda z očitnim opozorilom: ne gre za avtorsko delo! A saj veste, kaj pravijo … Uganka je kot vic! Dokler je cilj zabava, jo smeš povedati naprej.

Garderobne omarice

V srednji šoli so dijaške omarice označene s števili od 1 do 100. Nekega dne se sto dijakov postavi v vrsto in odigra naslednjo igro: prvi vse omarice odpre, drugi pa zapre tiste, ki so označene s sodimi številkami. Nato k vsaki tretji pristopi tretji in jo bodisi odpre bodisi zapre, odvisno od stanja, v katerem jo najde. Podobno stori tudi vsak nadaljnji dijak – odpre oziroma zapre vse omarice, katerih zaporedna številka je deljiva z njegovim mestom v vrsti. Katere omarice so ob koncu igre ostale odprte?

Rešitev: Uganka je lahko odlična popestritev učne ure o deljivosti števil, saj hiter razmislek pove, da je število dijakov, ki pristopijo k omarici, enako številu deliteljev, ki jih ima njena številka. Natančneje, omarica bo ostala odprta natanko tedaj, ko bo število obojih liho. Zapišimo ta pogoj s pomočjo razcepa na praštevila. Naj bo n neko naravno število in naj bo njegov razcep enak

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l}.$$

Tedaj mora biti vsako število d, ki ga deli, oblike

$$d = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdots p_l^{s_l}, \;\; 0 \leq s_j \leq k_j.$$

Deliteljev števila n je torej natanko

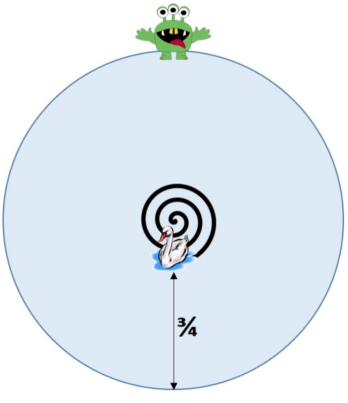
$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdots (k_l + 1).$$

Tak produkt je lih natanko tedaj, ko so lihi tudi vsi njegovi faktorji. To pa pomeni, da morajo biti vsi eksponenti k_j sodi, oziroma, da omarica ostane odprta natanko tedaj, ko je njena zaporedna številka n popolni kvadrat.

Labod in pošast

Na sredini okroglega jezera plava labod, ki želi poleteti proti svojemu gnezdu. Za to mora najprej stopiti na obalo, kjer pa ga čaka štirikrat hitrejša pošast. K sreči pošast ni zelo bistra, zato v vsakem trenutku izbere najkrajšo kopensko pot do točke, h kateri se giba labod. Po kakšni poti naj plava labod, da bo imel ob prihodu na obalo vsaj minimalno prednost?

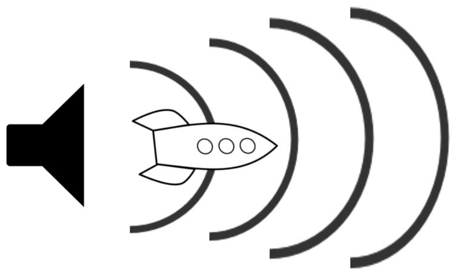
Rešitev: Jasno je, da labod ne more izbrati direktne poti na kopno, saj bi bila njegova pot v tem primeru od poti pošasti krajša največ za faktor π. Ubrati mora torej kak drug, bolj prebrisan način gibanja. Uganka tako lepo ilustrira razliko med obodno in kotno hitrostjo, saj lahko labod – čeprav je štirikrat počasnejši – kroži okoli središča z enako kotno hitrostjo kot pošast, če je radij krožnice, ki jo opiše, štirikrat manjši od polmera jezera. Še več, s krožnim gibanjem po točkah, ki so še malce bližje središču, labod z vsakim obhodom pridobi nekaj kotnih stopinj. Tako se lahko po nekem času znajde v poziciji, ki jo prikazuje slika (skicirana je le ena od možnih poti). Labodova direktna pot na kopno je sedaj za faktor $\frac{4\pi}{3}$ krajša od poti, ki jo mora do iste točke preteči pošast. Ker gre za število, ki je večje od 4, ima labod sedaj dovolj prednosti za varen vzlet.



Nadzvočna hitrost

V letalskem centru so razvili brezpilotno raketo, ki lahko doseže zelo visoke hitrosti. Vendar pa so njen pospeševalni sistem zelo nerodno vezali na zvočni signal – raketa naj bi vsakič, ko iz postaje sprejme pisk, pospešila za 100 m/s. Da tak sistem vodenja ni učinkovit, so opazili šele med testiranjem, ko so ugotovili, da raketa po več kot treh piskih ne doseže želene hitrosti. Zakaj? Kakšno hitrost doseže v takem primeru?

Rešitev: Ključen podatek pri reševanju uganke je hitrost zvoka, ki v zraku znaša okoli 340 m/s. Po štirih piskih je raketa torej že tako hitra, da je signali iz postaje ne dohitijo več. Vendar pozor, to še ni odgovor na drugo vprašanje. Na sliki je raketa v trenutku, ko jo ujame četrti pisk. Ker se od tega trenutka dalje giblje z nadzvočno hitrostjo, bo ujela in še enkrat zaznala tudi vse tri predhodne piske. Njena končna hitrost bo 700 m/s.



Lačna kamela

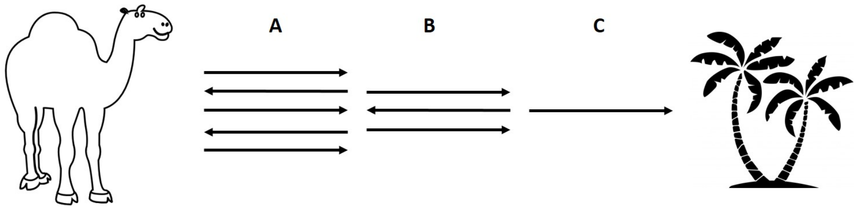
Trgovec želi 3000 banan prenesti 1000 milj daleč. Za pot ima na voljo kamelo, ki lahko nese do 1000 banan, a za vsako miljo poje en sadež. Kolikšno je maksimalno število banan, ki jih lahko spravi na cilj?

Rešitev: Očitno je, da mora trgovec, če želi na cilj prinesti vsaj kakšno banano, nekatere dele poti opraviti večkrat. Natančneje, izbrati mora primerna mesta, kjer del tovora odloži in se vrne nazaj. Za to ima na voljo kar nekaj ekvivalentnih možnosti, izkaže pa se, da je za optimalnost ključna omejitev, da nobena banana ne bo ostala »ob poti«.

Za začetek premislimo, da rešitev, pri kateri trgovec na začetku pusti 1 banano, ni optimalna. Res, z njo bi lahko svoj kup banan pred začetkom poti prestavil za $\frac{1}{5}$ milje bližje cilju in dobil problem, v katerem mora 2999 banan prenesti $999\frac{4}{5}$ milj daleč. Z enako organizacijo poti kot prej bi tako na cilj lahko dostavil vsaj dodatno petino banane.

Nadalje velja, da banane ne smejo ostati niti v vmesnih točkah. Vsaki rešitvi, ki temu ne zadosti, lahko namreč priredimo ekvivalentno rešitev, v kateri trgovec tovor najprej dostavi do takega mesta, ter se šele nato ukvarja z nadaljevanjem poti. Tako dobi nov začetni problem s spremenjenima razdaljo in številom banan, ter svojo rešitev, ki jo lahko še izboljša.

Upoštevajoč maksimalno možno obremenitev kamele je pot torej smiselno razdeliti na tri odseke (slika). Ob predpostavki, da sadeži ne ostanejo ob poti, je število banan, ki prispejo na cilj, odvisno le od dolžin odsekov A,



B in C, brez škode za splošnost pa lahko predpostavimo tudi, da se trgovec ustavi le v obeh stičiščih. Ker bo drugi odsek poti prehojen le trikrat, lahko kamela po njem prenese največ 2000 banan. Torej mora za pot do tja pojesti vsaj 1000 banan in je $A \geq 200$ milj. Po drugi strani velja, da vsaka milja prvega odseka trgovca »stane« več banan kot milji preostalih dveh odsekov. Zato je racionalno, da je njegova dolžina minimalna, $A = 200$ milj. Podobno določimo tudi razdaljo $B = 333\frac{1}{3}$ milj, na kateri kamela poje nadaljnjih 1000 banan, in ugotovimo, da je optimalno, če se kup s preostalimi 1000 bananami znajde na razdalji $466\frac{2}{3}$ milje do cilja. Trgovec tako na cilj prenese $533\frac{1}{3}$ banane.

Vedno 1089

Tri različne, neničelne cifre razporedite od največje do najmanjše, tako da dobite trimestno število. Od njega odštejte število z obratnim vrstnim redom števk (npr. $732 - 237 = 495$). Postopek ponovite tudi za dobljeno razliko, le da tokrat uporabite seštevanje ($495 + 594 = 1089$). Dokažite, da je rezultat vedno enak!

Rešitev: Naloga lepo ilustrira pomen desetiškega zapisa. Denimo, da smo izbrali števke A, B, in C. Razlika, ki jo dobimo na prvem koraku, je enaka

$$(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A) = 99(A - C).$$

Ker velja $9 \geq A > B > C > 0$, je $2 \leq A - C \leq 8$. Dobimo torej trimestno število, ki je deljivo z 99. Zanj se lahko hitro prepričamo, da je njegov desetiški zapis oblike $a9b$, kjer je $a + b = 9$. Iskana vsota je torej enaka

$$(100a + 90 + b) + (100b + 90 + a) = 101(a + b) + 180 = 1089.$$

Einsteinova uganka

Popotnik opazi medveda in začne teči. Najprej steče na jug, nato na vzhod in nazadnje na sever, vsakič po 100 m. Na koncu se znajde v začetni točki. Kakšne barve je bil medved?

Rešitev: Gre za klasično uganko, ki jo pogosto najdemo v knjigah o neevklidski geometriji. In sicer kot vprašanje: »Ali lahko narišemo trikotnik s tremi pravimi koti!« Odgovor nanj je pritrdilen, ključno pa je, da se naloge ne lotimo na (neukrivljenem) listu papirja. Na primer, tak trikotnik najdemo na sferi, če za oglišče izberemo severni pol, za stranice pa dve priležni vzdolž poldnevnikov in nasprotno vzdolž vzporednika. To je tudi pot, ki jo je prehodil naš popotnik in torej srečal belega, severnega medveda!

Kakorkoli, čeprav je to že pravilna rešitev, pa se naš razmislek ne sme končati tu (v številnih virih je nadaljevanje izpuščeno, kar je tudi razlog, da sem to uganko vključil v svoj izbor). Natančneje, obravnavati moramo tudi množico poti, ki se nahaja v bližini južnega pola. Denimo, da se popotnik po 100 m teka na jug znajde na vzporedniku, ki je dolg natanko $\frac{100}{k}$ m za $k \in \mathbb{N}$. S tekom na vzhod bo torej napravil k obhodov južnega pola ter se nato vrnil v izhodišče. Torej, vsaj matematično gledano, je možno tudi, da se nahaja na Antarktiki … A brez panike! Rešitev skoraj stoletje stare uganke s tem ni ogrožena. Barva medveda je še vedno bela, saj v okolici južnega pola teh živali ni!

Petek 13.

Neprestopno leto ima tri nesrečne petke. Na kateri dan se začne?

Rešitev: Bolj kot odgovor na to uganko je fascinantno dejstvo, da je rešitev enolična! Do nje se najlažje prebijemo tako, da v roke vzamemo koledar neprestopnega leta in z njega po vrsti preberemo 13. dneve v mesecih. Jaz sem to storil za leto 2017 in dobil

petek, *ponedeljek*, *ponedeljek*, *četrtek*, *sobota*, *torek*,

četrtek, *nedelja*, *sreda*, *petek*, *ponedeljek*, *sreda*.

Sreče pri izbiri leta očitno nisem imel, saj sta bila lani le dva taka petka. Vseeno pa mi je zgornje zaporedje zelo v pomoč, saj lahko iz njega razberem, da obstaja natanko en dan, ki se na 13. mestu pojavi trikrat. V letu 2017 je bil to ponedeljek. Sklepam lahko torej, da bo želeni pogoj izpolnjen natanko tedaj, ko bo 13. februar padel na petek (v letu 2017 je na tem mestu ponedeljek). Tako leto se začne na četrtek! Mimogrede, s podobno analizo lahko ugotovite, da se petek 13. zgodi vsako leto, a ne več kot trikrat (tudi v primeru prestopnega leta).

Kameleoni

V terariju so kupili 13 modrih, 15 rdečih in 17 zelenih kameleonov. Le-ti imajo nenavadno lastnost, da se ob srečanju dveh kameleonov različnih barv oba spremenita v tretjo barvo. Ali se lahko zgodi, da bodo po nekem času vsi kameleoni enake barve?

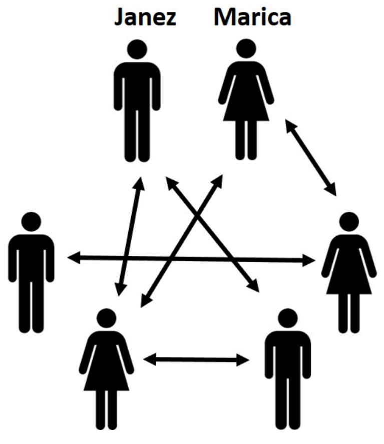
Rešitev: Uganka je lahko odlična popestritev deževnega popoldneva, če se reševanja lotite na empiričen način. Kakorkoli, kot veleva nepisano kolokvijsko pravilo, je odgovor na vprašanje, ki se začne z »ali«, najverjetneje »ne«. Tako je tudi tokrat, čeprav dokaz terja nekaj originalnosti.

Označimo z M, R in Z število kameleonov treh barv. Ob poljubnem srečanju kameleonov različnih barv se dve od treh števil zmanjšata za 1, eno pa se poveča za 2. To je ekvivalentno spremembi za -1 po modulu 3. Povedano drugače, ne glede na barvo vpletenih kameleonov se ostanek števil Z, M in R pri deljenju s 3 zmanjša za 1. Ker imajo ta števila na začetku različne ostanke pri deljenju s 3, ni mogoče, da bi v nekem trenutku dve od njih zavzeli ničelno vrednost (to je potrebni pogoj, če naj bi bili vsi kameleoni enake barve).

Janez in Marica

Janez in Marica sta na večerjo povabila še dva para. Ob prihodu so se vsi, ki se niso poznali, rokovali. Marica je nato vsako od oseb vprašala, s koliko ljudmi se je rokovala, in dobila pet različnih odgovorov. S koliko ljudmi se je rokoval Janez?

Rešitev: O rešitvi je najlažje razmišljati ob pomoči diagrama na sliki (prikazano ni pravilna rešitev). Zagotovo vemo le, da se partnerji med seboj gotovo niso rokovali, vse druge kombinacije poznanstev so možne. Vsakdo se je torej rokoval z 0 do 4 osebami, oziroma, ker je Marica dobila 5 različnih odgovorov, vsakemu od navedenih števil pripada natanko eden izmed preostalih udeležencev večerje.



Pa se vprašajmo, ali bi lahko bil Janez neznan vsem gostom? Odgovor je negativen, saj bi v tem primeru ponudil roko vsem. Posledično ne bi obstajal od Marice različen gost, ki se ni rokoval z nikomer. Podobno velja za možnost, ko se Janez ne bi rokoval z nikomer. V tem primeru ne bi obstajal od Marice različen gost, ki ne bi poznal nikogar.

Pripišimo torej rokovanje s 4 osebami nekemu drugemu gostu, rokovanje z nikomer pa njegovemu partnerju (to je edina preostala možnost). To pomeni, da Janez in vsi preostali gostje v tem paru ne poznajo natanko ene, iste osebe. Je to morda edini gost, ki ga Janez ne pozna? Odgovor je znova negativen, saj potemtakem ne bi obstajala od Marice različna oseba, ki se je rokovala natanko trikrat. Končno na tak način zavrnemo tudi možnost, da se je Janez rokoval natanko trikrat, in zaključimo, da se je Janez rokoval natanko dvakrat.

Problem dveh ovojnic

Miha je Maji dal na izbiro dve ovojnici in ji povedal, da je v eni dvakrat toliko denarja kot v drugi. Dovolil ji je tudi, da pokuka v eno izmed njiju. Maja je odprla prvo ovojnico in v njej zagledala 100 evrov, nato pa razmišljala takole: »Če kuverto zamenjam, dobim bodisi 50 bodisi 200 evrov. Ker sta oba zneska enako verjetna, je moj pričakovani dobiček, ki ga zaslužim z menjavo ovojnice, enak 125 evrov. To je več od zneska v ovojnici, ki sem jo odprla, zato se – statistično gledano – bolj splača vzeti drugo ovojnico!« Ali je njeno razmišljanje pravilno?

Rešitev: Bralec, ki ni preveč pod vplivom klasičnega Monty hall problema, bo hitro uganil, da je pravilni odgovor negativen. Problem, s katerim sem se v oddaji soočil tudi sam, pa je, kako to prepričljivo in hkrati laično utemeljiti. V naslednjem odstavku predstavljam svoj najboljši poskus!

Če je Majino razišljanje pravilno, mora delovati tudi ob malce spremenjenih pogojih. Pa denimo, da ji Miha ne dovoli odpreti kuvert. Maja tako v roke vzame prvo ovojnico in razmišlja: »Če je v njej znesek A, me v sosednji kuverti čaka bodisi znesek $2A$ bodisi znesek $A/2$. Ker je pričakovani dobiček enak $\frac{5}{4}A$, se splača kuverto zamenjati!« To tudi stori! Težava nastopi, če začne sedaj, ko v rokah drži drugo kuverto, odločitev še enkrat tehtati. Zgoraj smo opazili, da njen razmislek v resnici ni odvisen od konkretnega zneska, zato bi se morala po njem znova odločiti za menjavo kuverte. To pa je v nasprotju z optimalnostjo prve odločitve.

Sedaj si oglejmo še korektno, matematično razlago. Označimo z A znesek, ki ga je videla Maja, z I in II pa slučajni spremenljivki, ki ponazarjata zneska v obeh ovojnicah. V jeziku matematičnega upanja je Majin razmislek ekvivalenten računu

$$E(II) = (2A) \cdot \frac{1}{2} + (A/2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}A.$$

Ta je seveda pomanjkljiv, saj se v korektni obliki glasi takole

$$\begin{aligned}
E(II) &= E(2A|I < II)P(I < II) + E(A/2|I > II)P(I > II) \\
&= E(2A|I < II) \cdot \frac{1}{2} + E(A/2|I > II) \cdot \frac{1}{2} \\
&= E(A|I < II) + \frac{1}{4}E(A|I > II).
\end{aligned}$$

Maja torej ni upoštevala, da mora za izračun količine $E(II)$ uporabiti matematično upanje in ne konkretne vrednosti spremenljivke $A \neq E(A)$, dodati pa bi morala tudi pogoje, pri katerih jo računa. No, malce smo goljufali tudi mi, saj smo konkretno vrednost $A = 100$ nadomestili z ustrezno slučajno spremenljivko ... Kakorkoli, Maja bi morala razmišljati takole: »V kuvertah sta zneska X in $2X$. Za nobenega od njiju ne morem trditi, da je enak videnemu znesku $A = 100$, zato lahko sklepam le, da bom z menjavo bodisi zaslužila bodisi izgubila X evrov. Ker sta možnosti enako verjetni, je pričakovani dobiček menjave ničeln!« Ekvivalentno,

$$E(II) = E(A|I < II) + \frac{1}{4}E(A|I > II) = X + \frac{1}{4}(2X) = \frac{3X}{2} = E(I).$$

Pri tem smo upoštevali, da je v primeru, ko je znesek v prvi ovojnici manjši (tj. $I < II$), znesek A enak X, v nasprotnem primeru pa $2X$, ter da ob takem načinu računanja enak sklep velja tudi za $E(I)$.

Če ste pravi naravoslovec, vas je ta, korektna rešitev verjetno bolj zadovoljila. Ne vem pa, ali vam bo uspelo z njo o pravilnosti rešitve prepričati tudi vašo ne-matematično okolico. Meni ni, lahko pa poskusite še sami!

Uroš Kuzman

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/