Moteča perspektiva

Peter Legiša

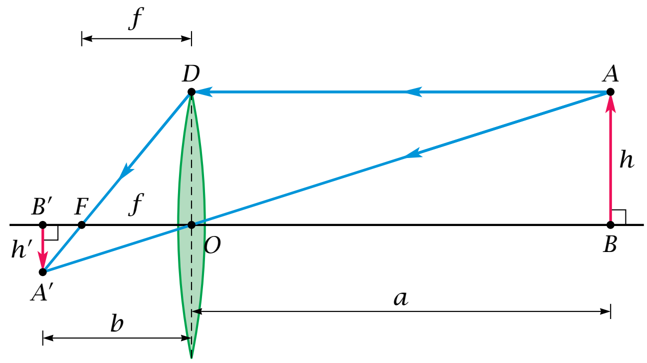
Uvod

Obiskovalci starih mestnih jeder imamo pogosto težave s fotografiranjem stavb. Ni se mogoče dovolj odmakniti za dobro sliko. Pomagajo širokokotni objektivi – tu bomo govorili o »premočrtnih« (»rektilinearnih«) širokokotnih objektivih, ki ravne črte bolj ali manj preslikajo v ravne črte. (Objektivi akcijskih kamer ne sodijo v to kategorijo, prav tako ne t. i. *ribja očesa* – vsi ti ravne črte na robu ukrivijo, da bi na sliko spravili, kar se da veliko opazovanega, in se izognili zatemnitvi slike na robu – t. i. *vinjetiranju*, ki je značilno za polno odprte premočrtne širokokotne objektive.) Tudi če ravne črte ostanejo (skoraj) ravne, so potem na slikah pogosto pravokotna pročelja zmaličena v čudne trapeze ali trapezoide: stranice stavbe navadno lezejo skupaj z višino. Tudi v parkih in gozdovih želja zajeti s širokokotnim objektivom, kar se da veliko, pogosto daje slike, na katerih se drevesa »podirajo«: zgornji deli debel se nagibajo k sredini slike. Včasih so ti efekti zanimivi, pogosto pa moteči. Deloma jih lahko popravimo v nadaljnji obdelavi na računalniku, a tudi to ni zmeraj preprosto. Poglejmo si natančneje, kaj se dogaja pri fotografiranju. Zvedeli bomo, kako lahko te težave preprečimo ali vsaj omilimo.

Upodobitve

Pri srednješolski fiziki obravnavamo upodobitve s tanko zbiralno lečo. Taka leča je neobčutljiva za vrtenje okrog svoje *osi*. Žarke, vzporedne osi leče, zbere v *gorišču* F (slika 1).

Optično središče O leče leži na osi in ima lastnost, da žarki, ki gredo skozi O, ne spremenijo smeri. *Goriščna razdalja* f je razdalja med goriščem in optičnim središčem. Ravnina Σ skozi O, pravokotna na os leče, je *ravnina leče*. Na sliki 1 je B pravokotna projekcija točke A na os leče. Točko A leča



SLIKA 1.
Daljico BA leča preslika na daljico $B'A'$.

upodobi v točko A', katere pravokotna projekcija na os je B'. Naj bosta $a = |OB|$ in $b = |OB'|$ razdalji točk A, A' od ravnine leče. Označimo $h = |AB|$ in $h' = |A'B'|$. Na sliki 1 sta podobna trikotnika OBA in $OB'A'$. Tako je $h : a = h' : b$ ali

$$h' = h\frac{b}{a}.$$

Podobna sta tudi trikotnika FOD in $FB'A'$. Tako je

$$\frac{h}{f} = \frac{h'}{b-f} = \frac{bh}{a(b-f)}.$$

Pokrajšajmo s h, odpravimo ulomke in dobimo $a(b-f) = ab - af = bf$, od tod $bf + af = ab$. Delimo zadnjo enakost z abf, pa dobimo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \tag{1}$$

Lahko je videti, da velja tudi malce splošneje: Za daljico dolžine h, ki je **vzporedna ravnini** Σ **leče** in od nje oddaljena za a, obrnjena slika dolžine h' nastane na razdalji b od leče, velja enačba (**??**) in

$$h' = kh, \quad \text{kjer je} \quad k = \frac{b}{a}. \tag{2}$$

Fotografski objektiv je seveda mnogo bolj zapleten od enostavne leče. V prvem približku pa lahko vzamemo, da še zmeraj deluje kot enostavna leča in da veljajo gornje enačbe. Vzeli bomo torej, da se ravnina Δ, vzporedna ravnini leče in od nje oddaljena za a, preslika na ravnino senzorja (tipala), tako da se vse razdalje pomnožijo s $k = \frac{b}{a}$. Naša preslikava je torej podobnostna transformacija, ki ohranja kote in oblike. (V resnici je objektiv zmožen dobro preslikati le del ravnine Δ v bližini osi objektiva – navadno ravno toliko, da slika pokrije tipalo.)

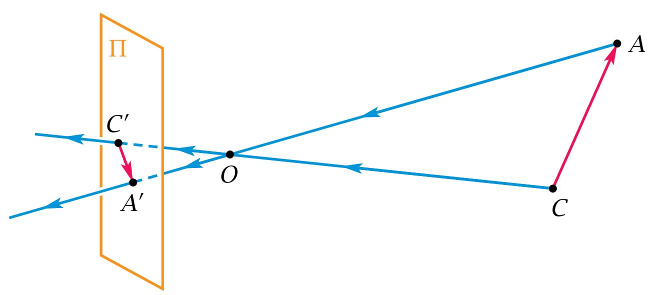
SLIKA 2.
Fotoaparat je bil nastavljen vodoravno, z optično osjo skoraj pravokotno na fasado in je tako praktično verno upodobil zahodno steno fakultete.

Če je ravnina pročelja stavbe vzporedna ravnini tipala, bomo dobili verno sliko, kakršno si želimo. Ker so fasade navadno navpične, je prvi pogoj, da aparat držimo vodoravno. Nekatera stojala imajo vgrajeno vodno tehtnico. Boljši digitalni aparati imajo vgrajeno elektronsko libelo: na zaslonu in včasih tudi v iskalu vidimo nagnjenost aparata – večinoma okrog osi objektiva. Večkrat lahko kontroliramo tudi naklon navzdol ali navzgor, kar je za naše namene še posebej pomembno. Namestiti aparat tako, da je tipalo vzporedno pročelju, tudi ob vseh teh pomagalih zahteva nekaj pozornosti in poskušanja. Premikati moramo kamero toliko časa, da ima pravokotna fasada na sliki spet pravokotno obliko. Pomaga nam lahko pravokotna mreža, ki jo lahko enostavno vključimo v mnoge zaslone in elektronska iskala. Seveda je potem, če slikamo s pločnika, pročelje praktično le v gornji polovici slike – tako kot vidimo na sliki 2. Če nas tisto, kar je niže – na fotografiji sta to cesta in pločnik – ne zanima, bomo pač morali pri nadaljnji obdelavi odrezati. Kljub temu je to **najboljša možna rešitev za fotografa, ki ne premore specialne opreme.**

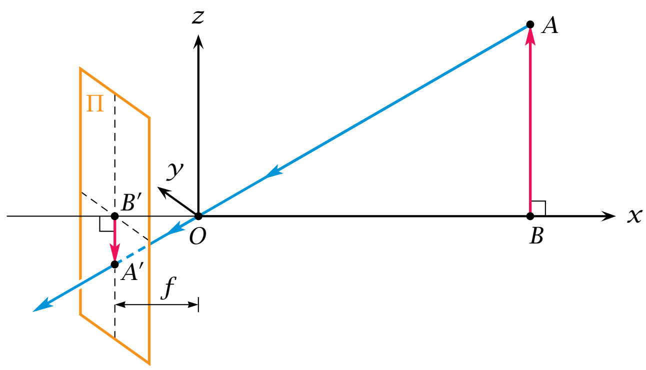
Širokokotni objektiv ima goriščno razdaljo največ nekaj centimetrov. Pri slikanju stavb razdalja a od fasade do ravnine leče meri vsaj nekaj metrov. Zato je po enačbi (**??**) izraz $\frac{1}{a}$ zanemarljiv v primerjavi z $\frac{1}{f}$ in je $\frac{1}{b}$ praktično enak $\frac{1}{f}$, torej b praktično enak f. Vzeli bomo torej po (**??**) kar, velja

$$k = \frac{f}{a}. \tag{3}$$

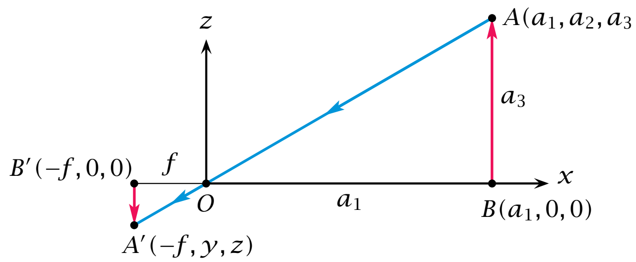
Širokokotni objektivi imajo zaradi tega tudi veliko *globinsko ostrino*, še posebno, če zaslonko nekoliko



SLIKA 3.
Daljica $C'A'$ je središčna projekcija daljice CA na ravnino Π skozi središče O.



SLIKA 4.
Ravnina Π je za f oddaljena od O in pravokotna na os x.



SLIKA 5.
$|A'B'| = |z| = -z$

zapremo. O globinski ostrini sem pisal pred leti v Preseku [?]. Članek je še zmeraj aktualen, le da v njem za dopustno toleranco $U_0 = c$ (največji dovoljeni premer razmazanega krožca – angleško *circle of confusion*) zdaj vzamemo $U_0 = 7s \cdot 10^{-4}$, kjer je s daljša stranica tipala. Če smo res pikolovski glede ostrine in vse presojamo ob 100% pogledu na zaslon, pa premer razmazanega krožca zmanjšamo na dvakratno širino piksla na tipalu. Če ne želite računati sami, vam referenca [?] na internetu daje kalkulator globinske ostrine. Vstaviti morate ustrezne podatke, pa izveste, od kod do kod bo slika ostra. Poiščete lahko tudi *hipergoriščno* razdaljo pri določeni zaslonki, se pravi oddaljenost, na katero moramo izostriti, da bo pas ostrine segal ravno do neskončnosti. Tako na pokrajinskih slikah kar najbolje izkoristimo območje globinske ostrine. Na kratko, velika globinska ostrina pomeni, da bo (ob nastavitvi na hipergoriščno razdaljo) na sliki vse od nekaj metrov oddaljenosti do neskončnosti videti ostro (in pri tem smo glede ostrine bolj zahtevni kot nekoč).

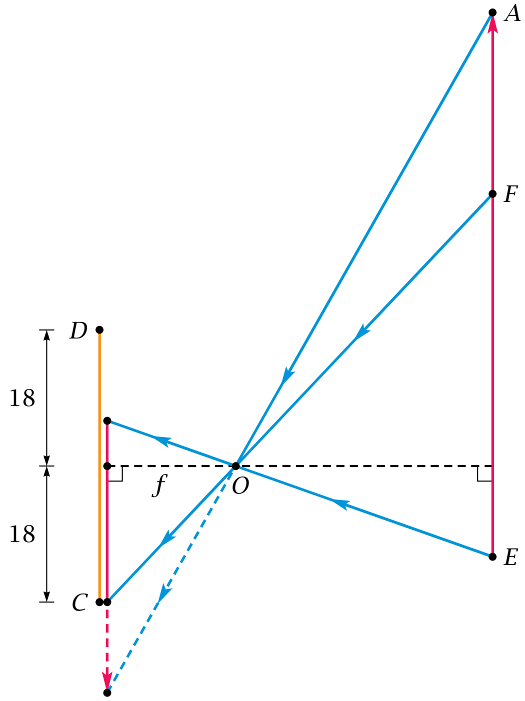
Središčna projekcija

Ker nas zanima le oblika preslikane stvarnosti, si brez večjih težav lahko predstavljamo, da imamo namesto objektiva fotoaparata majhno luknjico v točki O. Ta luknjica je za f oddaljena od tipala. Skratka, fotoaparat nadomestimo s *kamero obskuro* (iz latinskega *camera obscura* = zatemnjena soba). Angleško je to *pinhole camera*, ker luknjico lahko naredimo z buciko. Kamera obskura je škatla v obliki kvadra. Na eni steni imamo v sredini luknjico, na nasprotni steni, ki je navadno iz mlečnega stekla ali prosojnega papirja, pa lahko, pokriti s črnim pregrinjalom, opazujemo obrnjeno, šibko osvetljeno sliko stvarnosti. Upodabljanje skozi luknjico je primer **središčne projekcije**. Sliko točke A v prostoru dobimo tako, da potegnemo iz A skozi središče O premico. Njeno presečišče s tipalom oziroma z zadnjo steno kamere obskure je središčna projekcija A' točke A na ravnino Π tipala. Na sliki 3 sta A', C' projekciji točk A, C. Premica skozi A in C se preslika na premico, ki je presečišče ravnine Π in ravnine skozi točke A, C, O, se pravi na premico skozi točki A', C'. Torej je daljica $C'A'$ projekcija daljice CA.

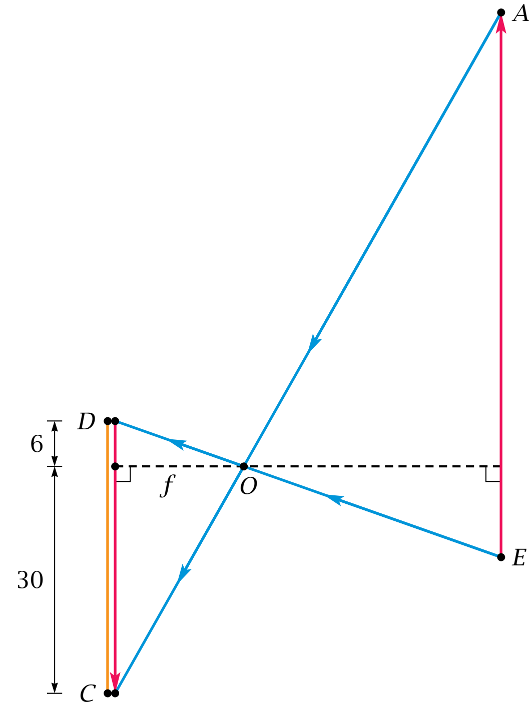
Tako smo se znašli v čisti matematiki – geometriji. Lastnosti središčne projekcije so v 15. stoletju odkrili in prenesli v uporabo italijanski renesančni slikarji in arhitekti, ki so bili obenem dobri matematiki. Lepe ilustracije središčne projekcije najdemo v delu slavnega slikarja Albrechta Dürerja, recimo [?]. Dürer je napisal eno prvih knjig o perspektivi. Mnogo snovi o središčni projekciji, predvsem v povezavi z zgodovino in s slikarstvom, najdemo v prosto dostopni britanski poljudni matematični reviji *Plus*. Članek [?] ima lepe ilustracije, je pa praktično brez formul.

Postavimo koordinatni sistem tako, da je središče O v izhodišču koordinatnega sistema, os z navpična, os y vzporedna spodnjemu robu tipala in os x pravokotna na tipalo (slika 4). Ker je ravnina Π tipala za f oddaljena od O, imajo vse točke na tej ravnini prvo koordinato enako $-f$. Velja tudi sklep v nasprotni smeri: vse točke $(-f, y, z)$ ležijo na Π. Pravimo, da ima ravnina Π *enačbo* $x = -f$.

Vzemimo na sliki 4 točko $A(a_1, a_2, a_3)$, pri čemer



SLIKA 6.
Na senzor CD se upodobijo le točke daljice EA od E do F.



SLIKA 7.
Na senzor CD se zdaj upodobi celotna daljica EA.

$a_1 \neq 0$, in naj bo $B(a_1, 0, 0)$ pravokotna projekcija točke A na os x.

Na sliki 5 imamo pravokotno projekcijo slike 4 na ravnino xz. Označimo $A'(-f, y, z)$. Pravokotna trikotnika $OB'A'$ in OBA sta podobna. Razdalja od B' do A' je $|z| = -z$, zato je

$$\frac{-z}{f} = \frac{a_3}{a_1}$$

in tako $z = -\frac{a_3}{a_1} f$. Enako vidimo, da je $y = -\frac{a_2}{a_1} f$. Torej je

$$A'(-f, -\frac{a_2}{a_1} f, -\frac{a_3}{a_1} f). \tag{4}$$

Še laže to vidimo z vektorji: vektorja $\vec{OA'}$ in $\vec{OA}$ sta kolinearna, zato je $\vec{OA'} = t\vec{OA}$. To sta krajevna vektorja točk A' in A, torej je $(-f, y, z) = t(a_1, a_2, a_3) = (ta_1, ta_2, ta_3)$. Primerjajmo prvi koordinati: $ta_1 = -f$, zato je $t = -\frac{f}{a_1}$ in je krajevni vektor točke A' enak

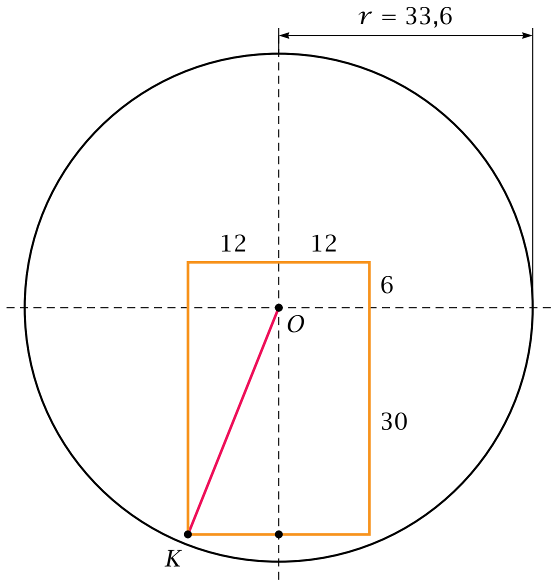
$$-\frac{f}{a_1}(a_1, a_2, a_3).$$

Vzporedni premik objektiva

Denimo, da je tipalo vzporedno pročelju in da je spodnji rob tipala vodoraven, ne moremo pa se dovolj odmakniti, da bi zajeli celotno fasado. Na sliki 6 daljica EA predstavlja fasado, daljica CD pa senzor.

Ena možnost, da v takih razmerah dobimo verno sliko fasade, je ta, da objektiv fotoaparata (ali pa luknjico kamere obskure) premaknemo navzgor vzporedno tipalu – kot na sliki 7.

Angleška beseda za vzporedni premik je *shift*. To je mogoče s tako imenovanimi *shift objektivi*, konstruiranimi predvsem za kamere polnega formata s tipalom velikosti (približno) 36 mm × 24 mm. Firma Nikon za shift objektive uporablja oznako PC (Perspective Correction). Seveda pa mora slika, ki jo naredi premaknjeni objektiv, še zmeraj pokriti tipalo. Tako, recimo, Canonov objektiv TS-E 17 mm (TS pomeni tilt-shift) naredi okroglo sliko s premerom 67,2 mm. (Zaradi tako velike slike in zaradi dodatne precizne mehanike tak objektiv ni poceni.) Ta slika,



SLIKA 8.
Krog predstavlja sliko, ki jo na ravnino tipala vrže objektiv. Pravokotnik predstavlja tipalo.

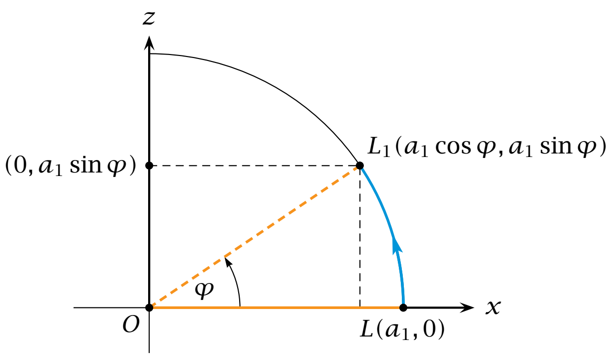
če objektiv ni premaknjen, zlahka pokrije tipalo velikosti 24 mm × 36 mm, ki ima presečišče diagonal v središču O kroga. V tem primeru senzor sega v smeri vodoravne (daljše) stranice 18 mm levo in 18 mm desno od O. Objektiv zdaj vzporedno premaknemo v smeri daljše stranice tipala za 12 mm. Tako se krog slike premakne glede na tipalo za 12 mm. Zdaj na sliki 8 senzor sega (18-12) mm = 6 mm levo in (18+12) mm = 30 mm desno od O . Slika še zmeraj pokriva celoten senzor. Res, po Pitagorovem izreku je na naši sliki $|OK| = \sqrt{30^2 + 12^2} \approx 32{,}3$ mm, kar je manj od polmera slike, ki znaša 33,6 mm. Tako lahko verno poslikamo precej višje stavbe in obenem zmanjšamo delež nezanimivih tal pred njimi.

Fotograf Branko Cvetkovič je jeseni 2005 v Narodni galeriji v Ljubljani razstavil enkratne arhitekturne fotografije [?], narejene z veliko profesionalno kamero. (Na taki kameri ne premikamo in nagibamo samo objektiva, ampak lahko premikamo tudi kaseto s filmom). Posnel je, recimo, tri navpične verne delne slike vhodnega pročelja Narodne in univerzitetne knjižnice v Ljubljani in jih zlepil v eno samo visoko kakovostno verno sliko. Ker je pred to ogromno fasado zelo malo prostora in je težko dobiti dovolje-

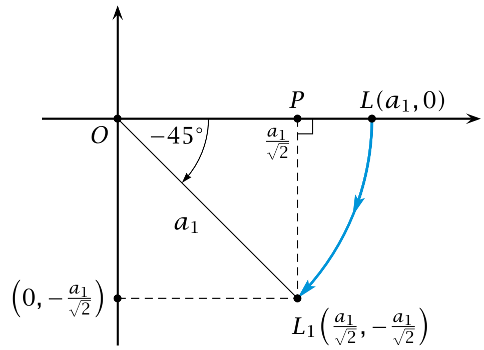
SLIKA 9.
Salendrova hiša.

nje za slikanje iz več različnih oken nasproti stoječih stavb, je bil ta dosežek tudi za poznavalce izjemen.

Žal večina med nami nima take opreme in se pogosto ne moremo dovolj odmakniti, da bi verno zajeli celotno stavbo. Potem moramo pač nagniti aparat navzgor. Večina bo to storila tudi intuitivno, saj nima interesa slikati tal pred stavbo. Na sliki 9 imamo sliko Salendrove hiše v bližini ljubljanskih Križank. Pritličje hiše je še srednjeveško, zgornji baročni del je bil dokončan v sredini 18. stoletja. Stoji v ozki in večino dneva temačni Križevniški ulici. Ujel sem redko uro, ko to lepo obnovljeno pročelje v celoti obsije sonce. S svojim najširšim objektivom sem



SLIKA 10.
Točko L zavrtimo za kot φ okrog O v točko L_1.



SLIKA 11.
Točko L zavrtimo za kot $-45°$ okrog O v točko L_1.

se pritisnil ob nasprotno hišo in nagnil kamero, pa vseeno nisem mogel povsem zajeti celote. Kot pri vsakem nagibu je prišlo do (nezaželenih) posledic, o katerih smo govorili. Kaj je vzrok in kako lahko preračunamo te spremembe?

Vrtenja

Zavrtimo točko $A(a_1, a_2, a_3)$ okrog osi y za kot φ. Druga koordinata točke se pri vrtenju okrog osi y ne spremeni. Omejimo se torej na ravnino xz. Najprej zavrtimo točko točko $L(a_1, 0)$ v ravnini xz za kot φ okrog O (na sliki 10). Koordinati zavrtene točke sta po definiciji kotnih funkcij sinus in kosinus enaki

- $L_1(a_1\cos\varphi, a_1\sin\varphi)$.

Če je, recimo, $\varphi = -45°$, je $L_1(a_1\frac{\sqrt{2}}{2}, -a_1\frac{\sqrt{2}}{2})$ (slika 11). Torej je $\cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

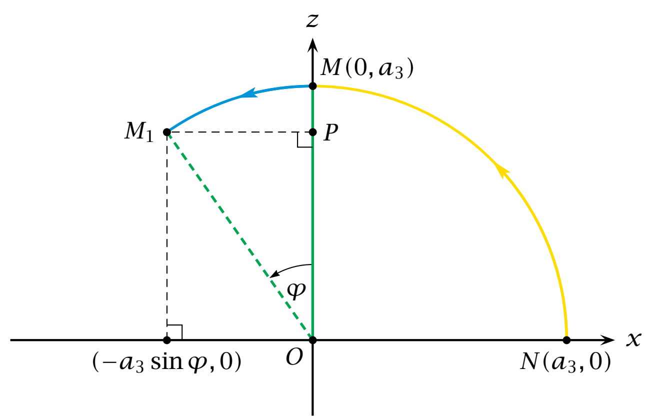
Zavrtimo zdaj točko $M(0, a_3)$ za kot φ okrog O (slika 12).

Očitno je končni učinek enak, kot če bi zavrteli točko $N(a_3, 0)$ za kot $\varphi + 90°$. Torej je

- $M_1(a_3\cos(\varphi + 90°), a_3\sin(\varphi + 90°))$.

Po formulah, ki jih spoznate v srednji šoli (ali po sliki 12) je tako $M_1(-a_3\sin\varphi, a_3\cos\varphi)$.

Krajevni vektor točke $R(a_1, a_3)$ je vsota krajevnih vektorjev točk L in M (slika 13). Na sliki 14 vidimo, da pri vrtenju za kot φ pravokotnik $OLRM$ preide v



SLIKA 12.
$M_1(-a_3\sin\varphi, a_3\cos\varphi)$

pravokotnik $O_1L_1R_1M_1$. Zato je

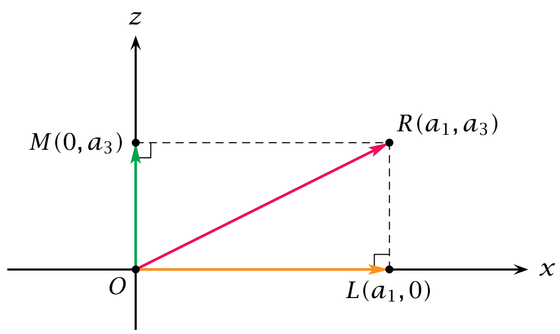
- $\vec{OR_1} = \vec{OL_1} + \vec{OM_1} =$
$$(a_1\cos\varphi - a_3\sin\varphi, a_1\sin\varphi + a_3\cos\varphi).$$

Prenesimo zdaj izračunano v prostor:

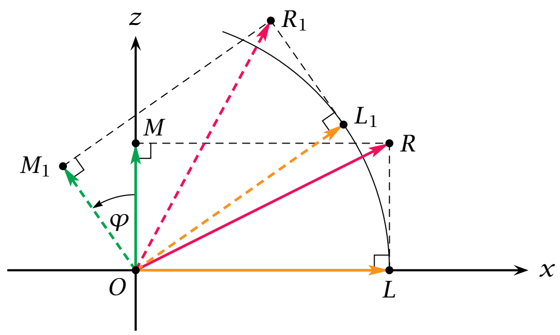
Če točko $A(a_1, a_2, a_3)$ zavrtimo okrog osi y za kot φ, dobimo torej točko

- $A_1(a_1\cos\varphi - a_3\sin\varphi, a_2, a_1\sin\varphi + a_3\cos\varphi)$. (5)

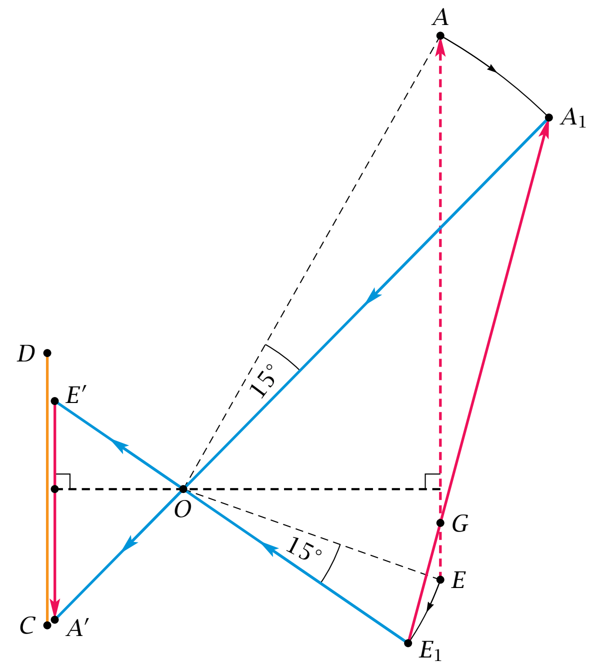
Privzemimo, da je fasada pravokotnik P z osnovnico vzporedno osi y in s stranskim robom vzporednim osi z. Zavrtimo aparat okrog osi y, ki gre skozi



SLIKA 13.
$\vec{OR} = \vec{OL} + \vec{OM}$



SLIKA 14.
Pravokotnik $OLRM$ zavrtimo v pravokotnik $O_1L_1R_1M_1$



SLIKA 15.
Zavrtimo EA za $-15°$ okrog O, da dobimo E_1A_1.

optično središče O objektiva, navzgor za kot φ. Za matematike enakovredno lahko na sliki 15 pravokotnik P zavrtimo okrog O za kot $-\varphi$. (Na sliki 15 φ znaša 15 stopinj.) S tem dobimo na senzor CD celotno pročelje E_1A_1.

Spodnji rob E_1 fasade se z vrtenjem približa ravnini xz leče, zgornji rob A_1 pa oddalji. Po enačbi (**??**) se dolžine daljic, vzporednih tipalu, pomnožijo z $\frac{f}{d}$, kjer je d razdalja od ravnine xy. To pomeni, da se bo na sliki zaradi vrtenja spodnji rob podaljšal, zgornji skrajšal. Tako na sliki fasada dobi obliko trapeza. Točka G na sliki 15 leži tudi na daljici E_1A_1 in je enako oddaljena od ravnine leče kot celotna daljica EA. Vidimo, da se na fotografiji pročelje pod točko G začne razširjati, nad G pa se začne krčiti – v primerjavi s sliko, narejeno s kamero brez nagiba. Mi znamo izračunati koordinate zavrtenih oglišč pravokotnika. Od tod lahko po formuli (**??**) izračunamo obliko slike.

Na fotografiji 16 imamo ekstremen primer. Fotoaparat, postavljen na isto mesto kot v fotografiji 2, opremljen z ultraširokokotnim objektivom, sem močno nagnil navzgor (skoraj za 40° – podobno kot v nalogi na koncu članka). Naknadno sem odrezal večino neba nad stavbo.

Poprava perspektive

Če imamo na sliki okrog »zmaličenega« pročelja še nekaj prostora, lahko na računalniku (s programi za obdelavo slik) zmanjšamo oženje stranic fasade z višino. Sam imam v svojem standardnem programu (Lightroom 6) še najboljše izkušnje z ukazom *Auto* v *Lens corrections/Basic*. Deluje v sorazmerno velikem deležu primerov. (Na fotografiji 16 pa je to udobno

SLIKA 16.
Ekstremen nagib da nenaravno sliko fasade.

SLIKA 17.
Platno fotografirano od spodaj je videti precej deformirano.

orodje odpovedalo, ker avtomobili zakrivajo podstavek stavbe.) Omenjeno orodje avtomatično prepozna obrise fasade in napravi spodnji in zgornji rob fasade (približno) vodoraven in precej zmanjša nagib navpičnih črt. Primer: Pravokotno slikarsko platno z višino 58,5 cm in širino 49 cm (razmerje višina : osnovnica je približno 1,19) sem slikal z ultraširokokotnim objektivom od spodaj s precej nagnjeno kamero in dobil fotografijo 17.

Slika platna na fotografiji 17 je (približno) enakokrak trapez z razmerjem $v : a \approx 0{,}99$ in $v : c \approx 1{,}29$. Tu sta a, c osnovnici trapeza. Z ukazom *Auto* sem dobil enakokrak trapez na sliki 18, ki ima razmerje $v' : a' \approx 1{,}18$ in $v' : c' \approx 1{,}27$.

Lepo vidimo, kako je orodje skrčilo spodnji del slike. Dobljeno sliko je zato potrebno obrezati. To sem naredil ročno, ker samodejno obrezovanje ni ustrezalo. Tako sem dobil fotografijo 19, ki je videti precej bolj naravna kot original.

Da bi slika dobila pravokotno obliko, sem se začetne slike 17 lotil z ročnim popravljanjem navpične perspektive (*Lens corrections/Manual/Vertical*) in v Lightroomu pridelal sliko platna kot pravokotnik z razmerjem višina : osnovnica 1,33 (slika 20). Rezultat je preveč raztegnjen v navpični smeri.

Če sem pa začel z avtomatično izboljšano sliko 19, je po ročni poravnavi v pravokotnik to razmerje znašalo približno 1,22 (slika 21), torej blizu pravemu rezultatu.

Ker poznam razmerje stranic originala, sem v Lightroomu (*Lens corrections/Manual*) uporabil drsnik *Aspect* in vidno zgrešeno sliko 20 raztegnil v vodoravni smeri v fotografijo 22, ki ima približno prave proporce platna. V Photoshopu bi isto naredil z orodjem *Edit/Transform/Scale*.

Z nekaj več truda bi do tega rezultata prišel tudi z orodjem za popravljanje perspektive v prostokodnem programu Gimp, ki je poslovenjen. Po mojih izkušnjah vsi ti postopki delujejo tem bolje, čim manj je slika deformirana. Kadar srečate fotografijo neverjetno vitke manekenke, pa se spomnite, da z zgoraj omenjenimi orodji lahko zožimo tudi osebe.

Slika 22, ki sem jo pridelal, vseeno ne deluje najbolje, saj je zgornji beli del okvirja preširok, spodnji →

SLIKA 18.
Avtomatična izboljšava perspektive skrči spodnji del, razširi zgornji del slike 17.

SLIKA 19.
Z obrezovanjem fotografije 18 smo dobili kar soliden rezultat.

preozek. Razlog: okvir ni ravninski objekt in precej štrli ven iz ravnine platna. Pri slikanju od spodaj je bil del beline v okvirju zakrit. Izgubljene informacije ne moremo enostavno priklicati nazaj! Ta problem bi se lahko pojavil tudi, če bi senzor bil vzporeden sliki. Idealno bi bilo, da je senzor vzporeden sliki, da optična os seka sliko v sredini in da slikamo z večje razdalje. Če slike ne moremo sneti in je visoko pod stropom, se je najbolje odmakniti in uporabiti teleobjektiv. Teoretično morda lahko dobimo boljši rezultat s slikanjem z več različnih točk (in/ali po kosih) in z združevanjem rezultatov, ampak to je posebna zgodba.

Na internetu najdemo precej literature o tem, kako iz središčne projekcije ravninskega objekta rekonstruiramo verno sliko originala. Kratko temu rečejo *rektifikacija (poravnava)*.

Predvsem na področju **računalniškega vida** nastajajo zmeraj nove metode in algoritmi za poravnavo poševno posnete slike, saj ima to veliko praktično vrednost. V zapisu [?] imamo metodo, ki poravna sliko dela ravnine, če na sliki lahko označimo dva para (v naravi) paralelnih daljic, tako da se para sekata, in dva prava kota, ki nimata vzporednih krakov. Taka označitev ne bo problem, če imamo na na sliki upodobljen kvadrat (dodatni pravi kot je v presečišču diagonal kvadrata). Namesto dveh parov paralelnih daljic in enega pravega kota lahko seveda kot podatek (glej recimo [?]) označimo štiri oglišča na podobi nekega pravokotnika. Dodaten pravi kot pa lahko nadomestimo s podatkom o razmerju stranic danega pravokotnika.

V našem primeru smo pri poravnavanju slikarskega platna najprej uporabljali le podatek o dveh parih vzporednih daljic – robovih platna in enem pravem kotu (med robovoma). To je bilo premalo, zato imata sliki 20 in 21 sicer pravokotno obliko, a napačne proporce.

SLIKA 20.
Poravnava fotografije 17 je preveč raztegnila sliko v navpični smeri.

SLIKA 21.
Poravnava slike 19 je zelo blizu originalnim proporcem.

Naloga

V prostoru imamo pravokotnik z oglišči

- $R(4,-2,-2), S(4,2,-2), T(4,2,4), U(4,-2,4)$.

Ker imajo vse štiri točke enako prvo koordinato, je pravokotnik vzporeden ravnini yz (in leži v ravnini $x=4$).

- Središčna projekcija (skozi izhodišče O koordinatnega sistema) na ravnino $x=-1$ je štirikotnik $R'S'T'U'$. Določi koordinate njegovih oglišč in dolžine stranic. Nariši sliko tega štirikotnika v ravnini $x=-1$.
  Pravokotnik $RSTU$ zavrtimo okrog osi y za kot $-45°$. Dobimo pravokotnik $R_1S_1T_1U_1$.
- Določi koordinate oglišč zavrtenega pravokotnika. Središčna projekcija pravokotnika $R_1S_1T_1U_1$ (skozi O) na ravnino $x=-1$ je štirikotnik $R''S''T''U''$.
- Določi koordinate oglišč tega zadnjega štirikotnika. Pokaži, da je trapez. Določi osnovnici in višino trapeza.

Literatura

[1] S. F. Ray, Applied photographic optics, Second ed., Focal Press, Oxford 1995.

[2] P. Legiša, FOTOGRAFIJA IN MATEMATIKA, 3. del - globinska ostrina, Presek 25 (4), 1998, str. 194-201. `http://www.presek.si/25/1340-Legisa.pdf`

[3] Kalkulator globinske ostrine: `http://www.giangrandi.ch/optics/dofcalc/dofcalc.shtml`

[4] Ilustracija središčne projekcije iz leta 1525: `https://de.wikipedia.org/wiki/Perspektive#/media/File:358durer.jpg`

[5] Branko Cvetkovič, En face, fotografska razstava, Narodna galerija 11. do 25. november 2005 `http://www.ng-slo.si/si/razstave/razstava/en-face?id=1374`

SLIKA 22.
Sliko 20 smo raztegnili do pravega razmerja stranic slikarskega platna.

[6] A. Criminisi, R. Thomas, Getting into the picture, Plus magazine, 2003: `https://plus.maths.org/content/getting-picture`

[7] R. Zhang, Image Rectification: Remove Projective and Affine Distortions, Homework 2, Purdue university, 2008: `https://engineering.purdue.edu/kak/computervision/ECE661.08/solution/hw2_s2.pdf`

[8] S. K. Badam, ECE661 Computer Vision Homework - 3, Purdue university, 2012: `https://engineering.purdue.edu/kak/computervision/ECE661_Fall2012/solution/hw3_s2.pdf`

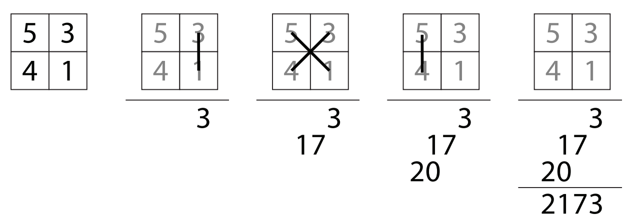
× × ×

Hitro množenje velikih števil

Boštjan Gabrovšek in Aljoša Peperko

→ Običajni uveljavljeni način množenja dveh števil temelji na množenju enic, desetic, stotic enega izmed števil z drugim številom in seštevanju teh vmesnih zmnožkov. Alternativni način množenja števil, ki ga bomo opisali v tem prispevku, naj bi bil [2] predstavljen že v približno tri tisoč let stari indijski knjigi. Temelji na naravni ideji, da najprej izračunamo število enic, desetic, stotic v zmnožku in jih nato seštejemo. Ta metoda je precej zanimiva tudi zato, ker si jo ni težko shematično zapomniti.

Za začetek si poglejmo primer, kako zmnožimo števili 53 in 41. Števili podpišemo. Najprej zmnožimo enice $1 \cdot 3 = 3$. Nato izračunamo $5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 17$, kar nam pove, da imamo v zmnožku 17 desetic. Izračunamo še $5 \cdot 4 = 20$ (20 stotic), z zamikom v levo podpišemo in seštejemo dobljene vmesne zmnožke ter dobimo rezultat 2173. Shematično lahko to množenje predstavimo »preko diagonal«:



SLIKA 1.
Primer množenja dvomestnih števil $53 \cdot 41$

Tromestni števili 351 in 817 zmnožimo na naslednji način: