

Univerza v Mariboru  
Fakulteta za gradbeništvo

Igor Špacapan

# **TEHNIŠKA MEHANIKA**

OSNOVE STATIKE IN STATIČNO DOLOČENE LINIJSKE KONSTRUKCIJE

Maribor 2003

Izdala: Univerza v Mariboru  
Fakulteta za gradbeništvo  
Smetanova 17, 2000 Maribor

Avtor: Igor Špacapan

Naslov publikacije: **Tehniška mehanika**  
Podnaslov: Osnove statike in statično določene linijske konstrukcije

Vrsta publikacije: univerzitetni učbenik

Recenzenti: dr.Karl Gotlih  
dr.Miroslav Premrov  
prof.dr.Andrej Umek

Lektoriranje: prof. Janez Švajncer

Datum izdaje: November 2003

Medij: Elektronska izdaja v pdf formatu v javnem spletu na naslovu:  
<http://fg.uni-mb.si/predmeti/TMVS>

CIP - kataloški zapis o publikaciji  
Univerzitetna knjižnica Maribor

624.04(075.8)

ŠPACAPAN, Igor, 1946-  
Tehniška mehanika : osnove statike in statično  
določene linijske konstrukcije / Igor Špacapan. -  
Maribor : Fakulteta za gradbeništvo, 2003

Dostopno na: <http://fg.uni-mb.si/predmeti/TMVS>

ISBN 86-435-0589-7

COBISS.SI-ID 51983361

ISBN 86-435-0589-7



## PREDGOVOR

Pričujoči tekst je pisan za univerzitetni študij tehnike kot osnovni tekst iz mehanike, ki se predava v prvem letniku študija. V prvi vrsti je namenjen študiju na strokovnem programu gradbeništva. Tekst podrobno obravnava samo **statično določene probleme**, ki jih analiziramo izključno samo v okviru Newtonovih zakonov. Tekst sestoji vsebinsko iz dveh delov. **Prvi del obravnava splošno probleme** točkovnih teles in trdnih oziroma togih teles, ki so predmet študija v vseh vejah tehnike in predstavlja del osnovnega znanja, potrebnega pri vseh strokovnih predmetih v gradbeništvu. **Drugi del je strokoven** in obravnava linijske elemente in linijske konstrukcije.

Tekst je napisan v precejšnji meri **samozadostno**. Za njegovo razumevanje je potrebno samo znanje iz osnov višje matematike in osnov fizike, ki se predava v prvih letnikih. Diferencialne enačbe in nekateri integrali se predavajo v drugem letniku, vendar je za razumevanje teksta potrebno samo najosnovnejše razumevanje tega dela matematike. Najosnovnejšo matematično orodje so vektorji. Potrebna teorija vektorske algebre je podana v dodatku. Ta dodatek, kot tudi dodatek iz fizike, je pisan predvsem iz stališča pomena in uporabnosti te teorije za reševanje inženirskih problemov. V teh dodatkih kot tudi v glavnem tekstu je posvečena posebna pozornost preslikavi matematičnih in fizikalnih pojmov in zakonitosti na inženirske probleme in obratno. Mnogo truda je vloženo tudi za to, da bralec razume kako se tvorijo fizikalni in nato računski modeli inženirskih problemov ter zakaj in kako se ti modeli lahko še poenostavijo. Razlaga teorije se po uvodnih pojasnilih na mnogih mestih nadaljuje ali pa pogloblja na številčnih primerih in vključuje neobičajno veliko število ilustracij. Takšen način je lahko moteč za bralce z dobrim predznanjem in z ustrezno sposobnostjo abstraktnega razmišljanja – predvsem pa za tiste bralce, ki obravnavano snov že obvladajo in imajo tudi ustrezno nadaljnje strokovno znanje. Na drugi strani pa sem prepričan, da je prav razlaga na konkretnih številčnih primerih zelo dobrodošla za študente, ki se na univerzitetni nivo razmišljanja šele navajajo. To mi potrjujejo moje dolgoletne izkušnje pri podajanju snovi študentom, ki so na začetku študija. Tehniška mehanika je eden izmed prvih predmetov v študijskem programu, zato verjamem, da je takšno podajanje snovi lahko dobrodošlo ob uvajanju v študij. Kljub temu pa je tekst pisan tako, da na koncu le omogoča zadosti temeljito znanje na ustreznem nivoju. Za takšen pristop k podajanju snovi, ki je po mojem mnenju za avtorja veliko težji, sem se zgledoval po znanih in odlično napisanih učbenikih, ki sta jih napisala Kreycszig [3] in Hamming [8], za bolj zahtevno snov. Sodbo o tem, koliko mi je takšen način podajanja uspel, pričakujem predvsem od študentov, ki jim je učbenik namenjen, in njihovega znanja, ki ga bodo pridobili. Pripombe, ki jih lahko bralci sporočajo v mapo na internetnem naslovu tega teksta, bom hvaležno sprejel. Hvaležen bom tudi za sporočila o morebitnih napakah, ki so skoraj neizbežne pri tako obsežnem tekstu.

Priporočljivo je, da se **branje teksta** začne z matematičnim dodatkom, nato se prebere fizikalni dodatek in šele po tem po vrsti glavni tekst. Bralec, ki matematiko in fiziko dobro obvlada, naj se v dodatkih koncentrira samo na njun pomen za inženirsko uporabo.

Tekst je opremljen s številnimi in tudi obširnimi **računskimi zgledi**, ki so dveh vrst. Prvi ilustrirajo in poglobljajo razumevanje teorije in nimajo posebnega praktičnega pomena. Nekaj pa je zgledov, ki so posebno pogosti v inženirski praksi. Vendar pa na takih praktičnih primerih ni mogoče zgraditi solidnega teoretičnega znanja, ki edino zagotavlja korektne rešitve vseh inženirskih problemov.

**Računski rezultati** so v mnogih primerih zaokroženi na dve mesti. Decimalna števila so zapisana s piko, kadar pa je v izrazu s piko označeno množenje, so decimalna števila označena z vejico. V nekaterih primerih je pomen pike in vejice razumljiv iz konteksta. Nekatere računske analize elementov in konstrukcij v zadnjih dveh poglavjih so izvedene s pomočjo programa AlfaCAD.

Številne slike in **grafične rešitve** v tekstu služijo predvsem dodatnemu pojasnjevanju in ilustraciji teorije in inženirske analize. Pomen grafičnih metod za reševanje problemov je z uporabo računalnikov in predvsem vektorske algebre praktično preživet. Vendar pa grafične skice še ostajajo zelo pomembne za študij problemov in koncipiranje rešitev.

**Pri prvem branju** ni potrebno, morda pa za študente, ki se z obravnavanj snovjo prvič srečajo, tudi ni možno natanko razumeti vse snovi in težjih računskih primerov vključno z inženirskimi aplikacijami, ker take snovi ni mogoče in tudi ni dobro razumeti strogo sekvenčno. V drugem branju pa je možno tekst razumeti v celoti. Smatram, da je minimalno kvalitetno znanje inženirja doseženo tedaj, ko zna zanesljivo oceniti, do katere faze je inženirska analiza korektna in kateri rezultati so pravilni. V tem smislu je potrebno obvladati osnove, nekatere posebnosti in težji primeri pa lahko ostanejo "bele lise", čeprav so v tekstu pojasnjeni. Snov, zajeta v tekstu, je seveda samo osnova za nadaljnji študij mehanike in strokovnih predmetov. Zaradi tega sem opozoril in podal osnovna pojasnila za probleme, ki jih v celoti lahko analiziramo šele z znanjem, ki presega okvirje tega teksta. S tem sem želel doseči, da se bralec zaveda, da je tehniška mehanika samo nujni in osnovni del znanja potrebnega za reševanje inženirskih problemov, ki so praviloma bolj kompleksni.

**Označevanje v tekstu.** Poglavja, zgledi, obrazci in slike so oštevilčeni. Tako oznaka "1.2.-3b" pomeni sledeče: številki pred pomišljajem podajata prvo poglavje in drugo podpoglavje. Za pomišljajem je zaporedna številka obrazca v tekočem poglavju, b pa je oznaka, ko ta obrazec vsebinsko sestoji iz dela a in b. Oznaka 1.2.Z3-4 pomeni: Z3 je tretji zgled v poglavju 1.2, število 4 za pomišljajem pa pomeni četrta slika oziroma obrazec v tem zgledu. Zaradi enostavnosti in preglednosti so mnogokrat izpuščene oznake za poglavja, ko se nanašajo na tekoče poglavje ali pa je iz konteksta jasno za katero poglavje gre.

**Literatura** je navedena na koncu glavnega teksta.

**Zahvale.** Za pregled dodatka iz matematike ter napotke se zahvaljujem prof.dr.B.Zalarju in dr.M.Mencingerju, za pregled dodatka iz fizike pa doc.dr.D.Korošaku.

Igor Špacapan

## VSEBINA

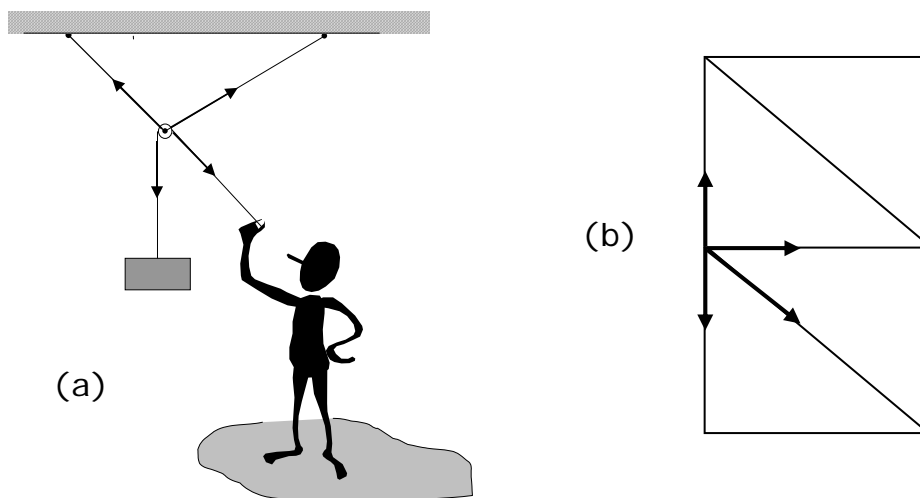
<b>1.SILE S SKUPNIM PRIJEMALIŠČEM</b>	<b>1</b>
1.1. Uvod	
1.2. Rezultanta	2
1.3. Izračun velikosti reakcijskih sil, kjer poznamo njihove smeri	19
1.4. Posebni problemi	33
<b>2.SILE BREZ SKUPNEGA PRIJEMALIŠČA</b>	<b>46</b>
2.1. Uvod	
2.2. Navor sile	46
2.3. Dvojica sil	55
2.4. Statično ekvivalentni sistemi sil in momentov	57
2.5. Lega rezultante in dinama	59
2.6. Vrste obtežb	65
2.7. Težišče	70
2.8. Enačbe gibanja	78
2.9. Enačbe statičnega ravnotežja	83
2.10. Statično ekvivalentni sistemi enačb	87
2.11. Nabor neznanih sil	89
<b>3.PODPORE</b>	<b>95</b>
3.1. Uvod	
3.2. Definicija in tipi podpor	102
3.3. Stabilnost konstrukcije ter lega in število podpor	107
3.4. Slabo podprta telesa	119
3.5. Definiranost problemov	121
<b>4.LINIJSKI ELEMENTI</b>	<b>124</b>
4.1. Uvod	
4.2. Definicija linijskih elementov	124
4.3. Analiza linijskih elementov	124
4.4. Lokalni koordinatni sistem	126
4.5. Redukcija obtežbe na os elementa	128
4.6. Definicija rezultatnih sil in momentov v presekih	135
4.7. Diferencialne enačbe ravnotežja	151
4.8. Poimenovanje linijskih elementov	161
4.9. Risanje diagramov s superpozicijo	165
4.10. Direktna metoda	168
4.11. Segmentna metoda	171
4.12. Določenost notranjih količin segmenta	172
<b>5.LINIJSKE KONSTRUKCIJE</b>	<b>174</b>
5.1. Uvod	
5.2. Analiza konstrukcij	175
5.3. Stopnja statične nedoločenosti	176
5.4. Značilni tipi konstrukcij	179
5.4.1. Tričlenski lok	180
5.4.2. Paličja	185
5.4.2.1. Vozliščna metoda	186
5.4.2.2. Ritterjev rez	188
5.4.3. Okvirne konstrukcije	189
5.4.4. Kompleksne konstrukcije	192

DODATKI:

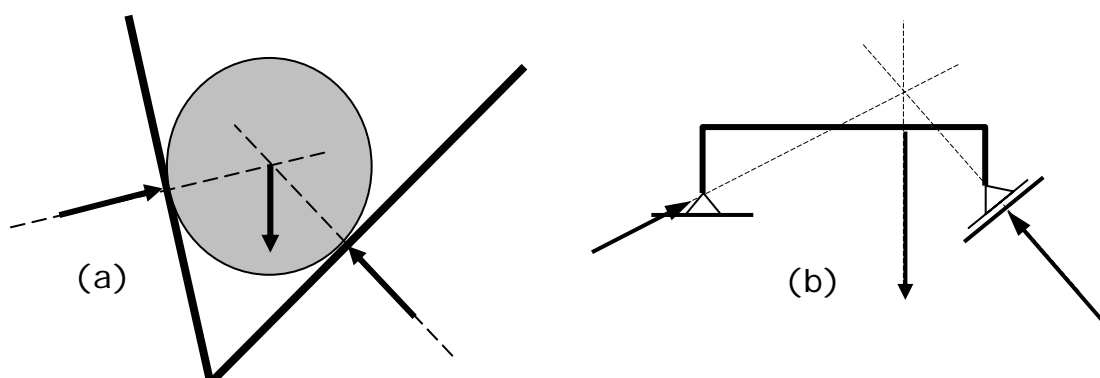
<b>(M) MATEMATIKA</b>	<b>201</b>
(A) OSNOVE VEKTORSKE ALGEBRE	
(A1) Osnovni koncept vektorjev	
(A2) Definicija vektorske algebre	
(A3) Baze vektorskega prostora	
(A4) Produkti med vektorji	
(A4.1) Skalarni produkt	
(A4.2) Vektorski produkt	
(B) ENAČBA PREMICE V PROSTORU	
<b>(F) FIZIKA</b>	<b>226</b>
NEWTONOVI ZAKONI GIBANJA	
(1) Osnovna pojasnila	
(2) Sile in vektorji	
(3) Osnovni pojmi pri silah	

## 1. SILE S SKUPNIM PRIJEMALIŠČEM

**1.1. Uvod.** Mnogi inženirski problemi se rešujejo kot problem sil s skupnim prijemališčem. Prototipa takšnih problemov sta vsako **vozlišče paličja** in škripec, ki je zelo »hvaležen« za prikazovanje problematike sil s skupnim prijemališčem, slika 1.1-1. V takih primerih zmeraj analiziramo sile, ki delujejo na **vozlišče kot prosto telo**, ki ga računsko smatramo za **masno točko** - sile imajo prijemališče v isti točki. To je seveda samo smiselna poenostavitev problema, ki daje dovolj natančne rezultate za inženirsko uporabo. Na enak način analiziramo tudi probleme, kjer sile sicer nimajo skupnega prijemališča, vendar pa se **učinkovalnice sil sekajo v isti točki**, slika 1.1.2. Zakaj zadnja dva primera obravnavamo kot problem sil s skupnim prijemališčem, lahko razumemo bolj intuitivno, strogi dokaz pa bomo obravnavali v okviru statike teles končnih dimenzij. Problematika sil s skupnim prijemališčem pa ni omejena samo na omenjene primere, ampak je deloma ali pa v celoti sestavni del vsake analize statike **teles končnih dimenzij**. V tehniški mehaniki so to na primer elementi in celotne konstrukcije.



Slika 1.1-1. (a) Simbolični prikaz vrvja in škripca ter (b) vozlišča paličja, kjer imajo sile skupno prijemališče.



Slika 1.1-2. (a) Krogla v gladkem žlebu ter (b) nosilec, kjer imajo učinkovalnice sil skupno sečišče.

Vse probleme, kjer imajo sile skupno prijemališče lahko, razdelimo glede na **matematični način reševanja** na tri skupine, ki jih poimenujemo po najbolj značilnih nalogah:

(a) Izračun rezultante danega sistema sil

(b) Izračun velikosti reakcijskih sil, kjer poznamo njihove smeri in uravnotežijo dane akcijske (obtežilne) sile

(c) Posebni problemi

Praktično se najpogosteje srečamo s prvima dvema skupinama problemov, večinoma pa so cilji inženirskih problemov v okviru druge skupine, kjer je izračun rezultante samo vmesni računski korak. Na sliki 1.2.Z1-1 je prikazan tipični problem, kjer poznamo vlečni sili bremena in človeka, računamo pa sili (reakcije) v zgornjih dveh podpornih vrveh. Običajno najprej izračunamo rezultanto znanih dveh sil, to je naloga skupine (a), nato pa še reakcijski sili v podpornih vrveh, ki uravnotežijo to rezultanto, naloga skupine (b). V to drugo skupino nalog prištevamo tudi razstavljanje sil na sile v danih smereh, ker je računski postopek v bistvu povsem enak kot račun reakcij. Tretja skupina nalog se razlikuje tako po inženirski problematiki kot po matematičnem načinu reševanja in jo bomo natančneje spoznali v posebnem poglavju. Za sedaj pa povejmo, da so to večinoma problemi, kjer vsaj deloma ni znana geometrija »konstrukcije« in je potrebno podati še kakšne dodatne pogoje za rešitev. Takšen pogoj je na primer zahteva po takšni smeri iskane sile, ki nam da minimalno velikost sile. Za prvi dve skupini problemov je značilno, da so rešitve enolične, problemi v zadnji skupini pa večinoma nimajo enoličnih rešitev. Katero rešitev bo inženir izbral, nam matematika ne pove, ampak je to stvar inženirske izbire oziroma presoje.

Večinoma so izhodiščni podatki praktičnih inženirskih problemov podani z dimenzijami in medsebojno lego posameznih elementov konstrukcije, s težo bremen in s podatki morebitnih drugih sil, ki delujejo na konstrukcijo. Vsak **problem lahko rešimo na tri načine**: analitično z vektorsko algebro, grafično in grafo-analitično. Vsak izmed teh načinov reševanja ima pomanjkljivosti in prednosti, ki jih bomo v nadaljnjem tekstu podrobneje opredelili. Inženir mora poznati vse načine reševanja in tudi vedeti, kateri je najprimernejši za razrešitev konkretnega problema. Pri tem velja opozoriti, da je potrebno včasih kombinirati načine reševanja.

Pri reševanju problemov z vektorsko algebro, to je **vektorski način reševanja**, lahko probleme rešimo **brez koordinatnega sistema** ali pa **na podlagi izbranega koordinatnega sistema**. V zadnjem primeru vsako silo zapišemo po komponentah ali pa jo zapišemo z njenim smernim vektorjem in njeno velikostjo. Ko računamo brez koordinatnega sistema pa upoštevamo samo medsebojno lego smeri in sil. Katere izmed teh količin so neznanke, pa zavisi od problema, ki ga rešujemo.

Kot smo že omenili, se problemi dajo rešiti **grafično**, vendar pa je to reševanje za bolj kompleksne probleme praviloma bolj zahtevno od analitičnega. V tridimenzionalnih problemih pa je grafično reševanje še posebno zahtevno. Grafiko uporabljamo zato večinoma za razlago teorije in za študij problemov.

Tretji način reševanja je **grafo-analitični**, ki je primeren za enostavne probleme, uporabljamo pa ga večinoma tako kot grafiko - za razlago in za študij. Ta način temelji na analitični geometriji, kjer sile in tudi konstrukcije obravnavamo kot geometrijske like in telesa, ki jih moramo praviloma vsaj skicirati, da analitični izračun ni preveč nepregleden. Ta način reševanja je posebno primeren za posebne probleme.

**1.2. Izračun rezultante danega sistema sil.** Rezultanto sistema  $n$  sil s skupnim prijemaščem dobimo z enostavnim **seštevanjem vektorjev sil**, enačba 1.

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (1.2-1)$$

Analitično izvedemo seštevanje sil  $\mathbf{F}_i$ ,  $i=1,2,..,n$ , tako, da seštejemo isto ležne komponente sil, enačbe 2.



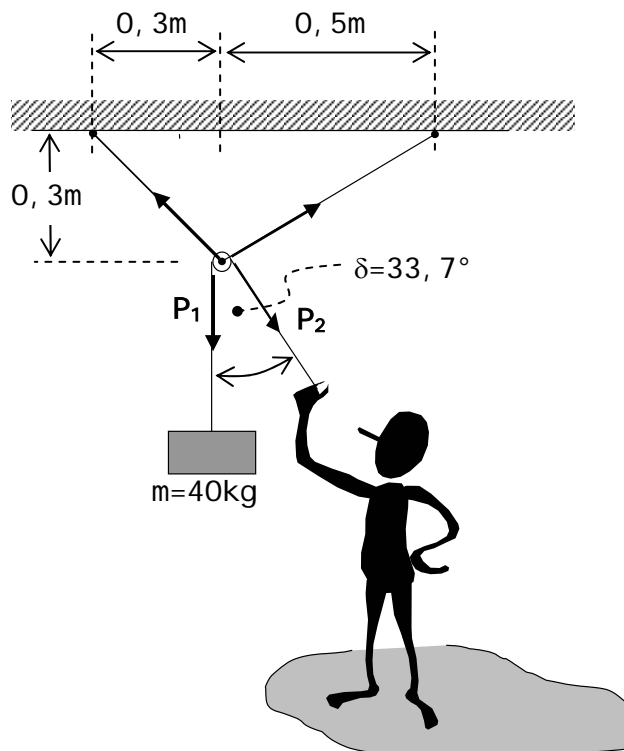
$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{i,x}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{i,y} \quad (1.2-2)$$

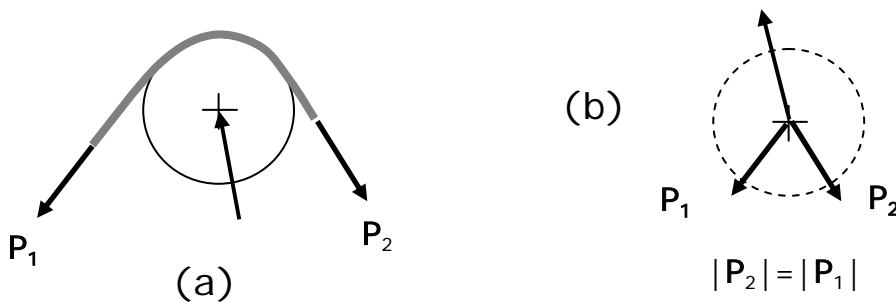
$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{i,z}$$

Torej moramo najprej izračunati komponente sil, če te niso že kar podane. V splošnem lahko računamo s komponentami v poševnem koordinatnem sistemu, daleč najpogosteje pa v kartezijskem koordinatnem sistemu, ki je najenostavnejši način. Grafično seštejemo sile s paralelogramskim oziroma poligonskim pravilom, grafo-analitično pa s pomočjo analitičnih obrazcev za poševni trikotnik.

**Zgled 1.2.Z1.** Izračunajmo rezultanto vlečnih sil  $P_1$  in  $P_2$  prikazanih na sliki Z1-1, kjer so zapisani tudi vsi izhodiščni podatki.



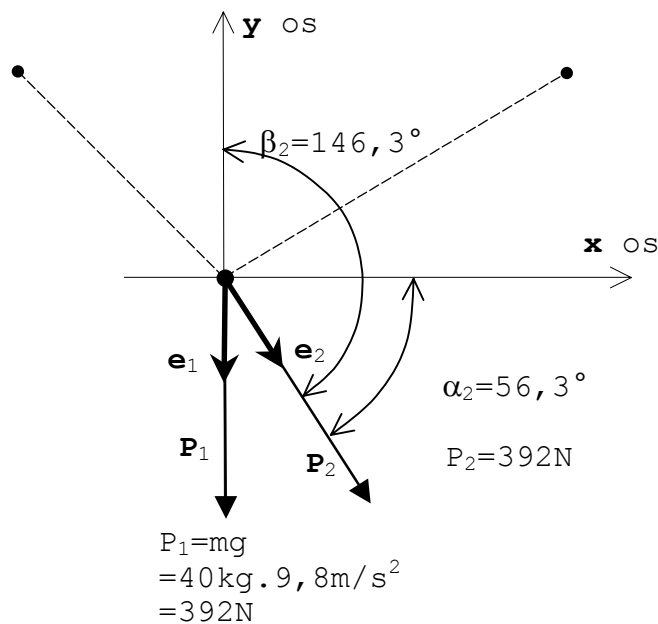
Slika 1.2.Z1-1. Dimenzije in označbe sil.



Slika 1.1.Z1-2. (a) dejanski potek sil, (b) smiselna računaska poenostavitev.

Predej pa začnemo računati, si na kratko še pojasnimo značilnost škripca, ki jo moramo upoštevati pri analizah. Vrv, ki teče preko kolesa škripca, je napeta zmeraj s silo enake velikosti, slika Z1-2-a, kar enostavno dokažemo z momentnim ravnotežjem (v naslednjem poglavju). Pri tem predpostavljamo, da je škripec brez trenja, težo vrvi pa zanemarimo. Če še zanemarimo velikost škripca, tedaj računamo kot da imajo sile vrvi prijemališča v osi škripca, slika Z1-2-b.

Ko zanemarimo velikost kolesa škripca, skiciramo sili  $\mathbf{P}_1$  in  $\mathbf{P}_2$ , ki jih obravnavamo, kot da delujeta na točkasto telo. Sili postavimo v neki izbrani koordinatni sistem, slika Z1-3, kjer je treba vrednosti naklonskih kotov glede na koordinatni sistem izračunati iz osnovnih podatkov. Pri tem upoštevajmo, da je problem ravninski, ker so vse sile samo v eni ravnini. V izbranem koordinatnem sistemu imajo komponente samo v x in y smeri, medtem ko so vse komponente v z smeri nične. Zaradi ekonomičnosti računanja lahko računamo samo z vektorji z dvema komponentama. Za analitično rešitev je zadosti samo približna skica sil, iz katere so razvidne samo oznake sil in izbira usmerjenosti smernih vektorjev sil (ali so usmerjeni k ali pa proč od vozlišča).



Slika 1.2.Z1-3. Izbira koordinatnega sistema ter skica sil in smernih vektorjev z ustreznimi oznakami. Zaradi preglednosti slike sta naklonska kota narisana samo za smerni vektor  $\mathbf{e}_2$ .

Smerne vektorje sil v gradbeni mehaniki praviloma izberemo v smeri proč od vozlišča. Ko silo zapišemo s pomočjo smernega vektorja,  $\mathbf{P} = P\mathbf{e}$ , tedaj nam pozitivna skalarna vrednost  $P$  zmeraj pomeni natezno (vlečno) silo, negativna vrednost pa tlačno silo (ali v palicah pri paličju). Razlika ali je element z enako veliko silo nategnjen ali tlačjen, je za konstruiranje in inženirsko analizo konstrukcij izredno pomembna, ker je nosilnost elementov v teh dveh slučajih bistveno različna. Za vrvje, na primer, bi rezultat, ki bi dal negativno silo, pomenil, da sploh ni možno postaviti takega vrvja. Torej moramo biti zelo pozorni na smerni vektor in izračunani predznak sile.

**Analitična rešitev.** Zaradi preglednosti slike Z1-3 sta narisana kota samo za smerni vektor  $\mathbf{e}_2$ . Ne smemo pozabiti, da so ti koti definirani kot pozitivni z zasukom vektorja po najkrajši poti v bazni vektor oziroma v pozitivno smer koordinatne osi. Ko v analizi operiramo samo s kosinusno funkcijo kota, predznak kota ni pomemben, ker je kosinusna funkcija soda. Zaradi lastnosti te funkcije dobimo pravilne rezultate tudi tedaj, ko računamo z dopolnilnim kotom do  $360^\circ$  ali pa z negativnimi koti. Zato včasih označujemo te kote na različne načine, vendar moramo tedaj računati izključno samo s kosinusno funkcijo, nikakor pa ne s sinusno.

Kota  $\alpha_2$  in  $\beta_2$  izračunamo seveda iz kota  $\delta$ , ki je podan na sliki Z1-1. Izračun kotov, smernih vektorjev in sil je sledeči:

$$\alpha_1 = 90^\circ, \beta_1 = 180^\circ, \mathbf{e}_1 = (\cos 90^\circ, \cos 180^\circ) = (0 \ -1)$$

$$\mathbf{P}_1 = P_1 \mathbf{e}_1 = 392\text{N} \cdot (0 \ -1) = (0 \ -392)\text{N}$$

$$\alpha_2 = 90^\circ - \delta = 90^\circ - 33,7^\circ = 56,3^\circ; \beta_2 = 56,3^\circ + 90^\circ = 146,3^\circ$$

$$\mathbf{e}_2 = (\cos 56,3^\circ \ \cos 146,3^\circ) = (0,555 \ -0,832)$$

$$\mathbf{P}_2 = P_2 \mathbf{e}_2 = 392\text{N} \cdot (0,555 \ -0,832) = (217,44 \ -326,16)\text{N}.$$

Rezultanta pa je

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = (0 \ -392)\text{N} + (217,44 \ -326,16)\text{N} = (217,44 \ -718,16)\text{N}.$$

Ko smo že dovolj veščji računanja komponent sil, lahko seveda v takih enostavnih primerih kot je naš, izpustimo nekatere začetne in vmesne izračune, neke operacije pa poenostavimo. Tako komponente za silo  $\mathbf{F}_1$  kar napišemo, kjer negativni predznak komponente  $F_{1y}$  argumentiramo na podlagi slike, da sila deluje v negativni smeri y osi. Podobno lahko komponente sile  $\mathbf{F}_2$  računamo, na primer, samo s kotom  $\delta$  iz slike Z1-3, torej,

$$\mathbf{P}_2 = P_2(\sin \delta \ -\cos \delta) = 392\text{N} \cdot (0,555 \ -0,832) = (217,44 \ -326,16)\text{N},$$

kjer predznak komponent seveda ugotovimo prav tako iz slike. Takšen način računanja zahteva dovolj dobro sliko, v bolj kompleksnih primerih pa hitro vodi do napak. V vsakem primeru pa se moramo zavedati, da smo s takim poenostavljenim računom implicitno določili smerni vektor sile v isti smeri, kot silo narišemo na sliki.

Ko izračunamo vektor rezultante, nas lahko zanimajo še njena velikost, njen smerni vektor, nagib glede na koordinatne osi in morda njen kot glede na silo  $\mathbf{P}_2$ .

Velikost rezultante:

$$R = +\sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{217,44^2 + 718,16^2} = 750,4\text{N}$$

Smerni vektor rezultante:

$$\mathbf{e}_R = (e_x, e_y) = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{(217,44; \ -718,16)}{750,4} = (0,290; \ -0,957)$$

Naklonski koti rezultante glede na pozitivne smeri koordinatnih osi.

$$\alpha_R = a \cos(e_x) = a \cos(0,290) = 73,1^\circ$$

$$\beta_R = a \cos(e_y) = a \cos(-0,957) = 163,2^\circ$$

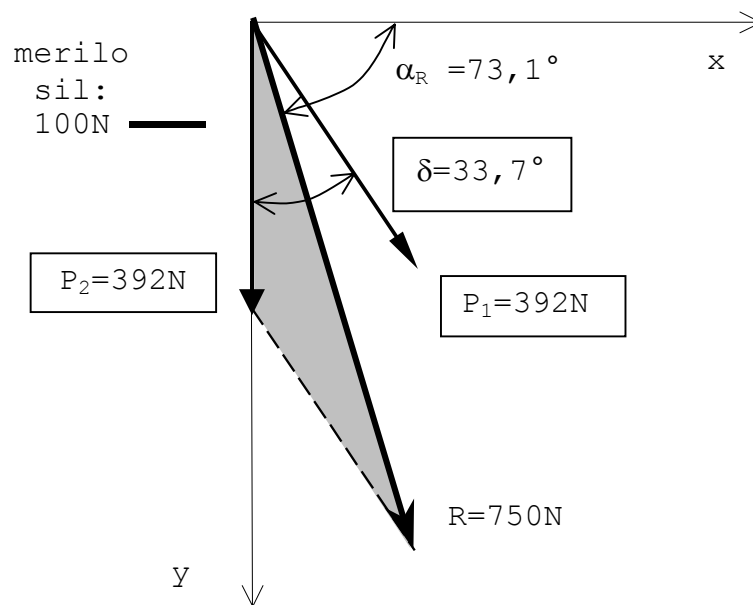
Kot med  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{P}_2$ , ki sta podana po komponentah, računamo s pomočjo skalarnega produkta.

$$\cos(\mathbf{R}, \mathbf{P}_2) = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_2}{R \cdot P_2} = \frac{(217,44 \ -718,16) \cdot (217,44 \ -326,16)}{750,4 \cdot 392} = 0,957$$

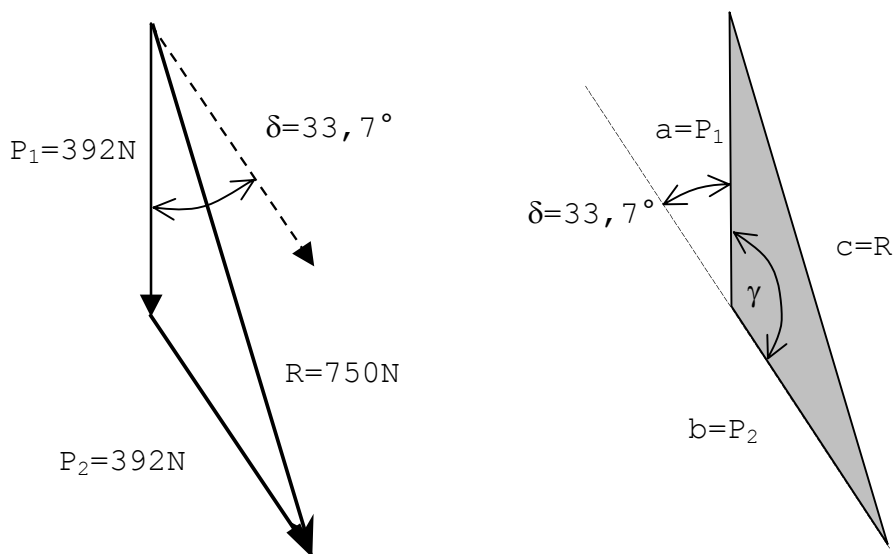
$$\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{P}_2) = \cos^{-1}(0,957) = 16,9^\circ$$

**Grafična rešitev.** Za grafično rešitev si moramo najprej določiti merilo sil, ki nam na sliki podaja velikosti sil in komponent. Lahko pa narišemo še koordinatni sistem, če nas zanimajo komponente rezultante ter smerni koti. S pomočjo ravnala z merilom, šestila in kotomera natančno narišemo vektorje obeh sil, ki ju seštevamo. Sile seštejemo po trikotniškem ali paralelogramskem pravilu, rezultate pa odmerimo iz slike, slika Z1-4.

**Grafo-analitična rešitev** temelji na tem, da sili in rezultanto smatramo kot stranice trikotnika, slika Z1-5. V njem poznamo dve stranici in kot, ki ga izračunamo iz kota med silama, ki ju seštevamo. Rezultanto izračunamo kot stranico v trikotniku po kosinusnem stavku. Taka rešitev zahteva samo približno skico sil, da lahko ugotovimo usmerjenost rezultante, rezultat pa je računsko povsem natančen.



Slika 1.2.Z1-4. Grafična rešitev rezultante, kjer so izhodiščni podatki uokvirjeni. Brez okvirja so prikazani nekateri »odmerjeni« rezultati.



Slika 1.2.Z1-5. Rezultanta sil kot tretja stranica trikotnika.

Najprej izračunamo notranji kot v trikotniku sil,

$$\gamma = 180^\circ - \delta = 180^\circ - 33,7^\circ = 146,3^\circ,$$

nato pa s kosinusnim stavkom izračunamo velikost rezultante,

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 \cdot P_2 \cdot \cos \gamma} = \sqrt{392^2 + 392^2 - 2 \times 392 \times 392 \cdot \cos 146,3^\circ} = 750,3.$$

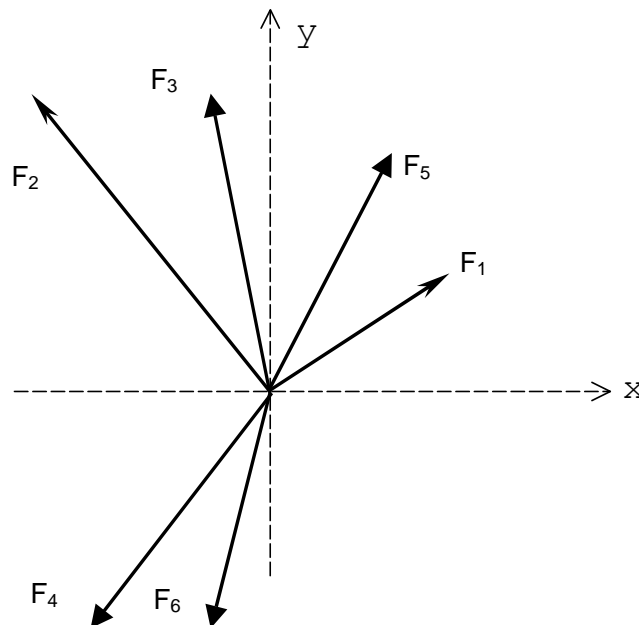
S pomočjo drugih obrazcev poševnega trikotnika, na primer s sinusovim stavkom, lahko izračunamo še ostale kote med vektorji.

**Zgled 1.2.Z2.** Izračunajmo rezultanto šestih ravninskih sil simbolično prikazanih na sliki 1.2.Z2-1. Sile so podane na različne načine, ki so razvidni iz slike 1.2.Z2-2. Prvi dve sili  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$  sta podani po komponentah, drugi dve sili,  $\mathbf{F}_3$  in  $\mathbf{F}_4$ , sta podani s po eno komponento in velikostjo sile, tretji dve sili pa sta podani z velikostjo in smermi, sili  $\mathbf{F}_5$  in  $\mathbf{F}_6$ .

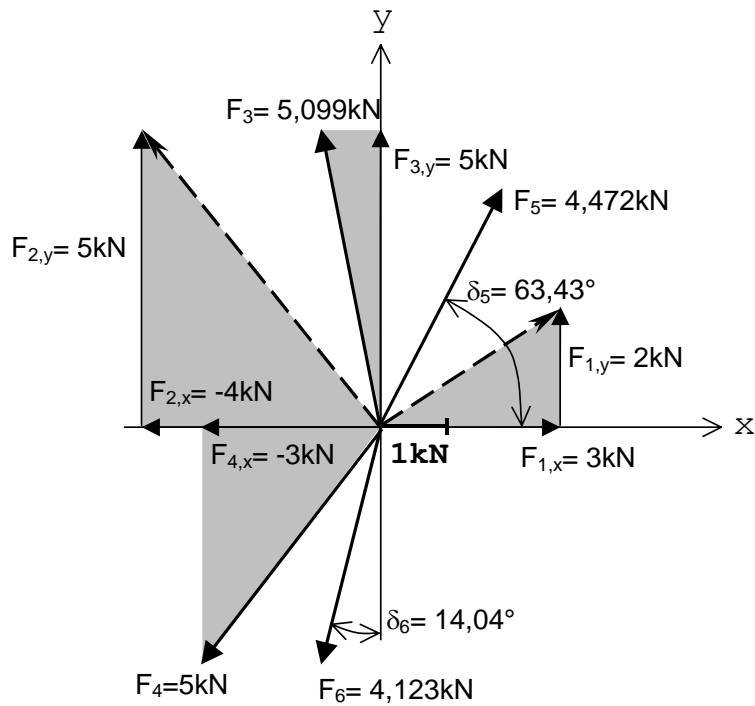
**Analitična rešitev.** Najprej moramo izračunati komponenti vsake sile. Sili  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$  sta že dani kar po komponentah:

$$\mathbf{F}_1 = (3, 2)\text{kN}, \mathbf{F}_2 = (-4, 5)\text{kN}.$$

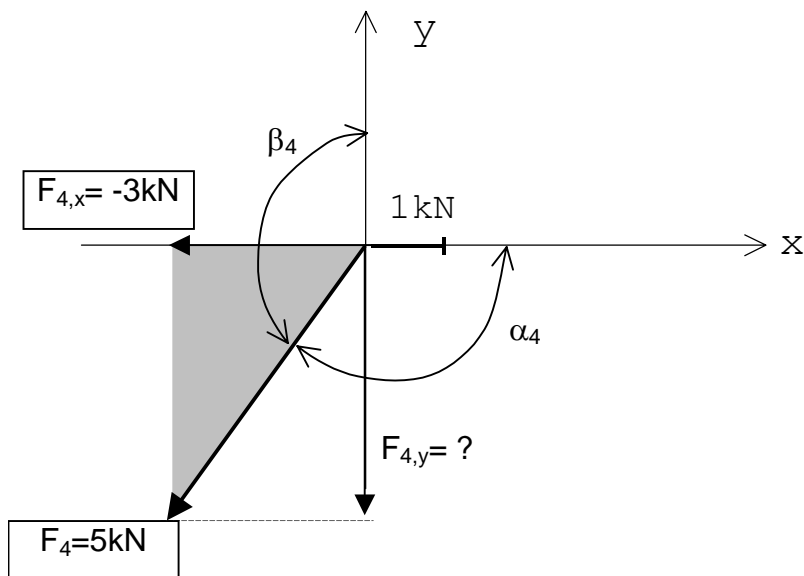
Manjkajoči komponenti sil  $\mathbf{F}_3$  in  $\mathbf{F}_4$  moramo izračunati. Pri tem si moramo pomagati s podatki s sliko, da ugotovimo pravilni nagib sil v koordinatnem sistemu, ker je kosinusna funkcija periodična in nam obratna funkcija ne da enoličnih rešitev. Zaradi poučnosti najprej izračunajmo komponenti sile  $\mathbf{F}_4$ , slika Z2-2.



Slika 1.2.Z2-1. Sistem šestih ravninskih sil.



Slika 1.2.Z2-2. Sile, ki jih je treba sešteti, so narisane z debelimi vektorskimi puščicami črtkano ali s polno črto. Osenčeni trikotniki simbolično povezujejo količine, ki določajo posamezne sile, pripadajoči podatki pa so vpisani v sliko.



Slika 1.2.Z2-3. Oznake in podatki za izračun komponente  $F_{4,y}$ . Podatki so v okvirjih.

Za silo  $F_4$  je:

$$\alpha_4 = \arccos(F_{4,x}/F_4) = \arccos(-3/5) = 126,87^\circ$$

$$\beta_4 = 270^\circ - \alpha_4 = 270^\circ - 126,87^\circ = 143,13^\circ$$

$$F_{4,y} = F_4 \cdot \cos \beta_4 = 5 \cdot \cos 143,13^\circ = -0,800 \text{ kN}$$

in

$$\mathbf{F}_4 = (-3, -4)\text{kN}.$$

Analogno računamo za  $\mathbf{F}_3$ . Nagib proti pozitivni y osi je

$$\beta_3 = \arccos(F_{3,y}/F_3) = \arccos(5/5,099) = 11,31^\circ$$

in nagib proti pozitivni x osi

$$\alpha_3 = \beta_3 + 90^\circ = 101,31^\circ.$$

Tedaj je

$$F_{3,x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 5,099 \cdot \cos 101,31^\circ = -1,000\text{kN}$$

in

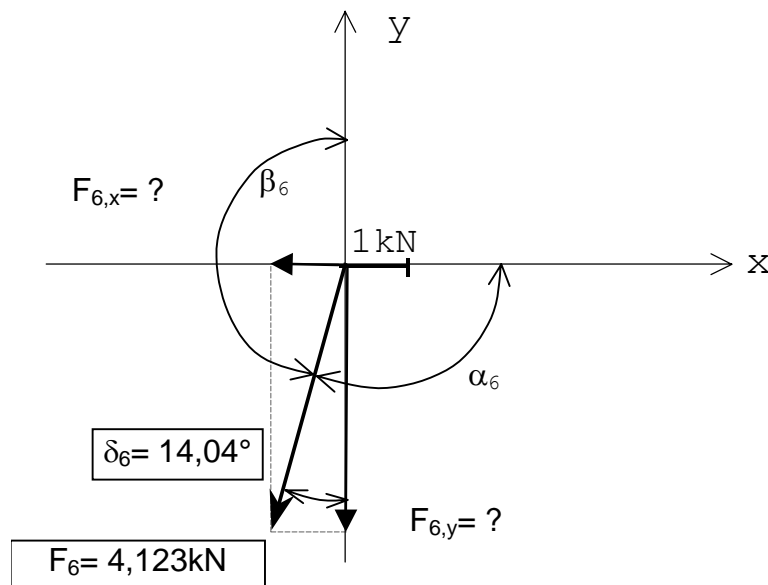
$$\mathbf{F}_3 = (-1, 5)\text{kN}.$$

Smerne kote sil  $\mathbf{F}_5$  in  $\mathbf{F}_6$  ter njihove komponente izračunamo (za  $\mathbf{F}_6$  glej sliko Z2-4):

$$\alpha_6 = \delta_6 + 90^\circ = 14,04^\circ + 90^\circ = 104,04^\circ$$

$$\beta_6 = 180^\circ - \delta_6 = 180^\circ - 14,04^\circ = 165,95^\circ$$

$$\mathbf{F}_6 = F_6(\cos \alpha_6, \cos \beta_6) = 4,123(\cos 104,04^\circ; \cos 165,96^\circ) = \underline{(-1; -4)\text{kN}}$$



Slika 1.2.Z2-4. Oznake in podatki za izračun komponent  $F_{6,x}$  in  $F_{6,y}$ . Podatki so v okvirjih.

Sila  $\mathbf{F}_5$ :

$$\alpha_5 = \delta_5$$

$$\beta_3 = 90^\circ - \alpha_5 = 90^\circ - 63,43^\circ = 26,57^\circ$$

$$\mathbf{F}_5 = F_5(\cos \alpha_5, \cos \beta_5) = 4,472(\cos 63,43^\circ; \cos 26,57^\circ) = \underline{(2, 4)\text{kN}}$$

Rezultanta je

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6$$

$$= (3,2)+(-4,5)+(-1, 5)+(-3,-4)+(2,236; 4,471)+(-1; -4)=$$

$$= (-4, 8)\text{kN}$$

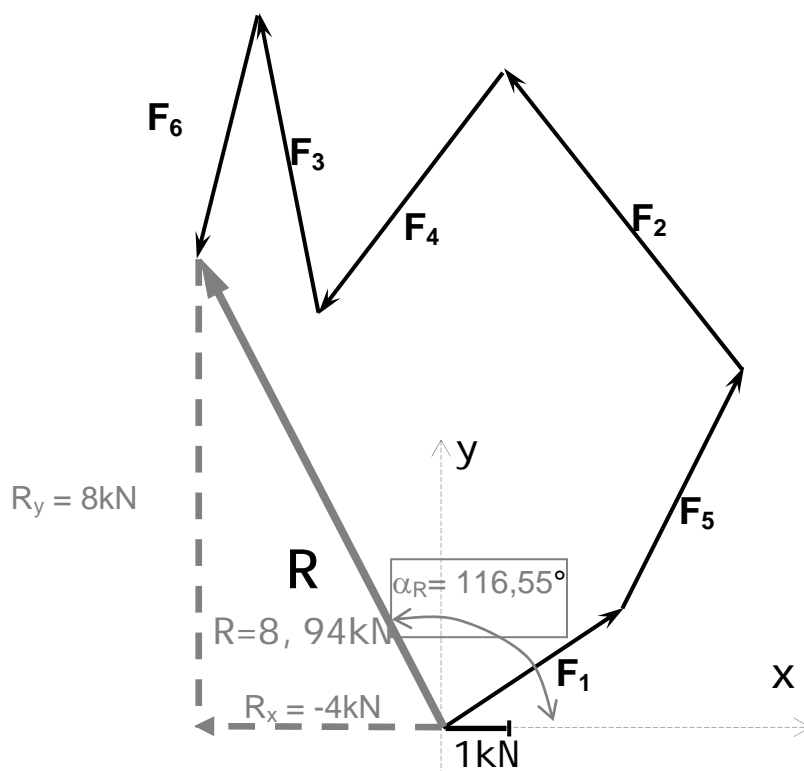
Če je potrebno, lahko izračunamo še velikost rezultante, njen smerni vektor in smerna kota:

$$R = (4^2+8^2)^{1/2} = 8,944\text{kN}$$

$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{(-4, 8)\text{kN}}{8,944\text{kN}} = (-0,447; 0,894)$$

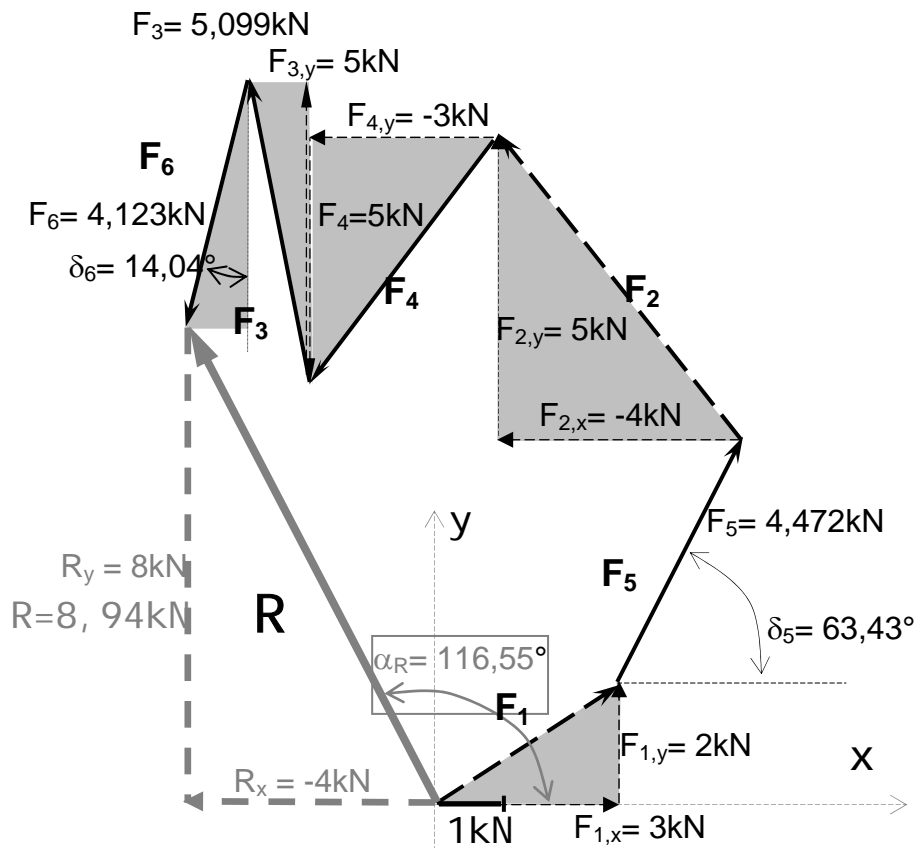
$$\alpha_R = \arccos(-0,447) = 116,55^\circ$$

$$\beta_R = \arccos(0,894) = 26,57^\circ$$



Slika 1.2.Z2-5. Poligon sil nam da rezultanto.





Slika 1.2.Z2-6. Prikaz grafične konstrukcije poligona sil na podlagi danih vrednosti za posamezne sile.

**Grafična rešitev** je podana na sliki Z2-5. Posamezne sile je seveda potrebno narisati v merilu sil. Zaporedje seštevanja seveda ni pomembno. Vektor, ki povezuje začetek in konec poligona je rezultanta. Velikost rezultante, odmerimo. Če želimo ugotoviti še komponente rezultante, moramo narisati koordinatne osi, tedaj pa lahko izmerimo tudi naklonska kota. Glede na to, da nekatere sile niso podane neposredno z velikostjo in smerjo jih je potrebno narisati z ustrezno in enostavno grafično konstrukcijo. Osenčeni trikotniki na sliki Z2-6 simbolično povezujejo podatke, iz katerih narišemo posamezne sile. Z debelimi črtami, polno ali črtkano, so narisani vektorji sil, ki jih seštevamo.

**Grafo-analitična rešitev** je za seštevanje več sil zelo dolgovezna. Če ni posebnega razloga zanjo, je ne uporabljamo. Samo zaradi celovitosti razlage grafo-analitičnih postopkov pa za zgled seštejmo sile  $F_1$ ,  $F_5$  in  $F_2$  na podlagi slike Z2-7. Seštevanje se izvede z zaporednim ponavljanjem seštevanja dveh sil kot nakazujeta osenčena trikotnika na sliki. Najprej izračunajmo rezultanto sil  $F_1$  in  $F_5$ , nato pa k njej prištejemo še  $F_2$ . Potrebne kote izračunamo na podlagi slike.

Izračun  $R_1$  :

$$F_1 = \sqrt{F_{1,x}^2 + F_{1,y}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,606 \text{ kN}, \quad \alpha_1 = 33,7^\circ$$

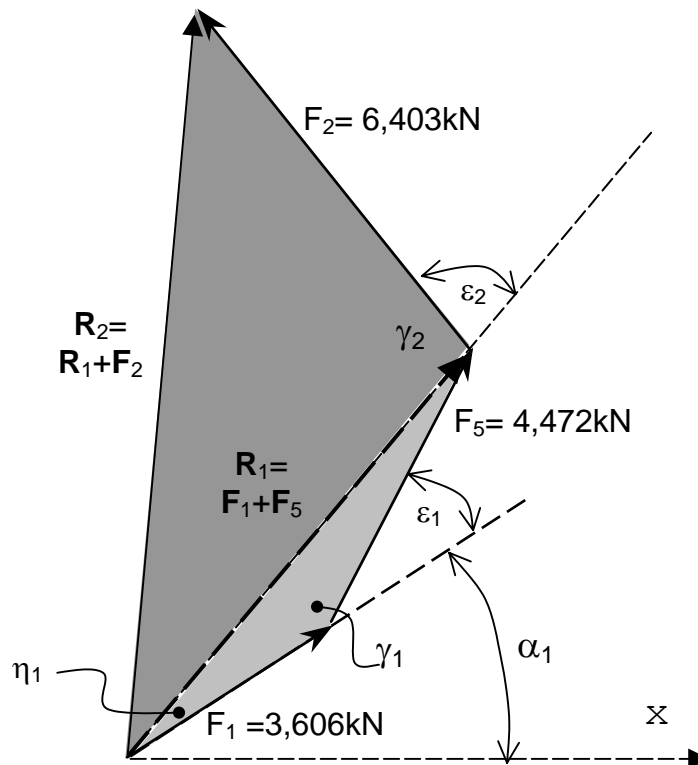
$$\varepsilon_1 = \delta_5 - \alpha_1 = 63,43^\circ - 33,7^\circ = 29,7^\circ, \quad \gamma_1 = 180^\circ - \varepsilon_1 = 150,26^\circ,$$

kosinusov stavek

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\gamma)} \\ &= \sqrt{3,606^2 + 4,472^2 - 2 \times 3,606 \times 4,472 \cdot \cos(150,26^\circ)} = 7,812 \text{ kN} \end{aligned}$$

S sinusnim stavkom izračunamo kot med rezultanto in silo  $F_6$ , ki ga rabimo za nadaljnje seštevanje sil:

$$\sin(\eta_1) = F_5 \cdot \sin \gamma_1 / R_1 = 4,472 \cdot \sin 150,26^\circ / 7,812 = 0,284; \quad \eta_1 = 16,5^\circ.$$



Slika 1.2.Z2-7. Označba kotov in stranic trikotnikov sil za grafo-analitično seštevanje.

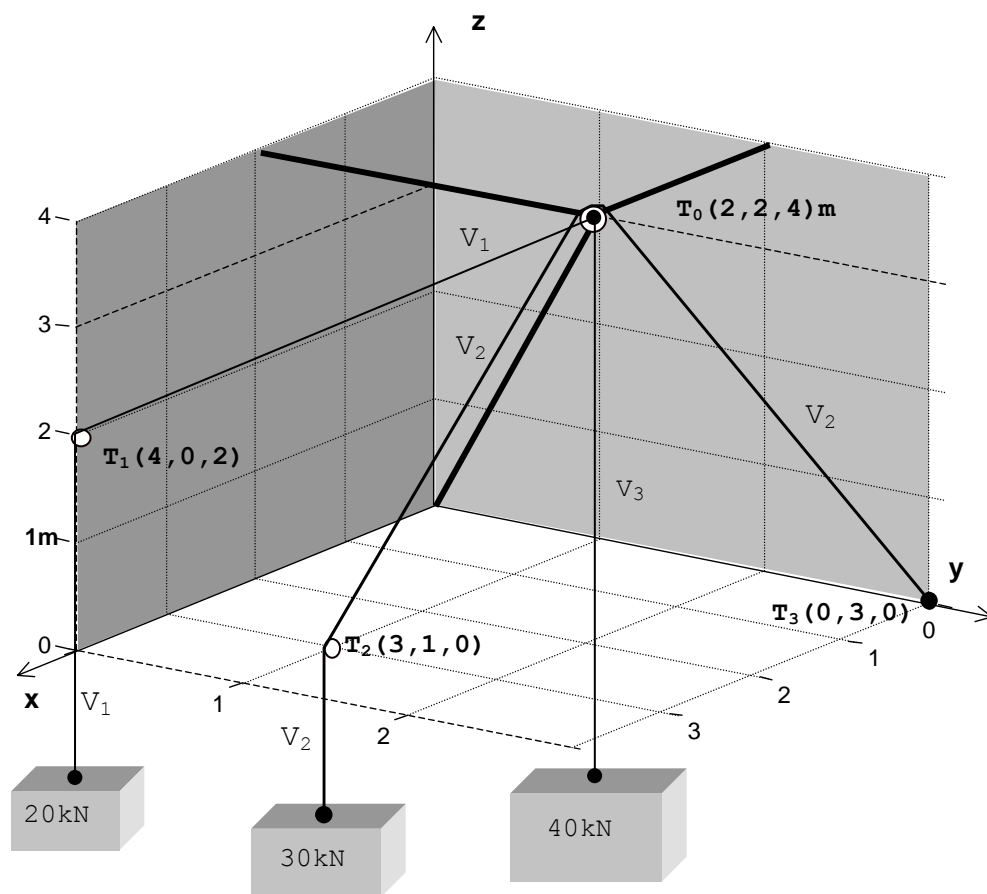
Izračun  $R_2$  :

$$F_2 = \sqrt{F_{2,x}^2 + F_{2,y}^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = 6,403 \text{ kN}, \quad \alpha_2 = 128,6^\circ$$

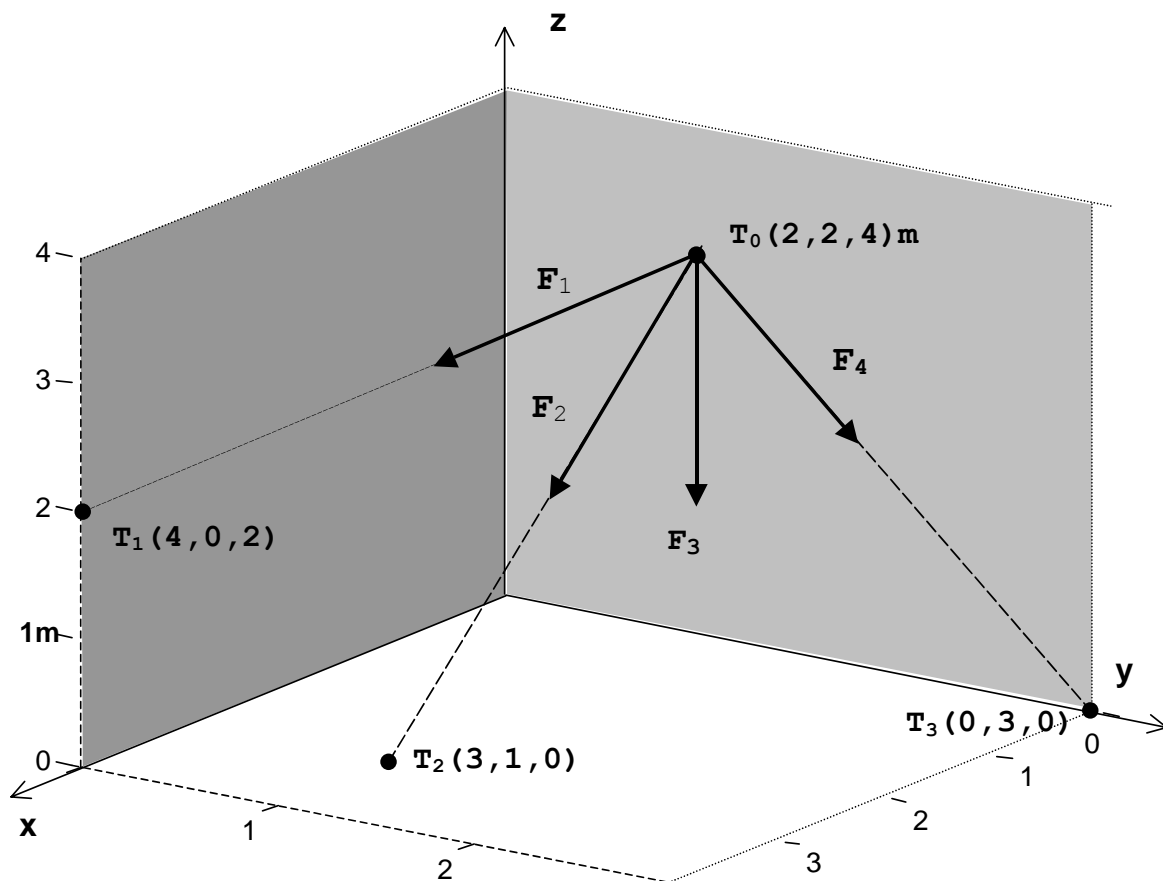
$$\varepsilon_2 = \alpha_2 - (\alpha_1 + \eta_1) = 78,5^\circ, \quad \gamma_2 = 180^\circ - \varepsilon_2 = 101,5^\circ$$

$$R_2 = \sqrt{R_1^2 + F_2^2 - 2R_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\gamma_2)} = \sqrt{7,812^2 + 6,403^2 - 2 \times 7,812 \times 6,403 \cdot \cos(101,5^\circ)} = 11,046 \text{ kN}$$

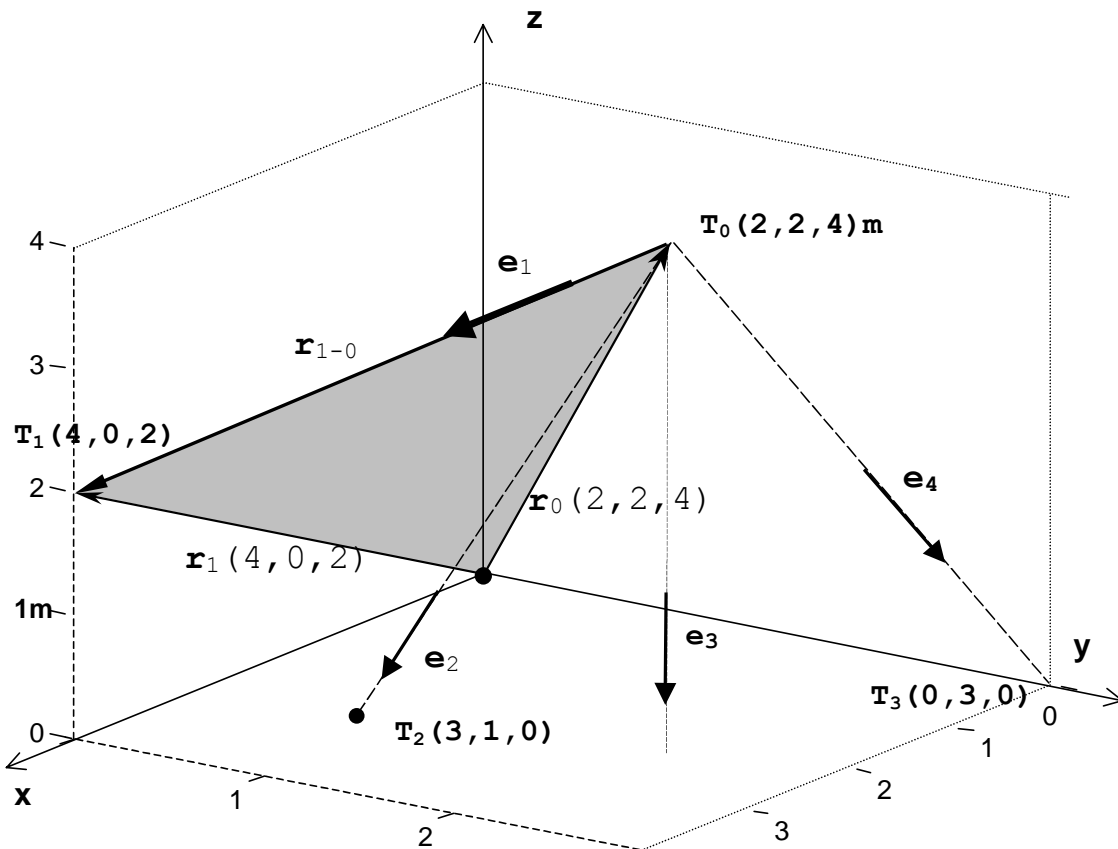
**Zgled 1.2.Z3.** Rezultanta prostorskega sistema sil. Na sliki Z3-1 je kolo škripca s paličjem podprto v osi, ki leži v točki  $T_0$ . Na njegovo os sta pritrjeni vrvi  $V_1$  in  $V_3$ . Vrv  $V_2$  teče preko kolesa tega škripca in preko kolesa v točki  $T_2$  in je pripeta v točki  $T_3$ . Na vrvi so obešene uteži katerih teža je podana na sliki. Koordinate točk so podane na sliki. Treba je izračunati rezultanto sil vrvi, ki delujejo na kolo škripca, ki ga smatramo kot masno točko v točki  $T_0$ .



Slika 1.2.Z3-1. Dispozicija vrvja, škripcev in obremenitev ter koordinatni sistem.



Slika 1.2.Z3-2. Označitev sil.



Slika 1.2.Z3-3. Izbira smernih vektorjev ter označba krajevnih vektorjev.

**Analična rešitev.** Najprej označimo sile in zapišemo njihove velikosti, slika Z3-2.

$$F_1 = 20\text{kN}$$

$$F_2 = F_4 = 30\text{kN}$$

$$F_3 = 40\text{kN}$$

Iz dispozicije problema je očitno, da vse sile delujejo v smeri proč od  $T_0$ . V teh smereh običajno izberemo tudi njihove smerne vektorje, tako da so vektorji sil zapisani s smernimi vektorji in z absolutnimi vrednostmi:

$$\mathbf{F}_k = F_k \mathbf{e}_k, \quad k=1,2,3,4.$$

Smerne vektorje izračunamo posredno iz krajevnih vektorjev, slika Z3-3. Osenčeni trikotnik označuje vektorje iz katerih izračunamo  $\mathbf{e}_1$ .

$$\mathbf{r}_{1-0} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = (4,0,2)\text{m} - (2,2,4)\text{m} = (2,-2,-2)\text{m}; \quad r_{1-0} = 3,464\text{m}$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_{1-0}}{r_{1-0}} = \frac{(2,-2,-2)\text{m}}{3,464\text{m}} = (0,577 \quad -0,577 \quad -0,577)$$

Pri izračunu moramo paziti, da je  $\mathbf{r}_{1-0}$  v enaki smeri kot predpostavljeni  $\mathbf{e}_1$ , ko računamo s pozitivno vrednostjo  $r_{1-0}$ . Tedaj je vektor sile enak

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{e}_1 = 20\text{kN} \cdot (0,577 \quad -0,577 \quad -0,577) = (11,547 \quad -11,547 \quad -11,547)\text{kN}.$$

Analogno izračunamo še ostale vektorje sil. Za silo  $\mathbf{F}_2$  dobimo:

$$\mathbf{r}_{2-0} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 = (3,1,0)\text{m} - (2,2,4)\text{m} = (1,-1,-4)\text{m}; \quad r_{1-0} = 4,243\text{m}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_{2-0}}{r_{2-0}} = \frac{(1,-1,-4)\text{m}}{4,243\text{m}} = (0,236 \quad -0,236 \quad -0,943)$$

$$\mathbf{F}_2 = F_2 \mathbf{e}_2 = 30\text{kN} \cdot (0,236 \quad -0,236 \quad -0,943) = (7,071 \quad -7,071 \quad -28,284)\text{kN}$$

Sila  $\mathbf{F}_3$  je očitno enaka

$$\mathbf{F}_3 = (0,0,-40)\text{kN}.$$

Silo  $\mathbf{F}_4$  pa izračunamo:

$$\mathbf{r}_{3-0} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0 = (0,3,0)\text{m} - (2,2,4)\text{m} = (-2, 1,-4)\text{m}; \quad r_{3-0} = 4,583\text{m}$$

$$\mathbf{e}_4 = \frac{\mathbf{r}_{3-0}}{r_{3-0}} = \frac{(-2, 1, -4)\text{m}}{4,583\text{m}} = (-0,436 \quad 0,218 \quad -0,873)$$

$$\mathbf{F}_4 = F_4 \mathbf{e}_4 = 30\text{kN} \cdot (-0,436 \quad 0,218 \quad -0,873) = (-13,093 \quad 6,547 \quad -26,186)\text{kN}$$

Rezultanta sil vrvi, ki delujejo na vozlišče paličja, pa je:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = (11,547 \quad -11,547 \quad -11,547) + (7,071 \quad -7,071 \quad -28,284)$$

$$+ (0,0,-40) + (-13,093 \quad 6,547 \quad -26,186) = (5,525 \quad -12,072 \quad 106,017)\text{kN}$$

in

$$R = 106,845\text{kN}.$$

Izračunajmo še učinkovalnico rezultante. Ta je podana z enačbo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \cdot \mathbf{e}_R,$$

kjer je  $\mathbf{r}_0$  krajevni vektor prijemašča rezultante - vozlišče paličja,  $\mathbf{e}_R$  pa smerni vektor rezultante. Ti vrednosti sta:

$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{(5,525 \quad -12,072 \quad -105,970)\text{kN}}{106,845} = (0,0517 \quad -0,1131 \quad -0,9923)$$

$$\mathbf{r} = (x,y,z) = (2 \quad 2 \quad 4) + \lambda(0,0517 \quad -0,1131 \quad -0,9923)$$

Da učinkovalnico lažje narišemo, izračunajmo njeno prebodišče z ravnino  $x,y$ , točka  $P_R(x_P, y_P, z_P)$ :

$$z_P = 0 = 4 + \lambda_P(-0,9923),$$

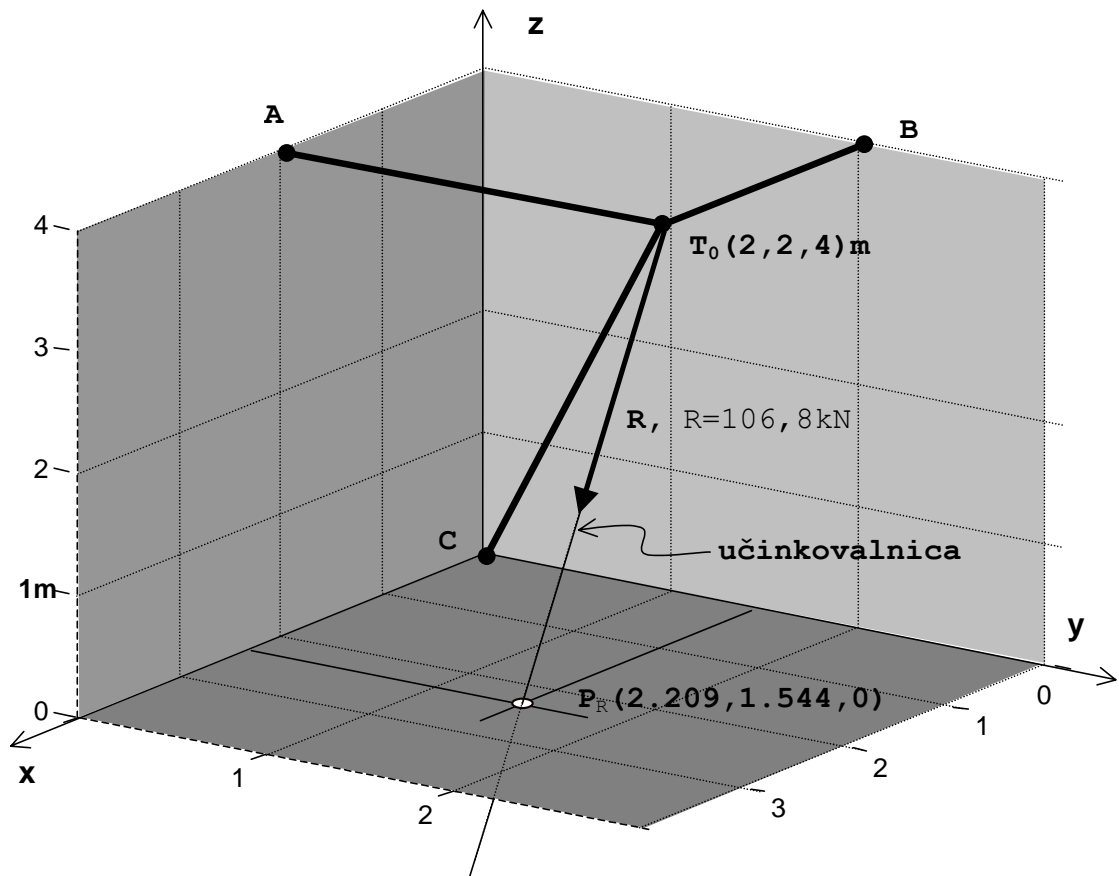
$$\lambda_P = 4,0336\text{m},$$

in  $x_P$  ter  $y_P$  sta

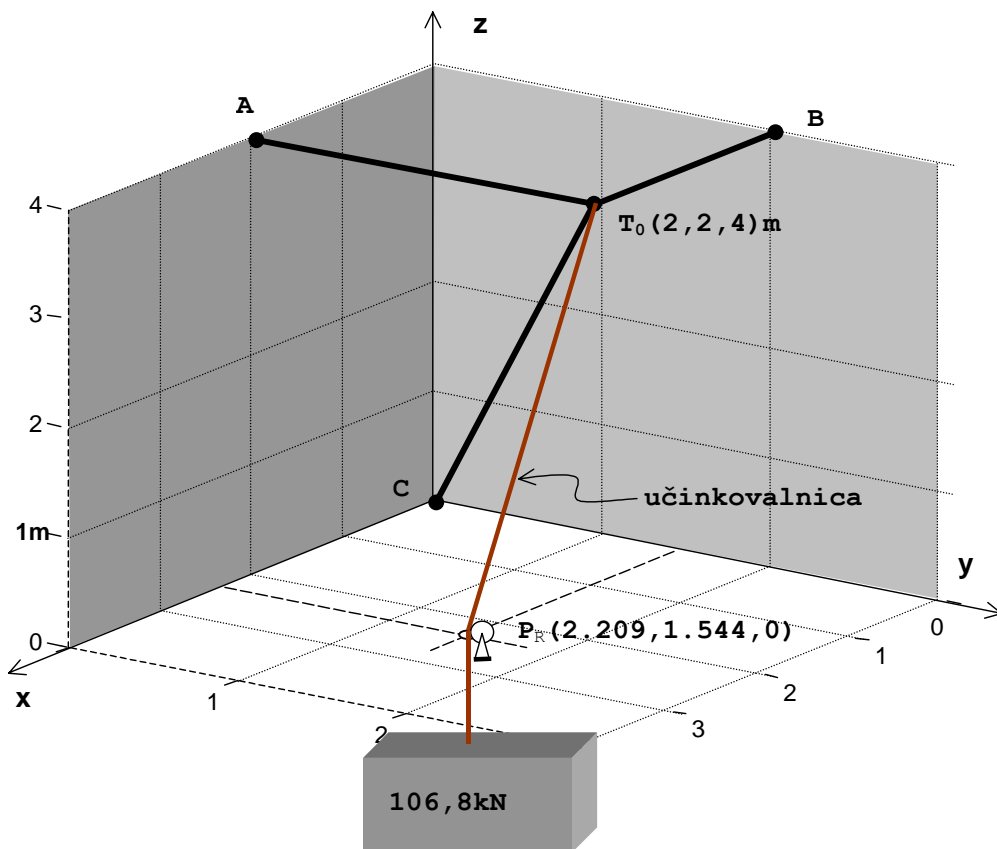
$$x_P = 2\text{m} + 4,0336\text{m} \cdot 0,0517 = 2,2086\text{m}$$

$$y_P = 2\text{m} + 4,0336\text{m} \cdot (-0,1131) = 1,5440\text{m}.$$

Rezultati so prikazani na sliki Z3-4.



Slika 1.2.Z3-4. Rezultanta sil vrvi, ki delujejo na vozlišče paličja, ter njena učinkovalnica.

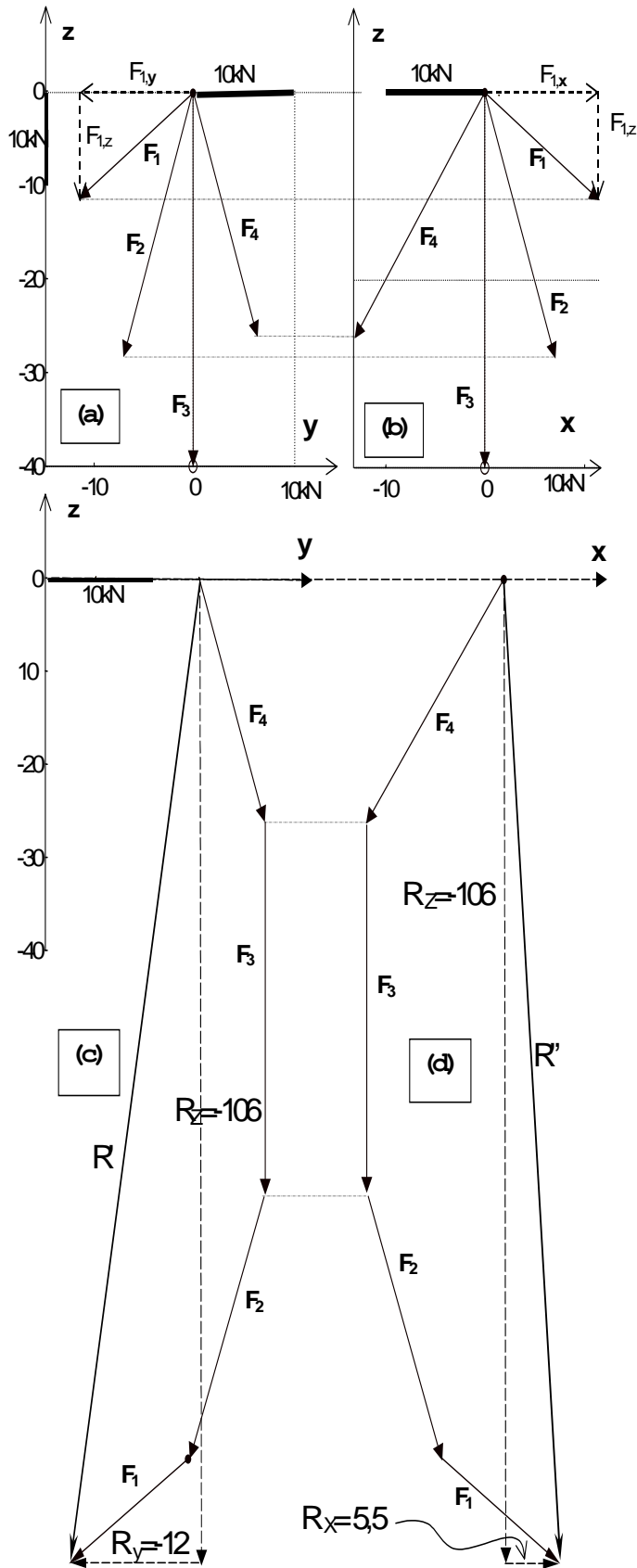
Slika 1.2.Z3-5. Velikost bremena in lega vrvi, ki bi imelo enak učinek na škripec v točki  $T_0$  kot vse sile v vrveh  $V_1, V_2$  in  $V_3$  na sliki Z3-1.

Če bi na mestu prebodišča pritrčili škripec (slika Z3-5) in na vrv obesili breme 106,8kN bi imelo na vozlišče  $T_0$  enak učinek kot vsa bremena na sliki Z3-1.

**Grafična rešitev.** Prostorski sistem sil praviloma prikazujemo v dveh ravninah tako, da z njima podamo vse komponente sil. Mi smo izbrali ravnino  $y,z$ , slika Z3-6a, ter ravnino  $x,z$ , slika Z3-6b. Na teh grafih so seveda komponente sil v  $z$  smeri prikazane dvakrat. Koordinatni sistem ima merilo za sile v vseh smereh enako, ki pa ni v nobeni zvezi z merilom dolžin za prostor na sliki Z3-1. Lega koordinatnega začetka za sile je poljubna. Da pa ohranimo smeri sil in rezultante v prostoru iz katerega smo izračunali smerne vektorje morajo biti koordinatne osi za prostor in za sile vzporedne in enako usmerjene. Na slikah Z3-5c in d je prikazan seštevek sil v ravninah  $y,z$  in  $x,z$ , ki ga izvedemo po poligonskem pravilu. Iz slike lahko odmerimo samo komponente rezultante, neposredno pa njene velikosti ne moremo odmeriti, ampak jo moramo izračunati iz vseh odmerjenih komponent. Tako iz slik Z3-5c in d odmerimo  $R_x=5,5\text{kN}$ ,  $R_y=12\text{kN}$  in  $R_z=106\text{kN}$  in izračunamo

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{5,5^2 + 12^2 + 106^2} = 106,8\text{kN}$$

Grafična rešitev je očitno znatno bolj komplicirana kot analitična. Ker so vsi realni problemi prostorski in jih v tehniki praviloma prikazujemo z dvema ravninama, v narisu in tlorisu, nas prikazana grafična rešitev predvsem poučuje o razlikah med ravninskimi in prostorskimi analizami.

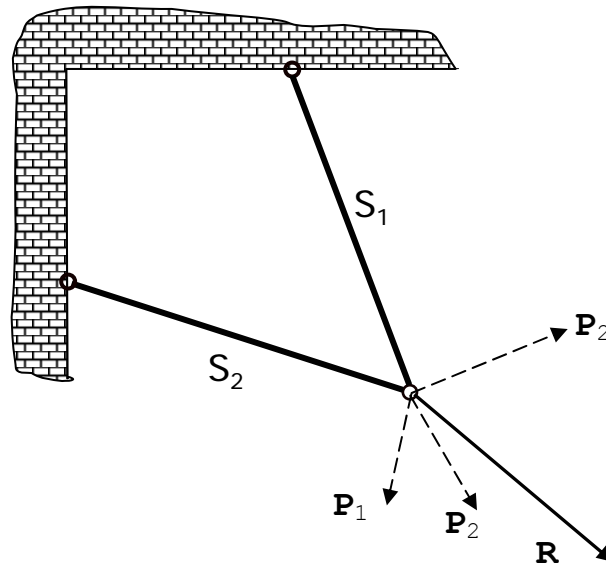


Slika 1.2.Z3-6. Prostorske sile, ki jih rišemo in seštejemo v ravnini  $y,z$ , sliki a in c, ter v ravnini  $x,z$ , sliki b in d.

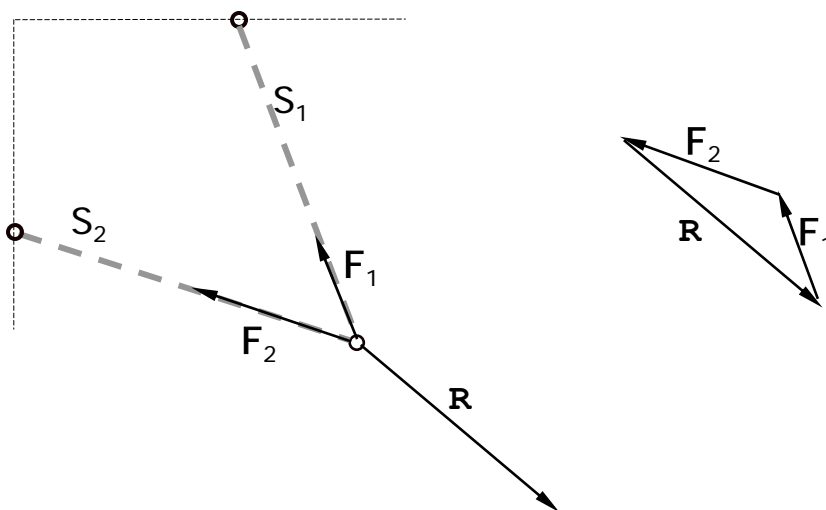


**1.3. Izračun velikosti reakcijskih sil, kjer poznamo njihove smeri in uravnotežijo dani sistem sil.** Tipičen takšen problem je prikazan na sliki 1, ki pa je v tem primeru samo ravninski.  $\mathbf{R}$  je sila, ki deluje na vozlišče paličja in je lahko rezultanta več poznanih sil  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ . Taka rezultanta je v ravnotežju s silama  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$ , s katerima palici delujeta na vozlišče. V **palicah** delujejo sile samo v smeri njihovih osi, zato poznamo smeri sil, ugotavljamo pa njihove velikosti, slika 2. Tak problem na kratko imenujemo izračun reakcij v znanih smereh.

Razstavljanje sile  $\mathbf{R}$  na sili v danih smereh je ilustrirano na sliki 3. Problema uravnoteženja in razstavljanja sile na sili v danih smereh se očitno matematično razlikujeta samo v predznaku - glede na prvi problem sta v drugem primeru izračunani sili v obratni smeri in velja:  $\mathbf{F}'_1 = -\mathbf{F}_1, \mathbf{F}'_2 = -\mathbf{F}_2$ .

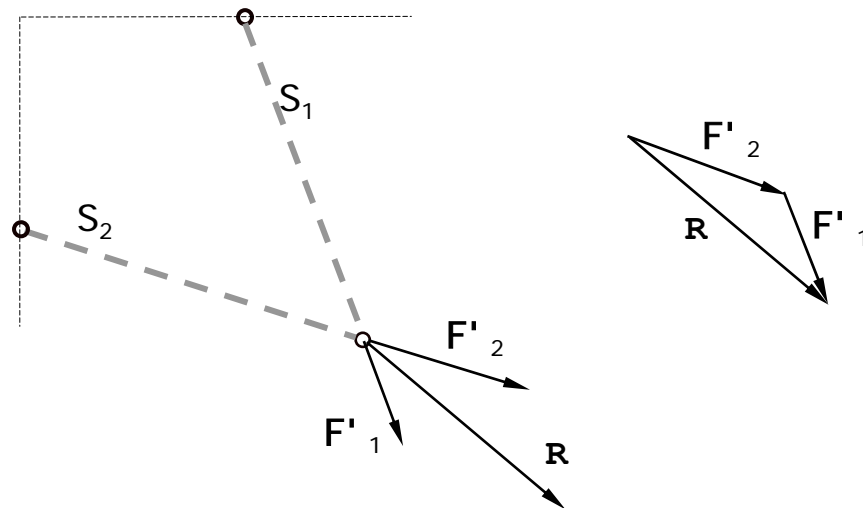


Slika 1.3-1. Simbolični prikaz rezultante  $\mathbf{R}$  sil  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_1$ , in  $\mathbf{P}_1$ , ki delujejo na vozlišče palic  $S_1$  in  $S_2$ .



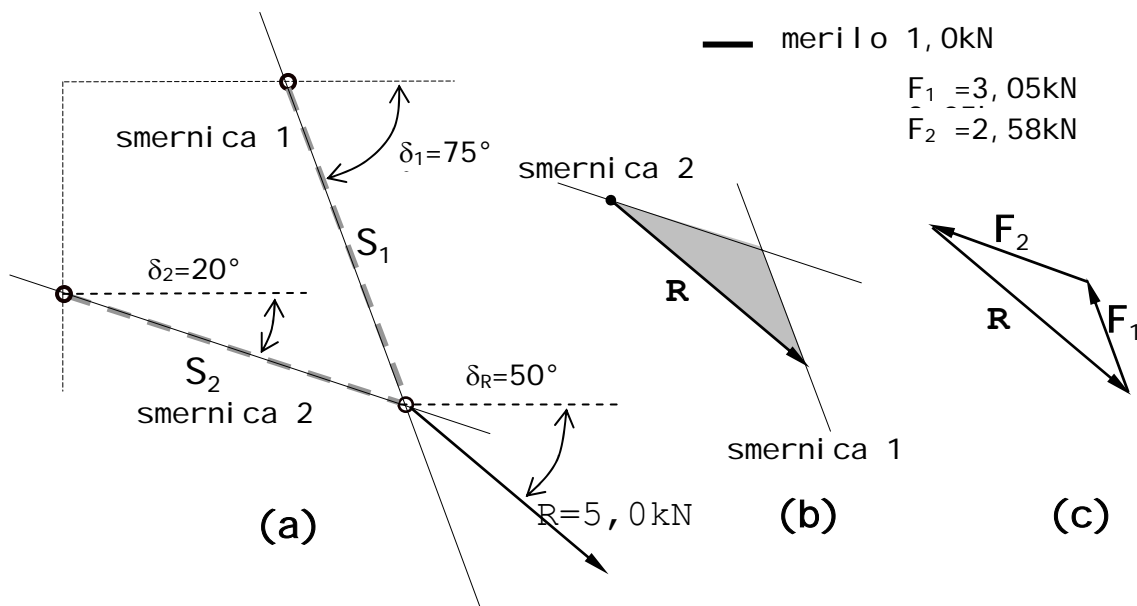
Slika 1.3-2. Uravnoteženje sile  $\mathbf{R}$  s silama  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$  v smeri palic. Sile  $\mathbf{R}, \mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$  so v ravnotežju – vsota teh sil je nična in poligon sil je zaključen.

Grafične rešitve uravnoteženja oziroma razstavljanja sile za ravninski problem so enostavne in so razvidne iz slik 2 oziroma 3, natančneje pa si to oglejmo v zvezku 1.3.Z.1.



Slika 1.3-3. Razstavljanje sile  $R$  na sili  $F'_1$  in  $F'_2$  v smereh palic. Sila  $R$  je enaka vsoti sil  $F'_1$  in  $F'_2$ .

**Zgled 1.3.Z1. Grafična rešitev** reakcij v danih smereh – ravninski problem. Za paličje prikazano na sliki 1.3-1 so smeri palic in sila  $R$  številčno podani na sliki 1.3.Z1-1a. Ugotovimo velikosti sil, s katerima paliči delujeta na vozlišče paličja – torej izračunajmo reakcije na silo  $R$ .



Slika 1.3.Z1-1. Grafična rešitev reakcij. (a) Smernici reakcij ter smer in velikost sile narisane v izbranem merilu, (b) konstrukcija trikotnika in (c) zaključeni poligon sil.

**Grafična rešitev.** Izberemo si merilo sil in narišemo silo  $R$  in smernici  $S_1$  in  $S_2$  reakcij  $F_1$  in  $F_2$ , slika 1.3.Z1-1a. Smernici vzporedno premaknemo in ju pritaknemo na začetek in kraj vektorja sile  $R$  tako, da tvorimo trikotnik, slika Z1-1b. Nato na njegovi stranici narišemo vektorja reakcij tako, da je poligon sil zaključen in odmerimo njuni velikosti, slika Z1-1c.

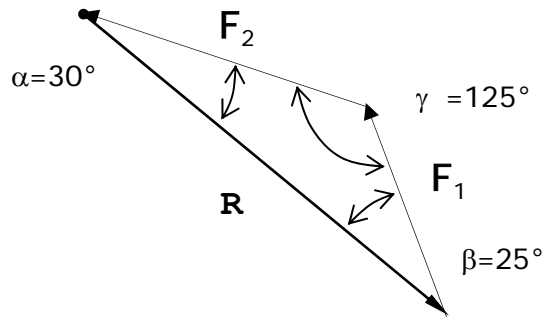
**Grafo-analitična rešitev** temelji na analizi poligona sil na sliki 1.3.Z1-1c kot trikotnika, kjer poznamo eno stranico in vse tri kote. Koti seveda niso v splošnem neposredno podani kot podatki, zmeraj pa jih lahko izračunamo iz smeri sile  $R$  ter kotov smernic reakcij. Rešitev za reakcije dobimo z uporabo sinusnega stavka. Glede na sliko Z1-1a izračunamo kote,

$$\alpha = \delta_R - \delta_2 = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$$

$$\beta = \delta_1 - \delta_R = 75^\circ - 50^\circ = 25^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 25^\circ - 30^\circ = 125^\circ$$

ki so prikazani na sliki 1.3.Z1-2.



Slika 1.3.Z1-2. Koti v trikotniku sil.

Sinusov stavek

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}$$

nam da rešitev

$$F_1 = \frac{R}{\sin \gamma} \sin \alpha = \frac{5 \text{ kN}}{\sin 125^\circ} \sin 30^\circ = 3,052 \text{ kN}$$

$$F_2 = \frac{R}{\sin \gamma} \sin \beta = \frac{5 \text{ kN}}{\sin 125^\circ} \sin 25^\circ = 2,580 \text{ kN} .$$

**Analitična rešitev.** Poglejmo si najprej, kako v splošnem analitično rešujemo prostorski problem. Za ravninske probleme upoštevamo, da so samo poseben primer prostorskega in jih ne bomo posebej obravnavali. Najprej moramo vedeti, da lahko vsak sistem  $n$  prostorskih sil,  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ , ki imajo skupno prijemališče, uravnotežimo že s tremi silami  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  in  $\mathbf{F}_3$ , ki delujejo v predpisanih smereh in so linearno neodvisne (ne ležijo v isti ravnini). To dejstvo je fizikalno očitno in ga ni težko razumeti, strogo matematično pa sledi iz dejstva, da lahko vsak vektor enolično podamo v poljubni bazi (glej poglavje o vektorjih).

V vsakem problemu uravnoteženja danega sistema sil s tremi linearno neodvisnimi silami v znanih smereh zmeraj **izhajamo iz osnovne ravnotežne enačbe**

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0} \quad (1.3-1)$$

kjer lahko najprej izračunamo rezultanto znanih sil,

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n \quad (1.3-2)$$

Tedaj enačbo 1 zapišemo

$$\mathbf{R} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}. \quad (1.3-3)$$

Ta enačba sedaj predstavlja problem uravnoveženja ene znane sile, sile  $\mathbf{R}$ , z omenjenimi tremi silami  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  in  $\mathbf{F}_3$ . V nadaljnjem tekstu bomo smatrali, da vsak problem podan z enačbo 1 rešimo z enačbo 3. Takoj pa še pojasnimo razstavljanje dane sile  $\mathbf{R}$  na vsoto omenjenih sil  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  in  $\mathbf{F}_3$ , kar zapišemo z enačbo 4a,

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \quad (1.3-4a)$$

oziroma 4b

$$\mathbf{R} - (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = \mathbf{0}. \quad (1.3-4b)$$

Uravnoveženje in razstavitev sile  $\mathbf{R}$  sta fizikalno oziroma inženirsko povsem različna, matematični zapis pripadajočih enačb, enačbi 3 in 4b, pa se razlikujeta samo v enem predznaku. Zato bomo v razlagi reševanja problema obravnavali samo enačbo 3. V poglavju o vektorjih smo reševanje takega problema že obravnavali, na tem mestu pa si reševanje pogledjmo še enkrat, vendar bolj iz inženirskega stališča.

Ker so smeri sil  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  in  $\mathbf{F}_3$  znane, podane so neposredno ali posredno z njihovimi smernimi vektorji  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  in  $\mathbf{e}_3$ , zapišemo enačbo 3 tako, da nastopajo velikosti sil kot neznanke, enačba 5.

$$\mathbf{R} + F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \quad (1.3-5)$$

V tej enačbi so samo tri neznanke, velikosti sil  $F_1$ ,  $F_2$  in  $F_3$ . Za rešitev teh neznank rabimo tri skalarnе enačbe, ki jih dobimo s skalarnim množenjem enačbe 5 s poljubnimi tremi linearno neodvisnimi vektorji. Enačbe pa so lažje izračunljive in bolj pomenljive, če jih množimo zaporedoma z baznimi vektorji Kartezijskega koordinatnega sistema,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , ali pa s smernimi vektorji  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Za zgled pomnožimo enačbo 3 z baznim vektorjem  $\mathbf{i}$ , to je smernim vektorjem x osi.

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{i} + F_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{i} + F_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{i} + F_3\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (1.3-6a)$$

Skalarni produkti v gornji enačbi predstavljajo komponente sil v x smeri. Na primer produkt  $F_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1$  je enak  $F_1\mathbf{e}_{1,x}$  oziroma  $F_{1,x}$ , torej x komponenti sile  $\mathbf{F}$ . Tako enačba 6a predstavlja vsoto komponent vektorjev sil v smeri x osi, kar pomensko lahko zapišemo z enačbo 6a-1

$$R_x + F_1\mathbf{e}_{1,x} + F_2\mathbf{e}_{2,x} + F_3\mathbf{e}_{3,x} = 0 \quad (1.3-6a-1)$$

oziroma z enačbo 6a-2.

$$R_x + F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} = 0 \quad (1.3-6a-2)$$

Ilustracija pomena takih skalarnih enačb, konkretno za enačbo 7-a in b za ravninski problem, je prikazana na sliki 4. Ilustracija velja za na sliki prikazana smerna vektorja  $\mathbf{e}_1$  in  $\mathbf{e}_2$ . Tedaj sta vrednosti za  $F_1$  in  $F_2$  negativni. Če bi izbrali smerna vektorja  $\mathbf{e}_1$  in  $\mathbf{e}_2$  v obratni smeri, tedaj bi bili vrednosti  $F_1$  in  $F_2$  pozitivni in smerni koti drugačni, glej sliko 5. V vsakem črtkanem okvirju so označene komponente sil katerih vsota je enaka nič.

Enačba 6a oziroma 6a-1 je skalarna enačba, in sicer navadna linearna enačba s tremi neznankami – neznanimi skalarnimi vrednostmi  $F_1$ ,  $F_2$  in  $F_3$ . Ko enačbo 3 skalarno pomnožimo z baznim vektorjem  $\mathbf{j}$ , smernim vektorjem y osi,

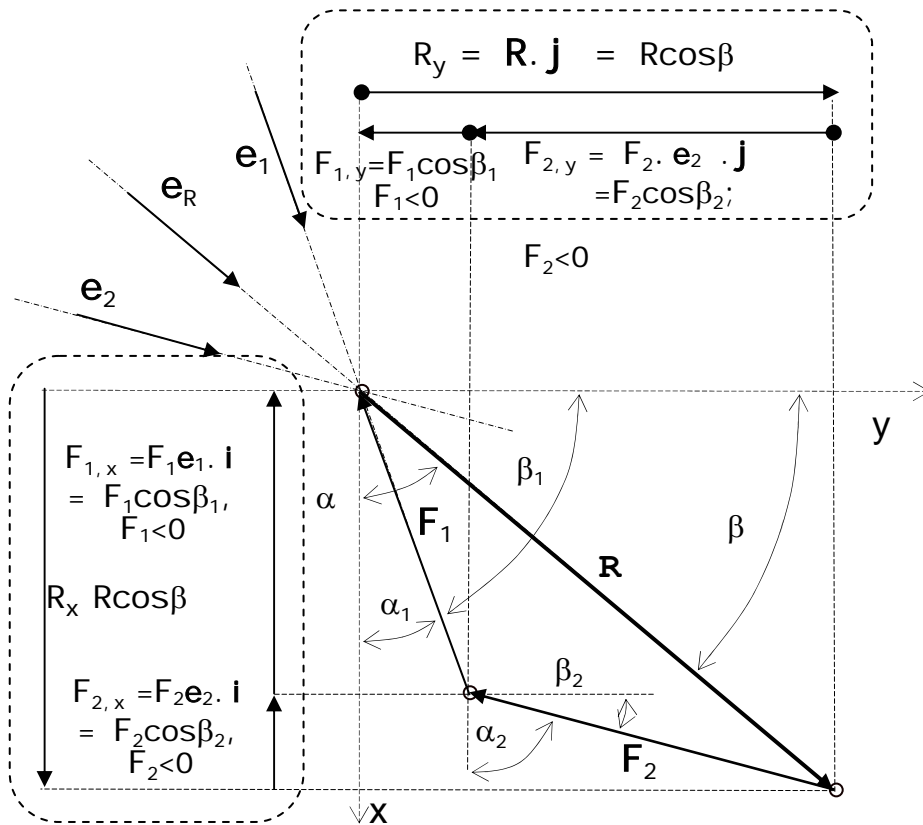
$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{j} + F_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{j} + F_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{j} + F_3\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.3-7a)$$

dobimo komponente vektorjev v smeri y osi:

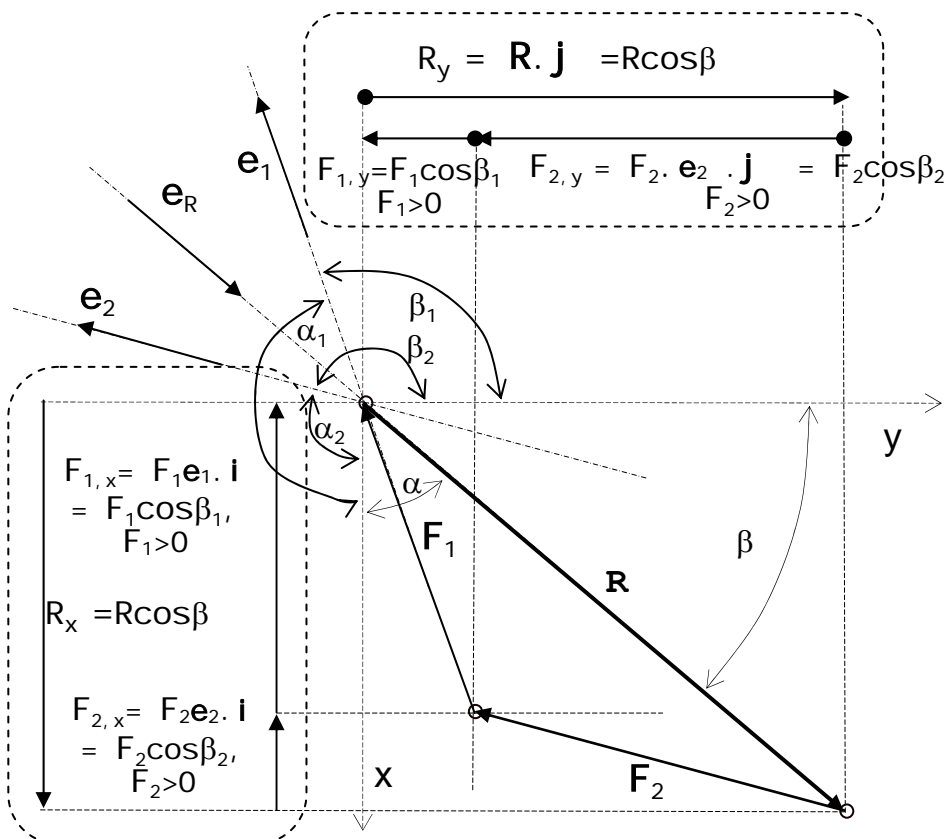
$$R_y + F_1\mathbf{e}_{1,y} + F_2\mathbf{e}_{2,y} + F_3\mathbf{e}_{3,y} = 0. \quad (1.3-7b)$$

S skalarnim množenjem enačbe 3 z vektorjem  $\mathbf{k}$  dobimo še tretjo skalarno enačbo, enačba 8.

$$R_z + F_1\mathbf{e}_{1,z} + F_2\mathbf{e}_{2,z} + F_3\mathbf{e}_{3,z} = 0 \quad (1.3-8)$$



Slika 1.3-4. Ilustracija za komponente sil v enačbah 6a-1 in 6a-2 za ravninski problem. Za prikazana smerna vektorja  $e_1$  in  $e_2$  in izpolnjeno ravnotežje sta vrednosti za  $F_1$  in  $F_2$  negativni.



Slika 1.3-5. Ilustracija za komponente sil v enačbah 6b in 7b za ravninski problem in smerna vektorja  $e_1$  in  $e_2$ , ki sta v obratni smeri kot na sliki 4. Za izpolnjeno ravnotežje sta vrednosti za  $F_1$  in  $F_2$  pozitivni. Smerni koti smernih vektorjev  $e_1$  in  $e_2$ , so seveda drugačni kot na sliki 4.

Tako imamo sistem treh linearnih enačb, enačbe 6a-1,7b in 8, ki jih rešimo na tri neznane vrednosti  $F_1$ ,  $F_2$  in  $F_3$ . Koefficienti v enačbah so kosinusi naklonskih kotov smernih vektorjev neznanih sil oziroma komponente smernih vektorjev. Zapišimo s temi oznakami enačbe še v matrični obliki, enačba 9a, ter za ravninski problem, enačba 9b. Pri tem opozorimo, da si torej pri zapisu enačb moramo smerne vektorje najprej izbrati – izberemo v katero smer na učinkovalnici sil so usmerjeni smerni vektorji sil!

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.3-9a)$$

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.3-9b)$$

Zapomnimo si, da so v matriki koefficientov komponente smernih vektorjev zložene v njenih stolpcih. Sistem enačb 9 je najprimernejši za uporabo tedaj, ko so vsi vektorji podani po komponentah v Kartezijem koordinatnem sistemu.

Do ekvivalentnega sistema enačb pridemo, če vektorsko enačbo 3 množimo kar s smernimi vektorji  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  in  $\mathbf{e}_3$ . Tedaj dobimo sistem enačb 10-a, kjer so  $R_1$ ,  $R_2$  in  $R_3$  pravokotne komponente sile  $\mathbf{R}$  v smereh omenjenih smernih vektorjev, (opozorilo: tedaj  $\mathbf{R}$  ni vsota  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  in  $\mathbf{R}_3$ ) matrika pa je simetrična. Za ravninski problem pa dobimo seveda samo dve enačbi, enačbi 10-b. Vsaka enačba seveda predstavlja vsoto pravokotnih komponent sil, pravokotnih projekcij, na smerne vektorje.

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & 1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.3-10a)$$

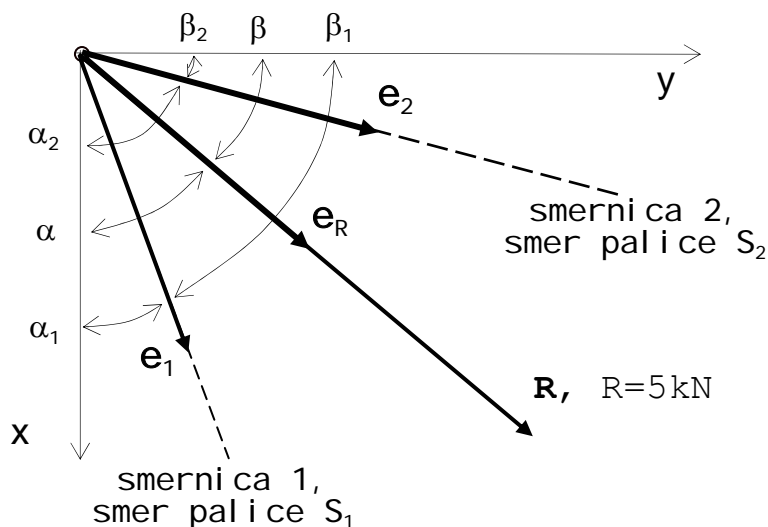
$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.3-10b)$$

Skalarni produkti v gornjih enačbah so enaki kosinusom kotov med smernimi vektorji. Tedaj torej operiramo samo s koti, ki podajajo medsebojno lego vektorjev in lahko računamo brez koordinatnega sistema. Zapišimo za zgled enačbe 10a s pomočjo teh kotov:

$$\begin{Bmatrix} R \cos \delta_{1-R} \\ R \cos \delta_{2-R} \\ R \cos \delta_{3-R} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \cos \delta_{1-2} & \cos \delta_{1-3} \\ \cos \delta_{1-2} & 1 & \cos \delta_{2-3} \\ \cos \delta_{1-3} & \cos \delta_{2-3} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.3-11)$$

Če bi množili enačbo 3 še s četrtem vektorjem, bi bil ta zagotovo linearno odvisen od prejšnjih treh, četrta enačba pa linearna kombinacija prvih treh in torej ne bi dobili še četrte neodvisne enačbe. Iz tega vidimo, da lahko enolično uravnotežimo (razstavimo) silo samo s tremi ustreznimi silami. Razstavljanje sile na več kot tri sile je seveda možno, samo rezultat iz enačbe 3 ni enoličen – možnih je nešteto variant. Matematično gledano imamo v prostoru namreč samo tri linearno neodvisne enačbe (za ravninske probleme dve enačbi) in ko imamo več kot tri neznanke je rešitev poljubno mnogo. Kot vemo iz matematike, lahko vrednosti za število neznanih velikosti sil, to je neznanek nad tri (oziroma dva za ravninski problem), poljubno izberemo, preostale tri pa izračunamo iz sistema treh (dveh) enačb. Na koncu še dodajmo, da postane prostorski problem ravninski, ko so vse komponente sil v smeri pravokotno na obravnavano ravnino nične.

### Zgled 1.3.Z1 (nadaljevanje) – analitična rešitev.



Slika 1.3.Z1-3. Postavitev smernih vektorjev.

Glede na izbrani koordinatni sistem prikazan na sliki Z1-3 in podatke na sliki Z1-1 so smerni vektorji enaki

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R &= (\cos\alpha, \cos\beta) = (\cos 40^\circ, \cos 50^\circ) = (0,766 \quad 0,643) \\ \mathbf{e}_1 &= (\cos\alpha_1, \cos\beta_1) = (\cos 15^\circ, \cos 75^\circ) = (0,966 \quad 0,259) \\ \mathbf{e}_2 &= (\cos\alpha_2, \cos\beta_2) = (\cos 70^\circ, \cos 20^\circ) = (0,342 \quad 0,940). \end{aligned}$$

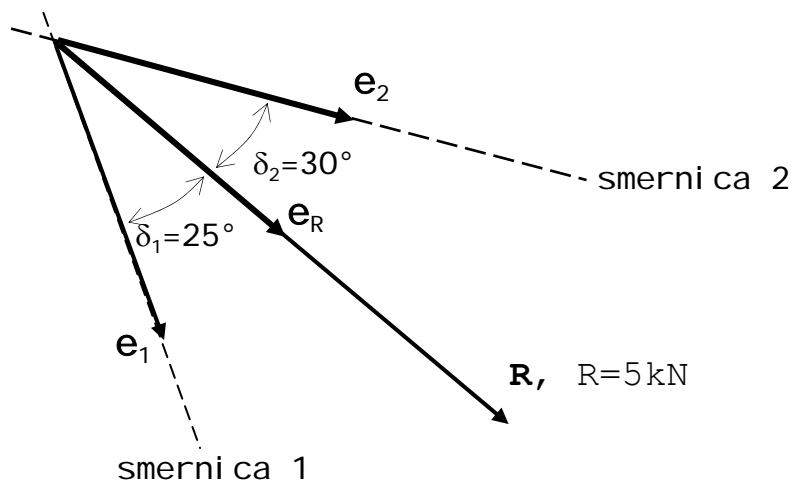
Tedaj so enačbe 9

$$5\text{kN} \cdot \begin{Bmatrix} 0,766 \\ 0,643 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,966 & 0,342 \\ 0,259 & 0,940 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

rešitev pa je

$$F_1 = -3,052\text{kN}, \quad F_2 = -2,580\text{kN}.$$

V prikazanem zgledu so vektorji podani v koordinatnem sistemu, torej so smeri podane glede na koordinatni sistem. Poglejmo si še izračun, ko so smeri podane samo relativno glede na silo, slika 1.3.Z1.4.



Slika 1.3.Z1.4. Smeri in postavitev smernih vektorjev relativno glede na silo.

Tedaj uporabimo enačbi 10-b, kjer so

$$R_1 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_1 = R \cos \delta_1 = 5 \cos 25^\circ = 4,531 \text{ kN}$$

$$R_2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_2 = R \cos \delta_2 = 5 \cos 30^\circ = 4,330 \text{ kN}$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos(\delta_1 + \delta_2) = \cos(25^\circ + 30^\circ) = 0,574 \text{ kN}.$$

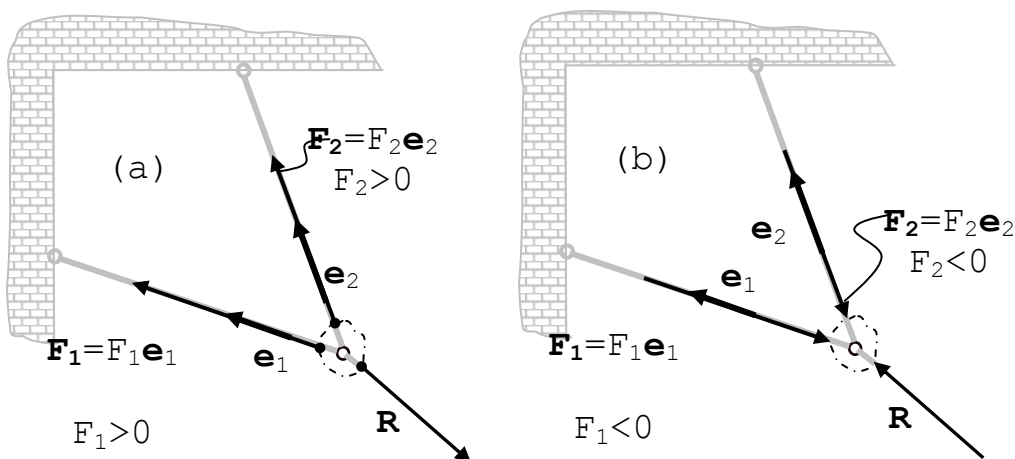
Enačbi 10-b sta tedaj

$$\begin{Bmatrix} 4,531 \\ 4,330 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0,574 \\ 0,574 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

njuna rešitev pa je seveda enaka kot prej,

$$F_1 = -3,052 \text{ kN}, F_2 = -2,580 \text{ kN}.$$

Poglejmo si še za ta primer varianto, ko smerne vektorje postavimo v obratnih smereh, ter smisel take izbire. Ko palice »vlečejo« vozlišče, tedaj so v palicah natezne sile, ko pa sile »tiščijo« vozlišče, pa so sile v palicah tlačne, slika Z1-5b. V gradbeništvu praviloma izbiramo smerne vektorje tako, da nam pozitivne vrednosti sile predstavljajo natezne sile in negativne sile tlačne sile v palicah. Na slikah Z1-5a in b sta prikazana oba slučaja, ki kažeta **dejansko smer** sil  $F_1$  in  $F_2$  s katerima palici delujeta na vozlišče. Seveda bi take sili dobili, če bi v primeru na sliki b bila obremenilna sila  $\mathbf{R}$  obrnjena glede na sliko a. Ko torej postavimo smerne vektorje v smeri proč od vozlišča, tedaj kar iz predznaka sile vemo ali je v palici tlak ali nateg – to pa je bistveno pomembno za dimenzionirane palice.



Slika 1.3-5a in b. Simbolični prikaz dejanskih smeri reakcijskih sil  $F_1$  in  $F_2$ ; (a) natezni sili, (b) tlačni sili. Glede na izbrana vektorja  $\mathbf{e}_1$  in  $\mathbf{e}_2$  imata v prvem primeru  $R_1$  in  $R_2$  pozitivni vrednosti, v drugem pa negativni.



**Zgled 1.3.Z1 (nadaljevanje)** – izberimo smerna vektorja v smereh prikazanih na sliki 5a. Njuni smerni koti so, glede na izbrani koordinatni sistem, podani na sliki 6.

Iz podatkov na sliki Z1-1 na neki način izračunamo smerne kote:

$$\alpha_1 = 180^\circ - (90^\circ - \delta_1) = 180^\circ - (90^\circ - 75^\circ) = 165^\circ$$

$$\beta_1 = 180^\circ - \delta_1 = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - (90^\circ - \delta_2) = 180^\circ - (90^\circ - 20^\circ) = 110^\circ$$

$$\beta_2 = 180^\circ - \delta_2 = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$$

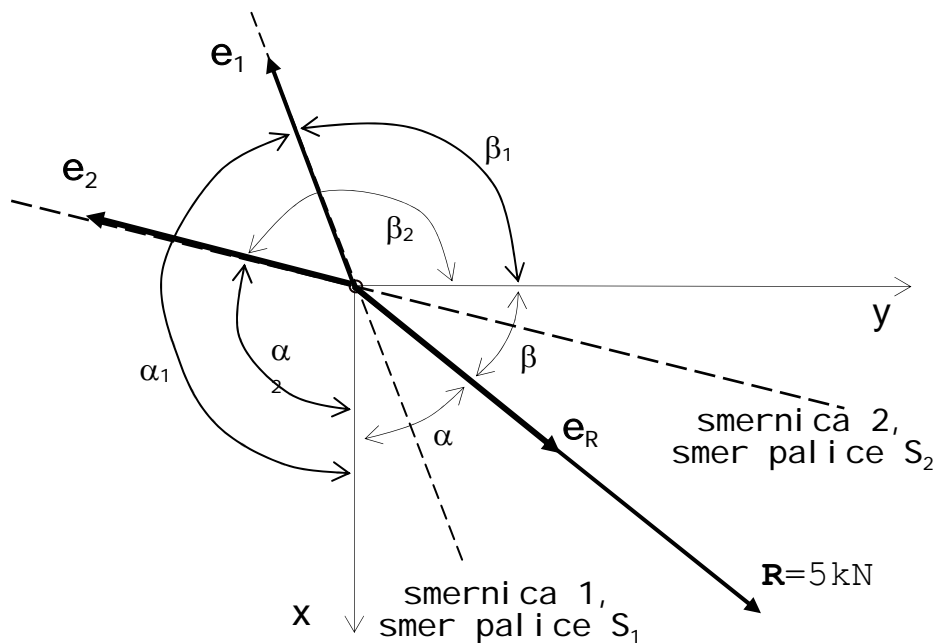
Smerna kota izbranega smernega vektorja sile  $\mathbf{P}$  pa smo že prej izračunali.

Smerni vektorji so enaki

$$\mathbf{e}_R = (\cos\alpha, \cos\beta) = (\cos 40^\circ, \cos 50^\circ) = (0.766, 0.643)$$

$$\mathbf{e}_1 = (\cos\alpha_1, \cos\beta_1) = (\cos 165^\circ, \cos 105^\circ) = (-0.966, -0.259)$$

$$\mathbf{e}_2 = (\cos\alpha_2, \cos\beta_2) = (\cos 110^\circ, \cos 160^\circ) = (-0.342, -0.940).$$



Slika 1.3.Z1-6. Postavitev smernih vektorjev in označitev njihovih smernih kotov.

Tedaj so enačbe 1.3-9b enake

$$5\text{kN} \cdot \begin{Bmatrix} 0,766 \\ 0,643 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,966 & -0,342 \\ -0,259 & -0,940 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

rešitev pa je

$$F_1 = 3,052\text{kN}, F_2 = 2,580\text{kN}.$$

Rezultat je torej pozitiven za obe sili  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$  kar pomeni, da sta obe sili natezni.

**Zgled 1.3.Z2.** Paličje, ki je postavljeno na ravna tla, je prikazano na sliki 1.3.Z2-1. V prikazanem koordinatnem sistemu so tla v ravnini  $x,y$ , lega palic pa je razvidna iz slike. Koordinatni sistem za sile je vzporeden s koordinatnim sistemom za prostor. Sila, ki deluje na vrh paličja, je podana po komponentah,  $\mathbf{P}=(3,-1,-2.5)\text{kN}$ . Ugotovi reakcijske sile v podporah paličja. Nalogo reši analitično in grafično.

**Analitična rešitev.** Naloga predstavlja problem uravnoveženja sile v prostoru. Treba jo je uravnovežiti s tremi reakcijskimi silami  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  in  $\mathbf{F}_3$  palic  $S_1$ ,  $S_2$  in  $S_3$  za katere vemo, da delujejo v njihovih osnih smereh.

Najprej si izberemo smeri in označbe smernih vektorjev, kot je prikazano na sliki. Taka izbira smernih vektorjev pomeni, da bodo pozitivne vrednosti sil natezne sile v palicah. Smerne vektorje izračunamo iz krajevnih vektorjev podpornih točk 1, 2 in 3 ter vrha paličja, ki jih ugotovimo iz slike:

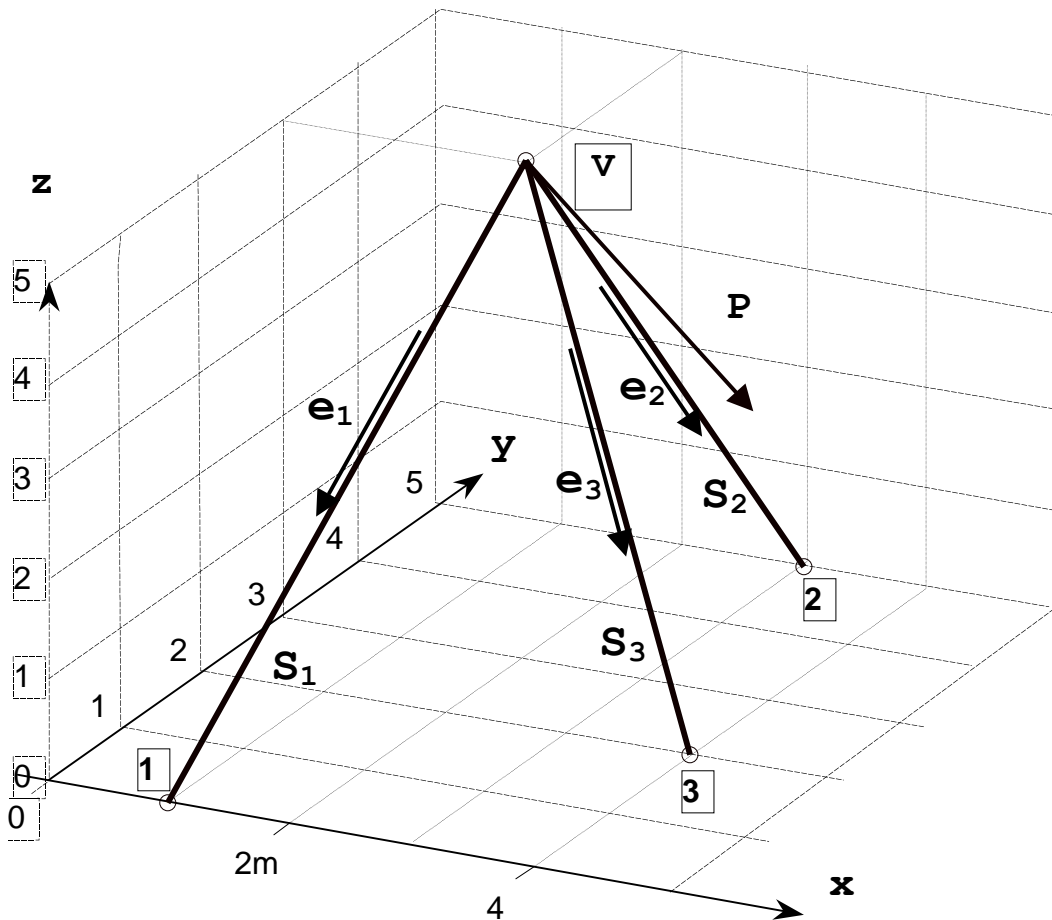
$$\mathbf{r}_1=(1,0,0)\text{m}, \mathbf{r}_2=(3,5,0)\text{m}, \mathbf{r}_3=(4,2,0)\text{m} \text{ in } \mathbf{r}_V=(2,3,5)\text{m}.$$

Smerni vektorji so

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_V}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_V|} = \frac{(1,0,0) - (2,3,5)}{|(-1,-3,-5)|} = \frac{|(-1,-3,-5)|}{\sqrt{1+3^2+5^2}} = -(0.169, 0.507, 0.845)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_V}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_V|} = \frac{(3,5,0) - (2,3,5)}{|(3,5,0) - (2,3,5)|} = \frac{(1,2,-5)}{\sqrt{1^2+2^2+5^2}} = (0.183, 0.365, -0.913)$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_V}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_V|} = \frac{(4,2,0) - (2,3,5)}{|(4,2,0) - (2,3,5)|} = \frac{(2,-1,-5)}{\sqrt{2^2+1^2+5^2}} = (0.365, -0.183, -0.913).$$



Slika 1.3.Z2-1. Shema paličja obremenjenega s silo  $\mathbf{P}$  ter izbira smernih vektorjev.

Sistem enačb, ki nam da končno rešitev, lahko sedaj takoj zapišemo. Vendar pa zapišimo še nekaj vmesnih korakov, da ilustriramo s konkretnimi vrednostmi teoretično izpeljavo reševanja. Izberimo varianto, kjer upoštevamo zapis reakcij v koordinatnem sistemu  $x, y, z$ ,

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \cdot \mathbf{e}_1 = (-0.169F_1, -0.507F_1, -0.845F_1) \text{ kN}$$

$$\mathbf{F}_2 = F_2 \cdot \mathbf{e}_2 = (0.183F_2, 0.365F_2, -0.913F_2) \text{ kN}$$

$$\mathbf{F}_3 = F_3 \cdot \mathbf{e}_3 = (0.365F_3, -0.183F_3, -0.913F_3) \text{ kN}.$$

Ko te sile vstavimo v ravnotežno enačbo,

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0},$$

ki jo zapišemo po komponentah, dobimo za vsako izmed smeri  $x$ ,  $y$  in  $z$  osi po eno skalarno enačbo:

$$\text{smer } x: \quad 3 - 0,169F_1 + 0,183F_2 + 0,365F_3 = 0$$

$$\text{smer } y: \quad -1 - 0,507F_1 + 0,365F_2 - 0,183F_3 = 0$$

$$\text{smer } z: \quad -2,5 - 0,845F_1 + 0,913F_2 - 0,913F_3 = 0.$$

Te enačbe krajše zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 0.169 & 0.183 & 0.365 \\ -0.507 & 0.365 & -0.183 \\ 0.845 & -0.913 & -0.913 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2.5 \end{Bmatrix} \text{ kN}.$$

Rešitve, ki predstavljajo reakcije, pa so

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.965 \\ 2.737 \\ -8.219 \end{Bmatrix} \text{ kN}.$$

Kot vemo, te rešitve predstavljajo tudi komponente sile ( $-\mathbf{P}$ ) v bazi  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . V koordinatnem sistemu  $x, y, z$ , pa imajo sledeče komponente:

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 2.965(-0.169, -0.507, -0.845) = (-0.501, -1.503, -2.505) \text{ kN}$$

$$\mathbf{F}_2 = F_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2.737(0.183, 0.365, -0.913) = (0.501, 1.000, -2.500) \text{ kN}$$

$$\mathbf{F}_3 = F_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -8.219(0.365, -0.183, -0.913) = (-3.0, 1.5, 7.504) \text{ kN}.$$

**Grafična rešitev.** Pri grafičnem reševanju prostorskega problema nastopi težava, ker ga izvajamo z risanjem na list papirja, ki nam omogoča neposredno celovito grafično predstavlo samo dvodimenzionalnih problemov – ploskev lista papirja je dvodimenzionalna. Zato neposredno na listu papirja ne moremo razstaviti dane prostorske sile na komponente v treh smereh. Vendar pa lahko vsak prostorski problem podamo s projekcijami na dve ravnini, na primer s tlorisom in pogledom (narisom). Ta problem je že v devetnajstem stoletju rešil Švicar Karl Culmann na enostavni način. Osnovna ideja postopka reševanja je prikazana na sliki Z2-2. Silo  $\mathbf{P}$  najprej uravnotežimo s silo  $\mathbf{F}_1$  in Culmannovo silo  $\mathbf{F}_c$ , enačba (a), ki leži na presečišču dveh ravnin. Prvo ravnino določata sili  $\mathbf{P}$  in palica oziroma sila  $\mathbf{F}_1$ , drugo ravnino pa palici  $S_2$  in  $S_3$  oziroma sili  $\mathbf{F}_2$  in  $\mathbf{F}_3$ .

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_c = \mathbf{0}.$$

(a)



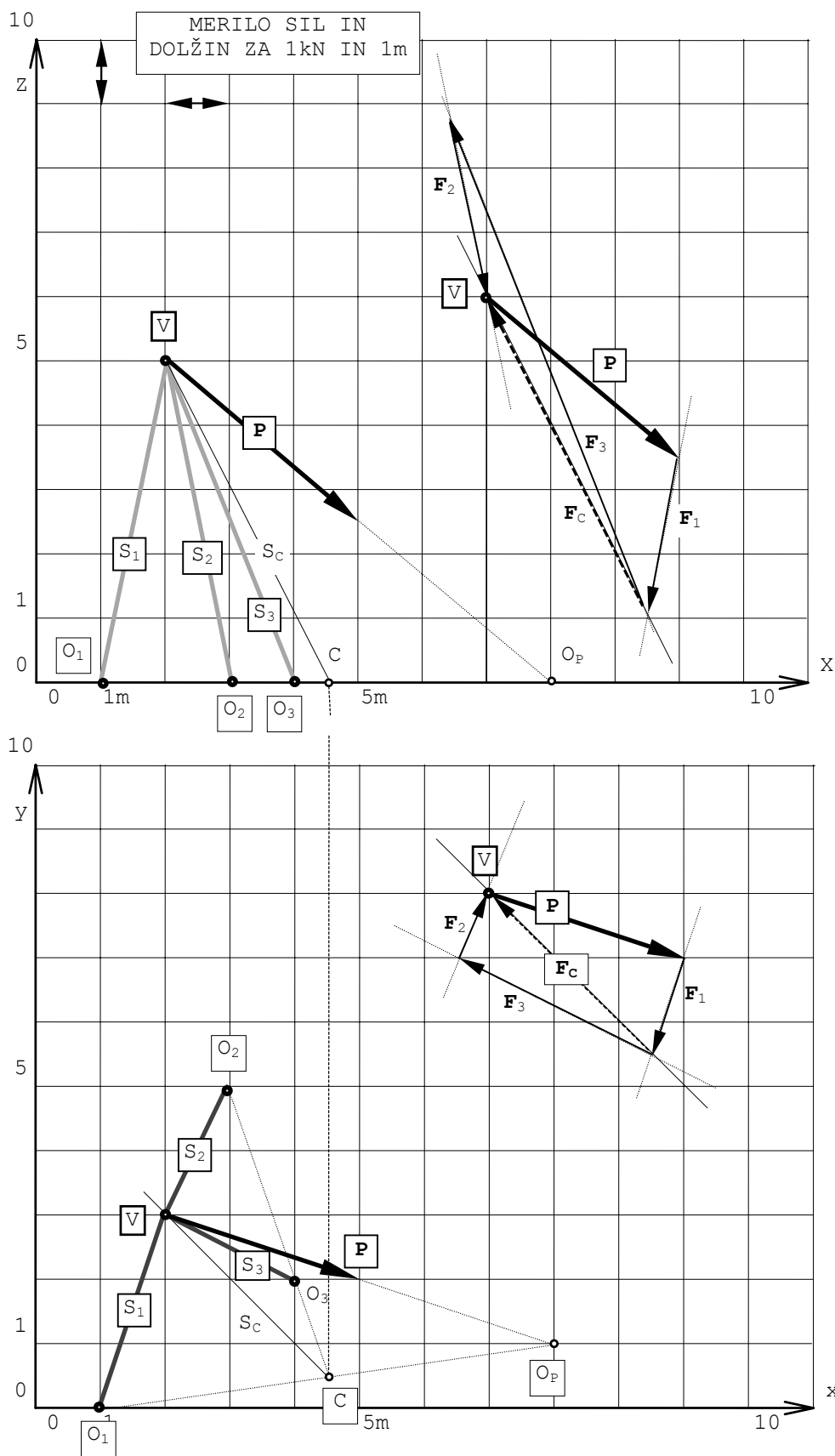
Iz zaključenega poligona sil v narisu, slika ZG2-2a, in tlorisu, slika ZG2-2b, odmerimo komponente posameznih sil (reakcij). Celotne velikosti sil seveda ne moremo neposredno odmeriti iz slike, ampak jih izračunamo iz odmerjenih komponent. Pri tem lahko v tlorisu odmerimo velikost vsote vektorskih komponent,  $\text{abs}(\mathbf{F}_{ix} + \mathbf{F}_{iy})$ , v narisu pa še komponente  $\mathbf{F}_{iz}$  in računamo:

$$F_1 = \sqrt{F_{1z}^2 + |F_{1y}^2 + F_{1x}^2|} = \sqrt{1.6^2 + 2.5^2} = 2.969\text{kN}$$

in analogno še za ostali sili

$$F_2 = \sqrt{F_{2z}^2 + |F_{2y}^2 + F_{2x}^2|} = \sqrt{1.1^2 + 2.5^2} = 2.73\text{kN}$$

$$F_3 = \sqrt{F_{3z}^2 + |F_{3y}^2 + F_{3x}^2|} = \sqrt{7.5^2 + 3.4^2} = 8.23\text{kN}.$$

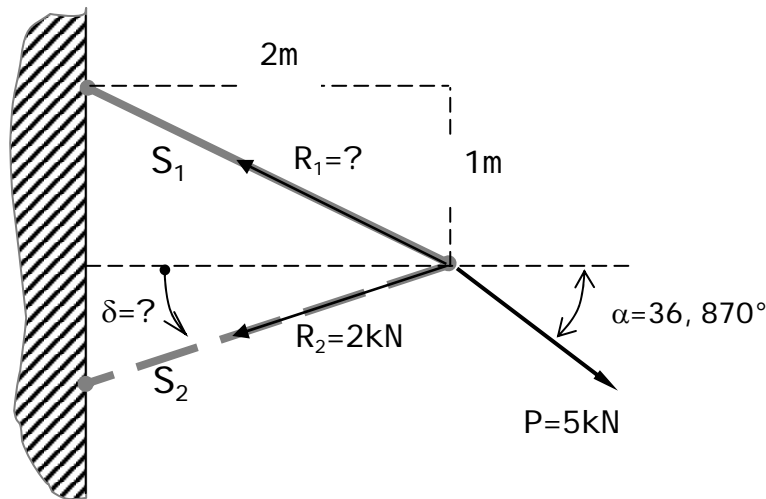


Slika 1.3.Z2-3. Grafična rešitev z nariso in tlorisom paličja in sil.

**1.4. Posebni problemi.** Analiza ravnotežja paličja, kjer poleg neznanih sil računamo tudi njihove smeri, vodi zmeraj do nelinearnih enačb, ki jih je praviloma veliko težje rešiti kot sistem linearnih enačb. V splošnem je možno, da realne rešitve sploh ni, da je ena ali pa več rešitev. Inženirsko gledano nastopijo taki problemi tedaj, ko ni poznana geometrija konstrukcije. Pri paličju, na primer, lahko ugotovljamo poleg sil v palicah tudi postavitve (lego) ene ali več palic. Na splošno je lahko neznanek več kot ravnotežnih enačb. Tedaj moramo opredeliti problem z dodatnimi pogoji, na primer zahteva po najmanjši sili v palici, ki nam dajo manjkajoče enačbe tako, da je število neznanek enako številu enačb, dejanski matematični potek reševanja pa lahko izvedemo na različne načine. Take probleme rešujemo v inženirski praksi bolj po redko, predvsem zaradi tega, ker so komplicirani. Take probleme, ki so v mnogih primerih pravzaprav problemi optimiranja, smatramo v tem poglavju za posebne probleme.

Za posebne probleme je značilno, da jih ne moremo reševati na enostaven in stereotipen način. Lahko rečemo, da vsak zahteva svoj matematični pristop. Med značilnosti teh problemov pa lahko štejemo tudi to, da so večinoma grafično ali grafo-analitično lažje rešljivi kot samo analitično. Poglejmo si nekaj zgledov, ki pa so samo ravninski problemi, da reševanje ni preveč komplicirano. Zaradi poučnosti pa rešimo probleme najprej grafično.

**Zgled 1.4.Z1.** Na steno je montirana palica  $S_1$  na katero deluje sila  $\mathbf{P}$ , glej sliko Z1-1. Kako moramo postaviti drugo palico  $S_2$  ( $\delta=?$ ), da bo sila v njej imela velikost sile  $R_2=2\text{kN}$ ? Pri rešitvi smatramo, da deluje sistem kot paličje, ker so vsa vozlišča členkasta.



Slika 1.4.Z1-1. Dispozicija problema.

**Rešitev.** Problem je ravninski, neznanke pa sta dve: velikost sile  $\mathbf{R}_1$  v konzoli  $S_1$  in smer sile  $\mathbf{R}_2$  v palici  $S_2$ .

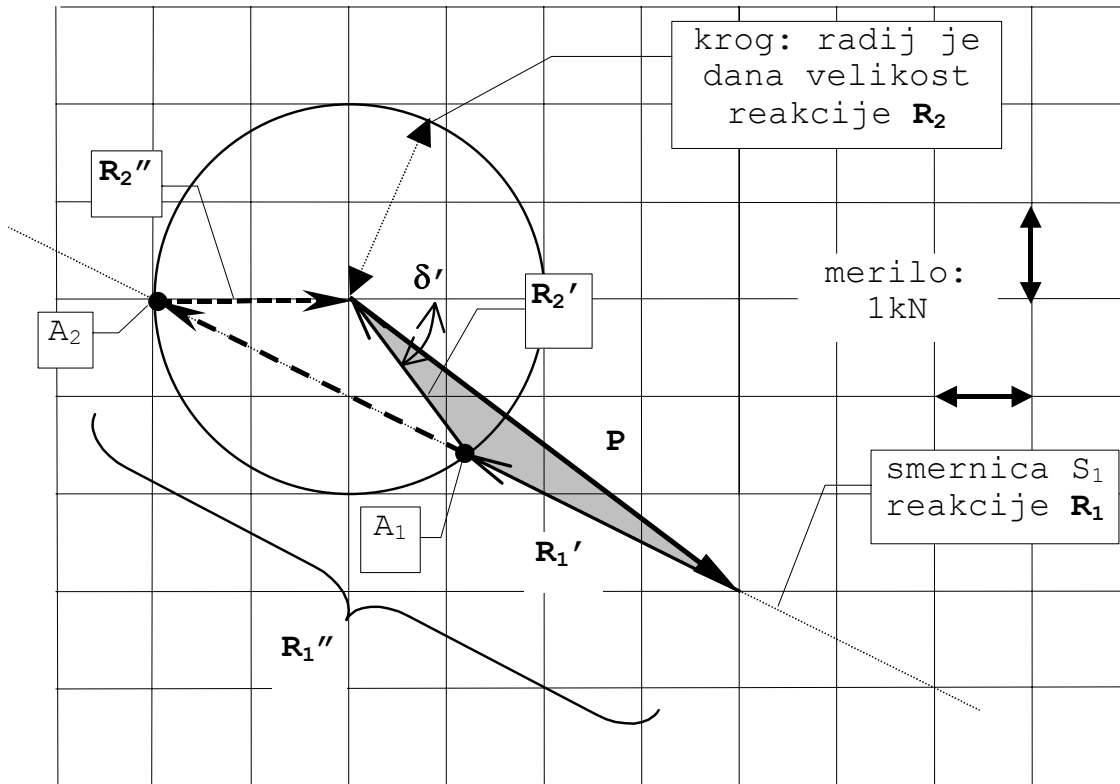
**Grafična rešitev** je prikazana na sliki Z1-2. Najprej v merilu narišemo silo  $\mathbf{P}$ , nato pa narišemo krog z radijem, ki je enak velikosti komponente  $r=R_2=2\text{kN}$ . Središče kroga postavimo v začetek vektorja sile  $\mathbf{P}$ . Skozi vrh vektorja sile  $\mathbf{P}$  potegnemo še smernico sile  $\mathbf{R}_1$ . Smernica seka krog v točkah  $A_1$  in  $A_2$ . Zaključeni trikotnik sil, na sliki je prikazan kot osenčen, ki ga določajo sila  $\mathbf{P}$  ter točka  $A_1$ , nam da prvi rešitvi. Iz slike odmerimo velikost prve reakcije in pripadajočo smer druge,

$$R_1' = 3,10\text{kN} \text{ in } \delta' = 53,130^\circ.$$

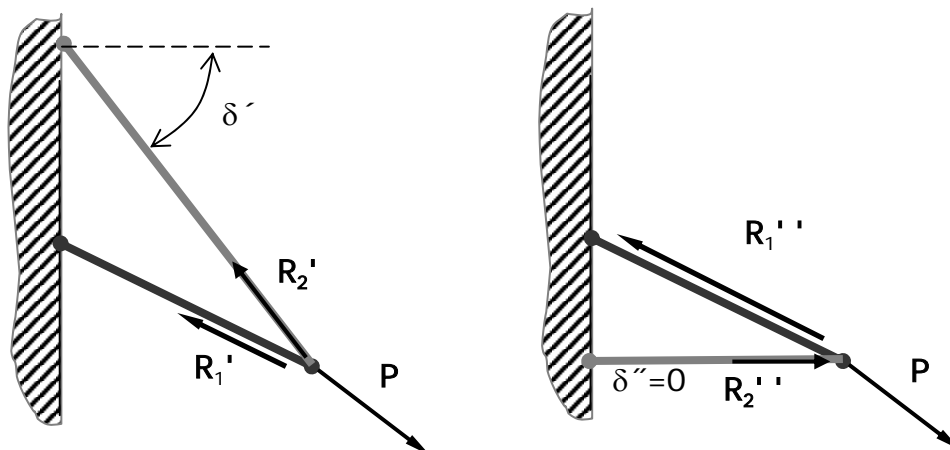
Druga rešitev je podana s trikotnikom sil, ki ga določajo sila  $\mathbf{P}$  ter točka  $A_2$ , vrednosti pa sta

$$R_1'' = 6,70\text{kN} \text{ in } \delta'' = 0^\circ.$$

Razporeditev palic za obe rešitvi je prikazana na sliki Z1-3. Vidimo, da nam da prva rešitev precej manjšo osno silo v »konzoli«  $S_1$ . Iz grafične rešitve je tudi očitno, da bi lahko bili podatki takšni, da smernica ne bi sekala kroga. To bi pomenilo, da ni možno postaviti takega paličja, ki bi izpolnjevalo dane zahteve – ni realne rešitve problema.



Slika 1.4.Z1-2. Grafična rešitev naloge. Prva rešitev je označena z osenčenim trikotnikom sil.



Slika 1.4.Z1-3. Varianti razporeditev palic, ki zadoščata prvi in drugi rešitvi naloge, ter prikaz smeri reakcij.

Grafo-analitično reševanje je očitno, temelji na znanem izračunu sečišča kroga in premice, in ga zato ne bomo podajali.

**Analitična rešitev.** Izhajamo seveda iz ravnotežne enačbe, ki jo morajo izpolnjevati vse sile,

$$\mathbf{P} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0$$

oziroma



$$\mathbf{P} + R_1 \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2 = 0.$$

Izberimo si smerne vektorje ter nalogo rešimo v izbranem koordinatnem sistemu, ki je prikazan na sliki Z1-3. Opomnimo naj še, da lahko sicer rešujemo problem brez koordinatnega sistema, kjer seveda operiramo samo s koti medsebojne lege sil. V gornji enačbi sta neznanki  $R_1$  in  $\mathbf{e}_2$ . V začetku rešujemo kar splošno, ker se bodo nekatere vrednosti okrajšale. Da se znebimo vektorske enačbe, jo najprej zapišemo po komponentah.

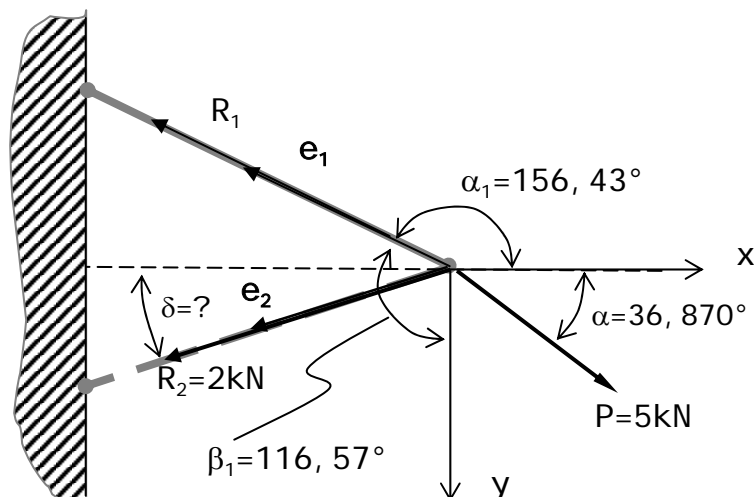
$$P_x + R_1 \cdot \cos \alpha_1 + R_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0 \quad (1.3.Z1-1a)$$

$$P_y + R_1 \cdot \cos \beta_1 + R_2 \cdot \cos \beta_2 = 0 \quad (1.3.Z1-1b)$$

V teh enačbah so torej tri neznanke:  $R_1$ ,  $\alpha_2$  in  $\beta_2$  oziroma  $\cos \alpha_2$  in  $\cos \beta_2$  namesto zadnjih dveh neznank. Vendar pa sta kota med seboj odvisna, saj sta vezana z enačbo

$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 = 1, \quad (1.3.Z1-2)$$

ker je vsota kvadratov komponent smernega vektorja enaka ena.



Slika 1.3.Z1-3. Postavitev koordinatnega sistema in simbolična razporeditev smernih vektorjev ter vrednosti, ki so poznane.

Če označimo neznanke s simboli  $x, y$  in  $z$  ter znane vrednosti z  $a, b, \dots$ , tedaj lahko gornje enačbe zapišemo v obliki, ki smo jo morda bolj vajeni:

$$a_1 + b_1 x + c \cdot y = 0$$

$$a_2 + b_2 x + c \cdot z = 0$$

$$y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Ta sistem nelinearnih enačb lahko rešimo na različne načine – podani potek reševanja je torej samo eden izmed možnih. Iz gornjih treh enačb eliminiramo  $\cos \alpha_2$  in  $\cos \beta_2$  kot sledi. Prvi dve enačbi malo preoblikujemo,

$$P_x + R_1 \cdot \cos \alpha_1 = -R_2 \cdot \cos \alpha_2$$

$$P_y + R_1 \cdot \cos \beta_1 = -R_2 \cdot \cos \beta_2,$$

ju kvadriramo,

$$P_x^2 + 2P_x(R_1 \cos \alpha_1) + (R_1 \cdot \cos \alpha_1)^2 = (R_2 \cdot \cos \alpha_2)^2$$

$$P_y^2 + 2P_y(R_1 \cdot \cos \beta_1) + (R_1 \cdot \cos \beta_1)^2 = (R_2 \cdot \cos \beta_2)^2$$

in seštejemo. Ko upoštevamo, da je vsota kvadratov komponent vektorja enaka kvadratu njegove velikosti, dobimo kvadratno enačbo

$$P^2 + 2 \cdot R_1 (P_x \cdot \cos \alpha_1 + P_y \cdot \cos \beta_1) + R_1^2 - R_2^2 = 0$$

za neznanke  $R_1$ . V enačbo vstavimo znane vrednosti,

$$5^2 + 2 \cdot R_1 (4 \cdot \cos 153,43^\circ + 3 \cdot \cos 116,57^\circ) + R_1^2 - 2^2 = 0,$$

jo uredimo,

$$R_1^2 - 9,839R_1 + 21 = 0$$

in rešimo. Dobimo seveda dve rešitvi:

$$R_1' = 3,130 \text{ kN}$$

$$R_1'' = 6,708 \text{ kN}$$

Z vstavitvijo posameznih rešitev v enačbi Z1-1a in b pa dobimo še smerni vektor reakcije  $R_2'$  oziroma  $R_2''$ . Za prvo rešitev dobimo iz enačb

$$P_x + R_1' \cdot \cos \alpha_1 + R_2 \cdot \cos \alpha_2 = 4 + 3,130 \cos 153,43^\circ + 2 \cos \alpha_2 = 0$$

$$P_y + R_1' \cdot \cos \beta_1 + R_2 \cdot \cos \beta_2 = 3 + 3,130 \cos 116,57^\circ + 2 \cos \beta_2 = 0$$

smerni vektor

$$\mathbf{e}_2' = (-0,600 \quad -0,800).$$

Za drugo rešitev pa dobimo iz enačb

$$P_x + R_1'' \cdot \cos \alpha_1 + R_2 \cdot \cos \alpha_2 = 4 + 6,708 \cos 153,43^\circ + 2 \cos \alpha_2 = 0$$

$$P_y + R_1'' \cdot \cos \beta_1 + R_2 \cdot \cos \beta_2 = 3 + 6,708 \cos 116,57^\circ + 2 \cos \beta_2 = 0$$

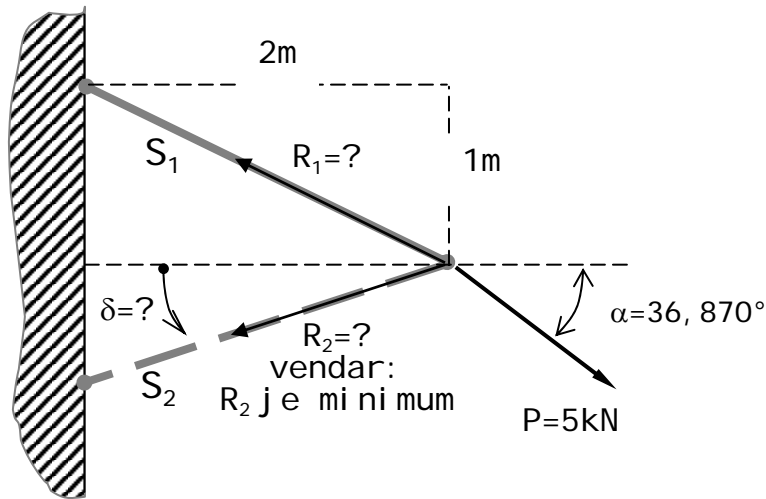
smerni vektor

$$\mathbf{e}_2'' = (1,000 \quad 0,000).$$

Pri tem velja opozoriti, da je bil smerni vektor  $\mathbf{e}_2$  v nalogi neznanca, kar je seveda povsem drugače kot v prejšnjem razdelku, ko smo smerni vektor predpostavili. Za drugo rešitev velja relacija  $\mathbf{R}_2'' = R_2'' \mathbf{e}_2''$ . Ker je izračunani smerni vektor  $\mathbf{e}_2''$  v pozitivni smeri x osi, je glede na sliko Z1-4 usmerjen k vozlišču. Reakcija za drugo rešitev  $R_2''$  je pozitivna, zato je v smeri smernega vektorja  $\mathbf{e}_2''$  in je torej usmerjena k vozlišču – sila pa je zaradi tega tlačna. Tako smo za drugo rešitev dobili tlačno silo podano s pozitivno vrednostjo  $R_2''$ , torej drugače kot smo sicer vajeni pri paličjih, kjer po dogovoru smerne vektorje usmerimo od vozlišča in so

pozitivne sile zmeraj natezne. V obravnavanem primeru lahko seveda izračunani smerni vektor obrnemo in tako uskladimo predznake sil s predznaki, ki so običajnimi za paličja.

**Zgled 1.4.Z2.** Analizirajmo enak problem kot je v prejšnjem zgledu (zgled 1.4.Z1) z razliko, da sedaj tudi sila  $R_2$  ni podana, vendar pa zahtevamo, da je absolutno najmanjša, slika Z2-1. Torej imamo sedaj tri neznanke: velikost in smer reakcije  $R_2$  ter še velikost  $R_1$ .

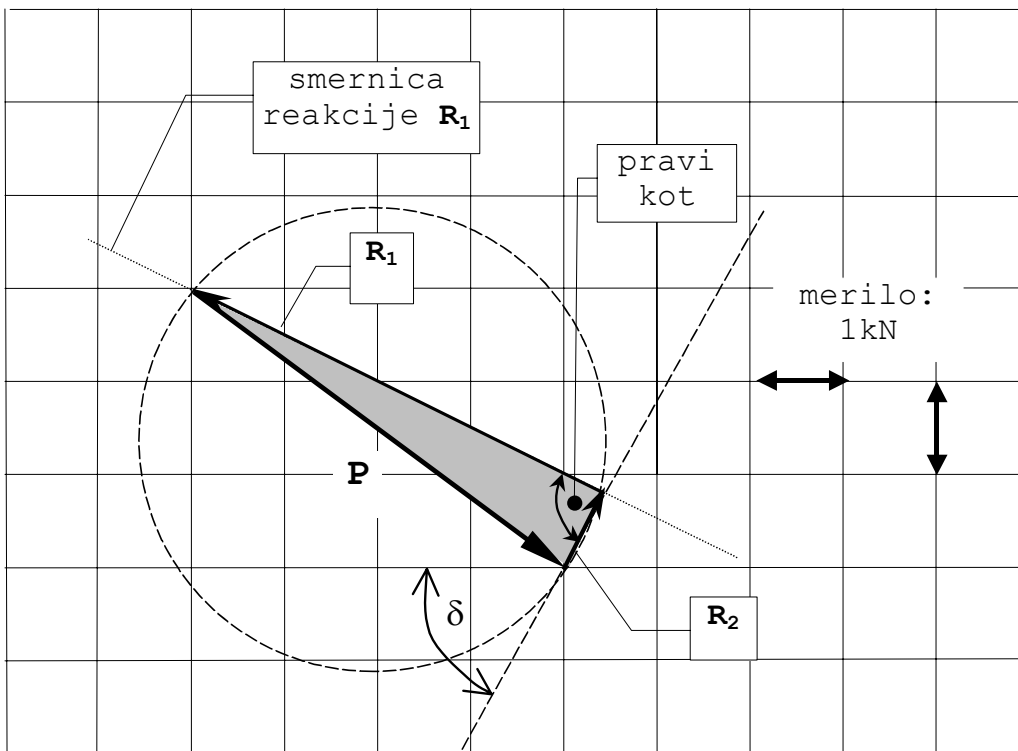


Slika 1.3.Z2-1. Postavitev problema za zgled 2.

**Grafična rešitev** je enostavna in je prikazana na sliki Z2-2. Poteka tako: v merilu narišemo vektor sile  $P$  in k repu vektorja pritaknemo smernico palice 1. Najkrajša razdalja med koncem vektorja sile  $P$  in smernico palice 1 določa najmanjšo silo  $R_2$  in je pravokotna na smernico. Zaključeni trikotnik sil pa nam da končni rezultat, iz katerega lahko odmerimo vse iskane količine. Pri risanju si lahko pomagamo s krogom. Namreč, iz geometrije vemo, da je včrtani trikotnik krog nad premerom kroga pravokotni trikotnik. Ta trikotnik sil je prikazan na sliki Z2-2 kot osenčeni trikotnik. Iz slike odmerimo vrednosti

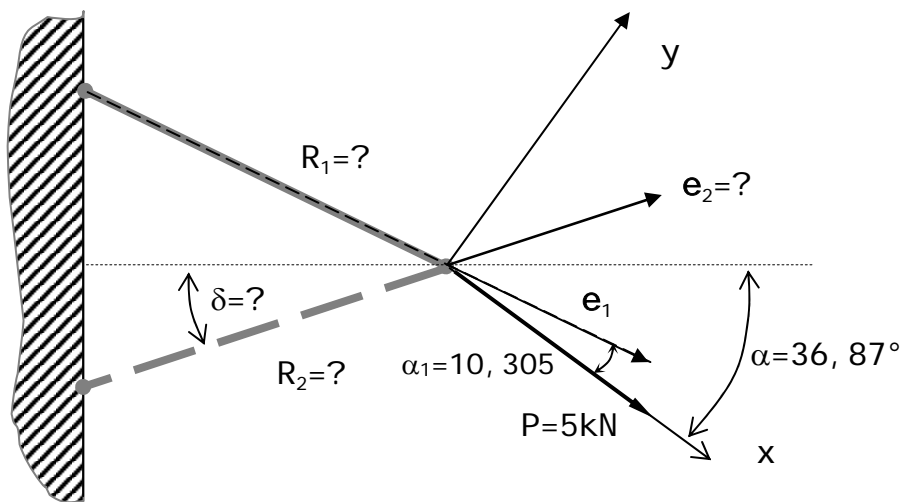
$$R_1 = 4,9\text{kN}, \quad R_2 = 0,9\text{kN}, \quad \delta = 63^\circ$$

Lega paličja, ki ustreza tej rešitvi, je prikazana na sliki 1.4.Z2-4a. V tem primeru je sila  $R_2$  tlačna, ker deluje k vozlišču. Rešitev problema pa dopušča tudi postavitev paličja prikazanega na sliki 1.4.Z2-4b. Tedaj pa je sila  $R_2$  natezna, ker deluje proč od vozlišča.



Slika 1.4.Z2-2. Grafična rešitev problema zgleada 2.

**Analična rešitev.** Izberimo si smerne vektorje in koordinatni sistem  $xy$ , ki omogoča nekoliko lažje matematično reševanje problema, slika Z2-3. Na sliki so podane znane vrednosti in koti, ki jih neposredno izračunamo iz podatkov problema.



Slika 1.4.Z2-3. Postavitev koordinatnega sistema in označba smernih vektorjev.

V enačbi ravnotežja sil

$$\mathbf{P} + R_1 \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2 = 0,$$

ki predstavlja dve skalarni enačbi, imamo štiri neznanke, te so  $R_1$ ,  $R_2$  in  $\mathbf{e}_2$ , kjer upoštevamo, da sta v  $\mathbf{e}_2$  oba smerna kota neznanke. Velikost  $\mathbf{e}_2$  nam da tretjo enačbo

$\mathbf{e}_2 = 1$ .

Zahteva, da je  $R_2$  absolutno najmanjša, pa nam bo dala še četrto enačbo. Zapišimo te enačbe v skalarni obliki. Najprej zapišemo ravnotežno enačbo po komponentah v izbranem koordinatnem sistemu ter še enačbo za smerni vektor:

$$P + R_1 \cdot \cos \alpha_1 + R_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0 \quad 1.3.Z2-1a$$

$$R_1 \cdot \cos \beta_1 + R_2 \cdot \cos \beta_2 = 0 \quad 1.3.Z2-1b$$

$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 = 1.$$

Iz teh enačb se znebimo vseh neznank razen  $R_2$ , da bomo lahko iskali njen ekstrem. Postopek za ta korak je analogen postopku prikazanem v zgledu 1. Najprej prvi dve enačbi preuredimo in kvadriramo

$$(R_2 \cdot \cos \alpha_2)^2 = P^2 + 2P(R_1 \cos \alpha_1) + (R_1 \cdot \cos \alpha_1)^2 \quad 1.3.Z2-a$$

$$(R_2 \cdot \cos \beta_2)^2 = (R_1 \cdot \cos \beta_1)^2 \quad 1.3.Z2-b$$

ter ju nato seštejemo. Ko upoštevamo, da je vsota kvadratov komponent vektorja enaka kvadratu njegove velikosti, dobimo kvadratno enačbo

$$R_2^2 = P^2 + R_1^2 + 2 \cdot R_1 P \cdot \cos \alpha_1, \quad 1.3.Z2-c$$

ki seveda ni nič drugega kot kosinusov izrek za trikotnik sil  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{R}_1$  in  $\mathbf{R}_2$ . Sedaj z odvodom poiščemo ekstrem ob upoštevanju, da je v gornji enačbi na desni strani edina neznanka  $R_1$ :

$$\frac{\partial}{\partial R_1} R_2^2 = \frac{\partial}{\partial R_1} (P^2 + R_1^2 + 2 \cdot R_1 P \cdot \cos \alpha_1) = 2R_1 + 2P \cdot \cos \alpha_1 = 0.$$

Rešitev enačbe je

$$R_1 = -P \cdot \cos \alpha_1 = -5 \cos 10,305^\circ = -4,919 \text{ kN}, \quad 1.3.Z2-d$$

ki nam da z enačbo Z2-2a še drugo reakcijo

$$R_2 = \pm P \cdot \sin \alpha_1 = \pm 5 \sin 10,305^\circ = \pm 0,894 \text{ kN}. \quad (1.3.Z2-c)$$

Iz zadnjih dveh enačb je očitno, da sta  $R_1$  in  $R_2$  pravokotni komponenti sile  $\mathbf{P}$ , saj velja (glej sliko Z2-4a)

$$R_1^2 + R_2^2 = P^2.$$

To je značilni zaključek, ki pove, da dobimo najmanjšo reakcijo  $R_2$ , ko silo  $\mathbf{P}$  uravnovežimo s silama, ki sta med seboj pravokotni. Sedaj izračunamo še smerni vektor  $\mathbf{e}_2$ . Enačbi 2b in 2c vstavimo v ravnotežni enačbi, kjer v enačbi 2c izberimo pozitivno rešitev – torej za rešitev, kjer je sila v smeri vektorja  $\mathbf{e}_2$ . Iz prve ravnotežne enačbe je

$$\cos \alpha_2 = -\frac{P + R_1 \cos \alpha_1}{R_2} = -\frac{5 + (-4,919) \cos 10,305^\circ}{0,894} = -0,179$$

in iz druge

$$\cos \beta_2 = -\frac{R_1 \sin \alpha_1}{R_2} = -\frac{(-4,919) \sin 10,305^\circ}{0,894} = 0,984$$

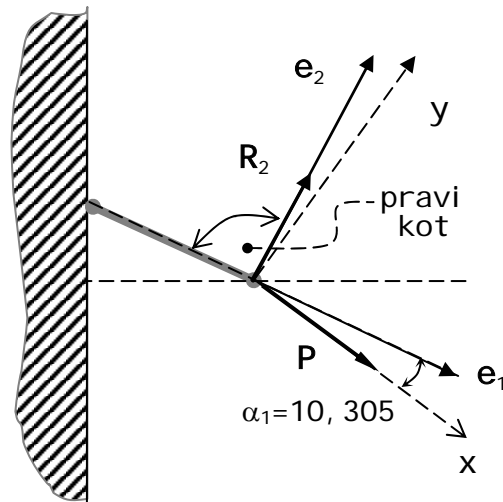
oziroma

$$\mathbf{e}_2 = (-0,179 \ 0,984).$$

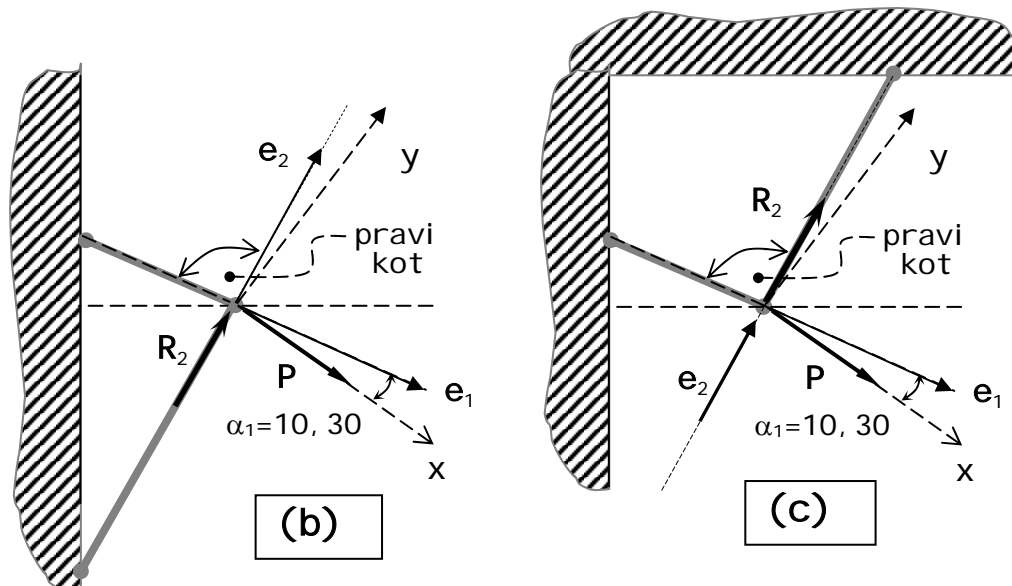
Na podlagi slike Z2-3 in izračunanega smernega vektorja  $\mathbf{e}_2$  izračunamo še kot  $\delta$ :

$$\delta = \alpha_2 - \alpha = \cos^{-1}(-0,179) - 36,87^\circ = 63,44^\circ.$$

Ker smo izbrali pozitivno rešitev za silo  $\mathbf{R}_2$ , je ta usmerjena v smeri vektorja  $\mathbf{e}_2$ , slika z2-4a. Sama matematična rešitev pa nam ne pove, ali je druga palica nad ali pod vozliščem. Obe možnosti odgovarjata zahtevam naloge, sliki z2-4b in c, inženir pa bo izbral rešitev za katero bo menil, da je inženirsko primernejša. V primeru b je v palici sila  $\mathbf{R}_2$  tlačna, ker pritiska na vozlišče, v primeru c pa natezna, ker vleče vozlišče.



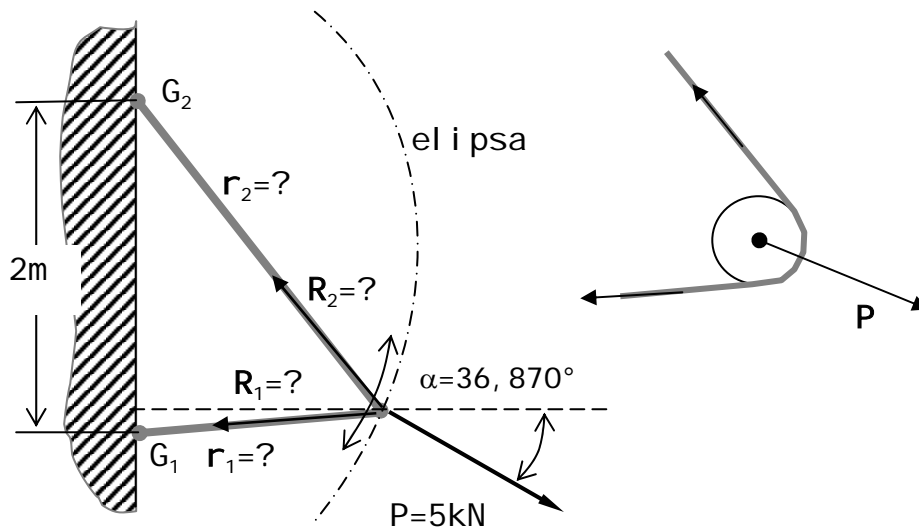
Slika 1.4.Z2-4a. Shematični prikaz matematične rešitve lege sile  $\mathbf{R}_2$ .



Sliki 1.4.Z2-4b in c. Shematični prikaz inženirskih izvedb paličja, ki ustrezata isti matematični rešitvi.

Bralec naj za vajo izbere negativno rešitev za  $\mathbf{R}_2$  in ponovi izračun. Dobil bo seveda nasprotni smerni vektor, sila  $\mathbf{R}_2$  pa se ne bo spremenila.

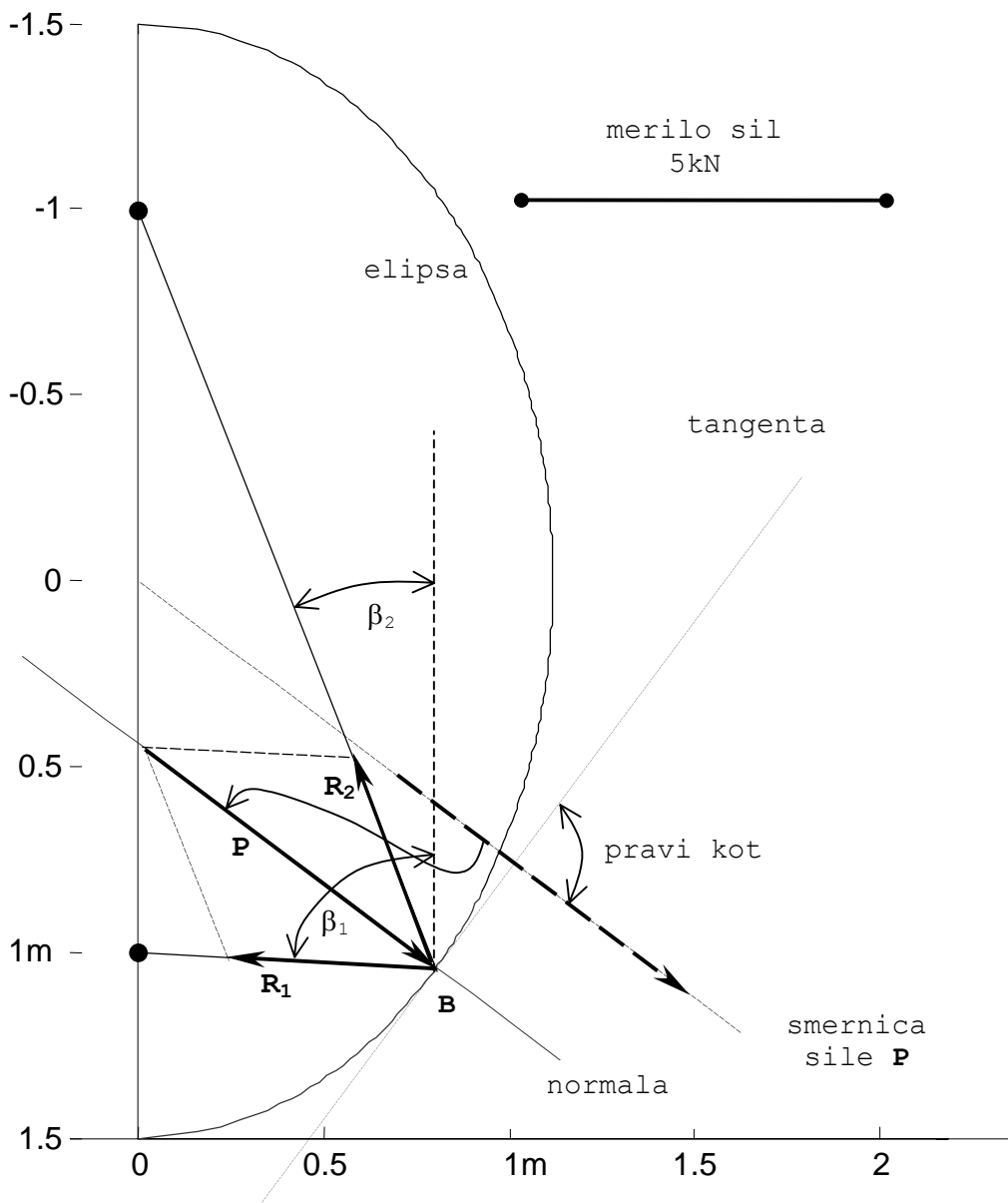
**Zgled 1.4.Z3.** Predpostavimo, da imamo namesto obeh palic v prejšnjih zgledih eno samo vrv, sila  $\mathbf{P}$  pa je pripeta preko škripca na to vrv, slika Z3-1. Taka zasnova omogoča, da lahko sila  $\mathbf{P}$ , ki ima ves čas isto smer in velikost, potuje po vrvi dolžine  $L=3\text{m}$ .



Slika 1.4.Z3-1. Dispozicija problema in detajl prijemališča sile  $\mathbf{P}$ . Z  $\mathbf{r}_1$  in  $\mathbf{r}_2$  smo označili krajevna vektorja (nista narisana) od točk  $G_1$  in  $G_2$ , kjer je vrv privezana, pa do škripca.

Rešitev temelji na tem, da najprej ugotovimo lego prijemališča sile, ki določa smer obeh krakov vrvi, označenih z  $\mathbf{r}_1$  in  $\mathbf{r}_2$ . Pri tem izkoristimo znanje iz geometrije. S tem sta podani smeri obeh reakcij, njuni velikosti pa ugotovimo na že znani način.

**Grafična rešitev** (slika 1.4.Z3-2). Sama vrv dopušča lego kolesa v točkah, kjer je skupna dolžina krakov enaka dolžini vrvi. Iz geometrije vemo, da je to elipsa. Zato najprej narišemo elipso - lahko s pomočjo vrvice ali pa posredno preko izračuna velike in male osi elipse. Ker sta kraka dela iste vrvi, sta obe reakciji po velikosti enaki in sila  $\mathbf{P}$  mora ležati na njuni simetrali. Kot vemo iz geometrije je simetrala krakov natanko tudi normala na elipso. Tako narišemo silo  $\mathbf{P}$ , na njo pa pravokotnico, ki jo nato vzporedno premaknemo v tangento na elipso, slika Z3-2. Iz dotikalne točke  $B$  narišemo goriščna radija  $\mathbf{r}_1$  in  $\mathbf{r}_2$  ter silo  $\mathbf{P}$  uravnotežimo z reakcijama  $\mathbf{R}_1$  in  $\mathbf{R}_2$  s pomočjo trikotnika sil. Iz slike odmerimo  $R_1=R_2\approx 2,9\text{kN}$  ter njuna odklonska kota od vertikale,  $\beta_1=85^\circ$  in  $\beta_2=21^\circ$ .



Slika 1.4.Z3-2. Grafična rešitev.

**Analitična rešitev.** Ker je ta problem nekoliko težji, si čisto na kratko pogledimo še tudi pristop, kako rešujemo probleme. Najprej ugotovimo, koliko neznanke predstavlja rešitev naloge. V našem primeru so to štiri neznanke: smer in velikost obeh reakcijskih sil v vrveh. Za matematično rešitev je zato potrebno nastaviti štiri enačbe. Pri tem se moramo zavedati, da vektorska enačba predstavlja v ravninskih problemih dve skalarni enačbi, ko vektorje zapišemo po komponentah. Te štiri enačbe morajo natanko opredeljevati vse značilnosti problema, ki smo jih z opisom naloge podali. V našem primeru so značilnosti problema sledeče:

(1) Škripec je v ravnotežju, to nam da enačbo Z3-1, ravnotežno enačbo.

$$\mathbf{P} + R_1 \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2 = 0,$$

1.3.Z3-1

(2) Lega škripca ni povsem poljubna, ampak jo omejuje vrv. Njegova lega je lahko samo taka, da je skupna dolžina krakov vrvi  $r_1$  in  $r_2$  enaka celotni dolžini vrvi  $L$ . To nam da enačbo Z3-2. Premislek o tej enačbi nam pove, da obravnava geometrijo in s tem implicitno smeri sil.

$$L = r_1 + r_2,$$

1.3.Z3-2



(3) Vrv teče preko škripca in sila v vrvi je konstantna. To nam da enačbo Z3-3. Ta enačba vključuje velikost sil.

$$R_1 = R_2.$$

1.3.Z3-3

Če bi na primer opustili prvo enačbo, tedaj bi rešitev dopuščala neko gibanje škripca. Če bi opustili drugo enačbo, bi rešitev dopuščala na primer raztegljivo vrv, itd. Tedaj seveda ne bi obravnavali naš problem, ampak nekega drugega.

Ko smo zapisali te enačbe, jih pregledamo s stališča neznank in kako so povezane, da se odločimo za način reševanja. To je sicer čisti matematični problem, vendar pa pri poteku reševanja lahko precej pomaga fizikalni in geometrijski vpogled v pomen enačb.

V ravnotežni enačbi so kar vse količine  $R_1$ ,  $e_1$ ,  $R_2$  in  $e_2$  neznanke, slika Z3-3. Če upoštevamo, da so velikosti smernih vektorjev enake ena dobimo še dve enačbi in lahko smatramo da sta  $e_1$  in  $e_2$  samo dve neznanki. Glede na to imamo prej omenjene štiri neznanke in enačbe 1,2,3, ki predstavljajo štiri skalarne enačbe in problem je matematično rešljiv. Rešujemo ga z eliminacijo neznank, ki lahko poteka v različnem zaporedju. Spodaj prikazani način pa je samo eden izmed možnih načinov in ni nujno najučinkovitejši.

Odločitev, da najprej izračunamo lego škripca, obeta relativno enostavno računanje. Nato izračunamo vektorja  $r_1$  in  $r_2$ , iz katerih izračunamo njuna smerna vektorja  $e_1$  in  $e_2$ . Ker sta ta smerna vektorja enaka smernim vektorjem reakcij  $R_1$  in  $R_2$ , sliki Z3-2 in Z3-3, na koncu rešimo samo še znani problem uravnovežitve sile  $P$  s silama v znanih smereh.

Izračunajmo koordinati lege škripca v izbranem koordinatnem sistemu na sliki Z3-3. Druga enačba je očitno enačba elipse. Pretvorimo jo v kanonično enačbo elipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oziroma

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

1.3.Z3-4

Medsebojna razdalja podpor vrvi je enaka dvakratni goriščni razdalji elipse in zato je goriščna razdalja enaka

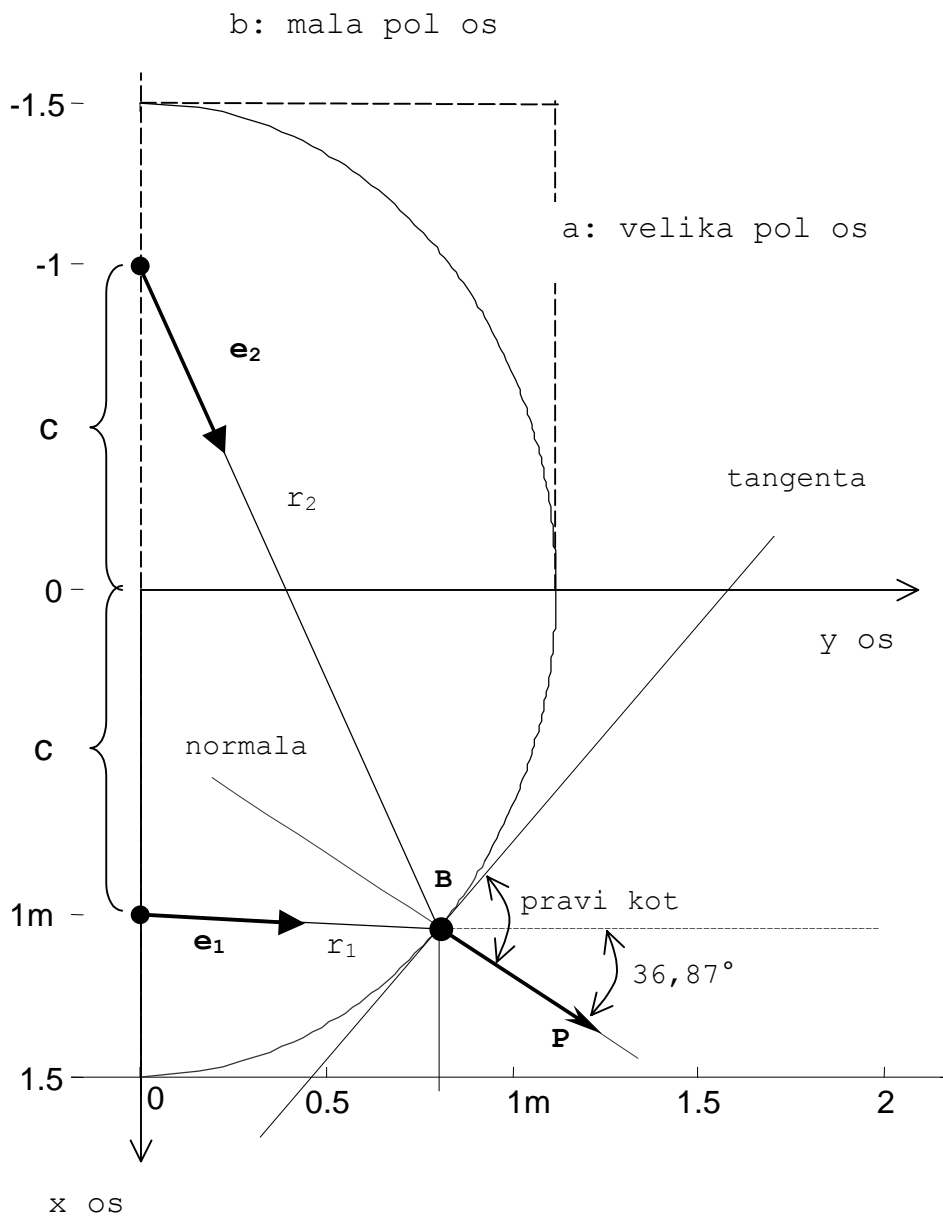
$$c = 2m/2 = 1m.$$

a je velika os elipse in je

$$a = L/2 = 3m/2 = 1.5m,$$

b pa mala os elipse, ki je

$$b = \sqrt{\frac{L^2}{4} - c^2} = \sqrt{\frac{3^2}{4} - 1^2} = 1,118m.$$



Slika 1.4.Z3-3. Postavitev koordinatnega sistema ter označba vektorjev.

V nadaljnjem ugotavljamo nekatere značilnosti, ki smo jih podali že v grafični rešitvi: enačba 3, ki »pravi«, da sta reakciji enaki, pomeni da je sila na njuni simetrali in s tem na simetrali krakov  $r_1$  in  $r_2$ . Iz značilnosti elipse vemo, da je ta simetrala pravokotna na tangento. Torej računamo tisto točko na elipsi, kjer je naklon simetrale enak naklonu sile  $\mathbf{P}$ .

Tangens naklonskega kota učinkovalnice sile  $\mathbf{P}$  je

$$k_U = \tan 53,13^\circ = 0,1333,$$

tangens naklonskega kota tangente pa je

$$k = -1/k_U = -1/0,1333 = -0,75.$$

V dotikalni točki tangente je  $k$  enak odvodu funkcije elipse

$$k = \frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) = - \frac{bx}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

Iz te enačbe izračunamo koordinati dotikalne točke B,

$$x_B = \frac{a^2 k}{\sqrt{a^2 k^2 + b^2}} = \frac{1,5^2 \cdot (-0,75)}{\sqrt{1,5^2 \cdot 0,75^2 + 1,118^2}} = \pm 1,0639$$

$$y_B = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1,0639^2}{1,5^2}} = \pm 0,7049$$

Izberemo pozitivne rešitev, ker le tako upoštevamo, da je vrh na »prosti« strani zidu. Goriščna vektorja sta tedaj

$$\mathbf{r}_1 = (x_B - c, y_B) = (1,0639 - 1, 0,7049) = (0,0639, 0,7049)\text{m}$$

$$\mathbf{r}_2 = (x_B + c, y_B) = (1,0639 + 1, 0,7049) = (2,0639, 0,7049)\text{m}$$

njuna smerna vektorja pa sta

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_1 / r_1 = (0,0903 \quad 0,9959)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_2 / r_2 = (0,9463 \quad 0,3232).$$

Njuna naklona proti pozitivni x osi sta

$$\alpha_1 = \arccos(0,0903) = 84,81^\circ$$

$$\alpha_2 = \arccos(0,9463) = 18,86^\circ$$

Ko imamo znane smeri, pa problem neznanih velikosti reakcij rešimo na znani način. Po enačbi 1.3-9b je

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0903 & 0,9959 \\ 0,9463 & 0,3232 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

in rešitev je

$$R_1 = R_2 = -2,713\text{kN}.$$

Negativna rešitev pomeni, da sili delujeta v obratni smeri predpostavljenih smernih vektorje – torej delujeta v smeri proč od škripca in sta natezni.

## 2. SILE, KI NIMAJO SKUPNEGA PRIJEMALIŠČA

**2.1. Uvod.** V tem poglavju obravnavamo problem ravnotežja teles končnih dimenzij. Tedaj sile delujejo na taka telesa na različnih mestih – nimajo skupnega prijemališča. Osnovna fizikalna količina, ki je bistvena pri analizi teles končnih dimenzij, je moment ali navor sile, ki ga zaradi lažjega razumevanja teorije najprej obravnavamo.

**2.2. Navor ali moment sile.** Poglejmo si kolut na sliki 1, ki je pritrjen na os tako, da ga lahko prosto vrtimo. Če delujemo s silo  $\mathbf{F}$  tangenčno na obod koluta, se bo le-ta začel pospešeno vrteti. Vrtenje merimo s pospeškom kota  $\alpha$ , velikost pospeška pa nam podaja enačba 1, kjer je  $k$  konstanta določena z maso in obliko koluta.

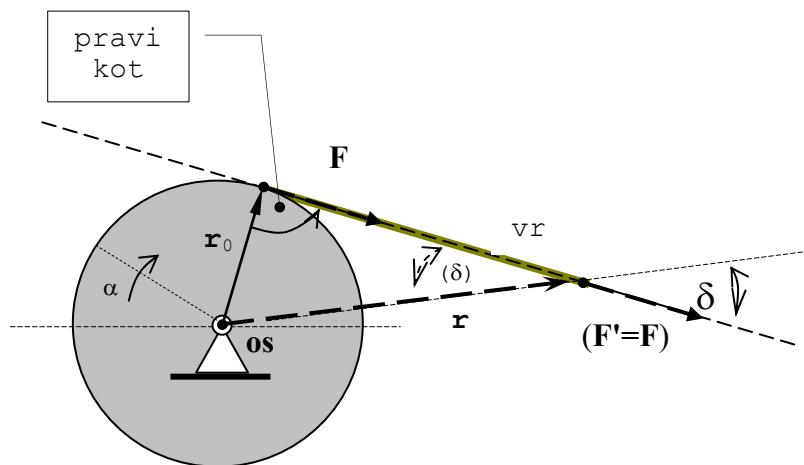
$$\ddot{\alpha} = k \cdot r_0 \cdot F \quad (2.2-1)$$

Torej rotacija zavisi od produkta  $r_0 \cdot F$ , ki ga imenujemo **navor ali moment sile  $\mathbf{F}$**  in ga označimo z  $M$ , enačba 2.

$$M = r_0 \cdot F. \quad (2.2-2)$$

Za naše nadaljnje razmišljanje nam ni potrebno vedeti, kakšna je konstanta  $k$  in kako jo izračunamo. Smatramo jo samo za sorazmernostni faktor med momentom in kotnim pospeškom in je za isto telo, ki se vrti okoli iste osi, nespremenljiva. Tako rotacijo zapišemo s pomočjo momenta z enačbo 3.

$$\ddot{\alpha} = k \cdot M \quad (2.2-3)$$



**Slika 2.2-1.** Vrtenje koluta je enako ne glede na lego prijemališča sile na njeni učinkovalnici, matematično pa je vektorski produkt  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  konstanten za vsak  $\mathbf{r}$ , ki določa lego prijemališča sile na učinkovalnici (vrvi).

Vektor  $\mathbf{r}_0$  določa lego prijemališča sile glede na os. Je pravokoten na silo  $\mathbf{F}$  in poteka od osi do prijemališča sile. Če kolut vlečemo z enako silo, sila  $\mathbf{F}'$  na sliki 1, vendar preko vrvi katere masa je zanemarljiva, je očitno vrtenje koluta enako kot prej. To dejstvo elegantno zapišemo tako, da **moment definiramo z vektorskim produktom**, enačba 4,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (2.2-4)$$

V enačbi 4 je  $\mathbf{r}$  krajevni vektor prijemališča sile glede na računsko os. Enačba nam daje moment kot vektor – torej nam da poleg velikosti tudi smer vektorja. Pomen smeri vektorja momenta pa si bomo ogledali nekoliko kasneje.

Ni težko ugotoviti, da je **velikost momenta** za silo v obeh legah na sliki 1 enaka,

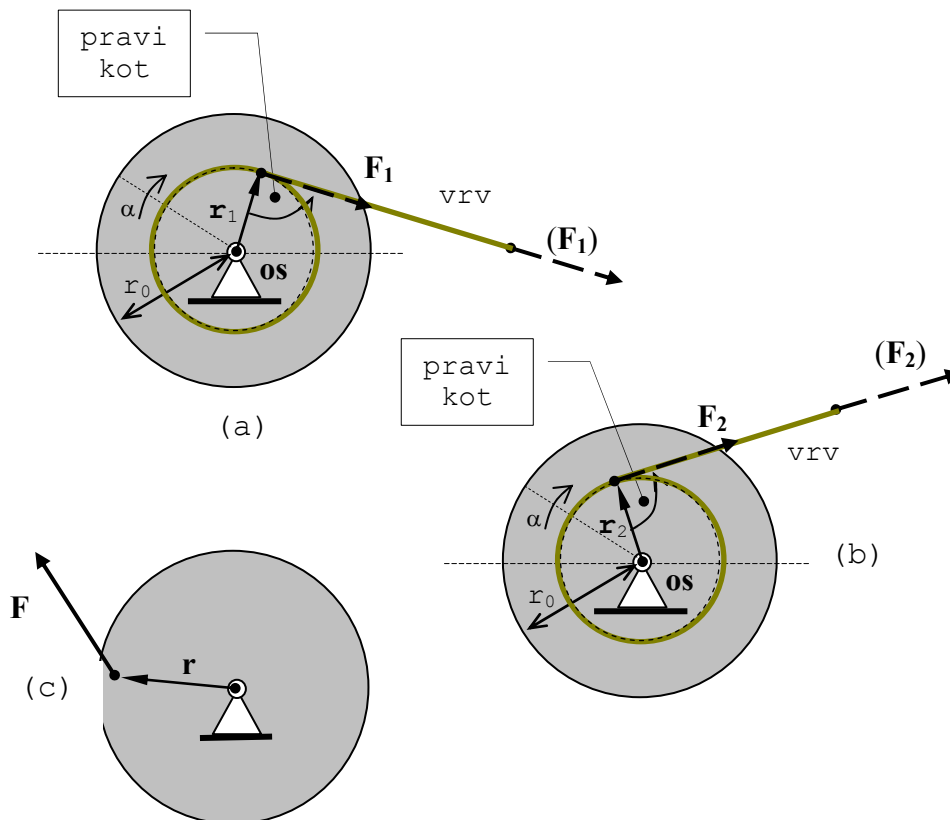
$$M = r \cdot F \cdot \sin\delta = r_0 \cdot F \quad (2.2-5)$$

ker velja

$$r \cdot \sin\delta = r_0 \quad (2.2-5a)$$

Kot  $\delta$  je kot med vektorjema  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{F}$  in je, kot vemo, zmeraj pozitiven in med nič in  $180^\circ$ . Tako v enačbi 5 dobimo računsko samo pozitivne vrednosti za velikost momenta.

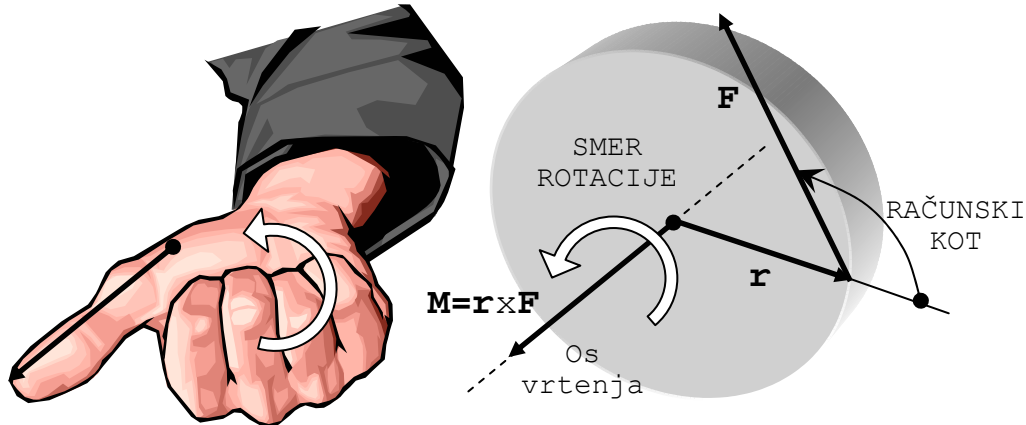
Enačba 5 nam pove, da je moment sile enak ne glede na to, kje na učinkovalnici ima sila prijemališče. Pravimo tudi, da se moment ne spremeni, če silo premaknemo po njeni učinkovalnici. To dejstvo nekateri imenujejo **premikalni teorem** in ga zelo pogosto uporabljamo v analizah konstrukcij. V enačbi 5 je  $\mathbf{r}_0$  vektor, ki določa najkrajšo razdaljo učinkovalnice od osi, ki je kot vemo pravokoten na učinkovalnico. Temu vektorju pravimo **ročica**, njegovi velikosti pa velikost ročice. Torej je velikost momenta, ki ga zapišemo z vektorskim produktom, enačba 4, enaka kar produktu sile in ročice, enačba 5. Ko bomo zapisali moment z vektorskim produktom lahko krajevni vektor  $\mathbf{r}$ , ki določa lego prijemališča sile glede na os in ni pravokoten na silo, ga bomo zaradi enostavnosti tudi imenovali kar ročica.



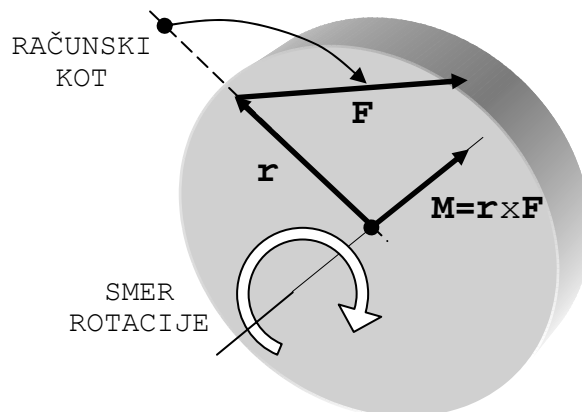
**Slike 2.2-2a,b,c.** Simbolični prikaz različnih sil in leg njihovih prijemališč, ki imajo enake momente. Čeprav sta sila in lega njenega prijemališča drugačni. Enako vrtenje koluta lahko dosežemo z različnimi silami, da je le njihov kot na sliki 1, je vrtenje koluta enako, če je le moment  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  v vseh primerih enak kot na sliki 1:  $\mathbf{M} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}' = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .  
moment enak.

Na slikah 2a in 2b sta prikazana zgleđa, kjer sta sili različni, pa tudi lega njunih prijemališč glede na os je različna, vendar pa je vrtenje koluta enako, da je le moment obeh sil enak. Slika 2c simbolično prikazuje splošni primer, kjer pa sila ni pravokotna na krajevni vektor prijemališča sile.

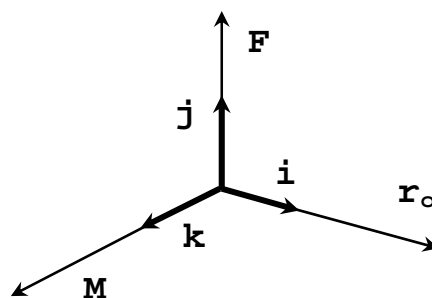
Zapis momenta z vektorskim produktom nam podaja tudi **smer osi in smer rotacije** koluta v skladu s »pravilom desne roke« kot je prikazano na sliki 3. Pri tem moramo seveda smatrati, da je palec pravokoten na oba vektorja  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{F}$ , tako kot je vektorski produkt  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  pravokoten na  $\mathbf{r}$  in na  $\mathbf{F}$ . Če se smer rotacije obrne, tedaj je tudi vektor momenta obrnjen v nasprotno smer, slika 4. Smer rotacije koluta se sklada tudi s smerjo zasuka vektorja  $\mathbf{r}$  po najkrajši poti v vektor  $\mathbf{F}$  – tako kot definiramo kot med vektorjema, vendar z upoštevanjem smeri rotacije prvega vektorja.



Slika 2.2-3. Palec desne roke kaže lego osi, ostali prsti pa smer rotacije koluta, ki jo povzroča moment sile  $\mathbf{F}$ .



Slika 2.2-4. Obrnjena smer rotacije in vektorja momenta glede na sliko 3.



Slika 2.2-5. Ročica  $\mathbf{r}_o$ , sila  $\mathbf{F}$  in njen moment  $\mathbf{M}$  so v smereh Kartezijske baze.

Pomembno je opozoriti, da ročica  $\mathbf{r}_0$ , sila  $\mathbf{F}$  ter njen moment  $\mathbf{M}$  tvorijo desno bazo, ko jih normiramo, slika 5. Tako lahko iz znanega momenta in sile izračunamo smerni vektor ročice!

Vsa pravila, ki veljajo za vektorski produkt (glej poglavje o vektorjih), so skladna tudi za momente oziroma z učinki momentov na rotacijo. Zaradi poučnosti si posebej pogledimo pravilo V-2 in V-3. Za pravilo V-2,

$$\alpha \mathbf{M} = \alpha (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (\alpha \mathbf{r}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\alpha \mathbf{F}),$$

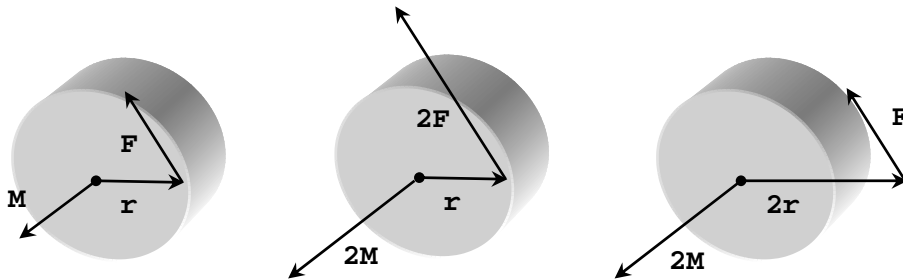
velja: če je na primer skalar  $\alpha=2$ , tedaj množenje momenta z dva pomeni njegovo dvakratno povečanje – učinek na rotacijo se podvoji. Praktično lahko to dosežemo, če povečamo silo za dvakrat, na  $2\mathbf{F}$ , ali pa povečamo oddaljenost prijema sile na  $2\mathbf{r}$ , slika 6, v skladu z gornjo enačbo pa velja :

$$2\mathbf{M} = 2(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (2\mathbf{r}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (2\mathbf{F}).$$

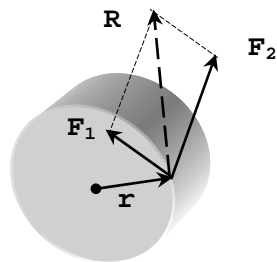
Posebno pomembno je pravilo V-3,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{R},$$

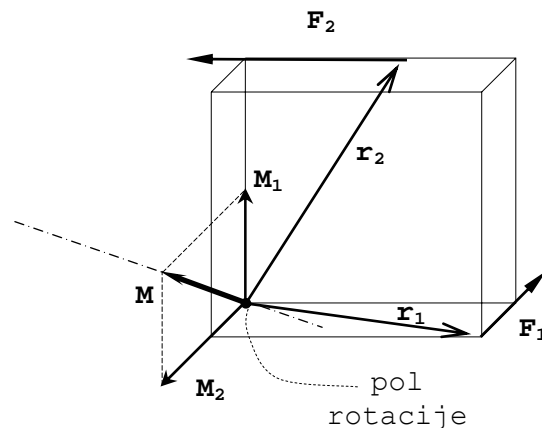
ki pove, da je moment sil z istim prijemaščem enak momentu rezultante, slika 6.



**Slika 2.2-6.** Enako povečanje momenta  $\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$  s povečanjem ročice ali pa z enakim povečanjem sile.



**Slika 2.2-7.** Enakost momenta dveh sil in njune rezultante:  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$ .



**Slika 2.2-8.** Rezultantni moment je vektorska vsota momentov posameznih sil. Oba momenta skupaj povzročata enako rotacijo kot rezultantni moment.

Kadar telo podpremo tako, da se lahko vrti okoli ene točke, imenujemo to točko **pol rotacije**. Na sliki 7 je za zgled prikazan kvader, na katerega delujeta dve sili, v njegovem oglišču pa je os – pol rotacije. Ko na telo deluje več sil, je učinek momentov teh sil na rotacijo enak učinku momenta, ki je vektorska vsota momentov posameznih sil, enačba 6.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots \quad (2.2-6)$$

Pravimo: moment sistema sil ali rezultatni moment je enak vsoti momentov posameznih sil. Pri analizi gibanja in ravnotežja telesa lahko torej računamo namesto z množico momentov kar z rezultatnim momentom.

**Zgled 2.2.Z1.** Izračunajmo rezultatni moment sile  $\mathbf{F}_1=(1,0,0)\text{kN}$  s prijemališčem  $\mathbf{r}_1=(2,3,0)$  in sile  $\mathbf{F}_2=(0,-2,0)\text{kN}$  s prijemališčem  $\mathbf{r}_2=(0,2,4)$  glede na pol rotacije, ki je v koordinatnem začetku. Izračunajmo še kot med rezultanto in rezultatnim momentom.

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = (2,3,0) \times (1,0,0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot 0 - \mathbf{j} \cdot 0 + \mathbf{k} \cdot (-3 \cdot 1)$$

$$\mathbf{M}_1 = (0,0,-3)\text{kNm}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (0,2,4) \times (0,-2,0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} \cdot 4 \cdot (-2) - \mathbf{j} \cdot 0 + \mathbf{k} \cdot 0$$

$$\mathbf{M}_2 = (8,0,0)\text{kNm}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = (0,0,-3) + (8,0,0) = (8,0,-3)\text{kNm}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (1,0,0) + (0,-2,0) = (1,-2,0)\text{kN}$$

$$\cos \delta = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} / (R \cdot M) = (8,0,-3) \cdot (1,-2,0) / (8,544 \times 2,236) = 0.419, \quad \delta = 65,245^\circ$$

Torej rezultanta in rezultatni moment nista med seboj pravokotna, kot to velja za eno silo in njen moment.

**Najpogosteje analiziramo ravninske probleme**, zato si velja posebej pogledati navore za ravninski sistem sil. V ravninskih problemih lahko postavimo pol rotacije in vse sile v eno koordinatno ravnino, na primer v ravnino  $x,y$ . Tedaj imajo vse sile in krajevni vektorji samo komponente v smeri  $x$  in  $y$ , njihovi momenti pa samo  $z$ -komponento,  $\mathbf{M}=(0,0,M_z)$ . Če označimo krajevni vektor prijemališča z  $\mathbf{r}=(x,y,0)$  glede na os v izhodišču koordinatnega sistema in vektor sile z  $\mathbf{F}=(F_x,F_y,0)$ , tedaj je  $z$ -komponenta momenta enaka

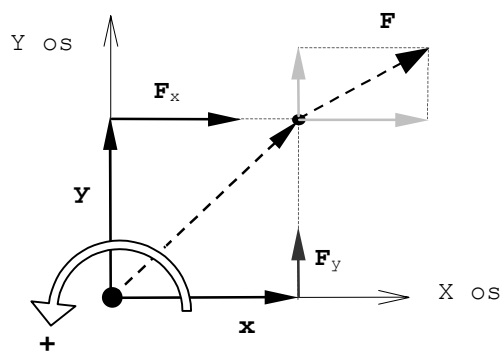
$$M_z = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

Neposredni pomen tega obrazca je predstavljen na sliki 8 in predstavlja vsoto momentov komponent sile, ki smo jih v skladu s premikalnim teoremom premaknili po njihovi učinkovalnici na koordinatne osi.  $F_y$  povzroča pozitivni moment na ročici  $x$ ,  $F_x$  pa negativni na ročici  $y$ .

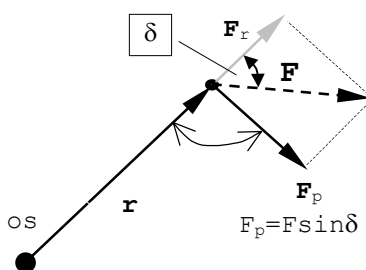
Pomembna je še interpretacija obrazca 5, kjer ohranimo velikost krajevnega vektorja, za silo pa upoštevamo samo njeno pravokotno komponento nanj, enačba 7 in slika 9. Opomnimo naj, da ta enačba velja tudi za prostorski problem.

$$M = r \cdot F \cdot \sin \delta = r \cdot F_p \quad (7)$$





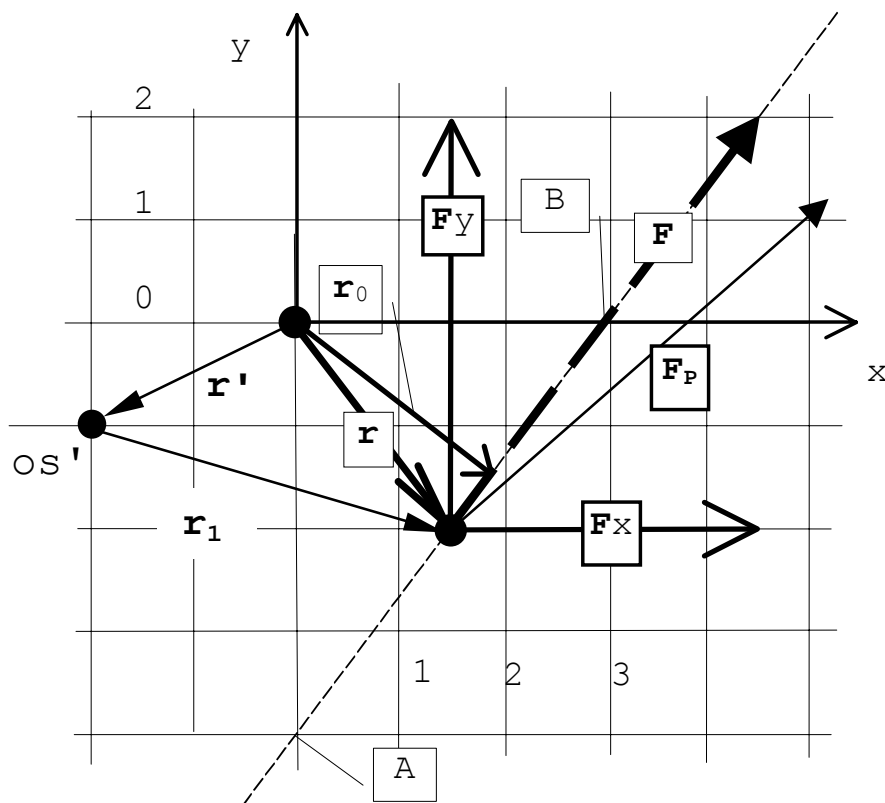
**Slika 2.2-8.** Ilustracija k izračunu momenta s komponentami sile in prijemališča. Puščica kaže smer pozitivne rotacije oziroma momenta glede na komponento v smeri z-osi.



**Slika 2.2-9.** Ilustracija k izračunu momenta s pomočjo komponente sile pravokotno na vektor prijemališča sile.

**Zgled 2.2.Z2.** Prijemališče sile v ravnini  $x,y$   $F=(3,4)$ kN je podano s krajevnim vektorjem  $r=(1.5,-2)$ m od izhodišča koordinatnega sistema  $x,y$ , slika Z2-1. Izračunajmo:

- (1) moment sile glede na izhodišče koordinatnega sistema
- (2) vektor ročice
- (3) enačbo učinkovalnice
- (4) točko, kjer učinkovalnica seka  $x$  in  $y$  os
- (5) komponento sile, ki je pravokotna na  $r$
- (6) moment sile glede na os v točki  $r_0=(-2,-1)$ m



Slika Z2-1.

**Rešitev:**

$$(1) \mathbf{F} = (3,4)\text{kN}, \mathbf{r} = (1.5, -2)\text{m}, r=2,5\text{m}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1.5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,12)\text{kNm}$$

$$(2) F=5\text{kN}$$

$$r_0 = \frac{M}{F} = \frac{12}{5} = 2,4\text{m}$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{M}}{F \cdot M} = \frac{1}{5 \times 12} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = (0.8, 0.6, 0)$$

(3) Za ravninski problem lahko enačbo učinkovalnice izračunamo na sledeči način. Če podamo lego poljubne točke na učinkovalnici s krajevnim vektorjem  $(x,y)$ , tedaj sledi iz momenta

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \Rightarrow (0,0,12) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \equiv (0, 0, 4 \cdot x - 3 \cdot y)$$

enačba premice

$$12=4x-3y$$

oziroma

$$y = 4x/3 - 4$$

(4) Iz enačbe premice sledi sečišče osi y

$$x_A = 0 \rightarrow y_A = -4$$

in sečišče x osi

$$y_B = 0 \rightarrow x_B = 3$$

Sečišče pa lahko izračunamo tako, da silo premaknemo po učinkovalnici v točko, kjer le-ta seka x os in upoštevamo izračunani moment:

$$M = x_A F_y$$

$$x_A = 12/4 = 3$$

(5) Komponento lahko izračunamo iz momenta

$$M = r \cdot F_p$$

$$F_p = 12/2,5 = 4,8$$

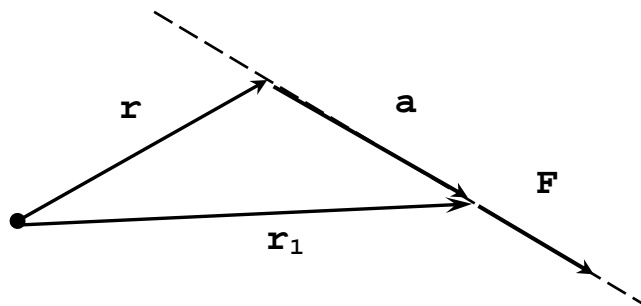
(6)  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (1,5, -2) - (-2, -1) = (3,5, -1)\text{m}$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3,5 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 17)\text{kNm}$$

**Zgled Z3.** Čeprav smo premikalni teorem dokazali s pomočjo ročice, pa za vajo izpeljimo dokaz še s pomočjo vektorskega produkta. Lego prijemališča sile na učinkovalnici označimo z  $\mathbf{r}_1$ , silo v poljubni legi na učinkovalnici pa z  $\mathbf{r}$ . Po sliki Z3-1 velja

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{a}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

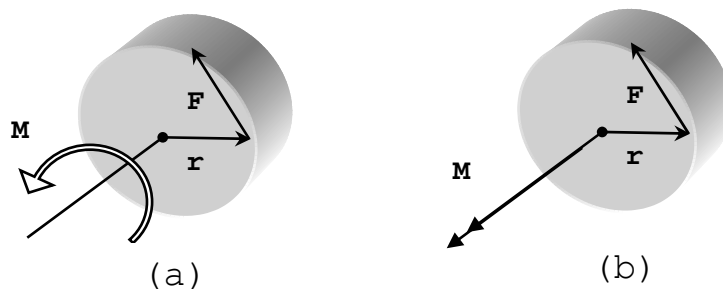
ker je  $\mathbf{a} \times \mathbf{F} = 0$ .



Slika Z3-1.

Opozorimo še na dve **grafični označevanji momentov**. Ker momenti v mehaniki določajo rotacijo, jih označujemo tudi z ukrivljeno puščico, ki simbolično nakazuje smer rotacije, ki bi jo moment povzročil, slika

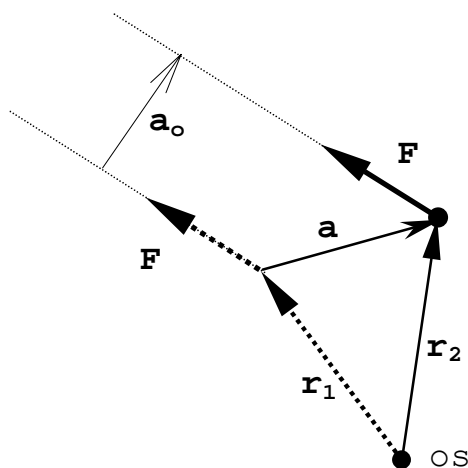
10a. Kadar pa vektorje momentov želimo grafično ločiti od vektorjev sil, pa jih označujemo z dvojno glavo, kot prikazuje slika 10b.



Slika 11a in b. Grafično označevanje momentov: (a) s simbolom rotacije, (b) z dvojno glavo puščice.

**2.2.1. Sprememba momenta pri spremembi medsebojne lege sile in osi.** Pri medsebojnem premiku sile  $F$  in osi za pomik  $a$  se spremeni moment sile, slika 1. Če lego prijemališče sile v začetnem stanju določa glede na os vektor  $r_1$ , po premiku sile pa vektor  $r_2$ , je sprememba momenta enaka

$$\Delta M = M_2 - M_1 = r_2 \times F - r_1 \times F = a \times F \quad (1)$$



Slika 1. Premik sile in sprememba momenta.

Ni težko dokazati, da spremembo momenta lahko zapišemo tudi s1 premikom učinkovalnice, ki ga določa vektor  $a_0$

$$\Delta M = a_0 \times F. \quad (2)$$

Pri premiku osi za  $a_0$  pa še hitro ugotovimo, da je sprememba momenta enaka  $\Delta M = -a_0 \times F$ , torej se spremeni predznak.

**2.3. Dvojica sil in njen moment – pomen nedoločenosti lege osi.** Poglejmo si vzvod, ki je pritrjen na os, slika 1. Nanj deluje dvojica sil  $F_1$  in  $F_2$ , ki sta enaki po velikosti, vendar nasprotno usmerjeni. Njuna rezultanta je enaka nič:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \rightarrow -\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 . \quad (2.3-1)$$

V tehniški mehaniki je izraz „dvojica sil“ rezerviran za vsaki dve sili na dveh vzporednih učinkovalnicah, ki imata enako velikost in sta si nasprotno usmerjeni.

Navor dvojice sil glede na os vzvoda je enak

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$$

Upoštevaje enačbo 1 dobimo

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}_1) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = -(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_1$$

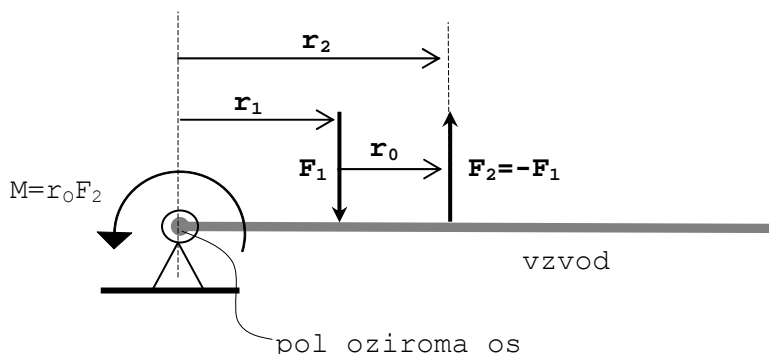
ter upoštevaje, da je

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0$$

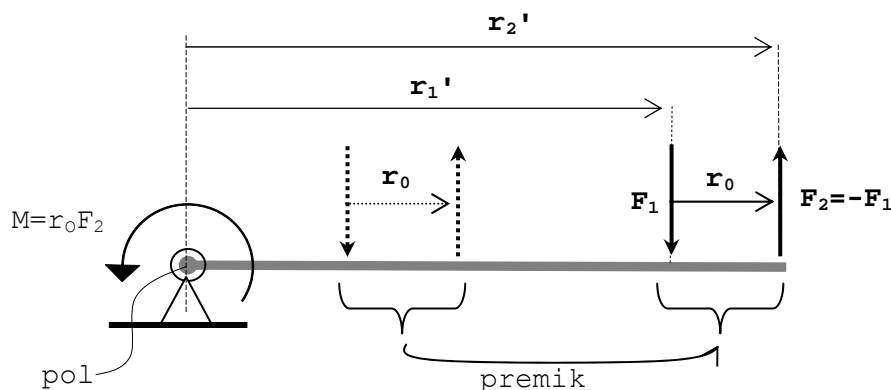
pa moment dvojice zapišemo:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}_2 = (-\mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_1 . \quad (2)$$

Vidimo, da moment dvojice sil lahko izračunamo kot moment ene izmed sil glede na os, ki je na drugi sili.

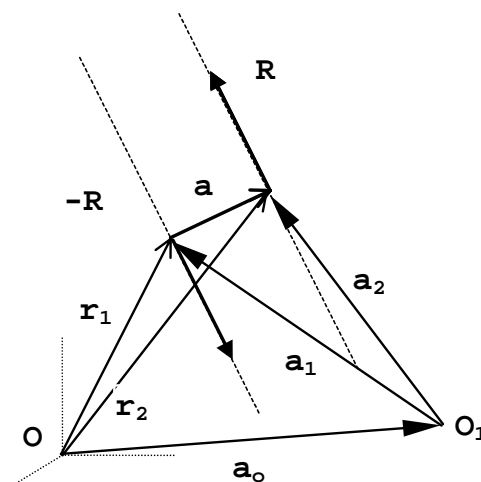


Slika 1. Dvojica sil, ki deluje na vzvod.



Slika 2. Če premaknemo dvojico sil, se njen moment ne spremeni. Velja pa seveda tudi obratno: če os premaknemo, se moment dvojice ne spremeni.

Pomen enačbe 2 je še veliko širši: moment dvojice sil sploh ni odvisen od dejanske lege osi - dvojica sil povzroča isti moment ne glede na lego osi. Za ilustracijo premaknimo dvojico sil na sliki 1 po vzvodu v novo lego, kot kaže slika 2. Tedaj nam izračun momenta glede na os vzvoda da seveda enak moment kot prej. Iz tega zaključimo: za dano dvojico sil in njen moment ne moremo ugotoviti lege osi – lahko si jo poljubno izberemo. Ta zaključek je v skladu z matematično značilnostjo vektorja momenta, ki kot vsak vektor nima definirane lege. Poenostavljeno pravimo, da **lega momenta ni določena**, nekateri pa temu pravijo, da je moment prosti vektor. Kadar obravnavamo rotacijo telesa okoli neke dejanske osi glede na katero smo tudi izračunali moment pa je seveda smiselno, da vektor momenta grafično predstavimo v tej osi, da nas grafično opozarja na njeno fizično lego.



Slika 3. Ilustracija k dokazu, da je moment dvojice enak ne glede na lego osi.

Za vajo v dokazovanju si pogledjmo še formalni matematični dokaz, da je moment dvojice enak za vsako lego osi. Izberimo os v dveh legah, kot je prikazano na sliki 3, kjer vektor  $\mathbf{a}_0$  kaže lego druge osi glede na prvo os. Moment dvojice sil  $\mathbf{R}$  in  $-\mathbf{R}$  glede na os v točki  $\mathbf{O}$  je enak:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{R} + \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{R}) = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R} = \mathbf{a} \times \mathbf{R}$$

Ko os premaknemo v novo lego  $O_1$  in glede na njo izračunamo moment dvojice, je ta enak kot prej:

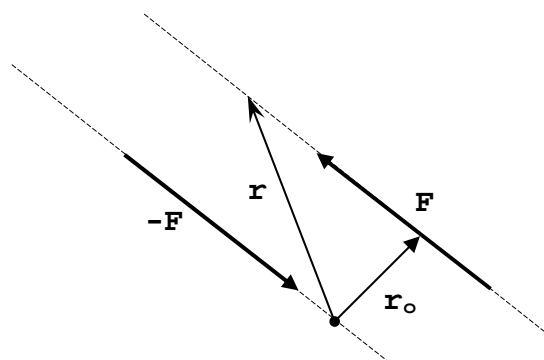
$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{R} + \mathbf{a}_1 \times (-\mathbf{R}) = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \times \mathbf{R} = \mathbf{a} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_0.$$

Splošno lahko moment dvojice izračunamo s pomočjo katerega koli vektorja, ki povezuje učinkovalnici dvojice, enačba 3, slika 4.

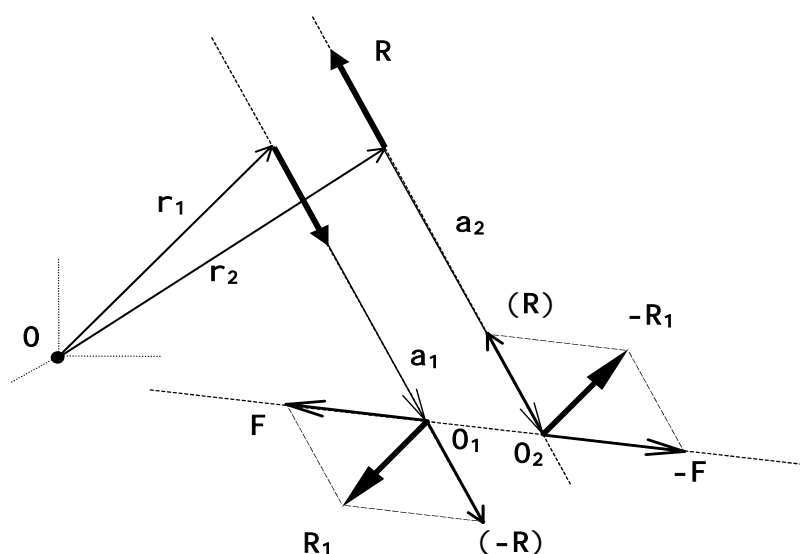
$$\mathbf{M} = \mathbf{a} \times \mathbf{F} \tag{3}$$

V vektorskem produktu v gornji enačbi moramo izbrati tisto silo, ki leži na učinkovalnici, ki jo določa glava vektorja  $\mathbf{r}$ . Ni težko dokazati, da ta enačba določa isti moment kot enačba 2, kjer je ročica določena s pravokotnim vektorjem na učinkovalnico sile.

Obratno pa lahko vsak moment prikažemo z dvojico sil. Ta predstavitev seveda ni enolična. Grafična predstavitev momenta z različnimi dvojicami je prikazana na sliki 5. K dani dvojici sil grafično konstruiramo neko drugo dvojico, ki daje isti moment tako, da premaknemo sili po učinkovalnici in prištejemo dve nasprotni sili, ki sta na isti učinkovalnici. Vemo, da ti dve operaciji prav nič ne spremenita momenta dvojice. Na sliki 5 premaknemo silo  $-\mathbf{R}$  za vektor  $\mathbf{a}_1$  in silo  $\mathbf{R}$  za  $\mathbf{a}_2$ . V novi legi sta sili na sliki označeni v oklepaju. Nato prvi sili  $-\mathbf{R}$  prištejemo neko silo  $\mathbf{F}$ , drugi sili  $\mathbf{R}$  pa silo  $-\mathbf{F}$ , ki je na isti učinkovalnici kot  $\mathbf{F}$ . Seštevek sil  $-\mathbf{R}$  in  $\mathbf{F}$  nam da silo  $\mathbf{R}_1$ , seštevek sil  $\mathbf{R}$  in  $-\mathbf{F}$  pa silo  $-\mathbf{R}_1$ . Ti dve sili sta nova dvojica sil. Ker z omenjenim postopkom nismo spremenili momenta dvojice  $\mathbf{R}$  in  $-\mathbf{R}$  imata novi dvojici  $\mathbf{R}_1$  in  $-\mathbf{R}_1$  enak moment.



Slika 4. Moment dvojice lahko izračunamo s poljubnim vektorjem  $r$ , ki „povezuje“ učinkovalnici.

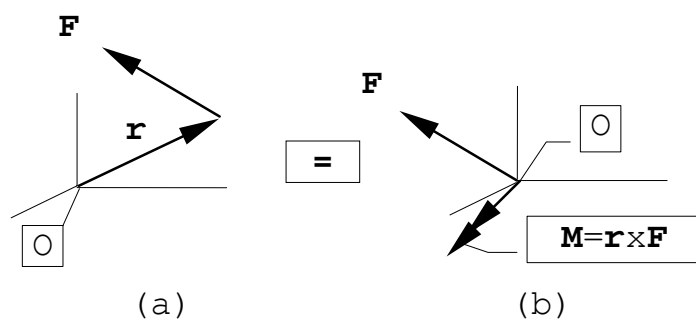


Slika 5. Grafična konstrukcija dvojice sil  $R_1$  in  $-R_1$ , ki imata enak moment, kot dvojica  $R$  in  $-R$ .

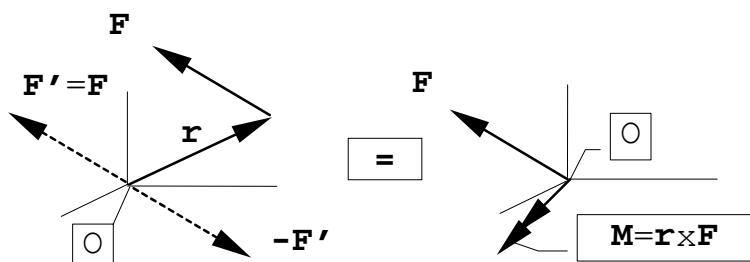
Na dejanskih konstrukcijah z realno obtežbo ne more nastopiti samo momentna obtežba brez sil. Zmeraj morajo za to obstajati tudi sile. Kadar je rezultanta vseh sil nič in povzročajo samo moment, pravimo, da imamo »čisto« **momentno obremenitev**. Tedaj lahko vso obtežbo reduciramo na eno dvojico sil. Kot pa smo že dokazali, ta redukcija ni enolična, izbira lege osi pa je poljubna.

**2.4. Statično ekvivalentni sistemi sil in momentov** so vsi sistemi sil in momentov, ki imajo enako rezultanto in enak rezultatni moment. Ko je obtežba podana tudi neposredno z vektorji momentov, moramo v vsoti momentov sil, izračunanih glede na poljubno izbrano točko, upoštevati še omenjene »čiste momente«. Eden izmed glavnih pomenov statično ekvivalentnih sistemov je poenostavljanje statičnih analiz: komplicirane sisteme sil in momentov reduciramo na rezultanto in rezultatni moment in nadaljnje operiramo samo z dvema vektorjema. Pomembno je tudi, da si je za takšen reducirani sistem lažje predstavljati njegov učinek na konstrukcijo.

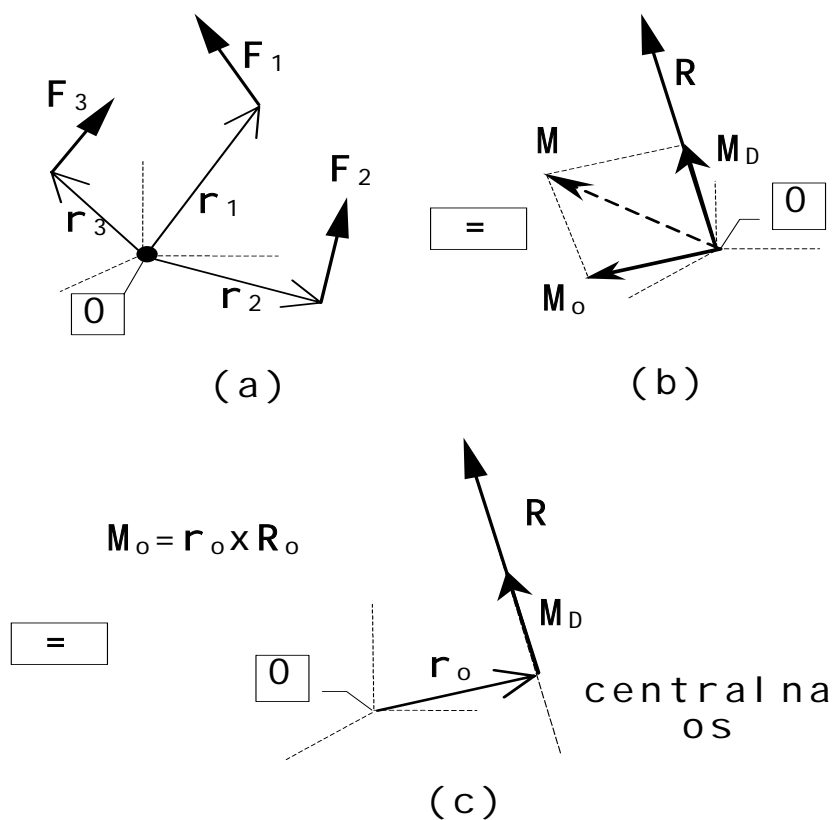
Najosnovnejši primer statične ekvivalence, ko imamo eno samo silo, je prikazan na sliki 1a in b. To statično ekvivalenco lahko grafično ilustriramo na način, kot je prikazan na sliki 2. V os dodamo silo  $F'$ , ki je enaka  $F$ , in še silo  $-F'$ . Tako dobimo dvojico sil  $F'$  in  $-F'$  z ročico  $r$ , ki jo nadomestimo z momentom  $M=r \times F$ .



Slika 1. Sila z ročico  $\mathbf{r}$  na sliki (a) je statično ekvivalentna sili, ki deluje v osi "O" in momentu.



Slika 2.4-2. Ilustracija postavljanja ekvivalentnega sistema.



Slika 2.5-1. Simbolični prikaz statično ekvivalentnih sistemov: (a) sistem sil, (b) rezultanta in rezultatni moment razstavljen na pravokotni komponenti, (c) dinamika: rezultanta  $\mathbf{R}$  in njena momentna komponenta  $\mathbf{M}_D$ .



**2.5. Lega rezultante sistema sil in dinama.** V tem razdelku nas zanima ali lahko prostorski sistem sil nadomestimo samo z njegovo rezultanto tako, da je moment rezultante enak momentu sistema sil. Kot bomo videli, je to možno samo v ravninskih primerih. Opazovali bomo tri ekvivalentne sisteme: prvi je izvorni sistem sil, slika 2.5-1a, drugi je podan z rezultanto v osi in rezultatnim momentom, slika 1b, kjer je prikazani moment razstavljen na komponento v smeri rezultante in komponento pravokotno na rezultanto. Na sliki 1c je prikazan tretji ekvivalentni sistem, ki ga bomo izračunali in sestoji iz rezultante  $\mathbf{R}$  s prijemaščem določenim z  $\mathbf{r}_O$  in samo komponente  $\mathbf{M}_D$  rezultatnega momenta.  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{M}_D$  skupaj imenujemo **dinama**,  $\mathbf{M}_D$  pa momentni del dinamice. Torej je učinek vsakega sistema sil na togo telo enak učinku rezultante in momenta, ki suče okoli rezultante kot da bi bila rezultanta os vrtenja. Zato imenujemo učinkovalnico rezultante **centralna os**.

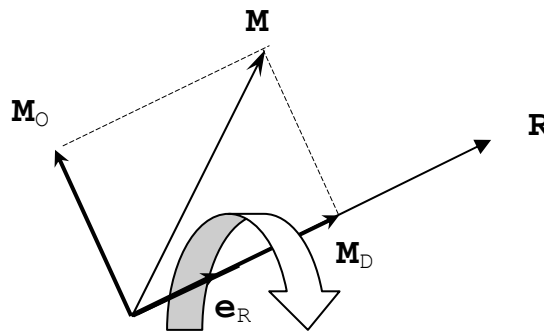
**Izračun dinamice.** Pri splošnem sistemu prostorskih sil  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \dots \mathbf{F}_n$  s prijemaščmi  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_n$  glede na os v točki "O" je rezultirajoči moment enak vsoti momentov posameznih sil,

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{M}_i$$

rezultanta sistema pa je

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i.$$

Predpostavimo, da torej poznamo  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{M}$ . Z enostavnim zgledom smo že pokazali pomembno dejstvo, da rezultatni moment  $\mathbf{M}$  v splošnem ni pravokoten na rezultanto.



Slika 2. Razstavljanje rezultatnega momenta na dinamico  $\mathbf{M}_D$  in  $\mathbf{M}_0$ . Puščica simbolično nakazuje, da dinamika povzroča »rotacijo okoli« rezultante.

Kadar rezultatni moment ni pravokoten na rezultanto ga zmeraj lahko razdelimo na komponento  $\mathbf{M}_D$  v smeri rezultante  $\mathbf{R}$  in komponento  $\mathbf{M}_0$ , ki je pravokotna na njo, slika 2. Za rezultatni moment torej velja enačba

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_D \quad (1)$$

$\mathbf{M}_D$  enostavno izračunamo tako kot se računa pravokotna komponenta vektorja v dani smeri. Torej, upoštevaje enačbi 2 in 3

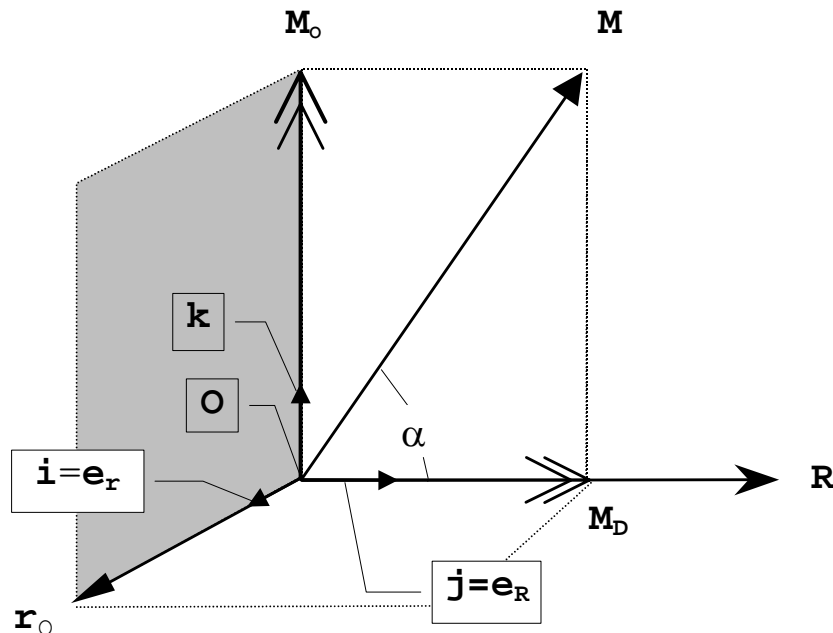
$$\mathbf{M}_D = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_R \quad (2)$$

$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (3)$$

je momentna komponenta dinamice enaka

$$\mathbf{M}_D = M_D \mathbf{e}_R = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}) \frac{\mathbf{R}}{R^2} \quad (4)$$

Moment  $\mathbf{M}_0$  lahko nadomestimo z momentom rezultante. To je problem, kjer imamo podano silo in njen moment, računamo pa lego sile (glej poglavje matematika: enačba premice podane z vektorskim produktom). Za naš problem je očitno:  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{M}_D$  so med seboj pravokotni in so zaporedoma v smereh neke Kartezijske baze  $\mathbf{ijk}$ , slika 3.



Slika 3. Razstavitev momenta  $\mathbf{M}$  na komponento  $\mathbf{M}_0$ , ki je ortogonalno na  $\mathbf{R}$ , in na komponento  $\mathbf{M}_R$ , ki je v smeri  $\mathbf{R}$ . Vektorji  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{M}_0$  so zaporedoma v pozitivnih smereh osi desnega pravokotnega koordinatnega sistema  $x, y, z$ .

Vektor  $\mathbf{r}_0$  je v smeri vektorskega produkta  $\mathbf{R} \times \mathbf{M}_0$ , ko ga normiramo, pa dobimo njegov smerni vektor:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_0}{|\mathbf{R} \times \mathbf{M}_0|} \quad (5)$$

Vektor  $\mathbf{r}_0$  dobimo iz zahteve, da je  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{R}$ . Ker sta  $\mathbf{r}_0$  in  $\mathbf{R}$  med seboj pravokotna, je velikost enaka:

$$r_0 = \frac{M_0}{R}. \quad (6)$$

Če še upoštevamo (glej sliko 3), da je

$$\mathbf{R} \times \mathbf{M}_0 = \mathbf{R} \times \mathbf{M}$$

je vektor  $\mathbf{r}_0$  enak:

$$\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_r = \frac{(\mathbf{R} \times \mathbf{M})}{|\mathbf{R} \times \mathbf{M}|} \cdot \frac{M_0}{R}. \quad (7)$$

V gornji enačbi seveda lahko namesto z  $\mathbf{M}$  računamo z  $\mathbf{M}_0$ , ki ga izračunamo iz enačb 1 in 4.

Enačba učinkovalnice, centralne osi, pa je,

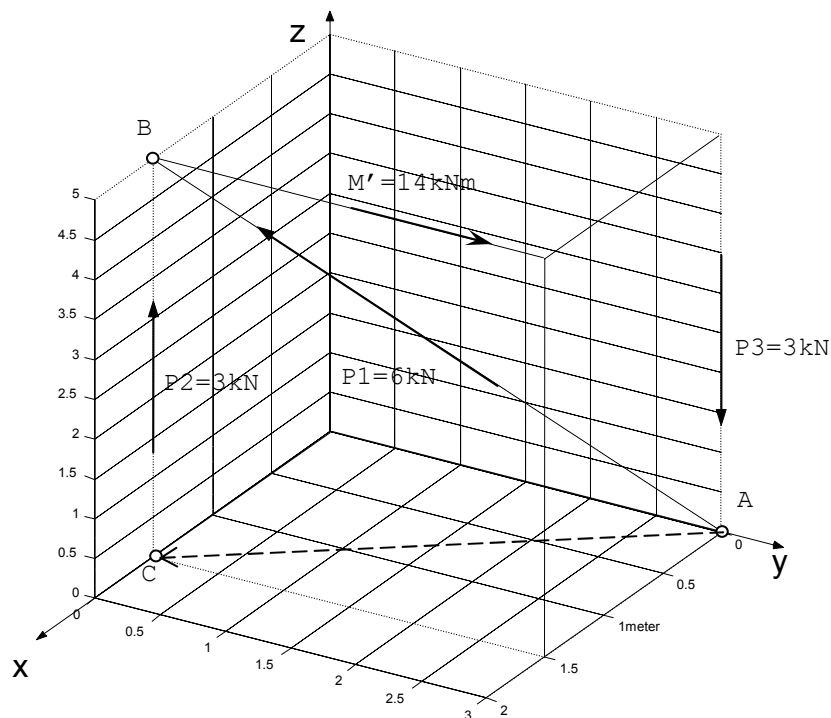
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R} \cdot t \quad (8)$$

ki jo lahko prevedemo v kanonično obliko, ko jo zapišemo po komponentah in izpostavimo parameter  $t$ ,

$$\frac{x - r_{0,x}}{R_x} = \frac{y - r_{0,y}}{R_y} = \frac{z - r_{0,z}}{R_z} = t. \quad (9)$$

Iz te oblike lahko enostavno izračunamo prebodišča centralne osi z  $xy$ ,  $xz$  in  $yz$  ravninami.

**Zgled 2.5.Z1.** Za sistem sil in momentov na sliki Z1-1 izračunaj dinamo in njeno lego.



Slika 2.5.Z1-1.

Izračun.

Rezultanta je enaka

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 \quad (1)$$

Glede na to, da opazimo, da sili  $\mathbf{P}_2$  in  $\mathbf{P}_3$  tvorita dvojico, je rezultanta enaka kar sili  $\mathbf{P}_1$ . Zapišimo jo po komponentah. Njen smerni vektor določimo iz usmerjene daljice od točke A do točke B:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{r}_{A-B}}{r_{A-B}} = \frac{(1.5, -3.5, 5)m}{6.021m} = (0,249 \ -0,498 \ 0,830)$$

in

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 = P_1 \mathbf{e}_1 = 6kN \cdot (0,249 \ -0,498 \ 0,830) = (1,495 \ -2,990 \ 4,982)kN$$

Rezultantni moment glede na os v koordinatnem začetku je

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{P}_3 + \mathbf{M}' \quad (2)$$

Za prijemališče sile  $\mathbf{P}_1$  izberemo točko A in

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{P}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 1,495 & -2,990 & 4,982 \end{vmatrix} = (14,946 \ 0 \ -4,485)$$

Moment sil  $\mathbf{P}_2$  in  $\mathbf{P}_3$  lahko izračunamo kot moment dvojice, kjer za ročico uporabimo vektor od točke A do točke C:

$$\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \mathbf{r}_{A-C} \times \mathbf{P}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1,5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-9 \ -4,5 \ 0)$$

Moment  $\mathbf{M}'$  ima komponente (0 14 0)kNm in rezultatni moment po enačbi 2 je enak

$$\mathbf{M} = (14,946 \ 0 \ -4,485) + (-9 \ -4,5 \ 0) + ((0 \ 14 \ 0)) = (5,946 \ 9,5 \ -4,485) \text{kNm.}$$

Preverimo ali slučajni kot med rezultanto in rezultatnim momentom ni pravi:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = (5,946 \ 9,5 \ -4,485) \cdot (1,495 \ -2,990 \ 4,982) \neq 0$$

Torej obstaja momentna komponenta  $\mathbf{M}_D$  diname.

Ta je enaka

$$\mathbf{M}_D = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_R) \mathbf{e}_R \\ = [(5,946 \ 9,5 \ -4,485) \cdot (0,249 \ -0,489 \ 0,830)] (0,249 \ -0,489 \ 0,830)$$

$$\mathbf{M}_D = (-1,750 \ 3,499 \ -5,830) \text{kNm}$$

Pravokotna komponenta momenta je

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M} - \mathbf{M}_D = (5,946 \ 9,5 \ -4,485) - (-1,750 \ 3,499 \ -5,830)$$

$$\mathbf{M}_O = (7,696 \ 6,001 \ 1,347) \text{kNm.}$$

Njegova velikost je

$$M_O = 9,851 \text{kNm}$$

Ta moment nadomestimo z momentom rezultante. Velikost ročice rezultante je

$$r_0 = \frac{M_O}{R} = \frac{9,851}{6} = 1,641 \text{m,}$$

Smer ročice je

$$\mathbf{e}_o = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O}{|\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O|} = \frac{1}{6 \cdot 9,851} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1,495 & -2,990 & 4,982 \\ 7,696 & 6,001 & 1,347 \end{vmatrix} = (-0,579 \ 0,615 \ 0,541)$$

in

$$\mathbf{r}_o = r_o \mathbf{e}_o = 1,641 \cdot (-0,579 \ 0,615 \ 0,541) = (-0,942 \ 1,009 \ 0,888)\text{m}$$

Računska kontrola: preverimo, ali je res moment diname enak rezultantnemu momentu

$$\mathbf{M}_D + \mathbf{r}_o \times \mathbf{R} = (1,750 \ 3,499 \ -5,830) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0,942 & 1,009 & 0,888 \\ 1,495 & -2,990 & 4,982 \end{vmatrix} = (5,932 \ 9,512 \ -4,523)\text{kNm}$$

$$\approx \mathbf{M} = (5,946 \ 9,5 \ -4,485)\text{kNm}.$$

Razlika v rezultatih je v promilih in je pričakovana, saj smo vmesne rezultate tudi zaokroževali na promile (na tretjo številko).

Enačba centralne osi je

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{R} \cdot t = (-0,942 \ 1,009 \ 0,888) + (1,495 \ -2,990 \ 4,982)t.$$

Iz njene kanonične oblike

$$\frac{x - r_{o,x}}{R_x} = \frac{y - r_{o,y}}{R_y} = \frac{z - r_{o,z}}{R_z} = t$$

izračunajmo prebodišče  $T_1$  z  $xy$  ravnino.

Za  $z=0$  je parameter

$$t_1 = \frac{-r_{o,z}}{R_z} = \frac{-0,888}{4,982} = -0,178$$

in

$$x_1 = R_x t_1 + r_{o,x} = 1,495(-0,178) - 0,942 = -1,208\text{m}$$

$$y_1 = R_y t_1 + r_{o,y} = -2,990(-0,178) + 1,009 = 1,541\text{m}$$

Prebodišče  $T_1$  z  $xz$  ravnino.

Za  $y=0$  je parameter

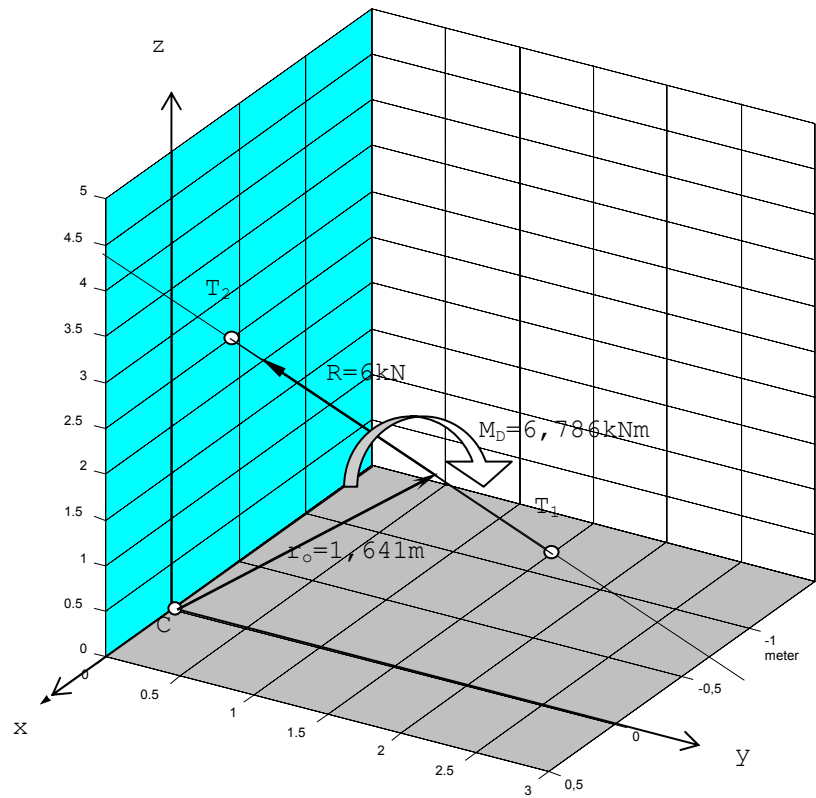
$$t_2 = \frac{-r_{o,y}}{R_y} = \frac{-1,009}{-2,990} = 0,337$$

in

$$x_2 = R_x t_2 + r_{o,x} = 1,495(0,337) - 0,942 = -0,438\text{m}$$

$$z_2 = R_z t_2 + r_{o,z} = 4,982(0,337) + 0,888 = 2,531\text{m}$$

Lega diname in prebodišči centralne osi so prikazani na sliki Z1-2. Ta dinamika je torej statično ekvivalentna izhodiščnemu sistemu sil in momentov. V našem primeru, ko je rezultanta kar enaka sili  $\mathbf{P}_1$ , se je le-ta samo »premaknila« za  $\mathbf{r}_o$  iz koordinatnega izhodišča.



Slika 2.5.Z1-2. Lega diname in centralne osi.

**2.6. Vrste obtežb.** Doslej smo pri obtežbi imeli koncentrirane sile in tudi momente. V realnosti vsaka obtežba pritiska na del površine konstrukcije, ki ne more biti nična. Koncentrirane ali točkovne sile, kot tudi čisti momenti in linijska obtežba, so samo poenostavljeni računski modeli obtežbe. Za analizo ravnotežja so namreč bistvene samo rezultantne vrednosti, ki jih omenjene sile in momenti predstavljajo.

Poglejmo si najprej **prostorninsko obtežbo**, ki jo pri statičnih problemih predstavlja zmeraj samo **sila teže**. Ta deluje na maso, ki je razporejena po neki prostornini (volumnu). Spoznali smo jo v poglavju o težišču. Če na kratko povzamemo: definirana je kot sila na enoto mase, ki zavzema neko prostornino. Zapišemo jo s pomočjo **gostote mase**  $\rho$ , ki je lahko v vsaki točki telesa drugačna (kot na primer pri tleh). Matematično gostoto zapišemo kot skalarno funkcijo krajevnega vektorja  $\mathbf{r}$ , ki določa lego vsakega dela telesa (slika 1).

$$\rho = \rho(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Gostota v bistvu podaja razmerje med infinitezimalno majhnim delom mase,  $dm$ , in prostornine  $dV$ , ki jo zajema ta del mase (glej na sliki simbolni prikaz z majhno kocko):

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm(\mathbf{r})}{dV}. \quad (2)$$

Tako je masa delca enaka

$$dm = \rho(\mathbf{r})dV, \quad (3)$$

seštevek mas vseh delcev, ki sestavljajo telo, pa celotna masa telesa

$$m = \int_m dm = \int_V \rho(\mathbf{r})dV(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Analogno zapišemo gostoto teže

$$\mathbf{g} \cdot \rho(\mathbf{r}), \quad (5)$$

kjer je  $\mathbf{g}$  zemeljski pospešek. Teža  $d\mathbf{G}$  infinitezimalnega delca telesa s prostornino  $dV$  je

$$d\mathbf{G} = \mathbf{g} \cdot \rho(\mathbf{r}) \cdot dV, \quad (6)$$

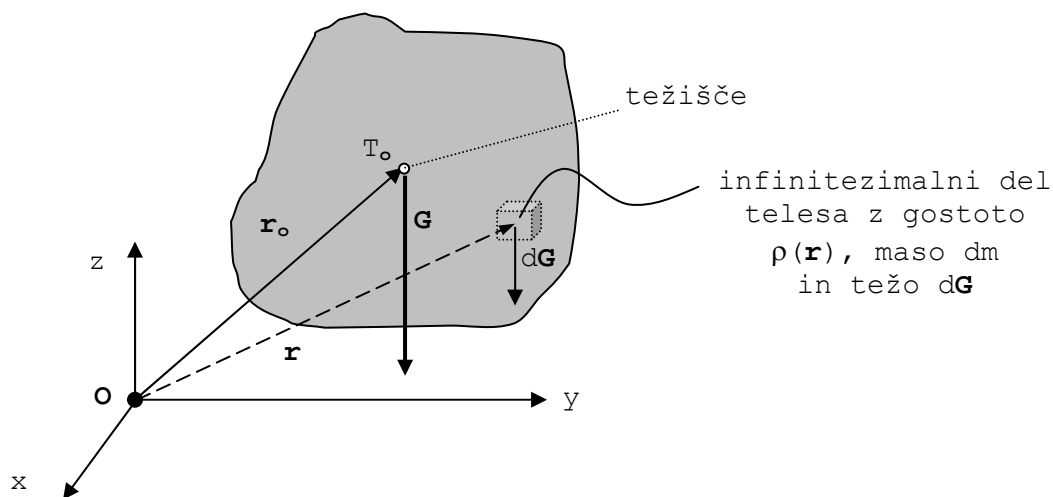
teža celotnega opazovanega telesa je rezultanta sile teže,

$$\mathbf{G} = \int_G d\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} \cdot \rho(\mathbf{r}) \cdot dV, \quad (7)$$

in deluje v težišču. Navor rezultante teže je enak navoru teže celega telesa

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{G} = \int_G \mathbf{r} \times d\mathbf{G}. \quad (8)$$

Kot vemo, se v splošnem pri prostorskih sistemih sil lahko pojavi dinamika, ki jo je treba upoštevati pri rezultanti, da dobimo statično ekvivalentni sistem. Pri teži pa ni dinamike, ker delujejo vse sile teže vzporedno in je navor  $\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{G}$  pravokoten na rezultanto  $\mathbf{G}$ .

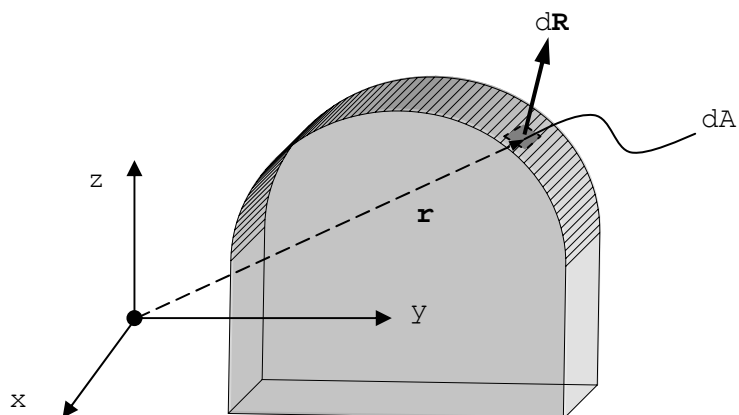


Slika 2.6-1. Prikaz infinitesimalnega dela telesa in rezultante sile teže, ki deluje zmeraj v težišču.

Večinoma imamo opravka z materiali, ki jih smatramo za homogene (beton, jeklo itd,...). Tedaj je teža telesa kar enaka

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} \cdot \rho \cdot dV = \mathbf{g} \cdot \rho \cdot V \quad (9)$$

**Površinska obtežba** je obtežba, ki dejansko nastopa v inženirskih problemih. To je obtežba konstrukcije s silami, ki so zvezno razporejene po nekem delu ali po vsej njeni površini. To je na primer obtežba s snegom, vetrom, vodnim pritiskom itd. Definirana je (analogno kot prostorninska obtežba) z



Slika 2. Simbolični prikaz površinskega elementa dA in rezultantne sile dR, ki deluje nanj.

rezultantno silo dR, ki deluje na infinitesimalni del površine dA (glej sliko 2)

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{R}}{dA} \quad (10)$$



in se lahko spreminja v vsaki točki površine določeni s krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}$ . Tedaj je sila, ki deluje na  $dA$ , enaka

$$d\mathbf{R} = \mathbf{p}(\mathbf{r})dA. \quad (11)$$

Rezultantna sila površinske obtežbe  $\mathbf{p}(\mathbf{r})$ , ki deluje na neko površino  $A$ , je enaka seštevku vseh sil  $d\mathbf{R}$ , ki delujejo na vse delce cele površine  $A$ ,

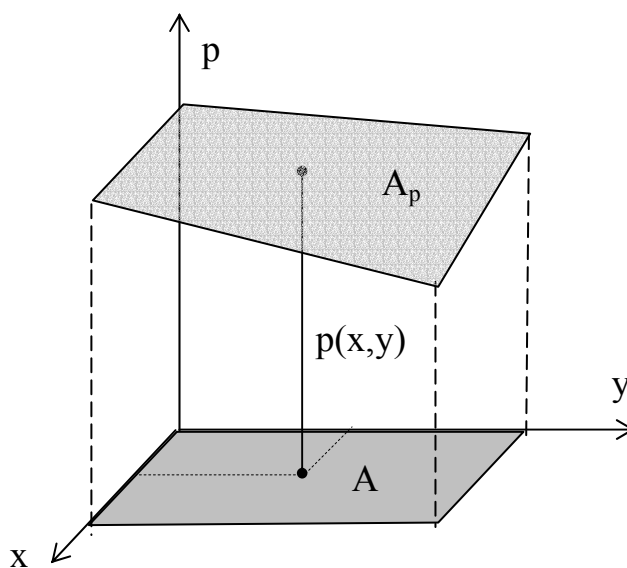
$$\mathbf{R} = \int_A d\mathbf{R} = \int_A \mathbf{p}(\mathbf{r})dA, \quad (12)$$

rezultantni navor glede na začetek koordinatnega sistema pa je enak

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{p}(\mathbf{r})dA. \quad (13)$$

Gornji dve enačbi, posebno pa še enačba za navor, lahko že za relativno enostavne primere zahtevata precej računskega napora. V veliki večini praktičnih inženirskih problemov ju zato izvednotimo na način, ki je še posebno enostaven, kot bomo videli, tudi za linijsko obtežbo.

Poglejmo si še **grafično prestavitev** površinske obtežbe  $p$ , ki deluje pravokotno na neko površino  $A$  (slika 3). Vrednosti te obtežbe narišemo s pravokotnicami na to površino in le-te določajo neko ploskev  $A_p$  (tako kot prikazujemo funkcijo dveh spremenljivk).



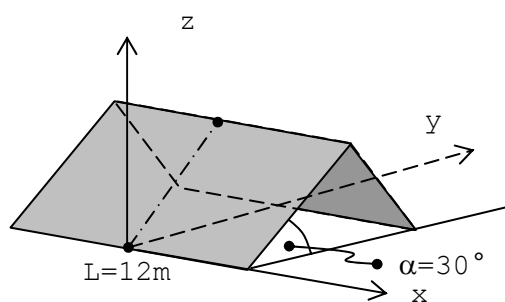
Slika 3. Simbolični prikaz grafične prestavitve površinske obtežbe s ploskvijo.

Glede na grafično prestavitev obtežbe, ni težko ugotoviti, da integral v enačbi 12 predstavlja »prostornino«, ki jo omejuje ploskev  $A$  na katero deluje obtežba, ter ploskev  $A_p$ , ki jo določa funkcija  $p(x,y)$ , ki podaja obtežbo.

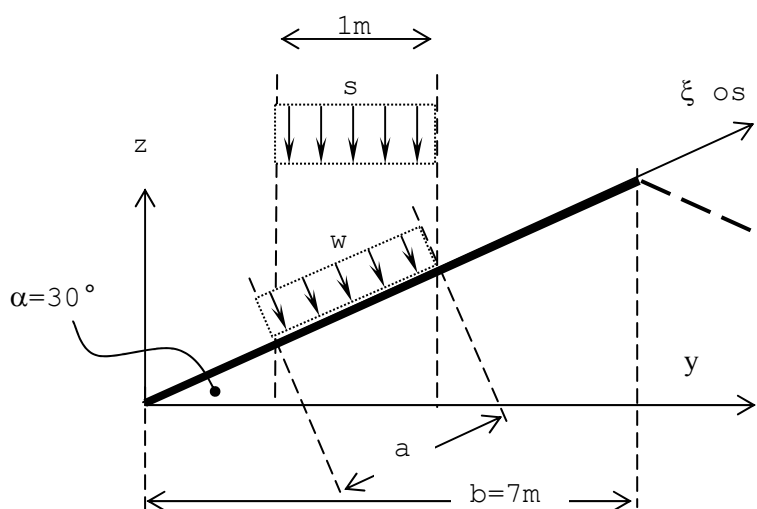
**Zgled 1.** Izračunajmo rezultanto in navor obtežbe s snegom in vetrom polovice pravokotne strehe, slika Z1. Navor izračunajmo glede na začetek koordinatnega sistema  $xy$ . Veter deluje pravokotno na površino strehe in je enak  $w=0,4\text{kN/m}^2$ . Obtežba snega je podana z njegovo težo na kvadratni meter tlorisne površine,  $s=0,8\text{kN/m}^2$ .

**Rešitev.** Kot vidimo, sta obtežbi podani različno: na kvadratni meter tlorisne površine in na kvadratni meter poševne površine strehe. Zaradi poučnosti izračunajmo rezultanto in rezultantni moment tako, da najprej

izračunamo skupno obtežbo, ki deluje na kvadratni meter poševne površine strehe, in izvedimo integriranje po tej površini.



Slika Z1.1. Dispozicija strehe in koordinatnega sistema.



Slika Z1.2. Prikaz obtežbe, ki odpade na kvadratni meter tlorisne površine strehe. Širina strešnega krila je  $d=b/\cos 30^\circ=8,083\text{m}$ .

Glede na postavljeni koordinatni sistem  $xy$ , so komponente obtežbe z vetrom na kvadratni meter poševne površine strehe, enake (glej sliko Z1.2)

$$\mathbf{w}=(w_x, w_y, w_z)=(0, 0.40\cos 30^\circ, -0.40.\sin 30^\circ)=(0, 0.346, -0.20)\text{kN/m}^2$$

Obtežba vetra na kvadratni meter poševne površine strehe pa je enaka

$$\mathbf{s}=(s_x, s_y, s_z)=(0, 0, -0.80\text{kN})/(a[\text{m}]\times 1\text{m}),$$

kjer je

$$a=1\text{m}/\cos(30^\circ)=1.155\text{m}.$$

Torej je

$$\mathbf{s}=(0, 0, -0.924)\text{kN/m}^2$$

in skupna obtežba je

$$\mathbf{p}=(p_x, p_y, p_z)=\mathbf{w}+\mathbf{s}=(0, 0.346, -0.20)+(0, 0, -0.924)=(0, 0.346, -1.124)\text{kN/m}^2$$

Rezultanta obtežbe je

$$\mathbf{R} = \int_A \mathbf{p}(\mathbf{r}) \cdot dA = \int_{x=-L/2}^{L/2=6m} dx \int_{\xi=0}^{d=8,083m} (0, 0.346, -1.124) d\xi = (0, 33.56, 109.02) kN,$$

rezultantni moment pa je

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{p}(\mathbf{r}) \cdot dA = \int_{x=-L/2}^{L/2=6m} dx \int_{\xi=0}^{d=8,083m} (x, y, z) \times (0, 0.346, -1.124) d\xi.$$

Upoštevajte, da sta

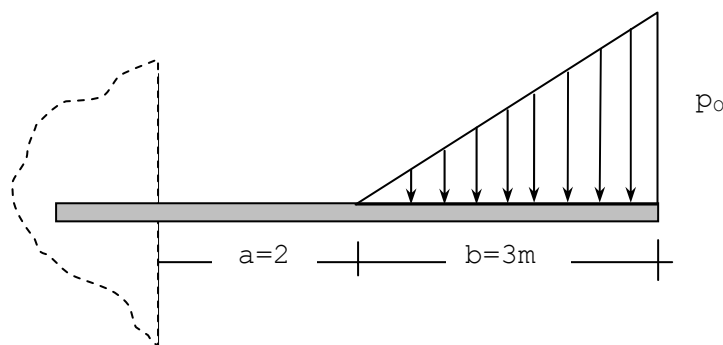
$$y = \xi / \cos(30)^\circ = 1,155\xi; \quad z = \xi / \sin(30)^\circ = 2\xi,$$

je gornji integral enak

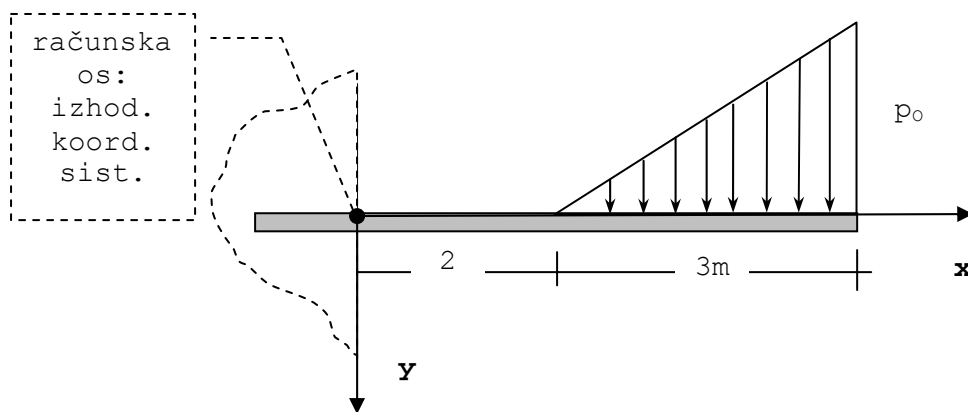
$$\mathbf{M} = \int_{x=-L/2}^{L/2=6m} dx \int_{\xi=0}^{d=8,083m} (x, 1.155\xi, 2\xi) \times (0, 0.346, -1.124) d\xi = (-392, 0, 0) kNm$$

**2.8. Težišče in center sistema masnih točk.** Pojem težišča ter posplošeni pojmi težišča na center (središče) masnih točk, center preseka itd so bistveni za teoretično in praktično analizo konstrukcij. V različnih literaturah, posebno v tujih, ter v različnih vejah znanosti in tehnike, imajo ti pojmi različna imena. Vsi pa imajo enako matematično definicijo. V nadaljnjem tekstu bomo imenovali vse te pojme z v slovenščini uveljavljenim imenom težišče, čeprav je samo v nekaterih primerih ta pojem povezan s težo.

Poglejmo si osnovno idejo težišča na enostavnem primeru konzolnega nosilca, ki je obremenjen z zvezno linijsko obtežbo. Ta je linearno razporejena na odseku z dolžino  $b$  kot kaže slika 1. Največja vrednost obtežbe je  $p_0$ .



Slika 1. Konzolni nosilec z obtežbo.



Slika 2. Postavitev koordinatnega izhodišča v podporo nosilca za izračun momenta.

Moment te obtežbe glede na os, ki jo postavimo v podporo, slika 2, izračunamo z enačbo

$$M = \int_{x=2}^{x=5} x \cdot p(x) dx = \int_{x=2}^{x=5} x \cdot (x-2) \frac{p_0}{3} dx = \left( \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} \right) \frac{p_0}{3} \Big|_{x=2}^{x=5} = 6p_0$$

Na drugi strani pa lahko izračunamo ta moment s pomočjo rezultante in njene lege. Rezultanta je enaka

$$R = \int_{x=2}^{x=5} p(x) dx = \int_{x=2}^{x=5} (x-2) \frac{p_0}{3} dx = 1,5p_0,$$

njeno lego  $x_0$  pa določimo tako, da je njen moment enak momentu zvezne obtežbe:

$$M = x_0 R \quad (1)$$

$$\text{in } x_0 = M/R = 6p_0/1,5p_0 = 4m.$$

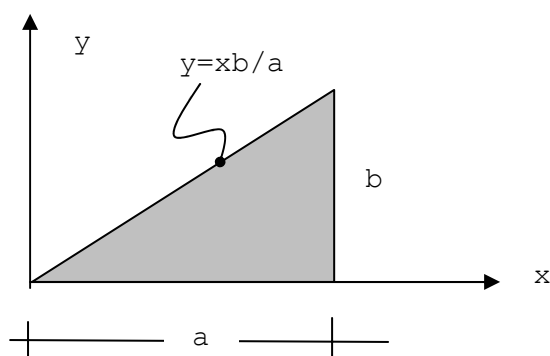
Točki, kjer leži rezultanta, pravimo težišče dane obtežbe. Za mnoge enostavne primere obtežbe sta rezultanta in lega težišča poznani, zato lahko hitro izračunamo moment po enačbi 1. Če pri enodimenzionalnih problemih posplošimo pojem težišča, tedaj je  $p(x)$  enostavno kar neka matematična funkcija, ki lahko prestavlja na primer linijsko razporejeno maso,  $x \cdot p(x)$  pa imenujemo v matematiki prvi moment funkcije. Za enodimenzionalni problem pa **definiramo lego težišča  $x_0$  glede na koordinatni začetek** z enačbo

$$x_0 = \frac{\int xp(x).dx}{\int p(x).dx}. \quad (2)$$

Integral v imenovalcu je, kot vemo, enak površini med funkcijo  $p(x)$  in  $x$  osjo, zato ga označujemo tudi z  $A$  (area). Ta je seveda za obtežbo enak njeni rezultanti. Integral prvega momenta funkcije, ki je v števcu, dostokrat označujemo s  $S$  in, ko se nanaša na obtežbo, je enak navoru. Imenujemo ga statični moment, v našem primeru površine  $A$ , glede na izbrano os - v tem primeru os  $x$ . S temi oznakami zapišemo enačbo 2 kot enačbo 3

$$x_0 = \frac{S}{A} \quad (3)$$

Težišče ima **za vsako razporeditev obtežbe značilno in enkratno lego**. To pomeni, da je lega težišča v razporeditvi obtežbe neodvisna od izbire koordinatnega sistema. Katerikoli koordinatni sistem bomo izbrali, nam enačba 2 določa isto »točko« za dano obtežbo. Najenostavneje in predvsem najbolj smiselno je, da računamo lego težišča glede na začetek obtežbe. Poglejmo si to za obravnavani primer s to razliko, da odsek, na katerem deluje obtežba, označimo splošno z  $a$ . Obtežbo  $p(x)$  označimo kar z  $y(x)$ , ki določa trikotnik, slika 3.



Slika 3. Trikotniški element in izbrani koordinatni sistem za izračun lege težišča.

Izračunajmo lego težišča.

$$\int_{x=0}^a y(x)dx = A = \frac{1}{2}ab$$

$$\int x \cdot y dx = S = \int_{x=0}^a x \frac{bx}{a} dx = \frac{b}{a} \left( \frac{a^3}{3} - 0 \right) = \frac{1}{3}a^2b.$$

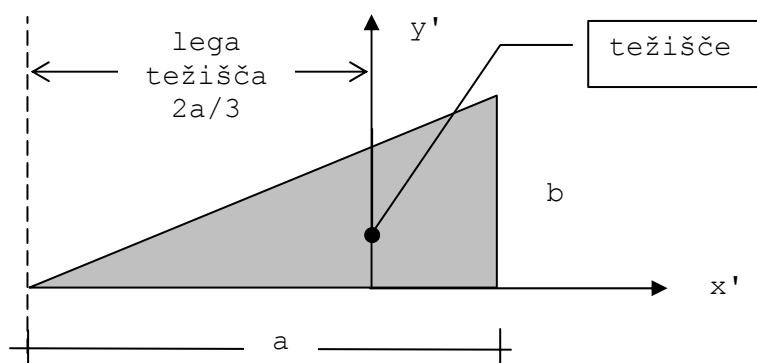
in

$$x_0 = \frac{S}{A} = \frac{\frac{1}{3}a^2b}{\frac{1}{2}ab} = \frac{2}{3}a$$

Lega težišča je oddaljena za  $2a/3$  od začetka »trikotniške« obtežbe. Če postavimo koordinatni začetek v težišče, slika 4, tedaj je seveda  $x_0=0$  in statični moment je enak nič, enačba 4.

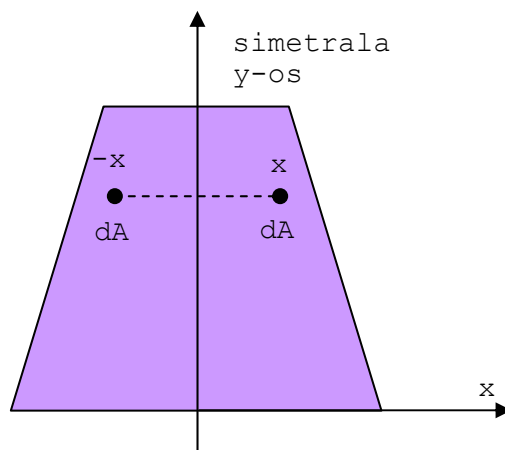
$$\int x'y(x').dx' = x'_0 \int y(x').dx' = 0 \quad \text{za } x'_0 = 0 \quad (4)$$

Tako lahko lego težišča definiramo bolj pomenljivo: **težišče je tista točka, kjer je glede na njo statični moment enak nič**. Koordinatnemu sistemu, katerega začetek je postavljen v težišče, pravimo težiščni koordinatni sistem. Statični moment pa je v tem sistemu ničen.



Slika 4. Lega težišča in težiščni koordinatni sistem.

Opozorimo naj, da je obtežba seveda lahko pozitivna in tudi negativna. Rezultanta je lahko tudi nična. Tedaj imamo »čisti moment« in težišče je računsko v neskončnosti.



Slika 5. Simetrična obtežba – simetrični lik.

Če je obtežba simetrična, **težišče leži zmeraj na simetrali**. Tedaj namreč k vsakemu delu obtežbe obstaja simetrično ležeča obtežba, ki ima negativno koordinato  $x$ . Na sliki 5 je obtežba prikazana kot lik s simetrično ležečimi deli površine  $dA$ .

Pri integraciji statičnega momenta se prispevki simetrično ležečih delov obtežbe izničijo,

$$xdA - x dA = 0,$$

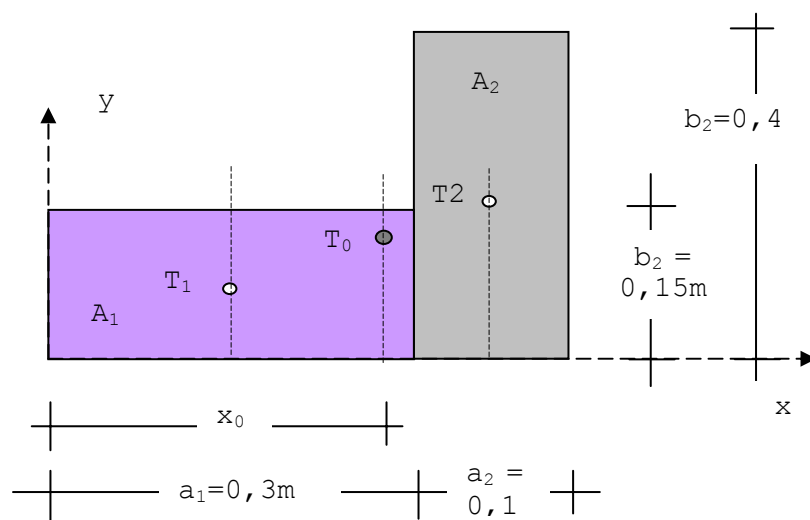
in statični moment je glede na simetralo enak nič:

$$S = \int x \cdot p(x) dx = 0.$$

Matematično gledano: integral lihe funkcije na sodem intervalu je nič.

Kjer poznamo težišča posameznih sestavnih delov obtežbe lahko to dejstvo izkoristimo za enostavnejši izračun težišča celotne obtežbe. Pri tem upoštevamo dejstvo, ki je osnovna lastnost integralov (enačba 2), da je statični moment celotnega telesa enak statičnim momentom njegovih sestavnih delov.

**Zgled Z1.** Poglejmo si na zgledu izračun težišča linijske obtežbe na sliki Z1-1, kjer predpostavimo, da le-ta deluje v y smeri. Ta obtežba tvori pravokotna lika, težišči pa sta na sredini teh »pravokotnikov«.



Slika Z1-1. Sestavljena obtežba.

Površini pravokotnikov sta

$$A_1 = a_1 \cdot b_1 = 0,3 \cdot 0,15 = 0,045 \text{ m}^2$$

$$A_2 = a_2 \cdot b_2 = 0,1 \cdot 0,4 = 0,04 \text{ m}^2.$$

Težišči imata lego

$$x_1 = a_1/2 = 0,3/2 = 0,15 \text{ m}$$

$$x_2 = a_1 + a_2/2 = 0,3 + 0,1/2 = 0,35 \text{ m}.$$

Statični moment glede na y os je enak vsoti statičnih momentov posameznih površin:

$$S = S_1 + S_2 = x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 = 0,15 \times 0,045 + 0,35 \times 0,04 = 0,02075 \text{ m}^3$$

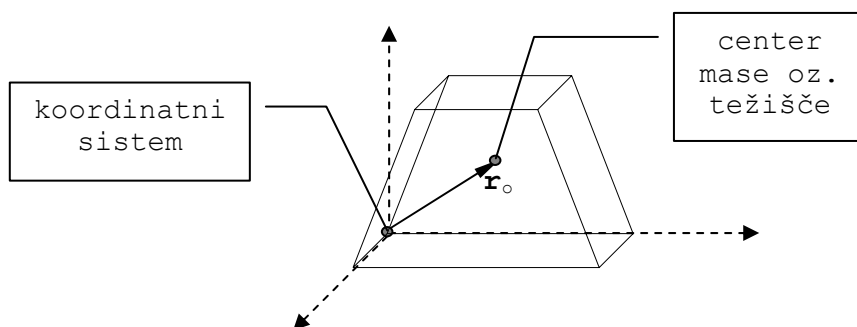
$$\text{Skupna površina je } A = A_1 + A_2 = 0,045 + 0,04 = 0,085 \text{ m}^2$$

in x koordinata težišča celotne obtežbe je

$$x_0 = \frac{S}{A} = \frac{0,02075}{0,085} = 0,2441 \text{ m}$$

Razširimo sedaj definicijo težišča na prostor. Tu nas zanima predvsem **težišče telesa** (masnih točk). Pravimo mu tudi center mase. Center mase ima posebno vlogo pri analizi gibanja teles, ker vse pomike togega telesa (konstrukcije) najlažje podamo z gibanjem njegovega težišča in rotacije okoli težišča.

Za poljubni sistem masnih točk, ki so lahko med seboj povezane (trdno telo) ali pa nepovezane (proste masne točke), lahko izračunamo lego težišča. To je točka, ki je značilna in ena sama za vsak izbrani sistem masnih točk. Kasneje bomo spoznali še centre oziroma težišča mnogih drugih količin, ki pa nimajo nobene zveze s silo teže! V telesu, ki ne spreminja oblike, to je v togem telesu, je lega težišča glede na telo konstantna. To si lahko predstavljamo tako, da v nekem koordinatnem sistemu izračunamo lego težišča in jo nato v mislih nekako v telesu označimo s svinčnikom. Če izberemo neki drugi koordinatni sistem, tedaj nam bo izračunani vektor težišča določal isto točko v telesu. V primeru, da telo potuje se seveda z njim vred premika tudi težišče kar izkoriščamo, kot smo že omenili, za enostavnejše opisovanje gibanja teles.



Slika 5. Lego težišča določa krajevni vektor, ki ga izračunamo z enačbo 4.

Lego težišča »v telesu« definiramo s krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}_0$  glede na neki izbrani koordinatni sistem, glej sliko 6, izračunamo pa jo z enačbo 4, ki je vektorska enačba.

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\int \mathbf{r} \cdot dm}{m} . \quad (4)$$

$m$  je celotna masa opazovanega sistema masnih točk in je seveda enaka seštevku vseh mas masnih točk z masami  $dm$ , ki sestavljajo opazovani sistem. Lega posameznih masnih točk  $dm$  je določena s krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}$ . To dejstvo zapišemo z integralom

$$m = \int_m dm . \quad (5)$$

Integralu

$$\mathbf{S} = \int_m \mathbf{r} \cdot dm \quad (6)$$

pravimo **prvi moment mase**, ki jo moramo pri integriranju vso zajeti. Videli bomo, da je  $\mathbf{S}$  v tesni zvezi z navorom sile teže, zato ga imenujemo tudi **statični moment mase**.

Če postavimo koordinatni sistem v težišče, vidimo iz enačbe 4, da je tedaj  $\mathbf{r}_0=0$  in s tem mora biti statični moment enak nič. Tako velja za prostorski problem enak zaključek kot za prej obravnavani enodimenzionalni problem: težišče je tista točka glede na katero je statični moment enak nič!

Ko v enačbi 4 zapišemo krajevne vektorje po komponentah



$$\mathbf{r}_o = i x_o + j y_o + k z_o \quad (7a)$$

in

$$\mathbf{r} = i x + j y + k z, \quad (7b)$$

in izenačimo istoležne komponente, dobimo tri skalarne enačbe za izračun komponent vektorja, ki določa lego težišča:

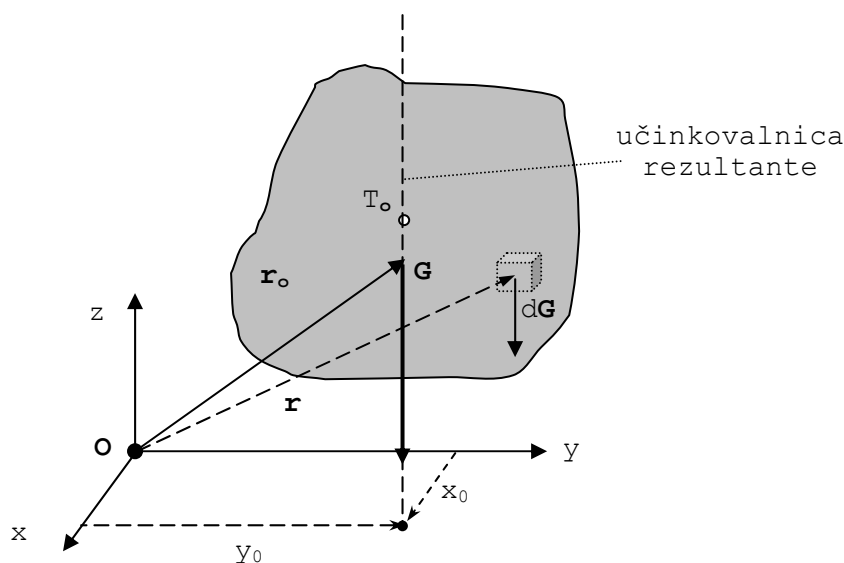
$$x_o = \frac{\int x \cdot dm}{m}, \quad y_o = \frac{\int y \cdot dm}{m}, \quad z_o = \frac{\int z \cdot dm}{m} \quad (8)$$

Integrali v gornjih enačbah so komponente statičnega momenta

$$\mathbf{S} \equiv (S_x, S_y, S_z), \quad S_x = \int x \cdot dm, \quad S_y = \int y \cdot dm, \quad S_z = \int z \cdot dm \quad (9)$$

Gornje enačbe uporabljamo pri praktičnem izračunu težišča.

Poglejmo si sedaj, da lahko moment sile teže, ki deluje razporejeno po vsej masi, izračunamo s pomočjo rezultante teže, ki deluje v centru mase - težišču. Izberimo si neko poljubno telo simbolično prikazano na sliki 6.



Slika 6. Shema za izračun momentov sile teže.

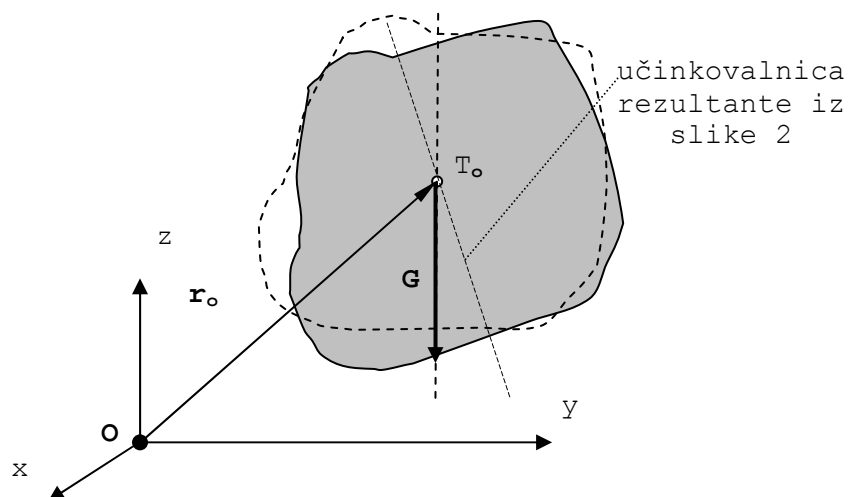
Zaradi nazornosti razlage postavimo koordinatni sistem tako, da deluje sila teže, ki jo označimo z  $\mathbf{G}$ , v smeri z osi. Na vsak delec mase  $dm$  deluje sila teže  $d\mathbf{G}$ . Rezultanta sil tež vseh posameznih delcev je kar teža telesa, enačba 10.

$$\mathbf{G} = \int d\mathbf{G}, \quad (10)$$

Rezultantni moment glede na pol O je enak momentu rezultante sile teže  $\mathbf{G}$  z neko ročico  $\mathbf{r}_o$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_o \times \mathbf{G} = \int_{\mathbf{G}} \mathbf{r} \times d\mathbf{G}. \quad (11)$$

Enačba 11 definira, kot vemo, samo učinkovalnico rezultante sile teže, ne pa natanko ene same točke. V našem primeru je učinkovalnica vzporedna z osi, zato nam izračun da samo komponenti  $x_o$  in  $y_o$  vektorja  $\mathbf{r}_o$  oziroma učinkovalnico sile teže na kateri leži težišče (slika 6). Ko izračunamo to učinkovalnico, si mislimo, da smo jo nekako narisali v telo. Nato pa telo zasučemo (ali pa formalno spremenimo smer sile teže) in izračunamo novo učinkovalnico (slika 7). Sečišče obeh učinkovalnic je težišče telesa in **vsaka učinkovalnica rezultante sile teže gre skozi težišče!**



Slika 7. Shematični prikaz zasuka telesa in izračun nove učinkovalnice teže.

Dokažimo, da enačba 11 definira isti vektor  $\mathbf{r}_o$  kot enačba 4 oziroma enačbe 8, čeprav v enačbi 11 nastopa vektorski produkt, v enačbi 8 pa ne. Najprej v enačbi 11 zapišemo vektorje po komponentah.

$$\mathbf{G} = (0,0,-G) \text{ in } d\mathbf{G} = (0,0,-dG). \quad (12)$$

Tedaj sta vektorska produkta enaka

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_o \times \mathbf{G} = (x_o, y_o, z_o) \times (0,0,-G) = (-y_o G, x_o G, 0) \quad (13a)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\mathbf{G}} \mathbf{r} \times d\mathbf{G} = \int_{\mathbf{G}} (x, y, z) \times (0,0,-dG) = \int_{\mathbf{G}} (-y dG, x dG, 0) \quad (13b)$$

Ko izenačimo posamezne komponente v enačbah 13a in b, dobimo dve enačbi

$$M_x = -y_o G = - \int_{\mathbf{G}} y \cdot dG \quad (14a)$$

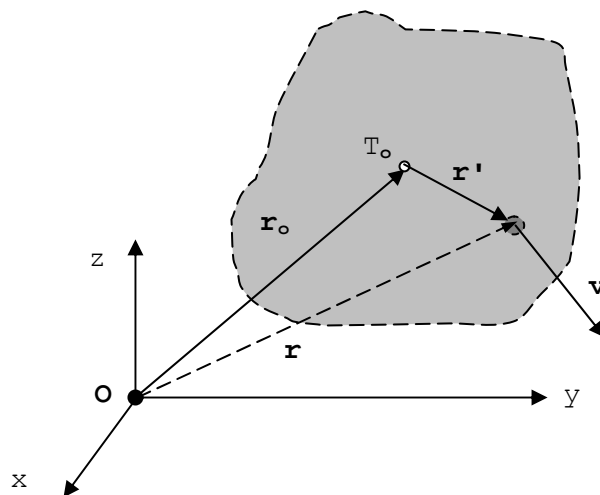
$$M_y = x_o G = \int_{\mathbf{G}} x \cdot dG \quad (14b)$$

Teža je enaka zemeljski pospešek  $g$  krat masa,  $G = gm$ , ki ga lahko v gornjih enačbah okrajšamo in dobimo natanko enake izraze kot v enačbah 8 za koordinati  $x_0$  in  $y_0$ . Če koordinatni sistem ustrezno zasučemo in ponovimo gornji postopek, dobimo še enačbo, ki določa lego težišča na učinkovalnici sile teže.

Integrali v gornjih enačbah predstavljajo prve momente oziroma statične momente. Oznake za njih so lahko različne. V tem tekstu uporabljene oznake za  $\mathbf{S}$  so v skladu z definicijskimi enačbami 9, torej je indeks komponente  $\mathbf{S}$ -a enak komponenti »ročice«  $\mathbf{r}$ . Za komponente momenta  $\mathbf{M}$  pa indeksi predstavljajo osi, okoli katere se suče dana komponenta momenta. Tako na primer  $S_x$  odgovarja  $M_y$ .

**2.8. Enačbe gibanja.** V prvem poglavju smo podali enačbe gibanja in statičnega ravnotežja za eno samo masno točko, ki jih zapišemo neposredno na podlagi drugega Newtonovega zakona. V tem poglavju pa nas zanimajo enačbe gibanja in statičnega ravnotežja za sistem masnih točk, ki smo ga že spoznali pri analizi težišča. V splošnem je sistem masnih točk lahko povsem nepovezan, lahko so masne točke med seboj elastično povezane (elastično telo), lahko pa sistem masnih točk smatramo kot togo telo, ki pa je zmeraj samo smiselna računsko poenostavitev realnih teles. V gradbeništvu se praviloma ukvarjamo z enim ali pa s sistemom več elastičnih teles. Na primer paličje je sistem elastičnih elementov, ki so med seboj členkasto vezani. Če ni drugih omejitev gibanja, se lahko elementi v vezeh med seboj prosto sučejo. Za izračun sil v statično določenem paličju pa lahko posamezne elemente obravnavamo kot povsem toga telesa. Enačbe gibanja bomo izpeljali kar za splošni sistem masnih točk, na koncu pa si bomo še nekoliko natančneje pogledali pomen enačb statičnega ravnotežja za togo telo.

Na sliki 2.8-1 je simbolično prikazan gibajoči se sistem masnih točk, označen z zatemnjenim delom, ki ima težišče v točki  $T_0$ . Koordinatni sistem  $x, y, z$  je neki inercialni (nepomični oziroma absolutni) koordinatni sistem, v katerem je trenutna lega težišča opazovanega sistema masnih točk podana s krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}_0(t)$ , ki se seveda lahko s časom spreminja.



Slika 2.8-1. Simbolični prikaz opazovanega gibajočega se sistema masnih točk.  $\mathbf{r}(t)$  in  $\mathbf{r}_0(t)$  sta krajevna vektorja, ki se spreminjata s časom in podajata lego neke poljubne masne točke in težišča sistema masnih točk v inercialnem koordinatnem sistemu.

Lega poljubne masne točke z maso  $dm$ , oziroma infinitezimalno majhnega dela trdnega telesa, je podana s krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}(t)$ , njena hitrost pa je  $\mathbf{v}(t)$ .  $\mathbf{r}'(t)$  označuje krajevni vektor te točke glede na težišče sistema masnih točk.

V nadaljnjem tekstu bomo upoštevali znana dejstva: hitrost  $\mathbf{v}(t)$  je časovni odvod krajevnega vektorja  $\mathbf{r}(t)$ , ki podaja lego masne točke. Drugi odvod  $\mathbf{r}(t)$  je enak pospešku  $\mathbf{a}(t)$ , oziroma je enak prvemu odvodu hitrosti  $\mathbf{v}(t)$ . Časovne odvode bomo krajše označevali s piko:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(t) \equiv \dot{\mathbf{r}}(t), \quad \mathbf{a}(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{r}(t) \equiv \dot{\mathbf{v}}(t) \equiv \ddot{\mathbf{r}}(t)$$

Ko enačbo težišča prvič odvajamo po času, upošteva, da se masa ne spreminja,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r}_0 m) = \frac{\partial}{\partial t} \int_m \mathbf{r} \cdot dm, \quad (2.8-1a)$$

dobimo enačbo

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{v}_o m = \int_m \mathbf{v} dm. \quad (2.8-1b)$$

V gornji enačbi smo s  $\mathbf{P}$  označili **gibalno količino celotnega sistema masnih točk**, ki je vektorska količina. Omenimo naj, da so oznake za gibalno količino v literaturi različne. Ta enačba pove, da je gibalna količina  $\mathbf{P}$  celotnega sistema masnih točk enaka kar produktu hitrosti njegovega težišča  $\mathbf{v}_o$  in njegove celotne mase  $m$ . V gornji enačbi je, kot vemo, produkt pod integralom,  $\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{v}(t) dm$ , gibalna količina posamezne masne točke. Tako gornjo enačbo pojasnjujemo: vsota gibalnih količin posameznih masnih točk je gibalna količina celotnega sistema.

Gornjo enačbo še enkrat odvajamo:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{r}_o m) = \int_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{r} dm. \quad (2.8-2)$$

Ko upoštevamo, da je produkt mase masne točke in njenega pospeška enak rezultantni sili, ki nanjo deluje,

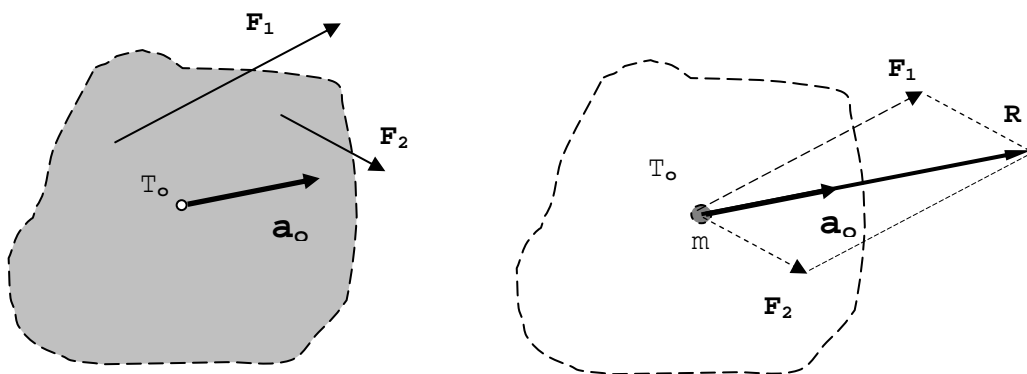
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{r} dm = d\mathbf{F}, \quad (2.8-3)$$

lahko enačbo 2 zapišemo

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{a}_o m = \int_m d\mathbf{F} \equiv \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{R}. \quad (2.8-4)$$

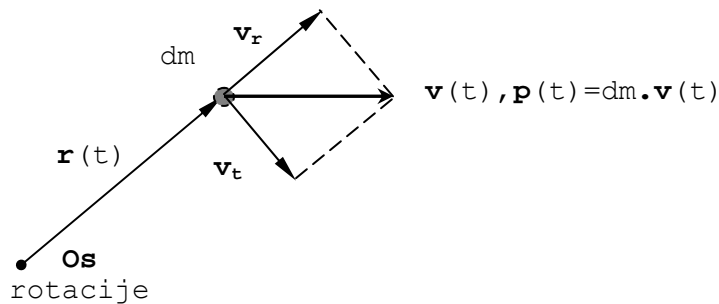
V gornji enačbi smo z  $\mathbf{a}_o$  označili pospešek težišča in z  $\mathbf{R}$  rezultanto sil, ki deluje na sistem masnih točk.

Enačba »pove«, da je pospešek težišča  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{r}_o$  pomnožen s celotno maso  $m$  sistema masnih točk enak rezultantni sili  $\mathbf{R}$ , ki deluje nanj. To velja ne glede na to, kako je sistem sil razporejen. Torej, **težišče sistema masnih točk se giblje tako, kot da bi bila vsa masa sistema skoncentrirana v njem** in bi na tako skoncentrirano maso delovala rezultanta sil, ki delujejo na sistem masnih točk, slika 2.



Slika 2.8-2a,b. Simbolični prikaz: (a) težišča telesa se zaradi sil  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$  giba pospešeno s pospeškom  $\mathbf{a}_o$ , (b) če maso vsega telesa skoncentriramo v težišču telesa in nanj deluje rezultanta sil  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$ , se ta masna točka giblje z istim pospeškom  $\mathbf{a}_o$ .

**Vrtilna količina.** Zaključek gornjih izvajanj nam prav nič ne pove o rotaciji sistema masnih točk. Rotacijo analiziramo s pomočjo vrtilne količine. Vrtilno količino masne točke definiramo z vektorskim produktom krajevnega vektorja  $\mathbf{r}(t)$  njene lokacije glede na os rotacije in njene gibalne količine  $\mathbf{p}(t)$ , slika 3, enačba 5. Vrtilno količino označimo z  $\mathbf{L}(t)$  in jo torej računamo zmeraj glede na neko točko.



Slika 2.8-3. Vrtilna količina je definirana z vektorskim produktom, zato radialna komponenta hitrosti k njej nič ne prispeva.

Njena definicija z vektorskim produktom nam zagotavlja, da je vrtilna količina odvisna samo od vrtenja. Samo tangencialna komponenta hitrosti  $\mathbf{v}_t(t)$  na sliki 3 podaja vrtenje okoli osi, medtem ko radialna komponenta hitrosti  $\mathbf{v}_r(t)$  podaja samo translatorsno približevanje k osi in njen prispevek k vrtilni količini je nič.

$$d\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm. \quad (2.8-5)$$

Za sistem masnih točk je vrtilna količina vektorski seštevek vrtilnih količin posameznih sestavnih točk sistema.

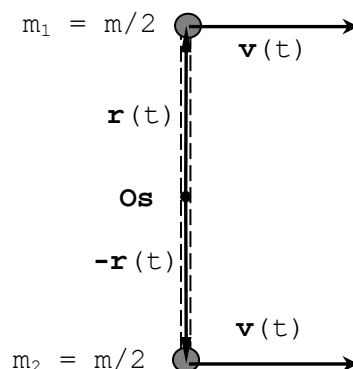
$$\mathbf{L} = \int_L d\mathbf{L} = \int_m \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dm. \quad (2.8-6)$$

**Zgled 2.8.Z1.** Poučen je zgled namišljene toge palice, ki ima maso skoncentrirano na koncih, slika Z1. Obe masi se gibata v isti smeri in z isto hitrostjo.

Glede na računsko os, ki miruje in se trenutno nahaja v skupnem težišču obeh mas, gibanje očitno ni rotacija okoli te osi. Vrtilna količina je po pričakovanju nična:

$$\mathbf{L} = d\mathbf{L}_1 + d\mathbf{L}_2 = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot m/2 - \mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot m/2 = 0.$$

Izračunajmo vrtilno količino, ko računsko os prestavimo drugam, slika Z1-2. Hitrosti mas glede na os sta  $\mathbf{v}_1$  in  $\mathbf{v}_2$ , glede na težišče, ki se premika pa  $\mathbf{v}'_1$  in  $\mathbf{v}'_2$ .



Slika 2.8.Z1-1. Vrtilna količina translacije »palice«, ki ima na koncih skoncentrirano maso, je glede na težišče nična.

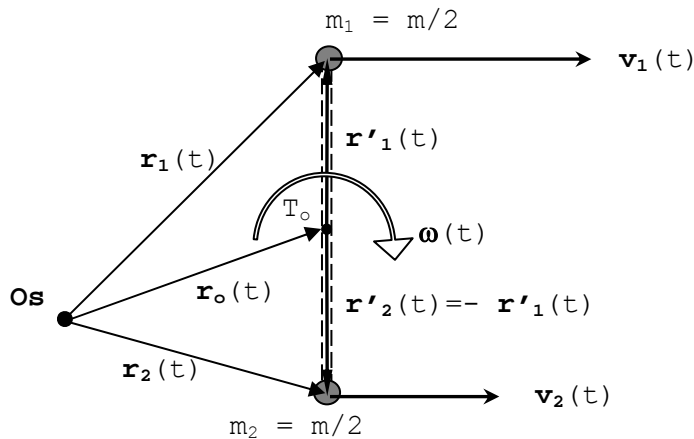
Ko sistem dveh mas predstavlja togo telo, se razdalja med njima ne spreminja in obe se vrtita okoli težišča z enako kotno hitrostjo, ki je podana z vektorjem  $\omega$ . Tedaj je

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_o + \mathbf{r}'_1$$

$$\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_o + \omega \times \mathbf{r}'_1$$

in analogno

$$\mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}_2/dt = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_o + \omega \times \mathbf{r}'_2$$



Slika 2.8.Z1-2. Prikaz oznak za gibanje glede na os in za rotacijo okoli težišča.

Glede na os je vrtilna količina enaka

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 \cdot m/2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 \cdot m/2$$

$$= (\mathbf{r}_o + \mathbf{r}'_1) \times (\mathbf{v}_o + \omega \times \mathbf{r}'_1) \cdot m/2 + (\mathbf{r}_o + \mathbf{r}'_2) \times (\mathbf{v}_o + \omega \times \mathbf{r}'_2) \cdot m/2.$$

Ko upoštevamo, da je

$$-\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}'_1 \equiv \mathbf{r}'$$

in izvednotimo dvojni vektorski produkt, je vrtilna količina enaka

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_o \times \mathbf{v}_o \cdot m + 2\omega \cdot \mathbf{r}'^2 \cdot m/2 = \mathbf{L}_o + \mathbf{L}_r$$

Prvi sumand je vrtilna količina zaradi gibanja težišča,  $\mathbf{L}_o$ , drugi pa zaradi rotacije okoli težišča,  $\mathbf{L}_r$ :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_o + \mathbf{L}_r$$

Če so vse hitrosti nične, je seveda vrtilna količina nična. Ne velja pa obratno – lahko imamo tako gibanje, da je  $\mathbf{L}_o$  ravno nasproten  $\mathbf{L}_r$ . Torej se pri analizi statičnega ravnotežja ne moremo zanašati na to, da nam nična vrtilna količina zagotavlja mirovanje sistema – samo momentni ravnotežni pogoj ne zadostuje. S podporami moramo zagotoviti, da posebej ni niti premika težišča niti rotacije okoli težišča.

-0-

Izračunajmo sedaj **vrtilno količino poljubnega sistema masnih točk okoli težišča**. Označimo s črtico vse količine, ki jih podajamo glede na težiščni koordinatni sistem. V vsakem trenutku je vrtilna količina  $d\mathbf{L}'$

posamezne masne točke glede na težiščni koordinatni sistem enaka vektorskemu produktu krajevnega vektorja  $\mathbf{r}'$  masne točke in njene gibalne količine  $\mathbf{v}'dm$  (slika 1):

$$d\mathbf{L}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' dm. \quad (2.8-7a)$$

Pri tem upoštevamo, da je hitrost  $\mathbf{v}'$  relativna glede na težišče sistema masnih točk, ki se v splošnem lahko giblje, in je enaka

$$\mathbf{v}' = \frac{d}{dt} \mathbf{r}' \equiv \dot{\mathbf{r}}' \quad (2.8-7b)$$

Ta vrtilna količina podaja vrtenje okoli težišča. Ta je enaka nič, če je relativna hitrost masne točke nična ali pa se giblje proti težišču, torej ni vrtenja okoli težišča. Za cel sistem masnih točk je vrtilna količina enaka

$$\mathbf{L} = \int_L d\mathbf{L} = \int_m \mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}' dm. \quad (2.8-7c)$$

Njen odvod je

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} \int_m \mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}' dm = \int_m \dot{\mathbf{r}}' \times \dot{\mathbf{r}}' dm + \int_m \mathbf{r}' \times \ddot{\mathbf{r}}' dm. \quad (2.8-7d)$$

Prvi integral na desni strani enačbe je enak nič, ker je vektorski produkt vektorja s samim seboj ničen. Ko podamo krajevne vektorje masnih točk še v **inercialnem koordinatnem** sistemu, je zveza s težiščnim koordinatnim sistemom sledeča:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0. \quad (2.8-8)$$

Upoštevaje gornjo enačbo je enačba 7d enaka:

$$\dot{\mathbf{L}} = \int_m \mathbf{r}' \times (\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}_0) dm = \int_m \mathbf{r}' \times \ddot{\mathbf{r}} dm + \int_m \mathbf{r}' \times (-\ddot{\mathbf{r}}_0) dm. \quad (2.8-9)$$

Drugi integral na desni strani je enak nič,

$$\int_m \mathbf{r}' \times (-\ddot{\mathbf{r}}_0) dm \equiv \ddot{\mathbf{r}}_0 \times \int_m \mathbf{r}' dm = \ddot{\mathbf{r}}_0 \times \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (2.8-10)$$

ker je  $\mathbf{S}$  statični moment okoli težišča in je po definiciji enak nič. Prvi integral na desni strani pa je enak rezultantnemu momentu  $\mathbf{M}$  sil  $\mathbf{F}$  glede na težišče:

$$\int_m \mathbf{r}' \times \ddot{\mathbf{r}} dm = \int_m \mathbf{r}' \times d\mathbf{F} = \int_m d\mathbf{M} \equiv \sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{M}. \quad (2.8-11)$$

Tako imamo končno enačbo za rotacijo okoli težišča, ki je enaka

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}} \quad (2.8-12)$$

Ta enačba nam pove, da je odvod vrtilne količine glede na težišče sistema masnih točk enak rezultantnemu momentu glede na težišče.



**2.9. Enačbe statičnega ravnotežja.** Ko je obremenjeno togo telo v **mirovanju**, se njeno težišče ne premika, telo pa tudi ne rotira okoli težišča – pravimo, da je **telo v statičnem ravnotežju**. Tedaj se seveda gibalna količina **P** in vrtilne količina **L** ne spreminjata in njun časovni odvod je ničen. Zato morata biti po enačbah gibanja, enačbe 2.8-4 in 2.8-12, rezultanta sil in rezultatni moment sil, ki delujejo na togo telo, nična. Tedaj ti dve enačbi predstavljata **vektorski enačbi statičnega ravnotežja** sil in momentov in ju zapišemo:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{R} \equiv \mathbf{0} \quad (2.9-1)$$

$$\sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{M} \equiv \mathbf{0} \quad (2.9-2)$$

Prva enačba zagotavlja ravnotežje vseh sil ali **translatorno ravnotežje**, druga pa ravnotežje vseh momentov ali **rotacijsko** oziroma **momentno ravnotežje**. To sta vektorski enačbi, ki ju za prostorske sile in momente zapišemo po komponentah s šestimi enačbami:

$$\sum_i F_{i,x} = R_x \equiv 0 \quad (2.9-3a)$$

$$\sum_i F_{i,y} = R_y \equiv 0 \quad (2.9-3b)$$

$$\sum_i F_{i,z} = R_z \equiv 0 \quad (2.9-3c)$$

$$\sum_i M_{i,x} = M_x \equiv 0 \quad (2.9-4a)$$

$$\sum_i M_{i,y} = M_y \equiv 0 \quad (2.9-4b)$$

$$\sum_i M_{i,z} = M_z \equiv 0 \quad (2.9-4c)$$

Gornje enačbe imenujemo na kratko **ravnotežne enačbe zapisane po komponentah** ali **skalarne enačbe ravnotežja**. Najpogosteje jih bomo uporabljali za izračun neznanih reakcijskih sil in momentov v podporah konstrukcij, ki morajo biti taki, da zagotovijo statično ravnotežje (mirovanje) konstrukcije. Ker je enačb natanko šest, iz njih lahko **enolično izračunamo natanko šest neznanih vrednosti** za sile in momente. Inženirski problemi so večinoma postavljeni tako, da so reakcije neznanke. Te neznane sile in momente imenujemo tudi **uravnotežne sile** oziroma momente.

Za **ravninske probleme**, kjer na primer vse sile delujejo v ravnini xy, pa imamo na razpolago **samo tri ravnotežne enačbe**. Dve enačbi sta za translatorsko ravnotežje komponent sil v ravnini xy. Računska os za momente je tudi v ravnini xy, zato imajo momenti samo komponento v z smeri, kar nam da še momentno ravnotežno enačbo v smeri z:

$$\sum_i F_{i,x} = R_x \equiv 0 \quad (2.9-5a)$$

$$\sum_i F_{i,y} = R_y \equiv 0 \quad (2.9-5b)$$

$$\sum_i M_{i,z} = M_z \equiv 0 \quad (2.9-6)$$

Ker so v ravninskem problemu samo tri enačbe, iz njih lahko **enolično izračunamo natanko samo neznane vrednosti** za sile in momente.

Momentne ravnotežne enačbe smo izpeljali za momente sil glede na težišče telesa, kar je za praktične izračune precej nerodno. Zato še pred računskim zgledom dokažimo, da za analizo statičnega ravnotežja lahko izberemo povsem poljubno lego točke glede na katero računamo momente. Velja namreč, **da sile, ki so v translatornem in momentnem ravnotežju glede na neko točko, so v momentnem ravnotežju okoli vsake točke**, torej tudi glede na težišče.

Dokaz. Imejmo neki sistem sil, ki izpolnjuje ravnotežne enačbe 1. Lokacijo prijemališč sil  $F_i, i=1,2,\dots,n$ , glede na poljubno točko B označimo s krajevnimi vektorji  $r_i, i=1,2,\dots,n$  (slika 4). Pripadajoči momenti so enaki  $r_i \times F_i$ . Glede na neko poljubno točko A, ki je za vektor  $a$  premaknjena iz toče B, označimo ročice sil z  $r_i'$ . Pripadajoči momenti so enaki  $r_i' \times F_i$ . Za vsako ročico torej velja enačba

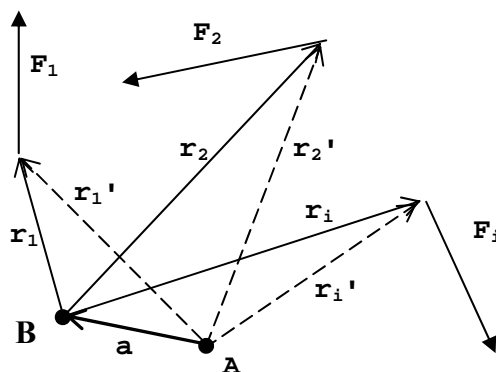
$$r_i' = r_i + a, i=1,2,\dots,n. \quad (2.9-7)$$

Ob upoštevanju gornje enačbe je vsota momentov  $M'$  sil glede na točko A enaka:

$$M' = \sum_{i=1}^n r_i' \times F_i = \sum_{i=1}^n (r_i + a) \times F_i = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i + a \times \sum_{i=1}^n F_i = M + a \times 0. \quad (2.9-8)$$

Iz gornje enačbe sledi dokaz: ko je  $M$  enak nič, je tudi  $M'$  nič, in obratno.

Za praktične izračune izbiramo lego osi tako, da je numerični izračun najbolj enostaven in pregleden. Za **kontrolno izračuna** ravnotežnih sil pa izračunamo vsoto momentov še glede na neko novo lego osi, ki nam mora dati nični rezultantni moment.



Slika 2.9-4. Simbolični prikaz sil in ročic glede na os A in os B.

**Zgled 2.9.Z1.** Ravninski problem. Za nosilec na sliki 2.9.Z1-1 izračunajmo sile  $H_A$ ,  $V_A$  in  $V_B$ , ki uravnotežijo sili  $P_1$  in  $P_2$ . Torej za neznane sile poznamo smeri in lokacije njihovih prijemališč, njihovih velikosti pa ne.

Sistem na sliki tvori pravokotni trikotnik s stranicami  $a=3\text{m}$ ,  $b=4\text{m}$  in  $c=5\text{m}$ , sili pa delujeta pravokotno na elementa. Za izračun izberemo koordinatni sistem prikazan na sliki 2.9.Z1-1.

**Rešitev.** Izberimo smerne vektorje sil  $H_A$ ,  $V_A$  in  $V_B$  v smereh njihovih vektorskih puščic prikazanih na sliki in zapišimo vse sile po komponentah v koordinatnem sistemu  $xy$ :

$$\begin{aligned} H_A &= (H_A, 0) \\ V_A &= (0, V_A) \\ V_B &= (0, V_B) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_1 = P_1(\cos\beta, -\cos\alpha) = 16(\cos 0.9273\text{rd}, -\cos 0.6435\text{rd}) = (9.6000, -12.8000)\text{kN}$$

$$\mathbf{P}_2 = P_2(\cos\alpha, \cos\beta) = 7(\cos 0.6435\text{rd}, \cos 0.9273\text{rd}) = (5.6000, 4.2000)\text{kN}$$

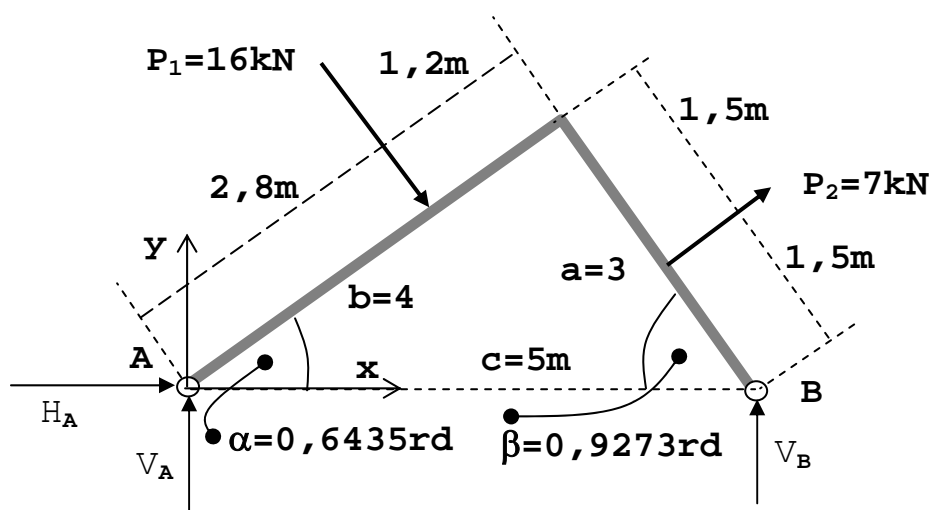
Ravnotežni enačbi za translacijo sta

$$\sum_i F_{i,x} = H_A + 9.6 + 5.6 = 0 \quad (2.9.Z1-1a)$$

$$\sum_i F_{i,y} = V_A + V_B - 12.8 + 4.2 = 0, \quad (2.9.Z1-1b)$$

momentna enačba glede na os v točki A pa je

$$\sum_i M_{i,z} = 5V_B - 2.8P_1 + 1.5P_2 = 5V_B - 2.8 \times 16 + 1.5 \times 7 = 0. \quad (2.9.Z1-1c)$$



Slika 2.9.Z1-1. Grafični prikaz problema in izbrani koordinatni sistem.

Gornji sistem enačb lahko zapišemo v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15,2 \\ 8,6 \\ 34,3 \end{Bmatrix} \quad (2.9.Z1-1d)$$

Prvo matriko imenujemo **matriko koeficientov neznanih statičnih količin** – to je neznanih sil in tudi momentov, ko le-ti nastopajo kot neznanke. Ko je **determinanta** te matrike **različna od nič**, **rešitev obstaja in je enolična**.

Izračun nam da rešitev

$$H_A = -15.2000 \text{ kN} \quad (2.9.Z1-2a)$$

$$V_A = 1.7400 \text{ kN} \quad (2.9.Z1-2b)$$

$$V_B = 6.8600 \text{ kN} \quad (2.9.Z1-2c)$$

Reakcija  $H_A$  je negativna kar pomeni da je v negativni smeri izbranega smernega vektorja – v obratni smeri predpostavljene smeri reakcije.

Izbira računskega koordinatnega sistema in lega osi je seveda poljubna. Poglejmo si še za zgled rešitev, ko izberemo koordinatni sistem prikazan na sliki Z1-2.

Komponente sil so

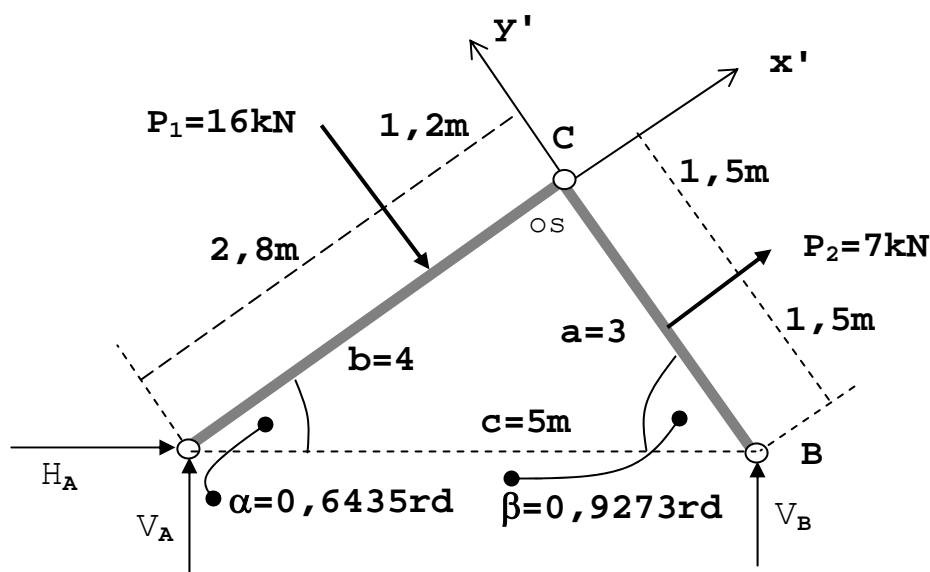
$$\mathbf{H}_A = (H_A \cos \alpha, -H_A \cos \beta) = H_A(0.8, -0.6)$$

$$\mathbf{V}_A = (V_A \cos \beta, V_A \cos \alpha) = V_A(0.6, 0.8)$$

$$\mathbf{V}_B = (V_B \cos \beta, V_B \cos \alpha) = V_B(0.6, 0.8)$$

$$\mathbf{P}_1 = (0, -P_1) = (0, -16) \text{ kN}$$

$$\mathbf{P}_2 = (P_2, 0) = (7, 0) \text{ kN}.$$



Slika 2.9.Z1-2. Računski koordinatni sistem v novi legi in os v točki C.

Ravnotežni enačbi za translacijo sta sedaj

$$\sum_i F_{i,x'} = H_A \cdot 0.8 + V_A \cdot 0.6 + V_B \cdot 0.6 + 7 = 0 \quad (2.9.Z1-3a)$$

$$\sum_i F_{i,y'} = -H_A \cdot 0.6 + V_A \cdot 0.8 + V_B \cdot 0.8 - 16 = 0, \quad (2.9.Z1-3b)$$

momentna enačba glede na os v točki C pa je

$$\begin{aligned} \sum_i M_{i,z} &= 4 \sin \alpha \cdot H_A - 4 \cos \alpha \cdot V_A + 3 \cos \beta \cdot V_B + 1.2 P_1 + 1.5 P_2 \\ &= 2.4 H_A - 3.2 V_A + 1.8 V_B + 29.7 = 0. \end{aligned} \quad (2.9.Z1-3c)$$

Ta sistem enačb »ročno« nekoliko težje rešimo kot prejšnjega, ker v vsaki enačbi nastopajo vse tri neznanke. Rešitev pa je seveda enaka kot prej. Ta zgled nam kaže, da si lahko z ustrezno izbiro koordinatnega sistema samo olajšamo računsko delo.

## 2.10. Statično ekvivalentni sistemi ravnotežnih enačb.

V prejšnjem razdelku smo izbirali pravokotne koordinatne sisteme. Lahko pa bi zapisali ravnotežne enačbe za komponente v smereh, ki niso med seboj pravokotne. Rezultanta sil je namreč enaka nič, ko so njene pravokotne komponente v treh poljubnih smereh (v ravnini v dveh smereh) enake nič. Smerni vektorji teh smeri pa morajo biti seveda linearno neodvisni. Vsi sistemi ravnotežnih enačb, ki jih dobimo iz različnih koordinatnih sistemov, so **ekvivalentni – rešitve so iste**. V zgledu Z1 bi lahko na primer izbrali ravnotežje pravokotnih komponent sil v smeri osi  $x$  in  $x'$ . Tedaj bi dobili sistem enačb, ki sestoji iz enačb 1a, 3a ter še momentno enačbo, na primer 1c. Rešitev bi bila ista kot za sistem enačb 1a, 1b in 1c. Na sliki 5 sta simbolično prikazani smeri osi  $x$  in  $y$ , ki nista pravokotni, ter prikaz pravokotnih komponent sile  $\mathbf{P}_1$ . Opozorimo naj, da vektorske vsote teh vektorskih komponent sil niso enake silam – v analizi ravnotežja ne gre za razstavljanje sil v poševni bazi, ampak za ravnotežje komponent sil v danih smereh!

Zgoraj omenjena **ekvivalentnost enačb za translatorno ravnotežje** izvira iz različnih koordinatnih sistemov oziroma izbranih smeri, v katerih nastavljamo ravnotežne enačbe. Za nadaljnje pa je pomembno, da dokažemo, da lahko z momentnimi enačbami nadomestimo enačbe za translatorno ravnotežje?

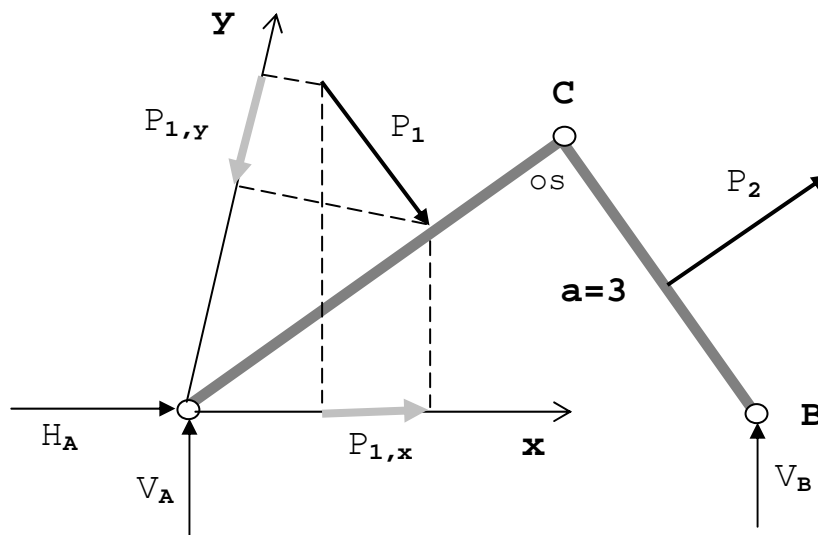
Predpostavimo, da je izpolnjeno momentno ravnotežje sil glede na dve točki A in B, ki sta oddaljeni za vektor  $\mathbf{a}$ , slika 2. Prve momente označimo z  $\mathbf{M}_i$ , druge pa z  $\mathbf{M}'_i$ . Zanima nas torej, če velja

$$\mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (2.10-1a)$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{0}, \quad (2.10-1b)$$

ali je tedaj

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}? \quad (2.10-1c)$$



Slika 2.10-1. Prikaz možne izbire dveh smeri za enačbe translatornega ravnotežja. Smeri sta podani z osema  $x$  in  $y$ . Prikazani sta še pravokotni komponenti sile  $\mathbf{P}_1$ .

Rezultantni moment  $\mathbf{M}'$  izrazimo z vsoto momenta  $\mathbf{M}$  in momenta rezultante:

$$\mathbf{M}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i + \mathbf{a}) \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{a} \times \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{M} + \mathbf{a} \times \mathbf{R}. \quad (2.10-2)$$

Ker sta  $\mathbf{M}$  in  $\mathbf{M}'$  po predpostavki enaka nič, sledi iz gornje enačbe, da je

$$\mathbf{a} \times \mathbf{R} = 0. \quad (2.10-3)$$

Torej je enačba 3 ekvivalentna enačbi 2. Sedaj razstavimo vse sile na komponente  $\mathbf{F}_{i,a}$ , ki so vzporedne vektorju  $\mathbf{a}$  in komponente  $\mathbf{F}_{i,p}$ , ki so pravokotne na vektor  $\mathbf{a}$ , slika 2.10-2,:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i,a} + \mathbf{F}_{i,p}. \quad (2.10-4)$$

Tedaj se enačba 3 glasi:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{R} = \mathbf{a} \times \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{a} \times \sum_i \mathbf{F}_{i,a} + \mathbf{a} \times \sum_i \mathbf{F}_{i,p} = 0 \quad (2.10-5)$$

Upošteva, da je prvi vektorski produkt enak nič, ker so komponente  $\mathbf{F}_{i,a}$  vzporedne vektorju  $\mathbf{a}$ . Drugi sumand pa je enak nič samo, ko je

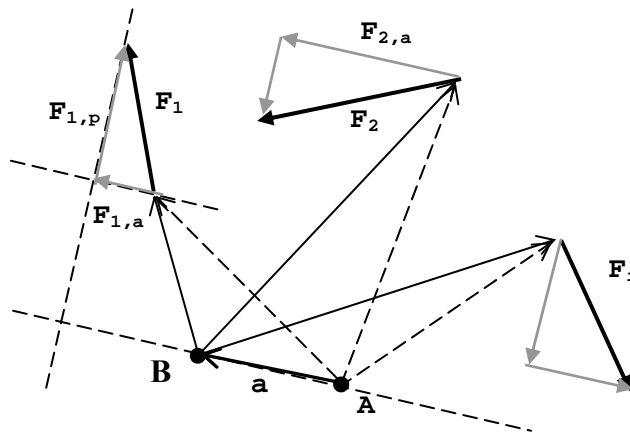
$$\sum_i \mathbf{F}_{i,p} = 0. \quad (2.10-6)$$

Ta enačba predstavlja **ravnotežje komponent sil, ki so pravokotne na vektor  $\mathbf{a}$**  in tako v splošnem ni povsem ekvivalentna enačbi za translatorsko ravnotežje. Manjka še enačba za translatorsko ravnotežje v smeri vektorja  $\mathbf{a}$ .

Če za ravninski problem zapišemo enačbi za momentno ravnotežje okoli osi A in B ter še enačbo za translatorsko ravnotežje v smeri, ki ni pravokotna na zveznico osi A in B, je dobljeni sistem enačb ekvivalenten ravnotežnim enačbam, enačbe 2.7-5a,b in 2.7-6.

S tremi momentnimi enačbami za osi A, B in C, ki ne ležijo na isti premici, lahko za ravninski problem nadomestimo vse ravnotežne pogoje.

Analogno velja za prostorske probleme, seveda pa imamo tam opravka s šestimi enačbami.



Slika 2.10-2. Simbolični prikaz komponent sil  $\mathbf{F}_{i,a}$ , ki so vzporedne vektorju  $\mathbf{a}$ , in komponente  $\mathbf{F}_{i,p}$ , ki so pravokotne na  $\mathbf{a}$ .

**Zgled 2.10.Z1 – nadaljevanje** zглеada 2.9.Z1. Za problem iz zглеada 2.9.Z1 nastavimo momentno ravnotežje okoli točke A in okoli točke B. Za točko A smo enačbo že prej izračunali:

$$\sum_i M_{i,z}^A = 5V_B - 2.80P_1 + 1.5P_2 = 5V_B - 2.8 \times 16 + 1.5 \times 7 = 0. \quad (2.10.Z1-1)$$

Za točko B pa velja:

$$\sum_i M_{i,z}^B = -5V_A + 1.2P_1 - 1.5P_2 = -5V_A + 1.2 \times 16 - 1.5 \times 7 = 0. \quad (2.10.Z1-2)$$

Ti dve enačbi nam poleg momentnega ravnotežja zagotavljata še ravnotežje v smeri y osi, slika Z1. Potrebujemo še enačbo za translatorsko ravnotežje v poljubni smeri, samo ne v y smeri. Zaradi prikaza splošne veljavnosti gornjih zaključkov jo izberimo v smeri x' (na sliki Z1-2), čeprav je enostavneje rešiti ravnotežno enačbo za smer x! To enačbo smo tudi že prej izračunali:

$$\sum_i F_{i,x'} = H_A \cdot 0,8 + V_A \cdot 0,6 + V_B \cdot 0,6 + 7 = 0 \quad (2.10.Z1-3)$$

Rešitev teh treh enačb je seveda enaka kot v zgledu Z1.

Enako rešitev bi dobili za tri momentne enačbe za osi v točkah A, B in C.

Ekvivalentni sistemi enačb nam praktično omogočajo:

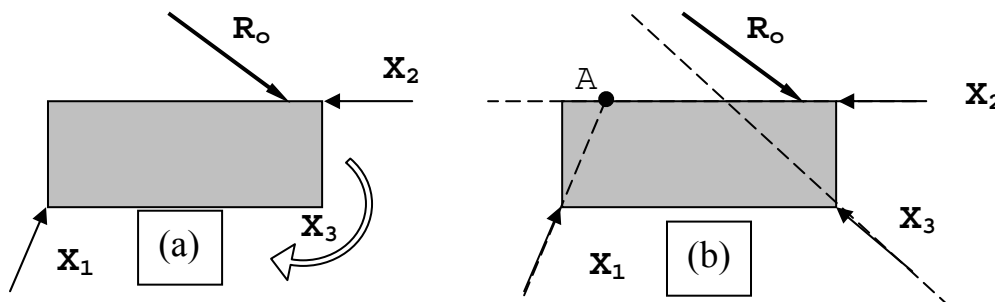
- kontroliranje računanja reakcij
- izbiranje tistih enačb, ki jih najlažje sestavimo in izračunamo.

## 2.11. Nabor neznanih sil in momentov, ki vzpostavijo statično ravnotežje.

Iz ravnotežnih enačb lahko v prostorskem problemu izračunamo šest, v ravninskem problemu pa tri neznanke. Vendar pa v formulaciji problema ne moremo kar poljubno izbirati statične količine kot neznanke.

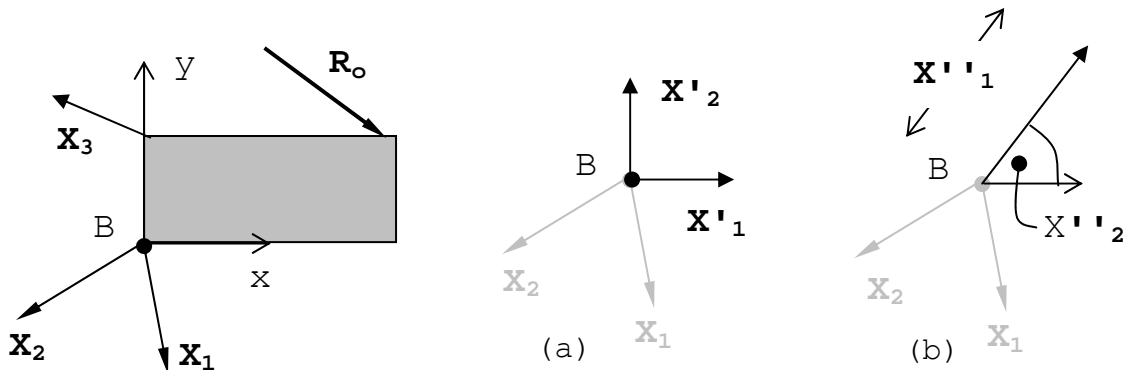
Če se najprej omejimo na ravninski problem, moramo biti pozorni, da prvi dve skalarni enačbi postavljata pogoje za translatorsko ravnotežje, tretja enačba pa zahteva momentno ravnotežje. Da vzpostavimo ravnotežje, morajo kot neznanke nastopati velikosti dveh sil in enega momenta, slika 2.11.-1a, ali pa velikosti treh sil, slika 2.11.-1b, kjer je z  $\mathbf{R}_0$  simbolično prikazana rezultanta obtežnih sil. Vsaj dve neznanji sili ne smeta biti med seboj vzporedni, medtem ko je smer sile tretje poljubna.

Legi prijemališč neznanih sil je lahko povsem poljubna, vendar pa tretja sila ne sme potekati skozi sečišče učinkovalnic prvih dveh neznank. Če bi učinkovalnica sile  $\mathbf{X}_3$  potekala skozi sečišče A, tedaj bi bil moment neznank glede na os v točki A nič, moment rezultante pa ne.



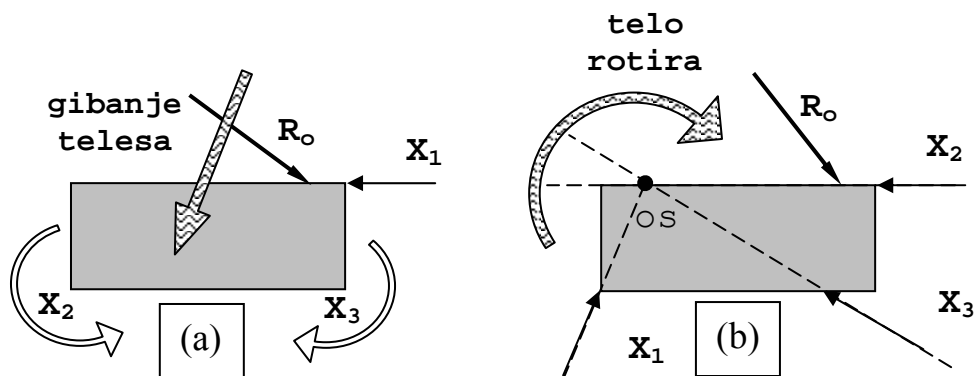
Sliki 2.11.-1a in b. Ravninski problem: ravnotežje vzpostavimo z velikostma dveh neznanih sil in momenta, slika a, ali pa z velikostmi treh sil, ko se učinkovalnice neznanih sil ne sekajo v isti točki, slika b.

Če imata dve neznani sili isto prijemališče, tedaj ju lahko smatramo kot eno silo, kjer sta neznanki velikost in smer, ali pa smatramo, da sta neznanki njeni komponenti – torej imamo v obeh slučajih tako kot pri ravninskem vektorju po dve neznanki, slika 2.11.-2.



Slika 2.11-2. Ravninski problem. Velikosti dveh neznanih sil s skupnim prijemališčem lahko obravnavamo kot komponenti neznane sile, slika a, ali pa velikost in smer neznane sile, slika b.

V omenjenih primerih lahko iz ravnotežnih pogojev enolično izračunamo neznane sile in moment. Podobno velja za **prostorske probleme**, kjer imamo **šest skalarnih** ravnotežnih enačb, vendar pa je analiza rešitev bolj komplicirana in jo bomo obravnavali v poglavju o podporah. Zagotovo pa velja, da je **za enolično rešitev natanko šest neznank**. Ravnotežje je zmeraj možno vzpostaviti s tremi silami in tremi momenti v treh različnih smereh. Ko je neznanih sil več kot tri, ostale neznanke pa so momenti, je težko neposredno uvideti, ali lahko vzpostavimo ravnotežje. Matematično pa je to preverjanje enostavno: matrika koeficientov neznanih statičnih količin mora biti različna od nič, da dobimo enolično rešitev, glej enačbo Z1-1d. Probleme, kjer neznane sile in momente lahko enolično izračunamo iz ravnotežnih enačb, imenujemo **statično določeni problemi**. Omenili smo že, da ko se v ravninskem problemu učinkovalnice treh neznanih reakcij sekajo v isti točki, rešitev ravnotežnih enačb ne obstaja. Podobno ugotovimo na primer, ko sta v ravninskem problemu neznanki dva momenta in še neznana velikost sile. Za take primere je determinanta matrike koeficientov neznanih statičnih količin enaka nič. Tedaj zmeraj obstaja neka obtežba, ki lahko telo pospešeno premika v translatorski smeri ali pa ga rotira, glej sliko 2.11-3a,b. V prvem primeru sta neznana momenta v bistvu en moment, v drugem pa so neznane sile v bistvu ena sila z neznano velikostjo in smerjo. Imamo torej matematično samo dve neznanki. Kadar je torej neznank manj kot je ravnotežnih enačb problemom, pravimo statično **predoločeni** problemi.

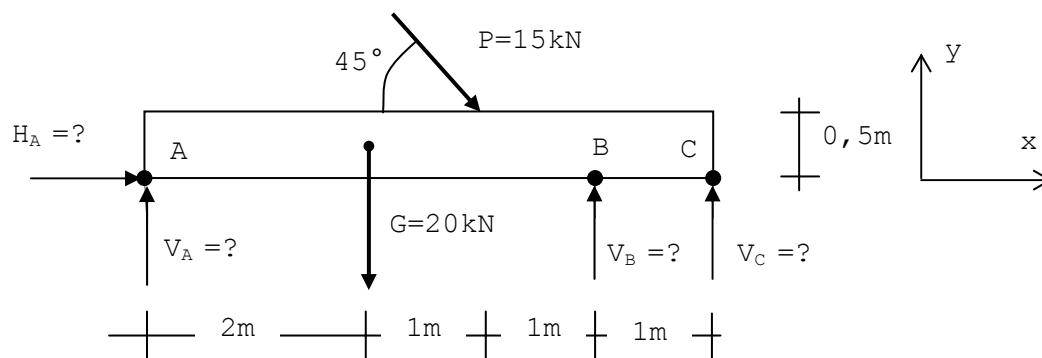


Slika 2.11-3 a in b. Simbolični prikaz zgledov, kjer z neznankami ni možno uravnotežiti sil in momentov – tedaj se telo giblje.

Za konec pa še pogledjmo problem, kjer je neznank več kot je enačb. Tedaj je sicer možno vzpostaviti ravnotežje, vendar je rešitev poljubno mnogo. Pogledjmo si to na enostavnem zgledu.



**Zgled 2.11.Z1.** Ravninski problem. Izračunajmo neznane reakcije tako, da bo izpolnjeno ravnotežje.



Slika 2.11.Z1-1. Dispozicija dimenzij, obremenitve in neznanih sil ter izbira računskega koordinatnega sistema.

Rešitev. Ravnotežni enačbi za translacijo sta

$$\sum_i F_{i,x} = H_A + P \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum_i F_{i,y} = V_A + V_B + V_C - G - P \cos 45^\circ = 0,$$

za rezultatni moment okoli točke A pa velja

$$\sum_i M_{i,z} = -2G - 3P \cos 45^\circ - 0,5P \cos 45^\circ + 4V_B + 5V_C = 0$$

V gornjih treh enačbah imamo štiri neznanke. Rešitev lahko izračunamo samo tako, da tri neznanke izrazimo s četrto. Zapišimo takšen sistem enačb v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10,607 \\ 30,607 \\ 87,730 \end{Bmatrix} + V_C \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

Determinanta matrike je 4, rešitev je poljubno mnogo in so odvisne od neznane sile  $V_C$ :

$$H_A = -10,6070 \text{ kN}$$

$$V_A = 8,6745 \text{ kN} + 0,25V_C$$

$$V_B = 21,9325 \text{ kN} - 1,25V_C$$

Za poljubno izbiro  $H_C$  dobimo rešitve, ki izpolnjujejo ravnotežje. Če izberemo  $V_C=0$ , dobimo rešitev, kot za statično določen problem s tremi neznankami:

$$H_A = -10,6070 \text{ kN}$$

$$V_A = 8,6745 \text{ kN}$$

$$V_B = 21,9325 \text{ kN}$$

Opozorimo naj, da v realnih primerih, ko so elementi elastični, izračunamo neznanko  $V_C$  iz dodatnih pogojev, na primer, v metodi sil iz deformacijskih pogojev. Če nam takšen izračun da rešitev za  $H_C=10 \text{ kN}$ , pa so ostale neznanke

$$H_A = -10,6070 \text{ kN}$$

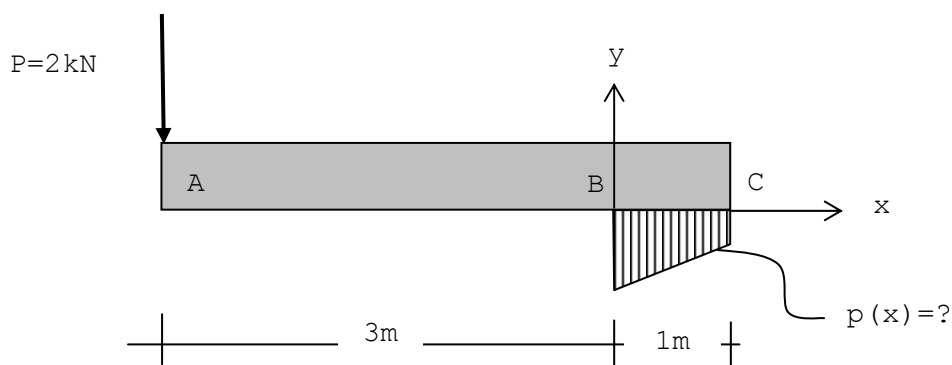
$$4V_A = 11.1745 \text{ kN}$$

$$V_B = 24.4325 \text{ kN}$$

-0-

Če kjerkoli nastopi zvezno razporejena sila kot neznanica, je takšen problem statično nedoločen.

Zgled 2.11.Z2. Na sliki je enostavni konzolni nosilec, kjer se v desni podpori pojavijo zvezno razporejene sile, glej  $p(x)$  na sliki.



Slika 2.11.Z2-1. Dispozicija problema.

Natančna rešitev takega problema je lahko zelo zahtevna in zavisi tudi od natančnega poznavanja elastičnih lastnosti in dimenzij elementa in podpore. V vsakem takem primeru je ravnotežnih enačb premalo za rešitev problema in moramo postaviti dodatne pogoje, ki nam dajo dodatne enačbe za izračun in razporeditev sil. Samo zaradi poučnosti si pogledjmo neko približno rešitev, ki temelji na neki smiselni inženirski predpostavki o razporeditvi sil  $p(x)$  – seveda pa je realnost rešitve odvisna od realnosti predpostavke. Če predpostavimo, da je razporeditev zveznih sil linearna

$$p(x) = ax + b,$$

nam ta predpostavka predstavlja dodatni pogoj. Tedaj iz ravnotežnih enačb

$$\sum_i F_{i,y} = -P + \int_{x=0}^1 (ax + b) dx = 0,$$

$$\sum_i M_{i,Z}^A = 3P + \int_{x=0}^1 x(ax + b) dx = 0,$$

ko izvednotimo integrale, dobimo enačbi

$$a/2 + b = 2$$

$$a/3 + b/2 = -6.$$

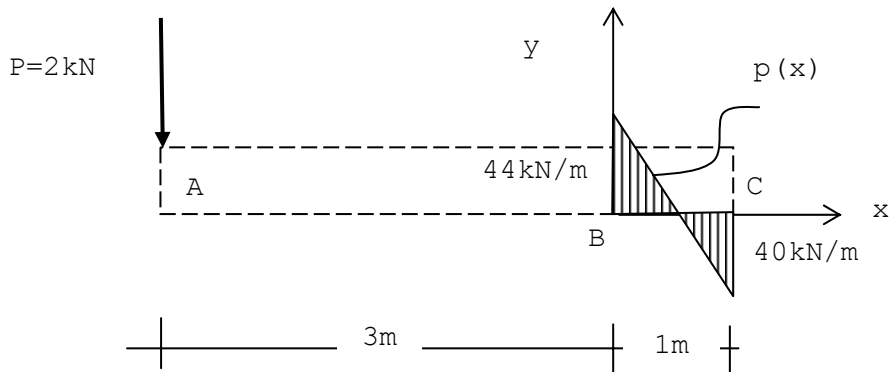
Rešitev je

$$a = -84 \text{ in } b = 44,$$

razporeditev sil pa je

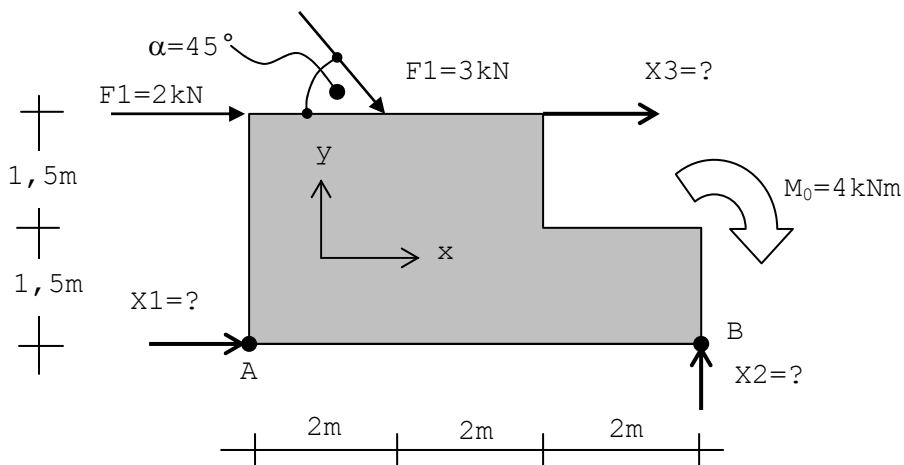
$$p(x) = -84x + 44 \text{ v kN/m}$$

in je prikazana na sliki 2.11.Z2-2.

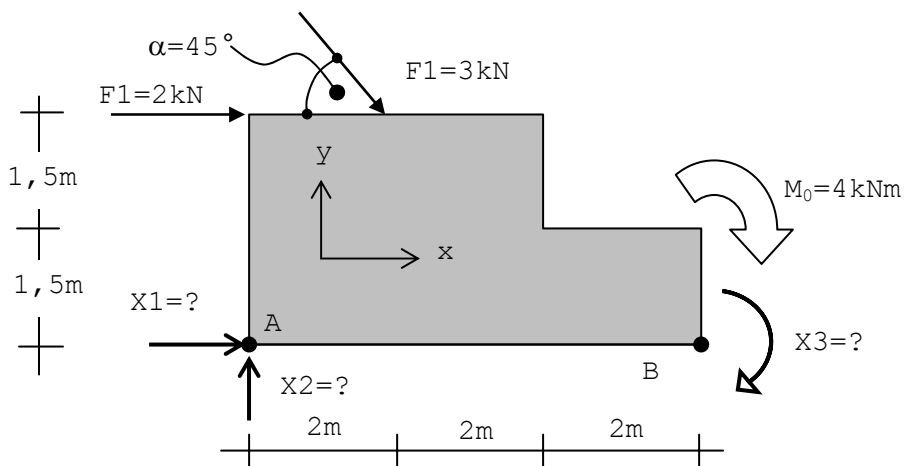


Slika 2.11.Z2-2. Prikaz razporeditve izračunanih reakcijskih sil ob predpostavki njihove linearne razporeditve.

**Naloga 1.** Ravninski problem. Izračunaj neznane sile  $X_1$ ,  $X_2$  in  $X_3$ , ki uravnotežijo telo (a) na sliki N1-1 in neznani sili  $X_1$  in  $X_2$  ter moment  $X_3$ , ki uravnotežijo telo na sliki N1-2.



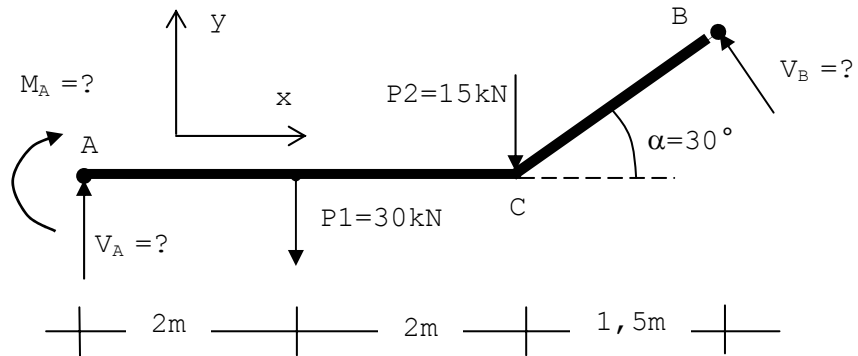
Slika N1-1.



Slika N1-2.

**Naloga 2.** Izračunajmo reakcijski sili in moment za element na sliki N2-1.

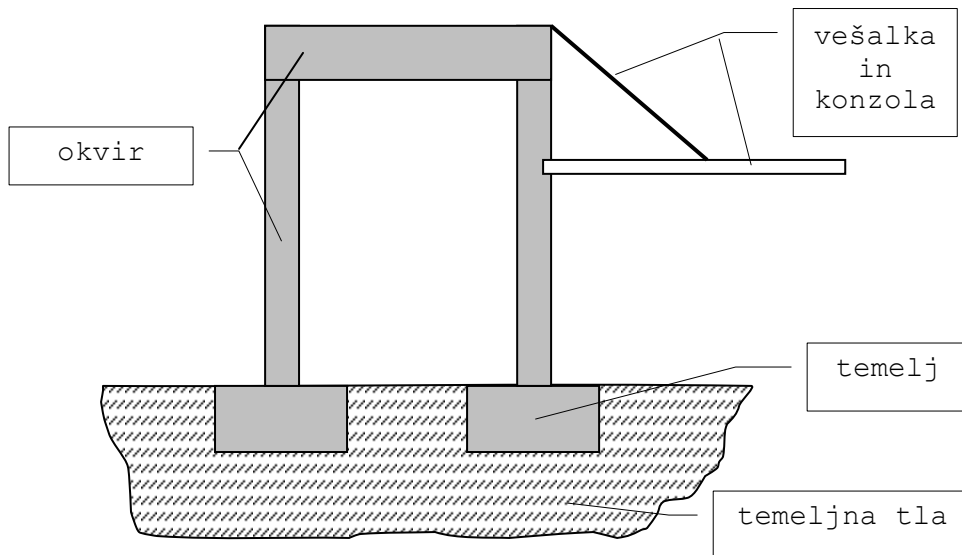
- uporabi osnovne ravnotežne enačbe
- tri momentne enačbe
- dve momentni enačbi in ravnotežno enačbo v x smeri



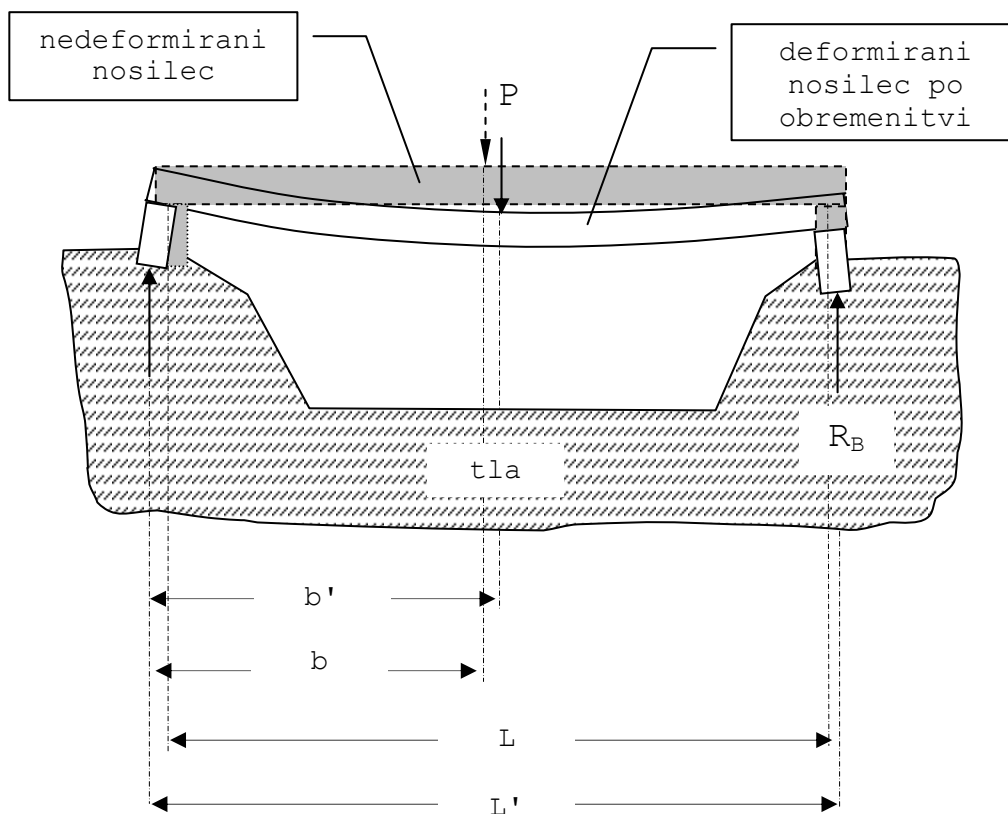
Slika N2-1.

### 3. PODPORE.

**3.1 Uvod. Podpore** so tisti konstrukcijski elementi, ki zagotavljajo, da se konstrukcija pod **kakršno koli obtežbo ne giblje prosto** prav v nobeni smeri. To je praviloma osnovna zahteva, ki mora biti izpolnjena za vse običajne gradbene konstrukcije. Ko je ta zahteva izpolnjena, pravimo, da s **podporami konstrukcijo stabilno podpremo**. Če je obravnavana konstrukcija zgrajena na temeljnih tleh, **tla predstavljajo njeno podporo**, če pa je konstrukcija pripeta na drugo konstrukcijo, pa je le-ta njena podpora. Na sliki 1 tla predstavljajo podporo za konstrukcijo, ki je sestavljena iz temeljev, okvirja in konzole z vešalko. Če obravnavamo samo okvir, so temelji podpora ostalemu delu konstrukcije, za konzolo z vešalko pa predstavlja okvir podporo.



Slika 1. Temeljna tla so podpora za konstrukcijo.



Slika 2. Simbolični prikaz premikov in spremembe oblike konstrukcije zaradi obremenitve. Slika prikazuje nekatere pomike, posebno pretirano velike za običajne realne gradbene konstrukcije.

Pri stabilnem podpiranju konstrukcije je osnovno vprašanje, kakšne naj bodo podpore, koliko jih potrebujemo in kako jih računsko obravnavamo? Temu bistvenemu vprašanju bomo posvetili naslednje odstavke.

Če si pogledamo konstrukcijo na sliki 2, ni težko ugotoviti, da se zaradi lastne teže in dodatne statične obremenitve temelji nekoliko pogreznejo in morda tudi zasučejo, nato pa obmirujejo ali pa vsaj smatramo, da so v vsakem oziru nadaljnji pomiki zanemarljivi. Na stični površini med temeljem in tlemi se pojavijo reakcijske sile, s katerimi tla delujejo na temelje in kot zunanje sile uravnovežijo težo in dodatne obremenitve konstrukcije. Te značilnosti veljajo za prav vse realne podpore: so deformabilne in imajo določeno površino (kot je stična površina med tlemi in temelji), kjer se pojavijo reakcijske sile.

Poglejmo si sedaj, da za osnovno statično presojo **statično določenih konstrukcij** velikost in pomiki podpor niso odločilni, če so le-ti dovolj majhni v primerjavi s konstrukcijo. Poglejmo si to na enostavnem zgledu prostoležečega nosilca, slika 2.

Pred obremenitvijo je oblika in lega nosilca ter temeljev prikazana s črtkanimi linijami, po obremenitvi pa s polnimi linijami. Deformacije so narisane samo simbolično – realne deformacije so za gradbene konstrukcije seveda praviloma bistveno manjše in gotovo tudi nekoliko drugačne, na sliki takšne velikosti kot je slika 2 pa jih gotovo ne bi niti opazili. Simbolično je prikazan tudi pomik obtežne sile iz predvidene lege v dejansko lego po obremenitvi. Lega resultantne reakcijske sile  $R_B$  je nekje na stični površini med temeljem in tlemi. Če predpostavimo, da je njeno prijemališče na sredini temelja, ki je dovolj majhen v primerjavi z nosilcem, s tem ne naredimo velike napake ne glede na dejansko razporeditev reakcijskih sil po stični površini med temeljem in tlemi. Prav natančni izračun njene lege pa je izredno zahtevno delo, ker natančnost rezultata med drugim zavisi od natančnosti poznavanja mehanskih lastnosti tal. Zaradi enostavnosti razlage pa predpostavimo še, da rezultanta deluje samo v vertikalni smeri. Tedaj je reakcija enaka

$$R'_B = P.L'/b'.$$

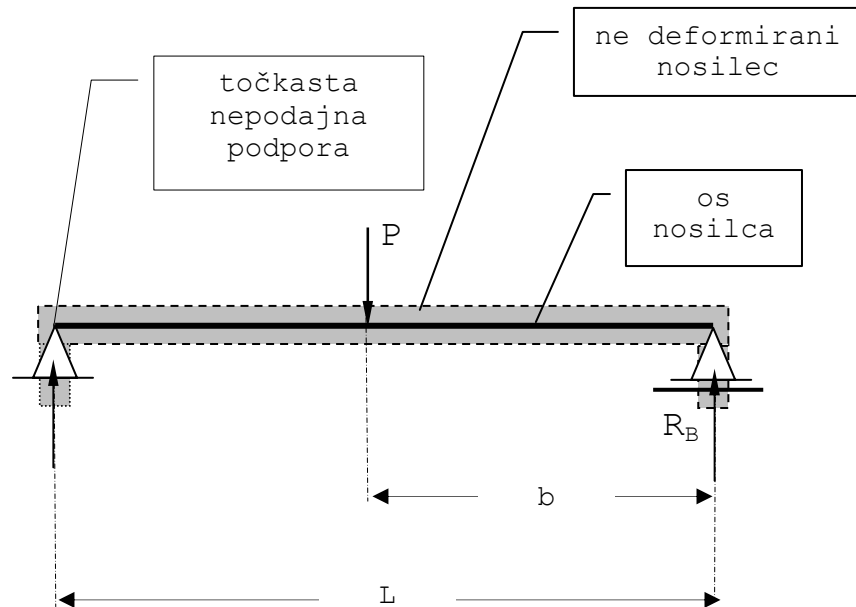
Če pa računamo reakcijo za nedeformirano lego konstrukcije, je ta enaka

$$R_B = P.L/b.$$

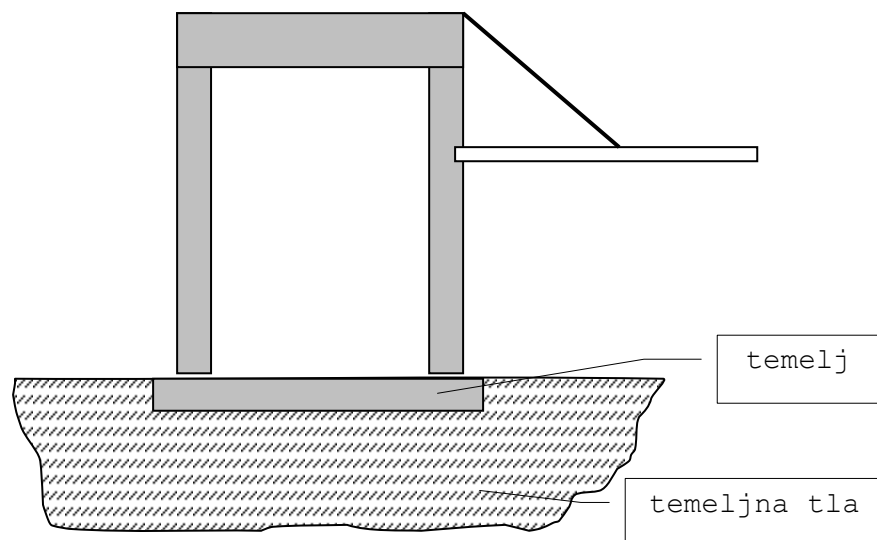
Razlika med  $R_B$  in  $R'_B$  je očitno zanemarljiva, ko se konfiguracija konstrukcije pred in po deformaciji, malo razlikujeta – torej, ko sta  $L$  in  $L'$  ter  $b$  in  $b'$  skoraj enaki. Podobno bi ugotovili za generalizirane notranje sile, na primer za upogibni moment na sredini nosilca. Če imamo opravka s konstrukcijo, ki se tako močno deformira in podpore toliko premaknejo, da je deformirana konstrukcija znatno drugačna od neobtežene, tedaj moramo računati reakcije in notranje sile na deformirani konstrukciji. Takšna analiza pa je lahko zelo zahtevna in presega okvirje tega teksta – imenujemo jo teorija drugega reda. Iz tega zaključimo: **za izračun reakcij in notranjih sil statično določenih konstrukcij, ki se malo deformirajo in premaknejo, lahko smatramo konstrukcije nedeformabilne (absolutno toge), podpore pa nepodajne (toge) in skršene v točko (točkaste podpore)**. Take podpore imenujemo **računske podpore**. Za analizo konstrukcije ob teh predpostavkah pravimo, da jo izvedemo za nedeformirano stanje konstrukcije na togih podporah. Računsko shemo poenostavimo, kot je prikazano na sliki 3: nosilec predstavimo s togo osjo, podpore pa z nepodajnimi trikotniki. Natančneje bomo simbolične oznake in njihov pomen spoznali v sledečem tekstu. Na koncu še omenimo, da če bi uvedli na sredini nosilca na sliki 2 še eno podporo, bi bila konstrukcija statično nedoločena. Tedaj bi pomiki podpor bistveno vplivali na reakcije in notranje sile. Ni si težko predstavljati, da bi zelo toga podpora prevzela praktično vso obtežbo in se nosilec ne bi upognil. Torej bi bile notranje sile in reakcije povsem drugačne kot v izhodiščnem primeru. Pomiki vseh treh podpor bi poleg obtežbe določali deformacije nosilca, pri dveh pa so deformacije nosilca neodvisne od njenih pomikov.

Če je potrebna analiza samih podpor, pa jih seveda ne smemo obravnavati kot točke. Velja pa še omeniti: lega računskih podpor je običajno najbolj vprašljiva, medtem ko so dimenzije konstrukcije običajno dovolj natančno podane. Da se izognemo morebitnim računsko podcenjenim vrednostim zaradi nepravilno določene lege podpor, uporabimo konservativne izračune. **Konservativna analiza** oziroma izračuni je tista analiza konstrukcij, ki nam da nekoliko precenjene vrednosti mehanskih količin – s tem smo na varni »strani«, ker so dejanske vrednosti manjše. Na primer, za izračun upogibnega momenta na sredini nosilca upoštevamo, da so

podpore povsem na krajiščih nosilca. Natančneje pa se ti problemi obravnavajo v strokovnih predmetih, kjer se upoštevajo izkustvene vrednosti za lokacijo računskih podpor in so podane za nekatere primere v predpisih. Problem lokacije idealizirane točkovne podpore vsekakor ni bistven v analizi konstrukcij, razen v primerih, ko je podporna površina v primerjavi s konstrukcijo velika, glej sliko 4. Tla predstavljajo podporo, ki ni majhna v primerjavi s konstrukcijo. Če ne poznamo razporeditve reakcijskih sil, tedaj te podpore ne moremo računsko poenostaviti z eno ali nekaj točkastimi podporami. Tega problema tudi ne moremo rešiti samo v okviru ravnotežnih enačb kot statično določeni problem.



Slika 3.1-3. Shema za računsko analizo: os nosilca na točkastih nepodajnih podporah.

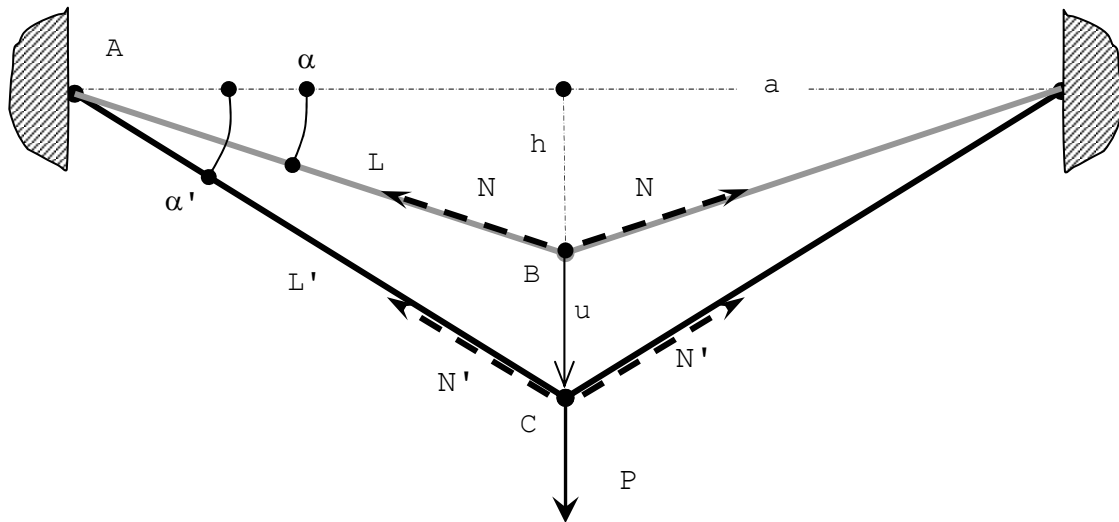


Slika 3.1-4. Tla predstavljajo za pasovni temelj zvezno podporo.

Glede na gornja pojasnila bomo v nadaljnjem tekstu predpostavljali, da imamo opravka z dovolj majhnimi podporami in deformacijami, da **podpore** obravnavamo kot **točkaste in nepodajne**, konstrukcijo pa kot **togo telo**.

Opozorimo naj, da tako imenovane **elastične podpore**, ki jih predstavljamo z vzmetjo, pri izračunu notranjih sil in reakcij pri statično določenih problemih obravnavamo kot toge podpore, če so izpolnjene zgoraj omenjene zahteve za male deformacije. To je očitno, ker so elastične podpore samo eden izmed tipov deformabilnih podpor, prejšnji razmislek pa velja splošno za deformabilne podpore.

**Zgled 3.1.Z-1.** Na sliki 1 je enostavna podana konstrukcija, ki jo analiziramo kot simetrično paličje, ki je podprto z nepomičnima členkastima podporama. Elementa sta iz jeklenih vrvi, ki ju računsko obravnavamo kot »palici«. Pred obremenitvijo je lega palic podana z lego členka v točki B oziroma z višino  $h$ . Z  $N$  sta označeni sili, ki nastopita v palicah, ko jih obremenimo s silo  $P$  in ko sta palici povsem togi. Z  $N'$  sta označeni sili, ki nastopita v palicah, ko upoštevamo dejanske deformacije. Analizirajmo kako sta sili  $N'$  odvisni od deformabilnosti palic.



Slika 3.1.Z1-1. Pomiki in deformacije zaradi obremenitve s silo  $P$  ter ravnotežna osna sila  $N'$  v deformirani legi konstrukcije.

Po obremenitvi s silo  $P$  se konstrukcija deformira in vzpostavi se ravnotežje. Obe osni sili  $N'$  in obremenilna sila  $P$  so v ravnotežju. Ravnotežje v vertikalni smeri nam da enačbo

$$2N'\sin\alpha' - P = 0 \quad (1)$$

kjer je

$$\sin\alpha' = \frac{h+u}{\sqrt{(h+u)^2 + a^2}}, \quad (2)$$

Iz enačb 1 in 2 zapišemo silo  $N'$  z enačbo

$$N' = P \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(h+u)^2 + a^2}}{h+u}, \quad (3a)$$

ki nam pove, da  $N'$  zavisi od obremenitve in deformacije, ki je podana s pomikom  $u$ . Za nični pomik,  $u=0$ , predpostavljamo absolutno togost konstrukcijskih elementov in lahko iz zgornje enačbe takoj izračunamo silo za nedeformirano stanje konstrukcije:

$$N = P \frac{1}{2} \frac{\sqrt{h^2 + a^2}}{h} \quad (3b)$$



Pri realnih (deformabilnih) elementih pa pomik  $u$  lahko izračunamo iz obremenilne sile  $P$ , elastičnih lastnosti ( $EA$ ) in začetnega stanja ( $a, h$ ) konstrukcije na sledeči način. Silo  $N'$  izrazimo z deformacijo palice in njenimi mehanskimi značilnostmi. Ob upoštevanju linearne elastičnosti je  $N'$  enaka

$$N' = AE \cdot \Delta L / L', \quad (4)$$

kjer je raztezek palice enak

$$\Delta L = \sqrt{(h+u)^2 + a^2} - \sqrt{h^2 + a^2}, \quad (5a)$$

specifična deformacija pa

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sqrt{(h+u)^2 + a^2} - \sqrt{h^2 + a^2}}{\sqrt{h^2 + a^2}} \quad (5b)$$

Iz enačb 4 in 5b dobimo zvezo med silo  $N'$  in pomikom  $u$ ,

$$N' = EA \frac{\sqrt{(h+u)^2 + a^2} - \sqrt{h^2 + a^2}}{\sqrt{h^2 + a^2}}, \quad (6)$$

ter iz ravnotežne enačbe 3a še zvezo med silo  $P$  in pomikom  $u$

$$P = 2EA \left( \frac{\sqrt{(h+u)^2 + a^2} - \sqrt{h^2 + a^2}}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right) \cdot \left( \frac{h+a}{\sqrt{(h+u)^2 + a^2}} \right). \quad (7)$$

Za dano silo  $P$  lahko iz gornje enačbe izračunamo pomik  $u$ , nato pa iz enačbe 6 še osno silo  $N'$ . Gornja enačba je zahtevna za reševanje – rešimo jo lahko numerično. Enostavno pa je za dane pomike izračunati pripadajoči  $P$  in  $N'$ .

Nas zanima predvsem razlika med osno silo  $N$ , ki jo izračunamo glede na ravnotežje sil v nedeformirani legi, in osno silo  $N'$  glede na ravnotežje v deformirani legi obakrat seveda za isto obremenilno silo  $P$ . Na diagramu D-1 je prikazan potek  $P$  in  $N'$  v odvisnosti od  $u$ , medtem ko  $N$  zavisi samo od sile  $P$ . Pri izračunu so upoštevane karakteristike nekega realnega gradbenega materiala: palici pa sta iz jekla z modulom  $E=2 \times 10^{11} \text{ Pa}$  in enakima presekokoma  $A=0,0001 \text{ m}^2 = 1 \text{ cm}^2$ , geometrija konstrukcije pa je podana z  $a=h=3 \text{ m}$ .

Pri pomiku  $u = 0,006 \text{ m}$  je osna sila  $N'$  po enačbi 6 enaka

$$N' = 2 \times 10^{11} \text{ Pa} \cdot 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \frac{\sqrt{(3 \text{ m} + 0,006 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2} - \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2}}{\sqrt{(3 \text{ m})^2 + (3 \text{ m})^2}},$$

$$N' = 2 \cdot 10^5 \text{ N} = 200 \text{ kN}$$

Tedaj je v palici napetost enaka

$$\sigma = \frac{N'}{A} = \frac{200 \text{ kN}}{0,0001 \text{ m}^2} = 2 \text{ GPa}.$$

To je napetost, kjer pride do porušitve posebnih jekel z največjo nosilnostjo. Iz diagrama 1 je razvidno, da je v okviru porušnih obremenitev, kjer je  $N'$  enaka ali pa manjša od 200 kN, razlika med  $N$  in  $N'$  zanemarljiva.

Relativna napaka izračunana po obrazcu 8,

$$n = (N' - N) / N = N' / N - 1 = \frac{\sqrt{(h+u)^2 + a^2}}{\sqrt{h^2 + a^2}} \times \frac{h}{h+u} - 1 \quad (8)$$

je prikazana na diagramu 2. Na abscisi so nanesene relativne vrednosti osnih sil tako, da enica pomeni porušno osno silo za krhka jekla, ki se raztegnejo do okoli 1%.

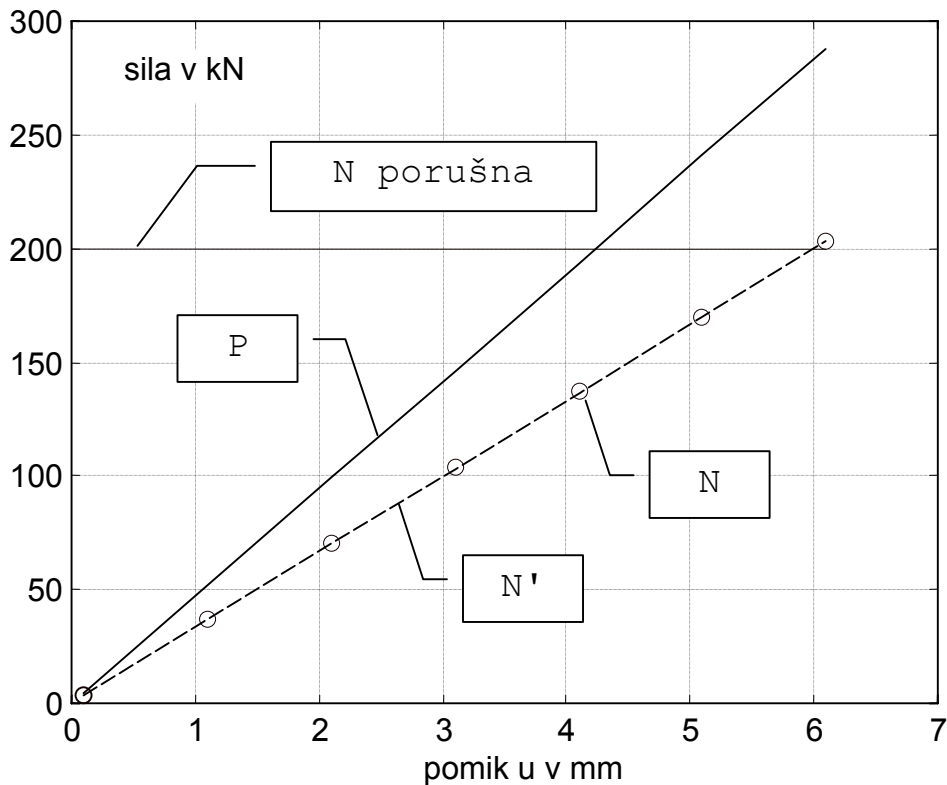


Diagram D1. Odvisnost obtežbe P, osne sile N' upoštevaje ravnotežje na deformiranem stanju in osne sile N upoštevaje ravnotežje na nedeformiranem stanju od pomika u. Razlika med osnima silama je komaj opazna.

Pri mehkih gradbenih jeklih pride do porušitve šele pri velikih raztezkih do 20%. Zato si pogledimo še relativne napake v okviru največjih specifičnih deformacij palice. Pri največji specifični deformaciji je raztezek palice enak

$$\Delta L = 0,2L = 0,2 \cdot \sqrt{3^2 + 3^2} = 0,849\text{m}$$

Pripadajoči pomik u izračunamo na podlagi enačbe 5a, ki da kvadratno enačbo

$$(h+u)^2 = (\Delta L + \sqrt{h^2 + a^2})^2 - a^2$$

oziroma

$$u^2 + 2hu + [h^2 + a^2 - (\Delta L + \sqrt{h^2 + a^2})^2] = 0.$$

V enačbo vstavimo vrednosti

$$u^2 + 2 \times 3u + [3^2 + 3^2 - (0,849 + \sqrt{3^2 + 3^2})^2] = 0$$

in rešitvi sta

$$u_1 = -7,10\text{m in } u_2 = 1,11\text{m.}$$

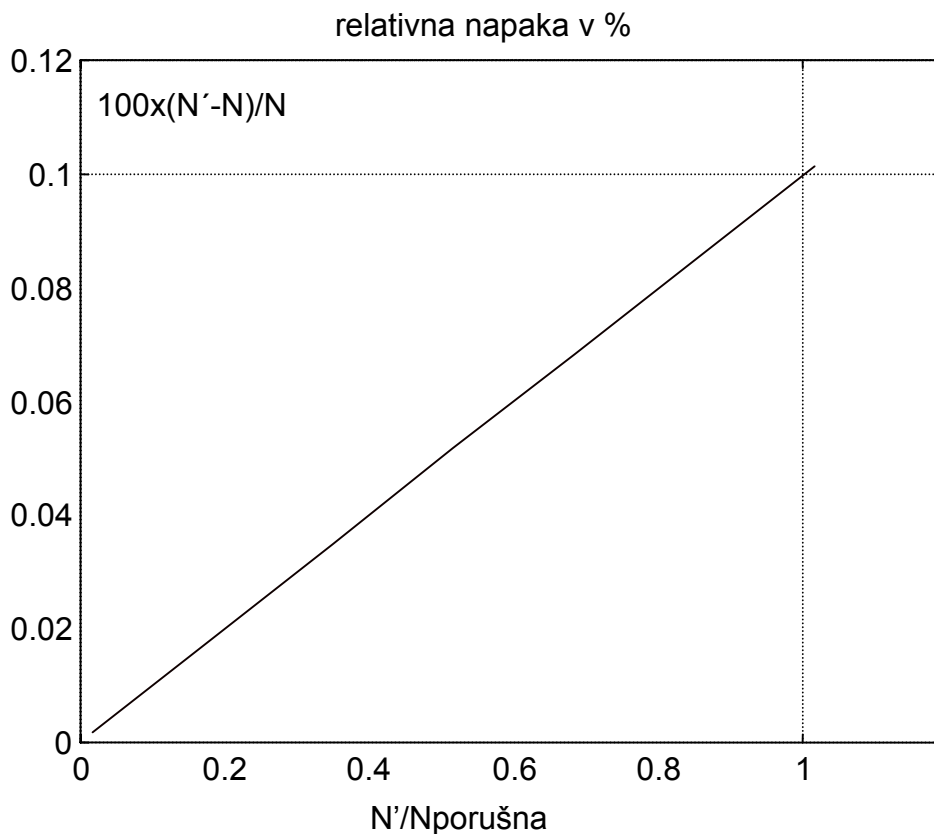


Diagram D2. Relativna napaka glede relativno velikost osne sile glede na porušno silo.

Veljavna je druga rešitev, kjer je pomik v smeri sile. Po enačbi 8 je napaka

$$n = \frac{\sqrt{(3 + 1,11)^2 + 3^2}}{\sqrt{3^2 + 3^2}} \times \frac{3}{3 + 1,11} - 1 = -0,125 \approx -13\%$$

Torej tudi pri ekstremnih deformacijah je napaka, ko računamo sile za konstrukcijo v nedeformiranem stanju, še vedno bistveno manjša kot je faktor varnosti, ki ga moramo upoštevati pri analizi konstrukcij. V tem primeru bi bil izračun celo konservativen. Praviloma pa so konstrukcije med eksploatacijo bistveno manj obremenjene, kot je porušna obtežba. Tedaj so tudi specifične deformacije bistveno manjše, kot lahko vidimo iz diagrama D3.

Obravnavani primer nam ilustrira upravičenost uporabljanja predpostavke o absolutni togosti elementov za realne statično določene gradbene konstrukcije. Pri tem pa je treba opozoriti: pri predpostavki o absolutni togosti konstrukcijskih elementov se pojavijo majhne napake samo tedaj, ko konstrukcije niso slabo ali pogojno stabilno podprte (obravnavamo jih v nadaljevanju poglavja) in ko ne nastopijo uklonski problemi.

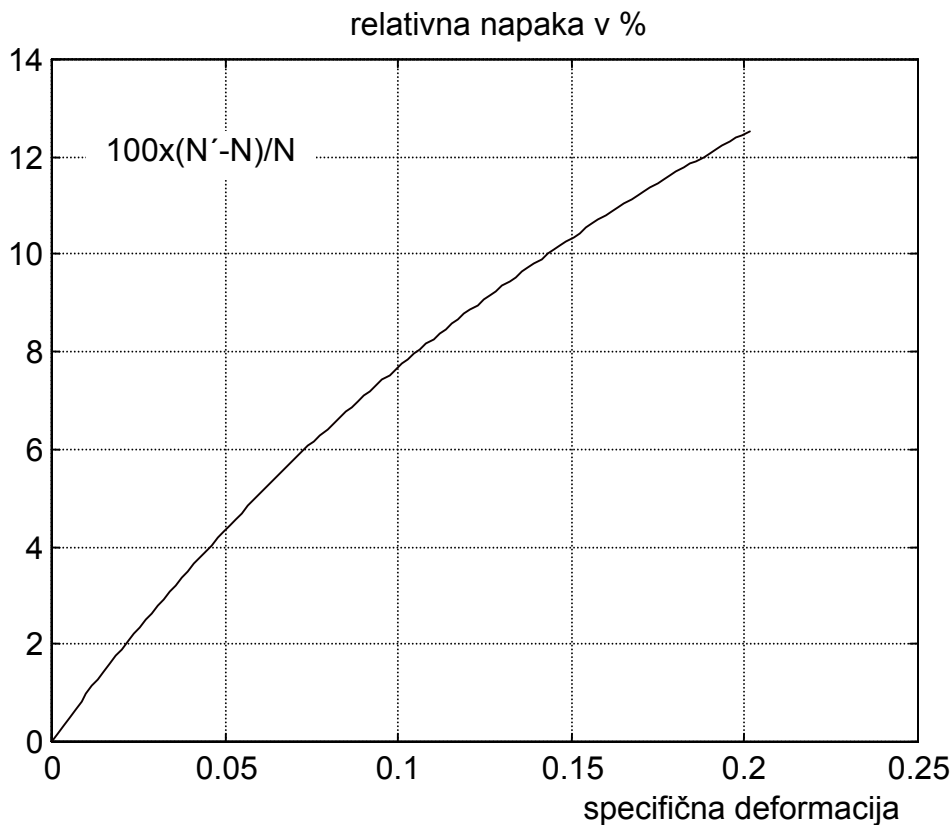
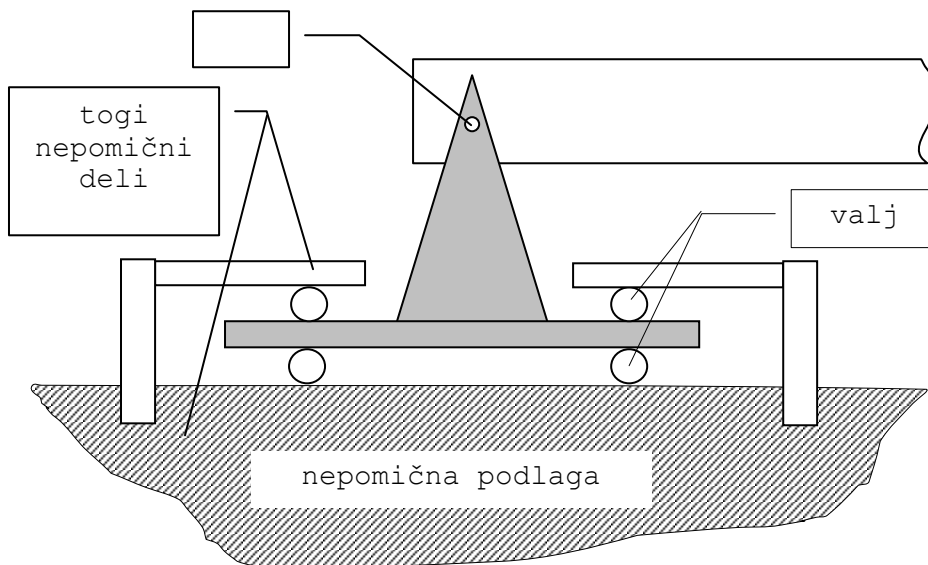


Diagram D3. Relativna napaka glede specifično deformacijo.

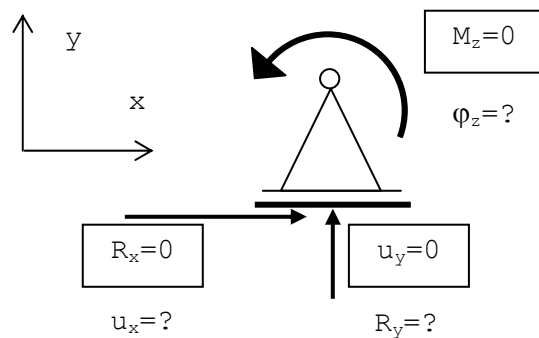
**3.2. Definicija in tipi podpor.** Poglejmo si neki nosilec, ki je pritrjen na podporo na sliki 3.2.-1. Taka namišljena podpora, ki sestoji iz togih nepomičnih delov, »vozička« na valjih in osi, omogoča, da se nosilec prosto zavrti okoli osi, njegovo krajišče se horizontalno pomakne, medtem ko je vertikalni pomik krajišča nič. Kar je zagotovo pri taki podpori, če problem obravnavamo kot ravninski in poljubno obravnavamo statično obtežbo, je, da so nični: pomik podpore v vertikalni smeri, reakcijska sila v horizontalni smeri in reakcijski moment, s katerima podpora deluje na nosilec. Na drugi strani pa sta pomik v horizontalni smeri in zasuk lahko nična ali pa ne – to zavisi od obremenitve nosilca. Pravimo, da so to **dopustni pomiki podpore**.



Slika 3.2.-1. Princip drsne členkaste (vrtljive) podpore.

Pri določenih obremenitvah bi se nosilec brez podpore gibal v vertikalni smeri, podpora pa to preprečuje z reakcijsko silo. Na splošno pa lahko rečemo, da se v smereh ničnih pomikov pojavijo reakcijske sile ali pa ne – odvisno je od obremenitve. Tako pri tej analizi podpore opazimo sledeče, da za vse obravnavane smeri, to so horizontalna in vertikalna smer ter rotacija, velja izključujoče, da je ena izmed količin nična, druga pa je odvisna od obtežbe. Pomik v horizontalni smeri je odvisen od obtežbe, medtem ko je reakcija nična, reakcija v vertikalni smeri je odvisna od obtežbe, pomik pa je nična, rotacija je odvisna od obtežbe, reakcijski moment pa ničen.

Obravnavano podpore imenujemo **dršno členkasto (ali vrtljivo) podpore** in jo simbolično narišemo s simbolom na sliki 1, kjer so uokvirjene vse nične količine in za vsako smer obstaja zmeraj samo ena. Ostale količine so pod vprašajem in so, kot smo ugotovili, odvisne od obtežbe in so lahko nične ali pa ne.

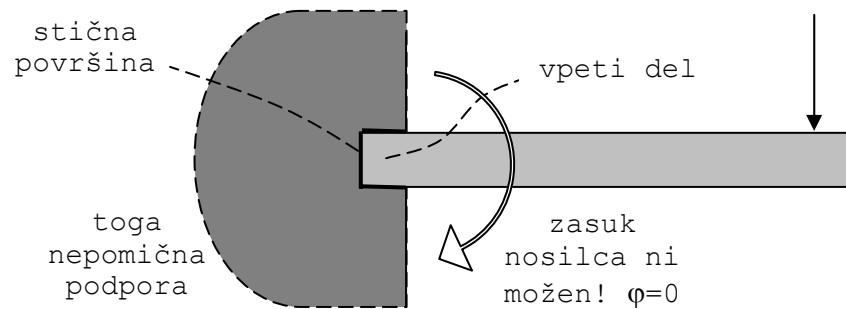


Slika 3.2.-2. Pomika, zasuk ter reakcijski sili in moment pri drsni členkasti podpore.

Izključujoča alternativnost pomikov in zasukov na eni strani in reakcijskih sil ter momentov na drugi strani velja, upošteva prostorski problem, za vsako izmed treh med seboj pravokotnih smeri in zasukov pri vsaki podpore. Zato **podpore** za analizo konstrukcij **definiramo s tem, da podamo v katerih smereh so pomiki oziroma zasuki nični**. Za ostale smeri, pa predpostavljamo, da so povsem neovirani – prosti, tam pa so reakcije nične. **Iz praktičnih računskih razlogov lahko na mestu in v smereh ničnih pomikov narišemo reakcijske sile in momente, ki nam tako računsko definirajo tip podpore**. Vendar se moramo zavedati, da so reakcijske sile in momenti neznanke, ki jih računamo iz ravnotežnih enačb in so lahko nekatere nične.

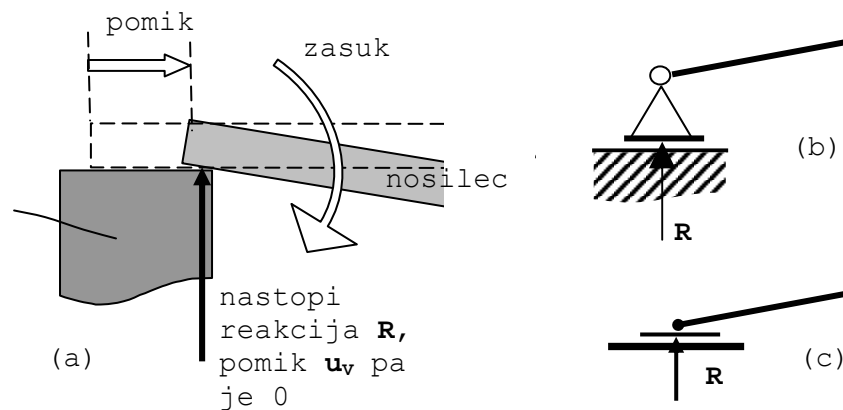
Kot vemo, je izbira predpostavljenih smeri reakcij poljubna. Na sliki 3.2.-4, na primer, je reakcija  $R_y$  narisana v vertikalni smeri navzgor, lahko pa bi jo narisali v obratni smeri. Z grafičnim prikazom reakcije smo s tem izbrali samo smerni vektor v smeri narisane reakcije. Pozitivna rešitev ravnotežnih enačb pomeni, da je dejansko reakcija v smeri narisane reakcije, negativna pa v obratni smeri. Iz praktičnih inženirskih razlogov večinoma **narišemo reakcije v smeri, v kateri pričakujemo, da le-te dejansko delujejo**. Pozitivni rezultat nam tedaj potrdi naše ocene in s tem koncept konstrukcije, ki bistveno zavisi od tega, ali so sile v podporah in elementih tlačne ali natezne oziroma ali je upogibni moment pozitiven ali negativen glede na lego armature. Temelji, na primer, morajo biti tako postavljeni, da pritiskajo na konstrukcijo. Zato predpostavimo smer reakcij v smeri pritiska. Tedaj bi negativni računski rezultat za reakcijo pomenil, da temelj vleče konstrukcijo in bi ga morali sidrati. Temu pa se izogibamo, če se le da. Tedaj običajno spremenimo konstrukcijo oziroma tip in lego podpor tako, da dobimo v temeljih pritiske.

Kadar podpore izvedemo tako, da preprečujejo pomik in zasuk telesa, tedaj jim pravimo **vpete podpore**. Te imamo na primer tedaj, ko kraj nosilca oziroma stebra vbetoniramo v temelj ali kakšno dovolj togo oziroma nepomično steno, slika 3.2.-3. Vpetost je možna seveda samo preko neke površine nosilca, glej sliko 3.2.-3, oziroma telesa, ki ga vpenjamo. Vendar pa za račun smatramo, da je taka podpora točkovna in preprečuje zasuke.



Slika 3.2.-3. Vpeta podpora.

**Pri analizi reakcij podpore idealiziramo in simbolično narišemo.** Simboli nas spominjajo na tehnično izvedbo podpor in so lahko različni in zelo poenostavljeni. Poglejmo si zgled ravninskega problema nosilca, ki je na prikazani eni strani prosto položen na steno. Taka podpora dopušča horizontalni pomik in zasuk, slika 3.2.-4a. V horizontalni smeri se sicer pojavi reakcija trenja, ki pa jo zanemarimo, če dobimo s tem konservativne rezultate. V vertikalni smeri je pomik  $u_v$  ničen, v tej smeri pa nastopi reakcija, ki zavisi od obtežbe. V simboličnih prikazih te podpore, na primer tako kot na slikah 3.2.-4b in c, dopustni zasuk označujemo z majhnim krogom, ki ponazarja kroglični ležaj in z dvema vzporednima črtama, ki ponazarjata drsenje majhne plošče po povsem gladki podlagi brez trenja.



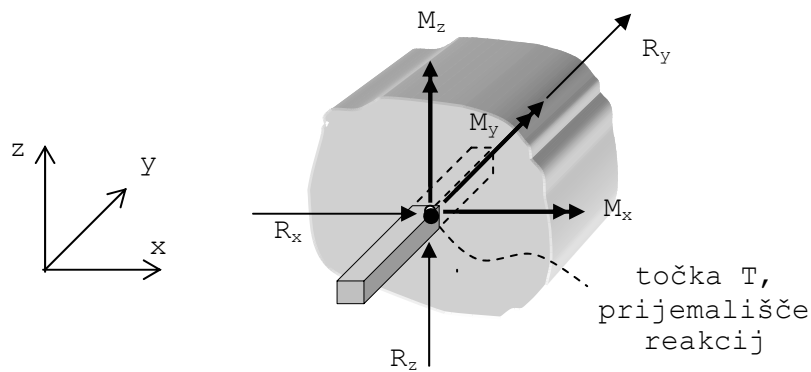
Slika 3.2.-4. (a) Shematični prikaz dejanske podpore z dopustnimi pomiki in reakcijo, (b) prvi simbolični prikaz ter (c) najbolj poenostavljen simbol za členkasto drsno podporo.

V tabeli 1 so prikazane v prvih treh vrsticah najbolj pogosto uporabljene podpore za ravninske probleme, v zadnjih dveh pa podpore, ki se redkeje pojavljajo. Na računskih skicah lahko označimo, v kateri smeri podpora ne dopušča pomika. Lahko pa namesto tega, kot smo že omenili, samo narišemo ustrezne reakcijske sile ali momente, kar nam hkrati pove, da v teh smereh ni pomikov oziroma zasukov. Koordinatni sistem v tabeli je podan samo zaradi nedvoumnosti razlage in je seveda lahko poljubno izbran. Podpore so seveda lahko v raznih problemih poljubno zasukane.

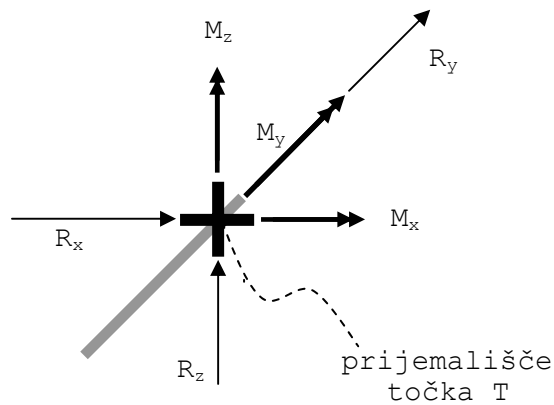
Pri prostorskih problemih je oznaka podpor bolj problematična. Za vpeto podporo in nepomično členkasto podporo so simbolične skice morda še dovolj jasne, za bolj komplicirane pa je primerneje, da jih opredelimo z ničnimi pomiki oziroma z reakcijami.

Poglejmo si še za zgled na kratko **prostorski problem**. Na sliki 3.2.-5 je prikazan nosilec vbetoniran v dovolj togo steno, ki predstavlja njegovo podporo. Za teoretično analizo ravnotežja tako podporo smatramo

kot točkovno v točki T, ki je težišče preseka nosilca. Tam smatramo, da delujejo reakcijske sile in momenti. Tako podpore imenujemo **toga vpeta podpora** in je simbolično prikazana na sliki 3.2.-6, kjer so nični pomiki in zasuki opredeljeni z označenimi reakcijskimi silami in momenti.

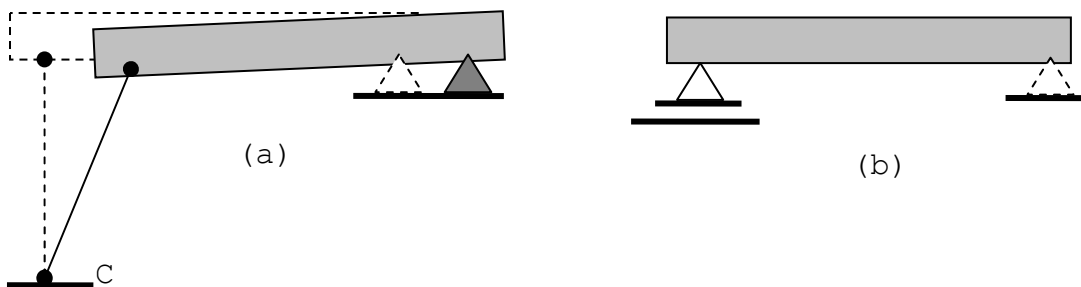


Slika 3.2.-5. Toga vpeta podpora za prostorsko analizo ravnotežja.



Slika 3.2.-6. Simbolični prikaz toge vpete podpore ter reakcijske sile in momenti, ki opredeljujejo mesto in smeri predpostavljenih ničnih pomikov in zasukov.

Na kraju velja omeniti še tako imenovano **nihalko**, slika 3.2.-7aa, ki je pogosta v gradbeništvu. Nihalno podpore predstavlja toga palica, ki ima na obeh straneh členek in dopušča zasuk okoli podpore C. Taka podpora ima enak učinek kot drsna podpora in jo zato lahko tudi tako prikazujemo, slika 11b.



Sliki 3.2.-7a in b. Nihalna podpora ali nihalka, slika a, ter vrtljiva drsna podpora kot njen ekvivalent, slika b.

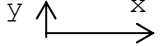
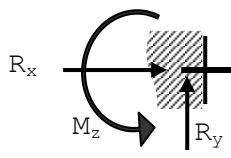
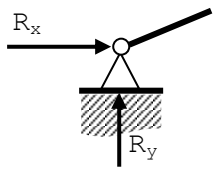
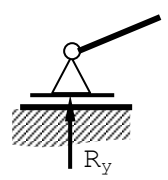
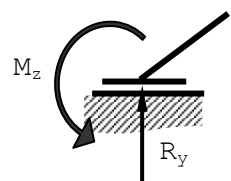
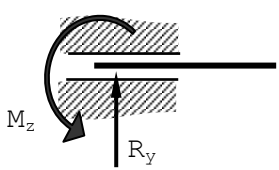
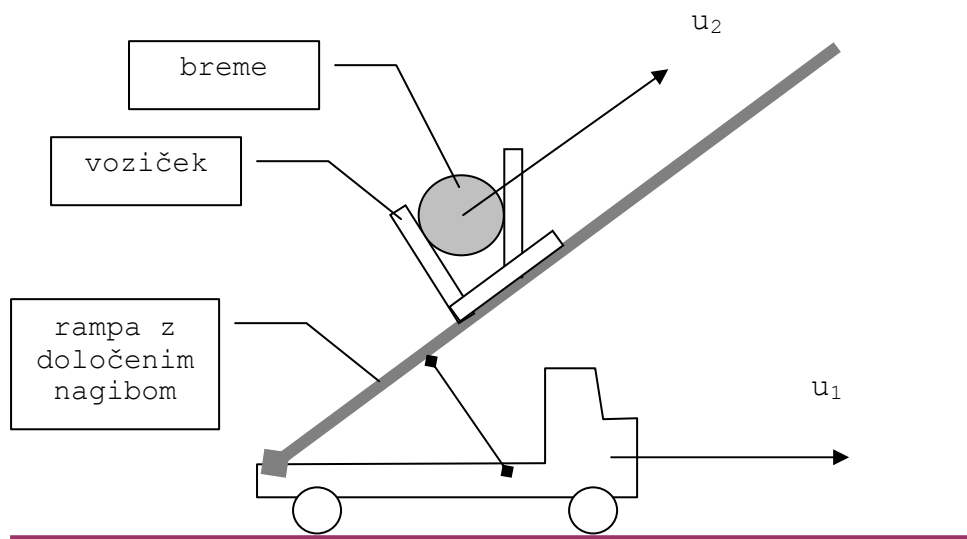
IME PODPORA	NIČNI POMIKI OZIROMA ZASUKI	NIČNE REAKCIJE	REAKCIJSKE SILE IN MOMENTI	SIMBOLIČNI PRIKAZ, PODPORA, REAKCIJ IN KOORDINATNI SISTEM 
(TOGA) VPETA PODPORA	$u_x=u_y=0$ $\varphi_z=0$	-	$R_x$ $R_y$ $M_z$	
ČLENKASTA NEPOMIČNA PODPORA	$u_x=u_y=0$	$M_z=0$	$R_x$ $R_y$	
ČLENKASTA DRSNA PODPORA	$u_y=0$	$R_x=0$ $M_z=0$	$R_y$	
MOMENTNA DRSNA PODPORA (a)	$u_y=\varphi_z=0$	$R_x=0$	$R_y$ $M_z$	
MOMENTNA DRSNA PODPORA (b)	$u_y=\varphi_z=0$	$R_x=0$	$R_y$ $M_z$	

Tabela 3.2.T-1. Prikaz nekaterih podpor.

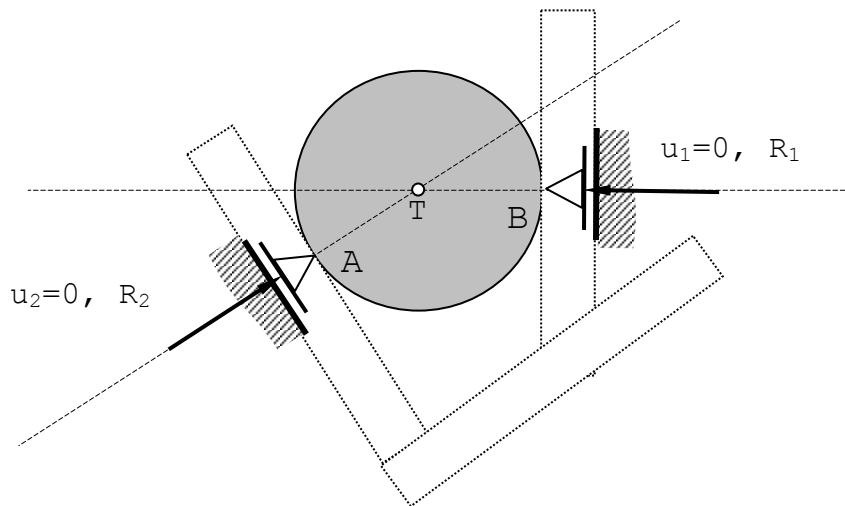


**3.3. Stabilnost konstrukcije ter lega in število podpor.** Kako postavljamo podpore oziroma ugotavljamo, da je togo telo stabilno podprto? Analiza stabilnosti teles temelji na analizi njegovih prostostnih stopenj. Zaradi enostavnosti razlage si pogledimo bolj natančno pojem prostostnih stopenj za ravninski problem. Na sliki 3.3.-1 je simbolično prikazan dvigalni avto, ki ima dvignjeno dvigalno rampo. Predpostavljamo, da je nagib te rampe nespremenljiv, sam avto pa se lahko premika samo horizontalno. Te premike označimo z  $u_1$ . Na rampi je »voziček«, ki ga lahko pomikamo po rampi in nosi valjasto breme. Premike po rampi označimo z  $u_2$ . S premikom avtomobila in s premikom po rampi lahko breme premaknemo na poljubno lokacijo – seveda smatramo, da je rampa dovolj dolga. Smeri teh dveh pomikov imenujemo **translatorni prostostni stopnji gibanja**, ker izpolnjujeta zahtevo, da s pomiki v teh dveh smereh breme premaknemo na poljubno lokacijo. Pri tem razmisleku je povsem nepomembno, v kakšnem zaporedju izvršimo pomika, pomembno je samo to, da z njima dosežemo poljubno lokacijo.



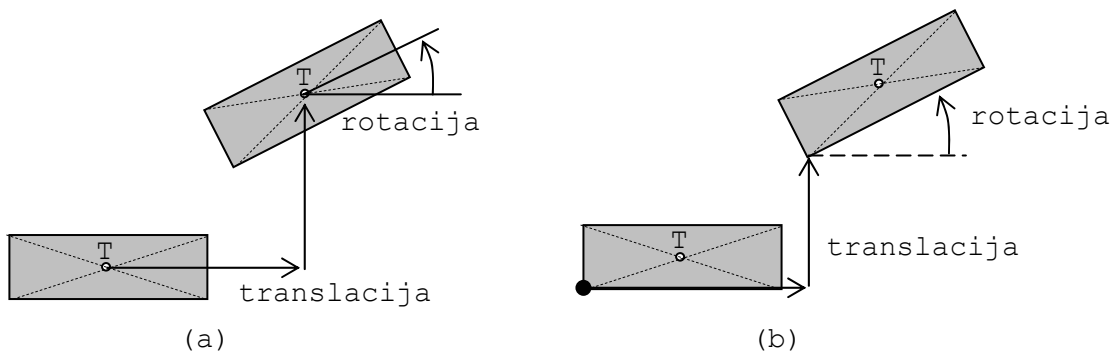
Slika 3.3.-1. Simbolični prikaz prostostnih stopenj valjastega bremena.

Očitno je, da če blokiramo enega izmed pomikov, lahko kljub temu breme premaknemo v smeri drugega pomika. V tem smislu pojasnjujemo, da je **pomik v posamezni prostostni stopnji neodvisen od pomika v ostalih prostostnih stopnjah**. Če bi rampo postavili pod nekim drugim kotom, ali pa da bi se avto gibal po neki klančini, bi breme tudi lahko postavili na poljubno lokacijo. Pogoji je samo, da sta smer rampe in klančine, po kateri vozi dvigalo, različni! Tako ugotovimo, da **za ravninske translatorne prostostne stopnje lahko izberemo poljubni dve različni smeri**. Analogno ugotovimo, da za prostorske probleme obstajajo tri translatorne prostostne stopnje. **Za prostostne stopnje podane s smernimi vektorji, velja prav enako kot za baze vektorskega prostora: vektorji morajo biti linearno neodvisni**. V statiki nas posebno zanima **mirovanje ali nični pomik telesa: ta nastopi natanko tedaj, ko so pomiki v vseh prostostnih stopnjah nični**. Na sliki 2 je prikazano breme v obliki valja, kjer z nepomičnima podporama A in B zagotavljata nična pomika v smeri rampe in v horizontalni smeri, torej v obeh translatornih prostostnih stopnjah – zaradi teh dveh podpor se telo ne more translatorno premakniti. Očitno pa bi lahko valj podprli v poljubnih dveh smereh, pa se tudi ne bi mogel translatorno premakniti. Poleg translacije se telo lahko še zasučje okoli neke točke, ki ni nujno težišče telesa. Zasuk okoli težišča je pomemben samo v okviru enačb gibanja zaradi enostavnejšega matematičnega zapisa. Zasuk je tretja prostostna stopnja, vse tri pa nam dajo celoviti opis poljubne lege telesa, kot je simbolično prikazano na sliki 3.



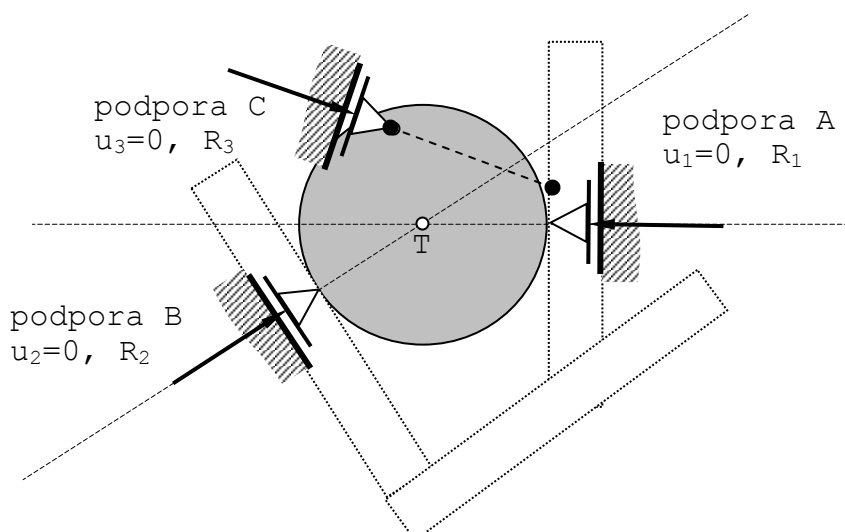
Slika 3.3.-2. Valjasto breme, ki je podprto v dveh smereh, se ne more translatorno premakniti.

Za translatorne prostostne stopnje togega telesa je značilno, da se vse točke enako premaknejo, pri rotacijski prostostni stopnji pa se vse točke telesa zavrtijo za enaki kot okoli izbrane osi.



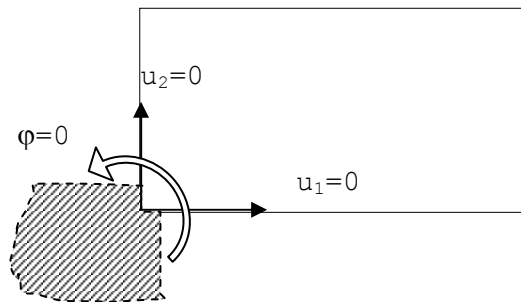
Slika 3.3.-3 a in b. V ravnini ima telo tri prostostne stopnje, dva translatorna pomika in rotacijo okoli neke točke, na sliki 3a je to težišče. Izbira lege osi, glede na katero opazujemo oziroma opisujemo rotacijo, je poljubna. Slika (b) prikazuje eno izmed možnih leg osi.

Opazovano valjasto breme na sliki 2 lahko kljub prikazanim podporam rotira okoli točke  $T$ , ki je na sečišču učinkovalnic reakcij  $R_1$  in  $R_2$ . Da onemogočimo rotacijo, moramo dodati še eno podporo. Na sliki 4 je prikazana taka dodatna podpora v točki  $C$ . Smer omejitve pomika je poljubna, vendar pa učinkovalnica reakcije ne sme sekati sečišča  $T$ , ker bi bila v takem primeru rotacija kljub trem podporam možna.

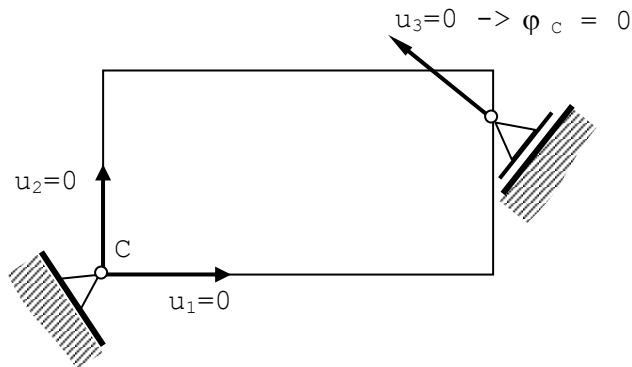


Slika 3.3.-4. Podprti valj, ki se ne more niti premakniti niti zasukati. Lega podpore C simbolično nakazuje, da njena lega poljubna, da le zagotavlja stabilnost valja.

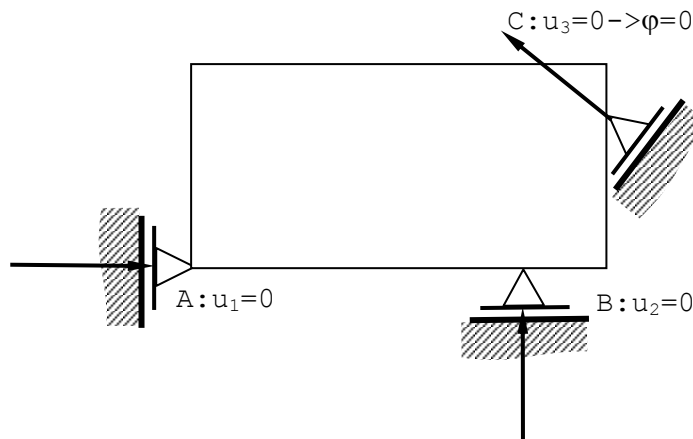
Preglejmo, na kakšne načelne načine lahko telo stabilno podpremo (za ravninski problem). Z eno vpeto nepomično podporo, slika 5, z dvema podporama - s členkasto nepomično podporo in členkasto drsno podporo, slika 6, ali pa tremi členkastimi drsnimi podporami, slika 7. Da s podporami zagotovimo stabilnost telesa, pri postavljanju oziroma analiziranju podpor ugotovljamo omejitve gibanja. Za ravninski problem najprej zagotovimo nična pomika v dveh smereh. S tem zagotovimo, da ni translatorskih pomikov telesa. S tretjo omejitvijo pa zagotovimo še nične zasuke. Podpora na sliki 5 zagotavlja kar vse potrebne omejitve gibanja. Na sliki 6 podpora C zagotavlja translatorsko stabilnost, druga podpora pa rotacijsko. Zaradi tega je na sliki simbolično nakazano, da je zaradi  $u_3$  zasuk  $\varphi$  ničen. Na sliki 7 dve podpori, na primer podpori A in B, zagotavljata translatorsko stabilnost, tretja pa rotacijsko.



Slika 3.3.-5. Stabilno podpiranje telesa z eno vpeto podporo.

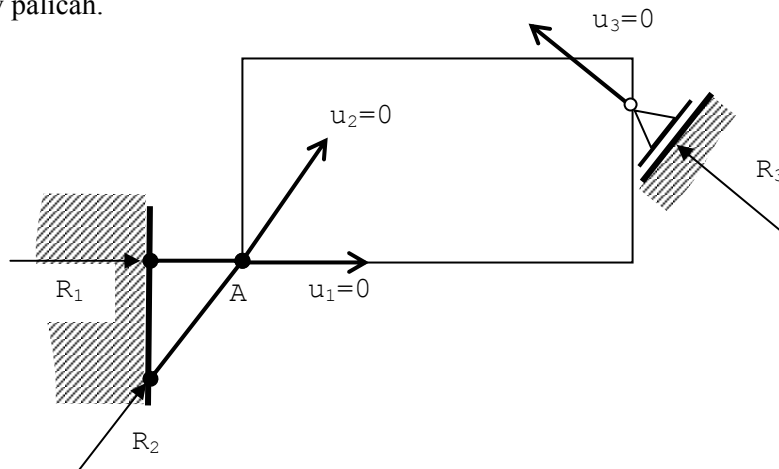


Slika 3.3.-6. Stabilno podpiranje telesa z dvema podporama: s členkasto nepomično podporo in členkasto drsno podporo.



Slika 3.3.-7. Stabilno podpiranje telesa s tremi drsnimi členkastimi podporami.

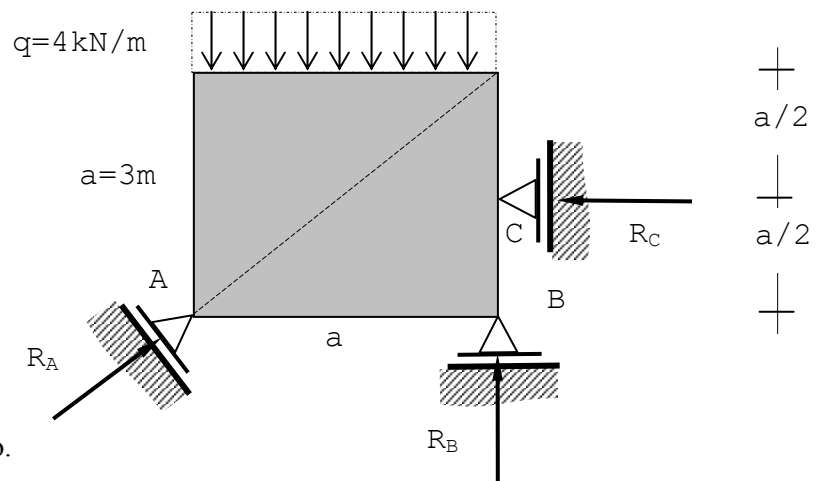
Pri podpiranju z nepomičnimi podporami je potrebno omeniti, da nične pomike in s tem reakcije lahko predpostavimo v poljubnih smereh, ker je izbira smeri prostostnih stopenj poljubna. Izračun je najenostavnejši, če izbiramo med seboj pravokotne smeri v smeri koordinatnega sistema. Če pa imamo določene konstrukcijske razloge, kot je primer na sliki 7, kjer dve palici tvorita členkasto nepomično podporo, pa je smiselno, da predpostavimo nične pomike v smereh palic. Tako pri izračunu reakcij hkrati izračunamo osne sile v palicah.



Slika 3.3.-8. V podpori A sta izbrana nična pomika v smereh palic.

Iz dosedanje razlage povzamemo in zaključimo: vsaka podpora zagotavlja nične pomike oziroma zasuke v točki, kjer je telo nanjo pritrjeno. Ti nični pomiki oziroma zasuki predstavljajo omejitve gibanja telesa. Členkasta drsna podpora, na primer, zagotavlja eno omejitev gibanja, toga vpeta pa tri omejitve. **Za stabilno podprto telo mora biti število podpor tako, da je skupno število omejitev gibanja, ki jih podpore zagotavljajo, enako številu prostostnih stopenj telesa.** Za ravninske probleme imamo tri prostostne stopnje in potrebujemo tri omejitve gibanja. Za prostorske probleme pa imamo šest prostostnih stopenj: tri translacije in tri rotacije. Kot pa bomo videli, je to samo potreben pogoj. Pri tem je treba opozoriti, da pri prostorskih problemih, analogno kot za ravninske probleme, translatorske prostostne stopnje izberemo v treh poljubnih smereh. Prav tako velja za vse tri rotacijske prostostne stopnje, da posamezne osi glede na katere opazujemo zasuke, lahko izberemo v treh poljubnih smereh. Matematično gledano pravimo, da morajo biti smerni vektorji za prostostne stopnje translacije med seboj linearno neodvisni, kot morajo biti tudi smerni vektorji osi rotacij med seboj linearno neodvisni.

Žal samo štetje omejitev prostostnih stopenj ne zadostuje. Lahko se zgodi, da imamo tri podpore, ki dajo skupaj tri omejitve gibanja (ravninski problem), slika Z1-1, pa telo ni stabilno podprto. Tu je enostavno opaziti, da se učinkovalnice reakcij sekajo v isti točki in telo so lahko malo zavrti. V mnogih primerih, posebno pa pri prostorskih problemih, pa vizualno ni lahko ugotoviti, ali je telo stabilno podprto, čeprav je število omejitev gibanja enako številu prostostnih stopenj. Tedaj lahko ugotovimo stabilnost telesa iz ravnotežnih enačb tako, kot smo to spoznali v poglavju o enačbah gibanja: **pri statično določenih problemih je skalarnih ravnotežnih enačb natanko toliko kot neznanih reakcij, in ko je determinanta matrike koeficientov reakcij različna od nič tedaj, je telo stabilno podprto.**



Slika 3.3.Z1-1. Stabilno podprto telo.

**Zgled 3.3.Z1** (ravninski problem). Kvadratno telo s stranico  $a=3\text{m}$  je podprto, kot je prikazano na sliki 3.3.Z1-1. Podpora A je nagnjena za  $45^\circ$ . Nastavimo ravnotežne enačbe in izračunajmo reakcije.

Rešitev. Ravnotežje v horizontalni smeri na desno, v vertikalni smeri navzgor in momentno ravnotežje okoli podpore A nam da enačbe:

$$R_A/\sqrt{2} - R_C = 0$$

$$R_A/\sqrt{2} + R_B - qa = 0$$

$$aR_B + (a/2)R_C - (a/2)qa = 0.$$

Zapišimo jih v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & a & a/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_A \\ R_B \\ R_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ qa \\ qa^2/2 \end{Bmatrix}$$

Upoštevaje, da je  $a=3\text{m}$  in  $q=4\text{kN/m}$  je gornji sistem enak

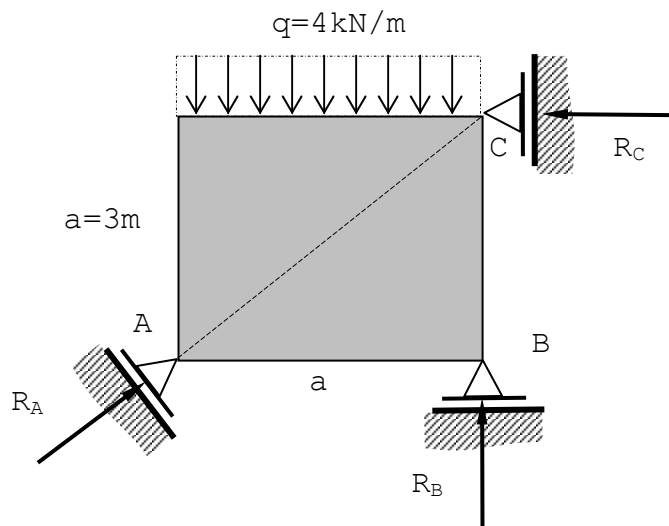
$$\begin{bmatrix} 0,707 & 0 & -1 \\ 0,707 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_A \\ R_B \\ R_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ 18 \end{Bmatrix}$$

Determinanta matrike je  $-1,0605$ , različna od nič, in telo je stabilno podprto. Rešitev enačb je enolična,

$$R_A = 16,971\text{kN}, R_B = 0\text{kN}, R_C = 12\text{N},$$

Izbrana obtežba pa je slučajno taka, da da nično reakcijo  $R_B$ .

**Zgled 3.3.Z2.** Poglejmo si sedaj zgled, ko je podpiranje očitno nestabilno – slika Z2-1. Iz slike vidimo, da se telo lahko malo zavrti okoli podpore c.



Slika 3.3.Z2-1. Nestabilno podprto telo.

Ravnotežje v horizontalni smeri na desno, v vertikalni smeri navzgor in momentno ravnotežje okoli podpore A nam da enačbe:

$$R_A/\sqrt{2} - R_C = 0$$

$$R_A/\sqrt{2} + R_B - qa = 0$$

$$aR_B + aR_C - (a/2)qa = 0.$$

Zapišimo jih v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_A \\ R_B \\ R_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ qa \\ qa^2/2 \end{Bmatrix}$$

Upoštevajte, da je  $a=3\text{m}$  in  $q=4\text{kN/m}$  je gornji sistem enak

$$\begin{bmatrix} 0,707 & 0 & -1 \\ 0,707 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_A \\ R_B \\ R_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ 18 \end{Bmatrix}$$

**Determinanta matrice koeficientov je nič, kar nam računsko pove, da telo ni dobro podprto.** Kot vemo, matematično rešitev takega sistema enačb ne obstaja, torej ne obstajajo take reakcije, ki bi uravnotežile dano obtežbo. Ta problem ni rešljiv v okviru statike, ker je to dejansko problem dinamike. Rešujemo ga z enačbami gibanja, ki so diferencialne enačbe in poleg robnih pogojev moramo podati še začetne pogoje in upoštevati elastične lastnosti. Ko je telo dobro stabilno podprto, pa ga analiziramo z enačbami statičnega ravnotežja, ki predstavljajo sistem navadnih linearnih enačb.

Pomembno pa je opozoriti še sledeče: čeprav telo ni stabilno podprto, pa obstaja obtežba in reakcije, ki izpolnijo ravnotežne pogoje. To je očitno – reakcije lahko poljubno izberemo in nato izračunamo obtežbo iz ravnotežnih enačb. Ko na primer izberemo reakcije

$$R_A = 1\text{kN}, R_B = 2\text{kN}, R_C = 3\text{kN},$$

dobimo iz ravnotežnih enačb vektor obtežbe:

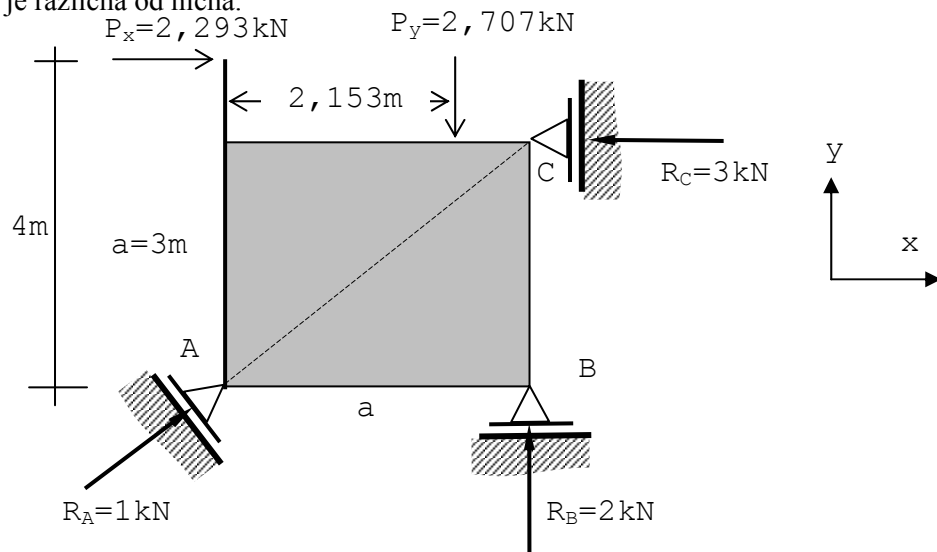
$$\text{smer } x: R_A/\sqrt{2} - R_C + P_x = 0 \rightarrow P_x = -1/\sqrt{2} + 3 = 2,293\text{kN}$$

$$\text{smer } y: R_A/\sqrt{2} + R_B + P_y = 0 \rightarrow P_y = -1/\sqrt{2} - 2 = -2,707\text{kN}$$

$$\text{rotacija: } aR_B + aR_C + M_Z = 0 \rightarrow M_Z = 3 \times 2 + 3 \times 3 = 15\text{kNm}$$

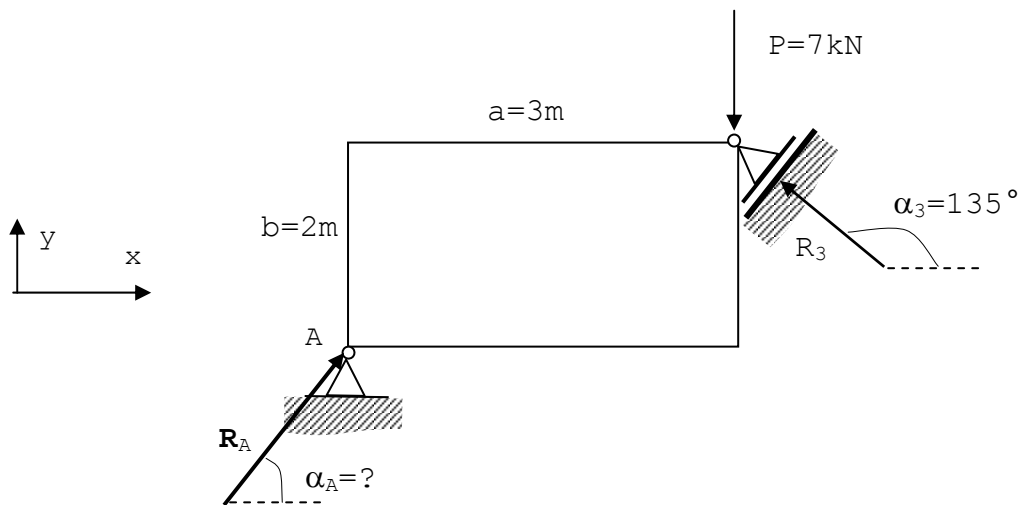
Temu vektorju obtežbe odgovarjajo različne obtežbe, ena izmed njih, kjer nastopata samo koncentrirani sili, je prikazana na sliki Z2-2.

Iz gornjih dveh primerov zaključimo: sama izpolnitev ravnotežnih enačb nam ne zagotavlja, da je telo stabilno podprto. Stabilno podprtost telesa nam zagotavlja samo determinanta matrice koeficientov ravnotežnih enačb, ko je različna od nična.

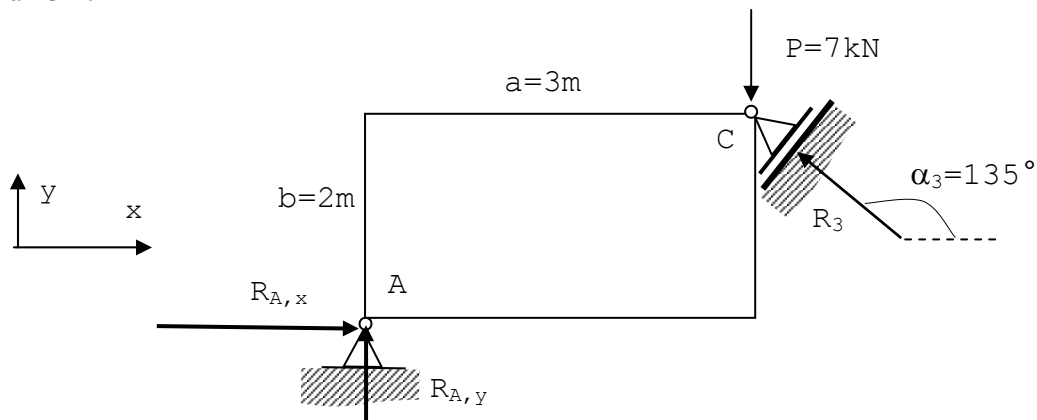


Slika Z2-2. Nestabilno podprto telo z obtežbo in reakcijami, ki so v ravnotežju.

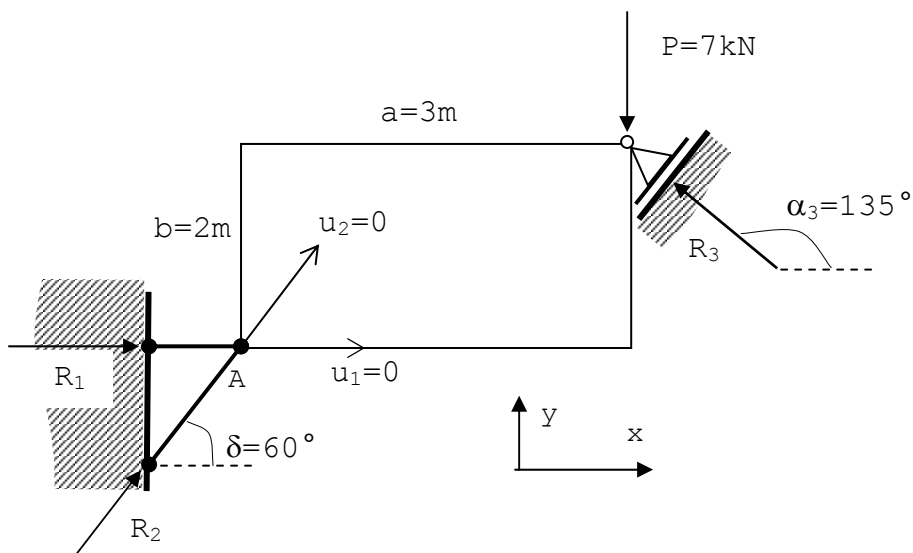
**Zgled Z3.** Izračunajmo reakcije za telo na sliki Z3-1. V podpori A, ki ne dopušča nobenega translatorskega pomika, je velikost in smer reakcije  $R_A$  neznan.



Slika Z3-1.



Slika Z3-2.



Slika Z3-3.

**Rešitev.** Čeprav je možno, da kot neznanke postavimo velikost reakcije  $R_A$  in njen naklon  $\alpha_A$ , tega praviloma ne počnemo. Tak pristop sicer vodi do pravilne rešitve, vendar preko nelinearnih enačb, ki jih težko rešimo. Rešitev je enostavna, če si izberemo dve neznanici reakcijski sili v podpori A, ki predstavljata komponenti reakcije  $R_A$ . Običajno je najenostavneje, ko izberemo za reakcijski sili v smeri x in y, slika Z3-2.

Ko pa je točka A podprta z dvema palicama, slika Z3-3, je smiselno izbrati reakcije v smeri palic. Podajmo rešitev za vse tri primere.

a) Neznanki sta velikost reakcije  $R_A$  in njen naklon  $\alpha_A$ . Označimo neznanke za neznane velikosti in smeri:

$$\begin{aligned} R_A &= X_1 \\ \cos\alpha_A &= X_2 \\ R_3 &= X_3 \end{aligned}$$

Ravnotežje v horizontalni smeri na desno, v vertikalni smeri navzgor in momentno ravnotežje okoli podpore A, nam da enačbe:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot X_2 + X_3 \cdot \cos 135^\circ &= 0 \\ X_1 \cdot (1 - X_2^2)^{0,5} + X_3 \cdot \cos 45^\circ - P &= 0 \\ -a \cdot P + X_3(-b \cdot \cos 135^\circ + a \cdot \cos 45^\circ) &= 0 \end{aligned}$$

Upoštevaje podatke je rešitev

$$\begin{aligned} R_A = X_1 &= 5,048 \text{ kN} \\ \cos\alpha_A = X_2 &= \pm 0,832 \text{ in pravilni nagib } \alpha_A = 33,69^\circ \\ R_3 = X_3 &= 5,940 \text{ kN} \end{aligned}$$

b) Neznanke so reakciji v smeri x in y v podpori A in velikost reakcije v podpori C, slika Z3-2.

$$\begin{aligned} R_{A,x} &= X_1 \\ R_{A,y} &= X_2 \\ R_3 &= X_3 \end{aligned}$$

Ravnotežne enačbe so

$$\begin{aligned} X_1 + X_3 \cdot \cos 135^\circ &= 0 \\ X_2 + X_3 \cdot \cos 45^\circ - P &= 0 \\ -a \cdot P + X_3(-b \cdot \cos 135^\circ + a \cdot \cos 45^\circ) &= 0, \end{aligned}$$

rešitev pa je

$$\begin{aligned} X_1 &= 4,2 \text{ kN} \\ X_2 &= 2,8 \text{ kN} \\ X_3 &= 5,940 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Velikost in nagib reakcije  $R_A$  sta seveda enaka, kot smo ju že prej izračunali:

$$\begin{aligned} R_A &= (X_1^2 + X_2^2)^{0,5} = (4,2^2 + 2,8^2)^{0,5} = 5,048 \text{ kN} \\ \cos\alpha_A &= X_2/R_A = 2,8/5,048 = 0,832 \end{aligned}$$

c) Za primer na sliki Z3-3 izračunamo reakcije  $R_1$ ,  $R_2$  in  $R_3$  iz ravnotežnih enačb

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 \cdot \cos 60^\circ + R_3 \cdot \cos 135^\circ &= 0 \\ R_2 \cdot \cos 30^\circ + R_3 \cdot \cos 45^\circ - P &= 0 \\ -a \cdot P + R_3(-b \cdot \cos 135^\circ + a \cdot \cos 45^\circ) &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev je

$$\begin{aligned} R_1 &= 2,583 \text{ kN} \\ R_2 &= 3,233 \text{ kN} \\ R_3 &= 5,940 \text{ kN}. \end{aligned}$$



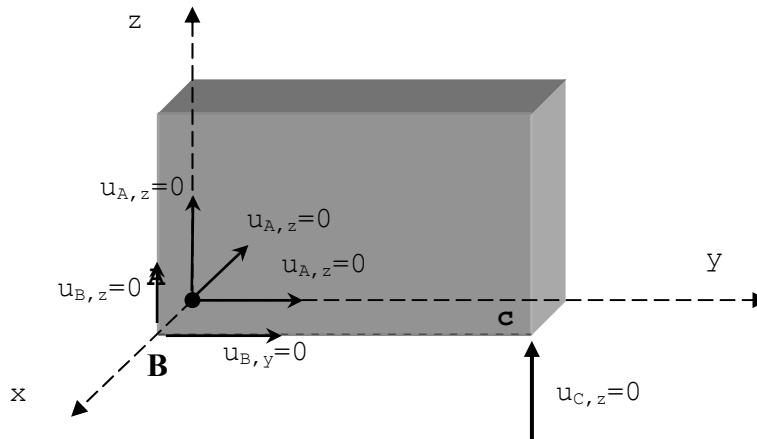
Komponenti skupne reakcije v podpori A pa sta

$$R_{A,x} = R_1 + R_2 \cdot \cos 60^\circ = 4,2 \text{ kN}$$

$$R_{A,y} = R_2 \cdot \cos 30^\circ = 2,8 \text{ kN},$$

kar je seveda enak rezultat kot pod točko b).

**Zgled 3.3.Z4.** Prostorski problem. (a) Poglejmo si, kako lahko stabilno podpremo kvadrasto telo na sliki Z4-1, ki ima dolžine robov vzdolž x,y in z osi enake  $a=1\text{m}$ ,  $b=2\text{m}$  in  $c=1\text{m}$ . (b) Izračunajmo reakcijske sile z obtežbo podano na sliki Z4-2.



Slika Z4-1. Kvadrasto telo in podporne točke A, B in C s preprečenimi (ničnimi) pomiki v izbranih smereh.

Če samo v oglišču kvadra v točki A preprečimo vse translatorne pomike telesa, tedaj je

$$u_{A,x} = u_{A,y} = u_{A,z} = 0,$$

in podpora je nepomična ali toga. V teh smereh preprečenih pomikov se lahko, v odvisnosti od obtežbe, pojavijo reakcijske sile, ki pravzaprav preprečujejo te pomike. Vendar pa se kvader še vedno lahko suče okoli podpore A. Če še v točki B preprečimo pomika v y in z smeri,

$$u_{B,y} = u_{B,z} = 0,$$

je ta podpora nepomična v smeri y in z. Tudi v teh dveh smereh se lahko, v odvisnosti od obtežbe, pojavita reakcijski sili, ki preprečujeta pomika. V smeri x osi je pomik točke B še prost, podporna točka se v odvisnosti od obtežbe in elastičnosti telesa lahko premakne, reakcijska sila pa je v tej točki in tej smeri zagotovo nična

$$R_{B,x} = 0.$$

Kljub podporam v točkah A in B se kvader še vedno lahko suče okoli osi x. Če še v točki C preprečimo pomik v »z« smeri,

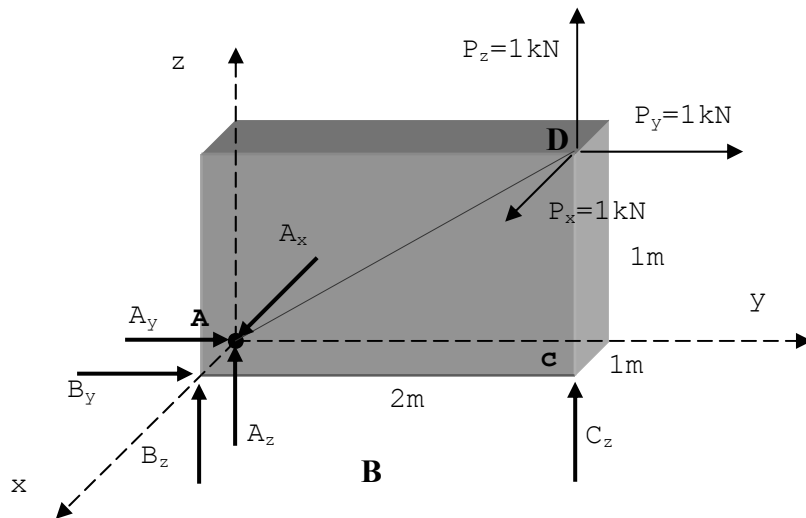
$$u_{C,z} = 0,$$

je ta podpora nepomična v smeri »z«. V tej smeri se lahko pojavi reakcijska sila. V smereh x in y podpora C dopušča prosti pomik, reakcijski sili pa sta v teh smereh nični:

$$R_{C,x} = R_{C,y} = 0.$$

S temi podporami, ki preprečujejo šest pomikov in s tem prav vse pomike vseh točk togega telesa, telo povsem stabilno podprto.

(b) Izračun reakcijskih sil v skladu s sliko Z4-2.



Slika Z4-2. Obremenitev kvadrastega telesa in podpore definirane z reakcijami.

Enačbe za translatorsko ravnotežje in momentno ravnotežje glede na točko A, ki je v začetku koordinatnega sistema, so:

$$\begin{aligned} \sum_i F_{i,x} &= 1 + A_x = 0 \\ \sum_i F_{i,y} &= 1 + A_y + B_y = 0 \\ \sum_i F_{i,z} &= 1 + A_z + B_z + C_z = 0 \\ \sum_i M_{i,x} &= 1 + 2 \cdot C_z = 0 \\ \sum_i M_{i,y} &= -1 \cdot B_z - 1 \cdot C_z = 0 \\ \sum_i M_{i,z} &= -1 + 1 \cdot B_y = 0. \end{aligned}$$

Zapišimo jih v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ B_y \\ B_z \\ C_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Determinanta matrike koeficientov je enaka 2, kar nam teoretično zagotavlja, da je kvader stabilno podprt.

Rešitve za reakcije so

$$A_x = -1 \text{ kN}, A_y = -2 \text{ kN}, A_z = -1 \text{ kN},$$

$$B_y = 1\text{kN}, B_z = 0,5\text{kN},$$

$$C_z = -0,5\text{kN}.$$

Za preizkus pravilnosti izračuna reakcij preverimo še, ali je moment vseh sil, ki delujejo na kvadrasto telo, ničen glede na točko B. Za vajo pa izračun izvedimo z rigorozno uporabo vektorskega računa.

Sile, ki delujejo v točkah A, B, C in D ter pripadajoče krajevne vektorje njihovih prijemališč glede na točko B, zapišimo v podanem koordinatnem sistemu.

$$\mathbf{R}_A = (A_x, A_y, A_z) = (-1, -2, -1)\text{kN}$$

$$\mathbf{r}'_A = (a_x, a_y, a_z) = (-1, 0, 0)\text{m}$$

$$\mathbf{R}_B = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0,5, 0,5)\text{kN}$$

$$\mathbf{r}'_B = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_C = (C_x, C_y, C_z) = (0, 0, -0,5)\text{kN}$$

$$\mathbf{r}'_C = (c_x, c_y, c_z) = (0, 2, 0)\text{m}$$

$$\mathbf{P}_D = (P_x, P_y, P_z) = (1, 1, 1)\text{kN}$$

$$\mathbf{r}'_D = (d_x, d_y, d_z) = (0, 2, 1)\text{m}$$

Rezultantni moment glede na točko B je

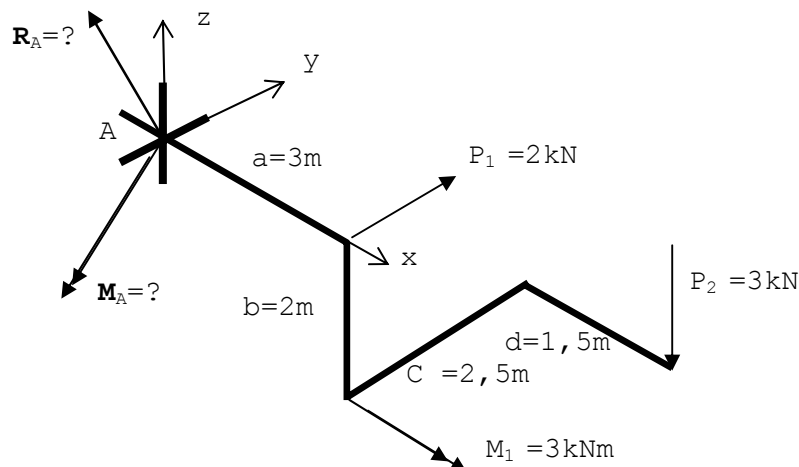
$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}'_A \times \mathbf{R}_A + \mathbf{r}'_B \times \mathbf{R}_B + \mathbf{r}'_C \times \mathbf{R}_C + \mathbf{r}'_D \times \mathbf{P}_D$$

$$= (-1, 0, 0) \times (-1, -2, -1) + (0, 0, 0) \times (0, 1, 0,5) + (0, 2, 0) \times (0, 0, -0,5) + (0, 2, 1) \times (1, 1, 1)$$

$$= (0, -1, 2) + \mathbf{0} + (-1, 0, 0) + (1, 1, -2) = (0, 0, 0)\text{kNm}.$$

Torej je moment ničen in s tem je preskus potrdil pravilnost izračuna!

**Zgled 3.3.Z5.** Prostorski problem. Za »lomljeni« nosilec na sliki Z5-1, ki ima posamezne segmente vzporedne s prikazanim koordinatnim sistemom  $xyz$ , izračunajmo reakcijo  $\mathbf{R}_A$  in reakcijski moment  $\mathbf{M}_A$ , simbolično prikazana v podpori A. Podpora je toga in vpeta, ki ne dopušča nobenih pomikov in zasukov, dimenzije in obremenitev pa so razvidni iz slike.



**Slika Z5-1.** Nosilec s simboličnim prikazom reakcijske sile in momenta.

**Rešitev.** Za izbiro osi, glede na katero bomo računali momentno ravnotežje, je najprikladnejša točka A, torej kar podpora. V izbranem koordinatnem sistemu so sile in pripadajoče ročice glede na točko A enake

$$\mathbf{P}_1 = (0, 2, 0) \text{ kN}, \quad \mathbf{r}_1 = (3, 0, 0) \text{ m}$$

$$\mathbf{P}_2 = (0, 0, -3) \text{ kN}, \quad \mathbf{r}_2 = (4.5, 2.5, -2) \text{ m}$$

$$\mathbf{M}_1 = (3, 0, 0) \text{ kNm}$$

Enačba translatornega ravnotežja je

$$\mathbf{R}_A + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{0},$$

in zapisana po komponentah

$$\sum_i F_{i,x} = R_x + 0 = 0$$

$$\sum_i F_{i,y} = R_y + 2 = 0$$

$$\sum_i F_{i,z} = R_z - 3 = 0.$$

Momentno ravnotežje zapisano po komponentah nam da enačbe

$$\sum_i M_{i,x} = M_{A,x} + M_1 - c \cdot P_2 = M_{A,x} + 3 - 2.5 \times 3 = 0$$

$$\sum_i M_{i,y} = M_{A,y} + (a + d)P_2 = M_{A,y} + (3 + 1.5) \times 3 = 0$$

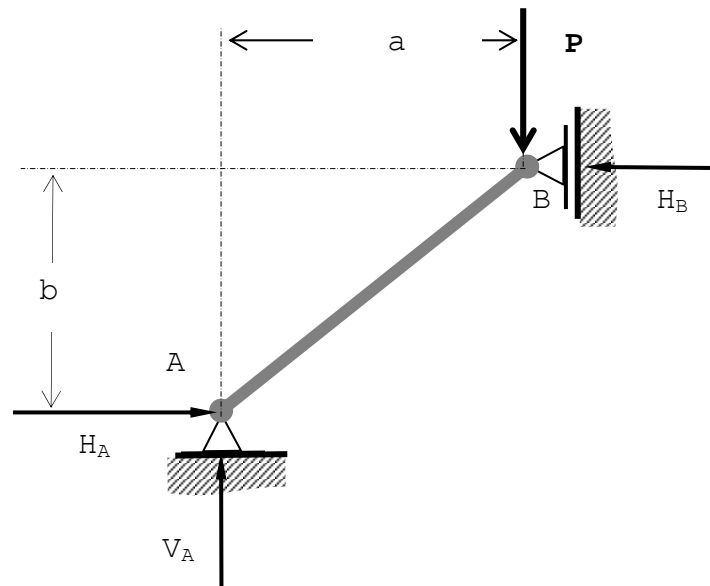
$$\sum_i M_{i,z} = M_{A,z} + a \cdot P_1 = M_{A,z} + 3 \times 2 = 0$$

Iz gornjih šestih ravnotežnih enačb izračunamo reakcije, ki so:

$$R_x = 0, \quad R_y = -2 \text{ kN}, \quad R_z = 3 \text{ kN},$$

$$M_x = 4.5 \text{ kNm}, \quad M_y = -13.5 \text{ kNm}, \quad M_z = -6 \text{ kNm}.$$

**3.4. Slabo podprta telesa oziroma konstrukcije.** Za njih je značilno, da lahko že pri majhni obtežbi pride do podrtja ali zloma konstrukcije. V njih lahko nastopijo notranje sile in momenti ter zunanje reakcije, ki so bistveno večje kot je velikost obtežbe, poleg tega pa so pomiki vsaj dela konstrukcije sorazmerno zelo veliki. Poglejmo si to na enostavnem zgledu na sliki 3.4.-1, kjer je palica obremenjena s silo  $P$ .



Slika 3.4.-1. Solidno stabilno podpiranje.

Ravnotežne enačbe so

$$H_A - H_B = 0$$

$$V_A - P = 0$$

$$b \cdot H_B - a \cdot P = 0$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ aP \end{Bmatrix}$$

Determinanta matrike je  $b$ . Ko je  $b=a=1$ , tedaj je palica nagnjena za  $45^\circ$  in rešitev je

$$H_A = H_B = V_A = P$$

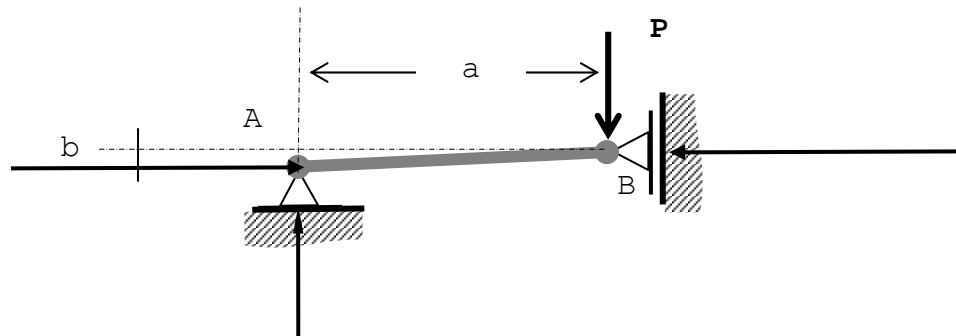
in determinanta matrika koeficientov je 1 in je torej velikostnega razreda največjega koeficienta, reakcije pa so velikostnega razreda obtežbe, v našem primeru kar enake.

Če je  $b$  enak nič, tedaj je palica horizontalna. Determinanta je enaka nič in dobimo nestabilno podprto palico.

V tem razdelku pa je najbolj zanimiv primer, ko je  $b$  zelo majhen,  $b \ll 1$ , slika 2. Tedaj je palica skoraj horizontalna, slika 2. Ko je na primer  $b=0,1\text{m}$  in  $a=1\text{m}$ , tedaj je determinanta mala v primerjavi z največjim členom matrike in nekatere reakcije so zelo velike v primerjavi z obtežbo:

$$H_A = H_B = P \cdot a/b = 100P.$$

$$V_A = P$$



Slika 3.4.-2. Slabo stabilno podpiranje. Horizontalni reakciji sta ogromni v primerjavi z obremenilno silo P.

Če bi v gornjem primeru sila P delovala v horizontalni smeri, bi bili reakciji enakega velikostnega reda kot obtežba.

Iz tega primera zaključimo: pri slabo stabilno podprtih konstrukcijah je razporeditev podpor blizu lege, ki nam da nično determinanto matrike ravnotežnih enačb. Tedaj je ta determinanta absolutno mala v primerjavi z absolutno največjim členom matrike.

Po Cramerjevem pravilu za reševanje sistema linearnih enačb so neznanke, v našem primeru so to reakcije, enake kvocientu ustreznih determinant. V imenovalcu nastopa determinanta matrike koeficientov sistema enačb, v števcu pa je determinanta matrike, kjer en stolpec matrike koeficientov sistema enačb nadomestimo z vektorjem obtežbe. Ko je absolutna vrednost determinante matrike koeficientov enačb zelo mala v primerjavi z največjo absolutno vrednostjo njenih členov, lahko pričakujemo, da bodo rešitve, to so reakcije, zelo velike v primerjavi z velikostjo obtežbe. Velike reakcije povzročajo tudi velike sile v konstrukciji, ki običajno vodijo do zloma oziroma do podrtja konstrukcije, ker popustijo podpore ali elementi konstrukcije. Zato so konstrukcije, kjer je determinanta matrike koeficientov po prej omenjenem kriteriju zelo mala, praviloma v gradbeništvu nesprejemljive oziroma se jih izogibamo.

**Zgled 3.4.Z1.** Analizirajmo kvadratno telo na sliki Z1-1. To je primer, kjer je podpiranje podobno nestabilnemu. Zato lahko pričakujemo velike reakcije.

Ravnotežje v horizontalni smeri na desno, v vertikalni smeri navzgor in momentno ravnotežje okoli podpore A nam da enačbe:

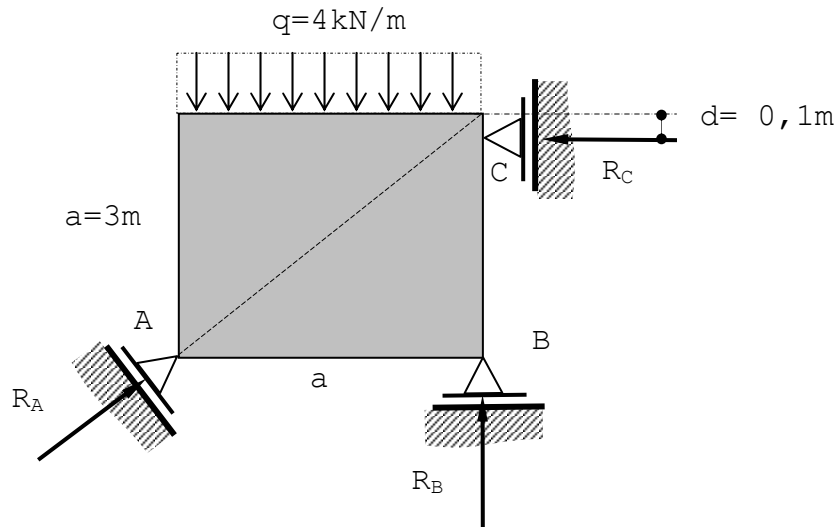
$$R_A/\sqrt{2} - R_C = 0$$

$$R_A/\sqrt{2} + R_B - qa = 0$$

$$aR_B + (a-0,1)R_C - (a/2)qa = 0.$$

Zapišimo jih v matrični obliki, upoštevaje, da je  $a=3\text{m}$  in  $q=4\text{kN/m}$  je gornji sistem enačb enak

$$\begin{bmatrix} 0,707 & 0 & -1 \\ 0,707 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2,9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_A \\ R_B \\ R_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \\ 18 \end{Bmatrix}.$$



Slika 3.4.Z1-1.

Determinanta matrike koeficientov je

$$D = -0,0707.$$

Absolutna vrednost razmerja med determinanto in največjim členom matrike je

$$r = D/3 = 0,0707/3 = 0,0236$$

in je dosti manjše kot enica. Torej lahko pričakujemo velike reakcije. Te so

$$R_A = 254,56 \text{ kN}, R_B = -168 \text{ kN}, R_C = 180 \text{ kN}.$$

Če primerjamo največjo reakcijo in največji člen obtežbe,

$$R_A/18 = 254,56/18 = 14,142$$

vidimo, da je reakcija štirinajstkrat večja oziroma 21,213 krat večja od rezultante obtežbe, ki je 12 kN. Če pa bi bila podpora C samo 1 cm nižje od vogala kvadrata, torej bi bila konfiguracija še bolj podobna nestabilnemu podpiranju, pa bi bile reakcije še veliko večje.

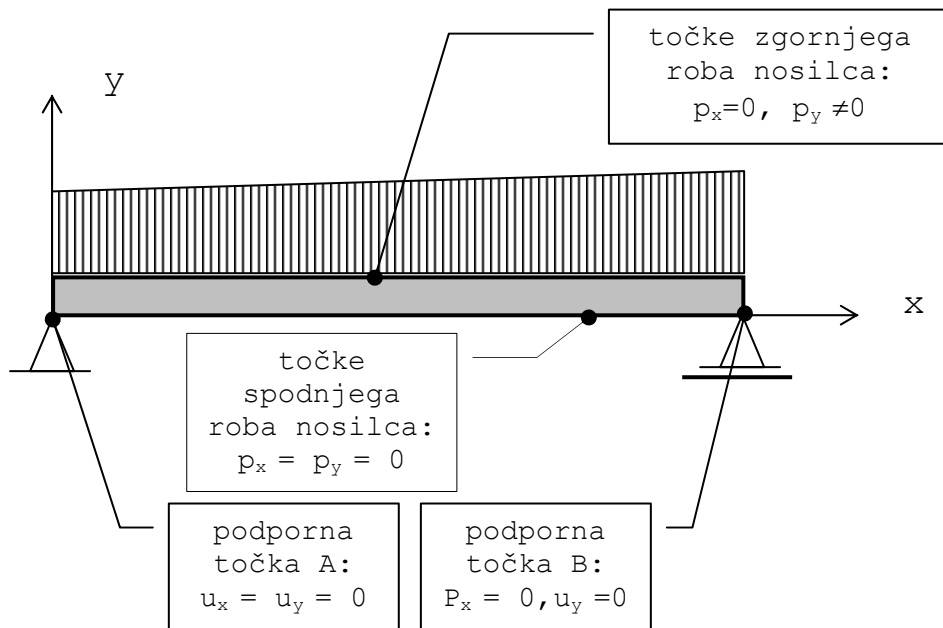
Če primerjamo rezultate za solidno stabilno podprto telo analizirano v prejšnjem poglavju v zgledu 3.4.Z1, vidimo, da so tam reakcije v velikostnem razredu obtežbe. Največja reakcija je v zgledu 3.4.Z1 je  $R_A = 16,971 \text{ kN}$ , medtem ko je rezultanta obtežbe 12 kN.

V gornjih primerih slabo podprtih konstrukcij so sile izračunane ob predpostavki absolutne togosti elementov. Pri **realnih slabo podprtih konstrukcijah** pride do deformacij in značilno je, da so reakcije bistveno drugačne (na srečo praviloma manjše), kot nam jih da izračun ob predpostavki absolutne togosti.

**3.5. Definiranost problemov.** V dosedanjih analizah smo podajali obtežbo, dimenzije konstrukcije in podpore. Pri tem se moramo vprašati, koliko in kakšne podatke moramo poznati, da je problem enolično definiran in da lahko tedaj enolično izračunamo vse sile in tudi pomike konstrukcije. Za podpore smo že spoznali, da so definirane s podatki: za vsako smer moramo poznati silo ali pomik oziroma moment ali zasuk. V naših primerih je bila zmeraj ena izmed količin v dani smeri nična. V teoriji elastodinamike je dokaz, ki nam definiranost problemov natanko določa. Če se omejimo na statiko, tedaj so konstrukcije stabilno podprte in v mirovanju. Za take probleme velja izrek: **če poznamo v vsaki točki konstrukcije za vsako izmed treh smeri (prostorski problem) izključujoče ali pomik ali silo oziroma napetost, tedaj je rešitev enolična.** Pri tem so izjema točke elastičnih podpor – tam moramo poznati samo elastične konstante oziroma razmerje med silo in pomikom. Ti podatki predstavljajo **robne pogoje**. Seveda pa moramo k temu natančno poznati še geometrijo konstrukcije in njene elastične lastnosti. Pravimo, da je elastostatičen

problem **korektno definiran** in v principu se da rešiti. Podatke, s katerimi je problem definiran, imenujemo osnovni ali **potrebni podatki**.

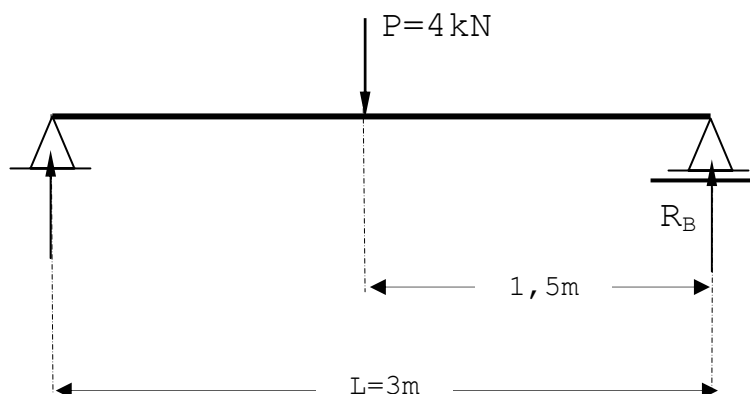
Poglejmo si enostavni zgled nosilca na dveh podporah, ki je na zgornji strani obremenjen z zvezno obtežbo in je podan na sliki 3.5-1. Obravnavajmo ga kot ravninski problem. Najprej pregledamo vse notranje točke. V vsaki taki točki poznamo v vertikalni smeri silo teže, v obeh horizontalnih smereh pa tudi vemo, da je sila nična. To je seveda čisto trivialna ugotovitev. Nato pregledamo vse točke na površini nosilca – pravimo tudi po **robu nosilca**. V točkah, kjer so podpore, poznamo za vsako smer nekaj – ali nični pomik ali nično reakcijo. Na spodnji strani in čelih nosilca je v vsaki točki, razen v podpornih točkah, v vseh smereh sila nična saj tam ni obtežbe. Na zgornji strani nosilca pa poznamo v vsaki točki površinsko silo v vertikalni smeri in nično površinsko silo v ostalih dveh horizontalnih smereh. Problem je korektno definiran.



Slika 3.5-1. Prostoležeči nosilec na dveh podporah in robni pogoji.

Če poznamo k potrebnim podatkom še kakšen podatek, je problem predefiniran. Če poznamo na primer še eno reakcijo ali pa povese na sredini nosilca, dobimo predefinirani problem. Ta dodatni podatek lahko uporabimo, na primer, za eksperimentalno preverjanje naše analize ali pa za ugotavljanje nekaterih drugih mehanskih količin. Iz osnovnih podatkov lahko izračunamo povese na sredini nosilca. Če se ta ne sklada z izmerjenim, tedaj je zagotovo nekaj narobe – ali sama analiza, ali osnovni podatki niso pravilni, ali pa nekatere predpostavke o karakteristikah materiala in podporah niso točne.

Zgled 3.5.Z1. Ugotovimo, ali so za problem na sliki 3.5.Z1-1 osnovni podatki pravilni. Osnovni podatki so  $L=3\text{m}$  in  $P=4\text{kN}$ , ki deluje na sredini nosilca. Dodatni »izmerjeni« podatek je reakcija  $R_B$ , ki je  $2,2\text{kN}$ .



Slika 3.5.Z1-1. Prostoležeči nosilec in preverjanje osnovnih podatkov.



Iz osnovnih podatkov izračunamo, da je

$$R_B = P(L/2)/L = 4\text{kN}(4\text{m}/2)/4\text{m} = 2\text{kN}.$$

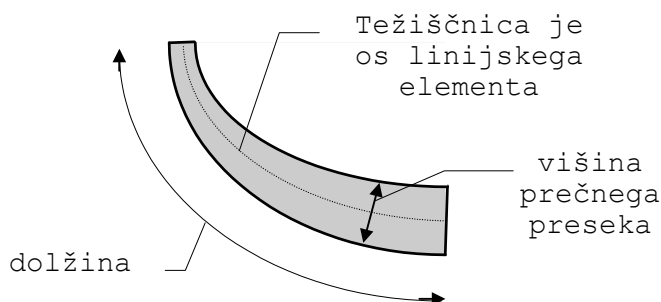
Ta reakcija se razlikuje od izmerjene, kar pomeni, da so podatki nekonsistentni. Lahko je meritev reakcije slaba, lahko pa so osnovni podatki napačni: ali sila  $P$  ni  $4\text{kN}$ , ali ne deluje na sredini, ali pa je nosilec krajši od  $3\text{m}$ , ali so kar vsi trije podatki nekoliko netočni, itd.

Na kraju velja še opozoriti: predpostavka, da so elementi in podpore absolutno toge, je singularni primer elastomehanike – to je samo limitni primer, ko gredo togosti proti neskončnosti in v realnosti ni nikoli izpolnjen. Tedaj so, v skladu s predpostavko, pri stabilni konstrukciji vsi pomiki nični in razporeditve sil po stični površini med podporami in konstrukcijo ter v notranjosti elementov ni mogoče izračunati. Lahko pa izračunamo rezultantne reakcije ter rezultantne sile in momente v presekih elementov, vendar izključno samo za statično določene konstrukcije. Izračun temelji samo na enačbah ravnotežja, elastične karakteristike pa pri tem ne igrajo nobene vloge.

## 4. LINIJSKI ELEMENTI.

**4.1.Uvod.** V mehaniki linijske elemente posebej natančno obravnavamo. Razlog zato je, da so to zelo ekonomični in enostavni elementi, ki izpolnjujejo osnovne zahteve kot nosilni elementi konstrukcije. V primerjavi z drugimi elementi konstrukcij, kot so, na primer, ploskovni in blokovni elementi, je potrebna količina materiala za njihovo izdelavo relativno majhna. Izdelava linijskih nosilcev in njihova vgradnja v konstrukcijo je običajno enostavna, konstrukcije sestavljene iz linijskih elementov pa imenujemo linijske konstrukcije. Pomembno je tudi, da stebri kot linijski elementi, še najmanj prostorsko ovirajo uporabnost konstrukcije. Zaradi tega se ti elementi uporabljajo skoraj v vsaki konstrukciji in inženirji morajo dobro poznati njihove mehanične značilnosti, metode za analizo podpornih reakcij ter razporeditev notranjih sil in deformacij.

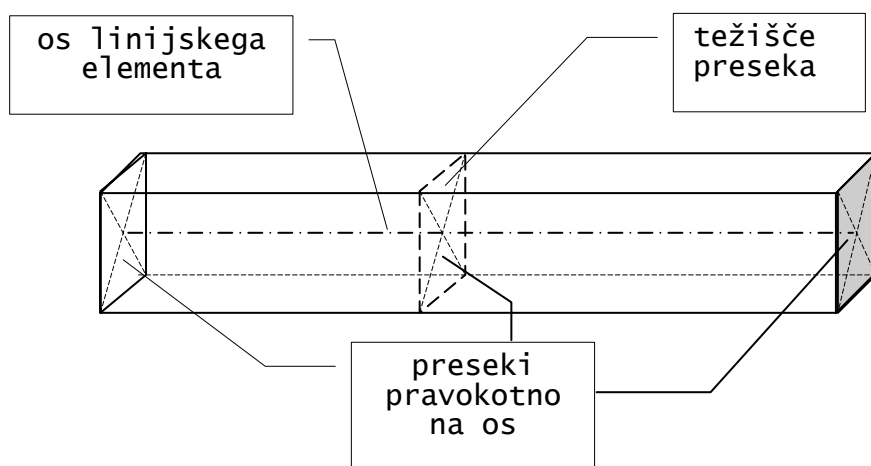
**4.2.Definicija linijskih elementov.** Površno imenujemo linijske elemente tiste elemente, ki imajo eno dimenzijo bistveno večjo od ostalih dveh. “Razpon” linijskega elementa vzdolž njegove največje dimenzije običajno imenujemo *dolžina*, ostali dve dimenziji, ki sta prečno na dolžino, pa sta *širina in višina*, slika 1. Linijski elementi so na primer ravni stebri in horizontalni nosilci, pa tudi loki, ki predstavljajo ukrivljene linijske elemente. V splošnem se lahko širina in višina spreminja vzdolž linijskega elementa. Tedaj govorimo o *linijskih elementih spremenljivega preseka*. Ukrivljenost linijskega elementa je lahko samo v eni ravnini, kot pri ravninskih lokih (normalna ukrivljenost), ali pa je ukrivljenost tudi še izven ravninska (binormalna ukrivljenost), kot je to na primer pri spiralnih vzmeteh, ki jih tudi obravnavamo s teorijo linijskih elementov.



Slika 1. Simbolični prikaz ukrivljenega linijskega elementa s spremenljivim presekom.

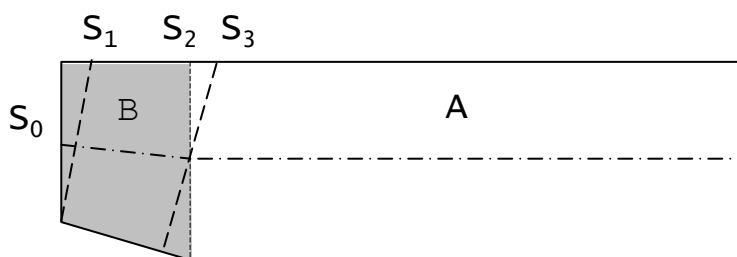
Za podrobnejšo inženirsko analizo linijskih elementov je gornji opis linijskega elementa premalo natančen. Natančnejša definicija linijskega elementa je: **element je linijski element, če predstavlja geometrijsko telo, ki ga enolično podamo z ravno ali ukrivljeno linijo in ravnimi preseki pravokotno na to linijo.** Tako linijo imenujemo **težiščno os** ali težiščnico, ali na kratko kar **os linijskega elementa**. **Os mora potekati skozi težišča presekov.** Matematično podamo njeno lego tako, kot se podajajo prostorske krivulje, točke na preseku pa z enačbo ravnine. Linijski element je vsekakor prostorsko telo, vendar pa je matematično podajanje lege in pomikov vsake točke linijskega elementa veliko bolj enostavno kot pri splošnih prostorskih telesih. Takšno podajanje linijskih elementov je tudi najbolj prikladno za analiziranje njihovih statičnih in dinamičnih količin. Dolžina linijskega elementa v definiciji ni natančno opredeljena. Po Eurocodih se smatra, da če je dolžina elementa vsaj dvakrat večja od njegove višine, so rezultati analize po teoriji linijskih elementov inženirsko sprejemljivi.

Na sliki 2 je prikazan prizmatični element konstantnega preseka. Takšen element je linijski element v skladu z definicijo, ker ga je možno v celoti „pokriti“ s pravokotnimi preseki na njegovo os, ki poteka skozi težišča presekov.



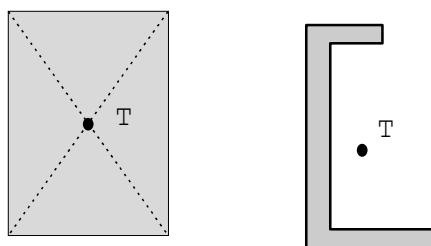
Slika 2. Ravni linijski element.

Na sliki 3 pa je element, ki ni natančno v skladu z definicijo linijskega elementa. Del elementa, ki je prikazan zatemnjeno, ni mogoče enolično podati z ravnimi preseki pravokotno na neko os, ki poteka skozi njihova težišča. Če na primer izberemo os glede na presek  $S_1$ , tedaj ne more biti začetni presek  $S_0$  pravokoten na tako os. Podobna nekonsistentnost nastopi za preseka  $S_2$  in  $S_3$ . Tak del elementa predstavlja odstopanje od linijskega elementa in zanj ne velja natančno teorija linijskih elementov. To predstavlja neregularnost, ki jo obravnavamo posebej, kolikor je potrebna bolj natančna analiza. Mi se bomo v nadaljnjem tekstu omejili na pravilne linijske elemente, ki jih bomo običajno imenovali na kratko kar elemente.



Slika 3. Element, ki ne odgovarja natančno definiciji linijskega elementa.

V večini praktičnih primerov imamo opravka kar z ravnimi elementi, njihove osi pa podajamo s premicami v ravnini  $x$ - $y$  ali  $x$ - $z$ . Za ravni nosilec konstantnega pravokotnega preseka, na primer, je težiščnica ravna linija, ki poteka kar skozi simetrično središče presekov, kjer ležijo njihova težišča. Za bolj komplicirane oziroma sestavljene preseke pa moramo lege težiščnice ugotoviti z izračunom lege težišč presekov, slika 4.

Slika 4. Simbolični prikaz težišča  $T$  in s tem lege osi linijskega elementa pravokotnega preseka ter  $U$  preseka.

**4.3. Analiza linijskih elementov** poteka v več korakih. Najprej iz zunanje obtežbe, ki deluje po plašču elementa ter teže, ki deluje po celotnem elementu, izračunamo statično ekvivalentno obtežbo, ki deluje na os elementa - imenujemo jo **obtežba reducirana na os elementa**, slika 4.4-1. Ta obtežba predstavlja **linijsko obtežbo**. Reducirano obtežbo običajno matematično precej enostavneje podamo kot dejansko površinsko in volumsko obtežbo, pa tudi nadalje računanje s tako obtežbo je enostavnejše. Ko izračunamo reducirano obtežbo, pa, kot bomo spoznali v sledečih poglavjih, iz nje izračunamo še **rezultantne sile in momente, ki delujejo v težiščih presekov in jih podamo v lokalnem koordinatnem sistemu**.

**4.4. Reducirano obtežbo** izračunamo iz enačb, ki podajajo njeno statično enakost z zunanjo obtežbo za vsak diferencialno mali segment osi, slika 5. Enačba za statično enakost sil glasi:

$$\mathbf{q} \cdot ds = \int_A \mathbf{p} \cdot dA + \int_V \mathbf{p}_V \cdot dV = d\mathbf{R}, \quad (1)$$

enačba za statično enakost momentov pa je

$$\mathbf{m} \cdot ds = \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{p} \cdot dA + \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{p}_V \cdot dV = d\mathbf{M}. \quad (2)$$

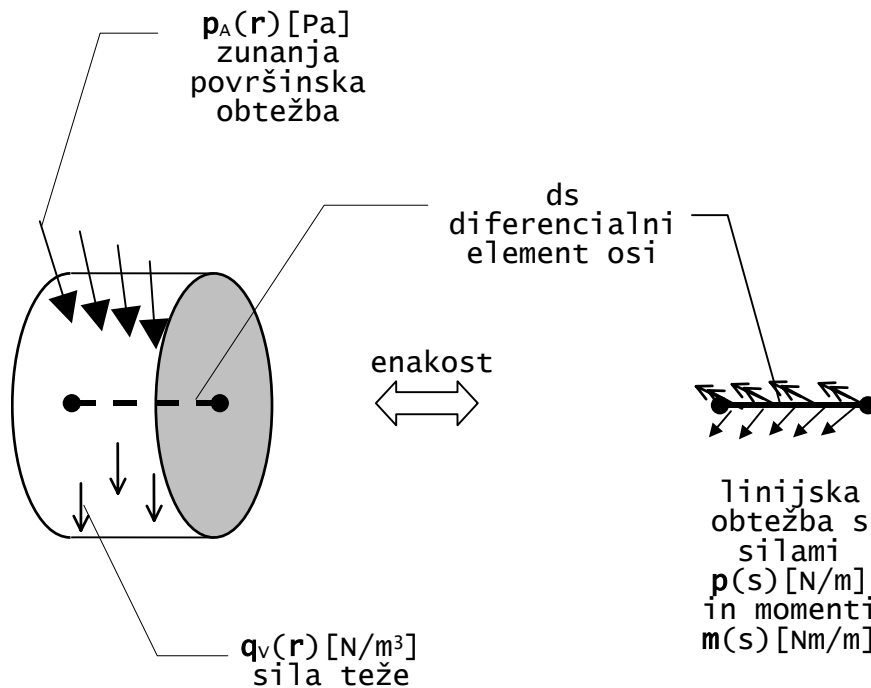
Prva integrala v enačbah 1 in 2 potekata po plašču (brez presekov), druga integrala pa po volumnu diferencialno majhnega segmenta linijskega elementa. Integrala v prvi enačbi predstavljata rezultanto  $d\mathbf{R}$  zunanje obtežbe, integrala v drugi enačbi pa njen rezultantni moment  $d\mathbf{M}$  glede na os opazovanega segmenta linijskega elementa. Iz gornjih enačb je reducirana obtežba enaka:

$$\mathbf{q}(s) = \frac{d\mathbf{R}}{ds}. \quad (3)$$

in

$$\mathbf{m}(s) = d\mathbf{M}/ds. \quad (4)$$

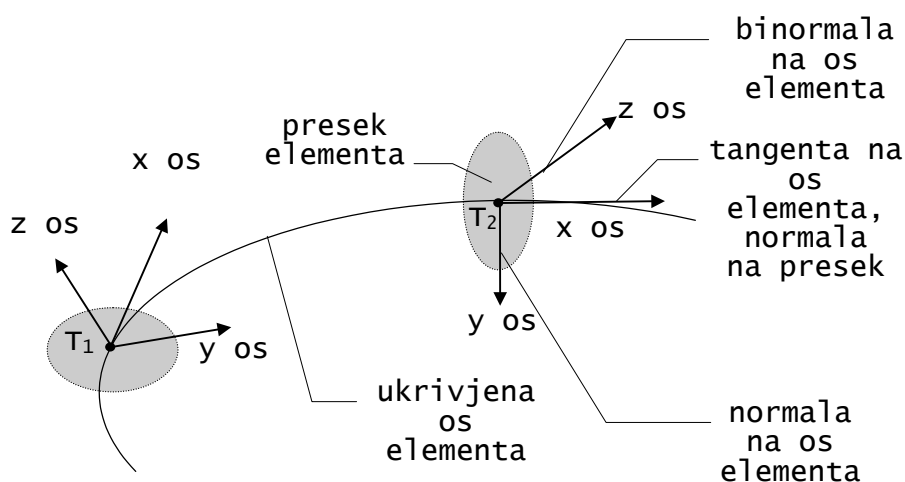
V nadaljnji analizi, ki jo obravnavamo šele v okviru predmeta trdnost, iz rezultatnih sil presekov izračunavamo razporeditev napetosti po presekih elementov ter tudi njihove deformacije. Na tak način torej v prvem koraku prostorski problem reduciramo na linijski, nato pa na koncu analize spet nazaj na prostorski problem. S tem načinom se v veliki meri izognemo komplicirani matematični obravnavi linijskega elementa kot splošnega prostorskega problema.



Slika 4.4-1. Simbolični prikaz zunanje obtežbe diferencialno majhnega dela linijskega elementa med dvema prečnima presekom ter simbolični prikaz reducirane obtežbe na diferencialno majhnem segmentu osi  $ds$ .

**4.5. Lokalni koordinatni sistem.** Pri analizi linijskih elementov je pomembno opozoriti, da so izračuni enostavnejši, če reducirano obtežbo in tudi rezultantne notranje sile zapišemo v **lokalnem koordinatnem sistemu**. Poleg enostavnejšega računa pa je še pomembneje, da te sile dobijo v lokalnem koordinatnem sistemu jasen inženirski pomen. Tako na primer pozitivna osna sila v lokalnem koordinatnem sistemu zmeraj pomeni silo, ki razteza element, medtem ko ima taka sila v globalnem ali splošnem koordinatnem sistemu lahko pozitivno ali pa negativno vrednost. Zato si lokalni koordinatni sistem natančneje oglejmo.

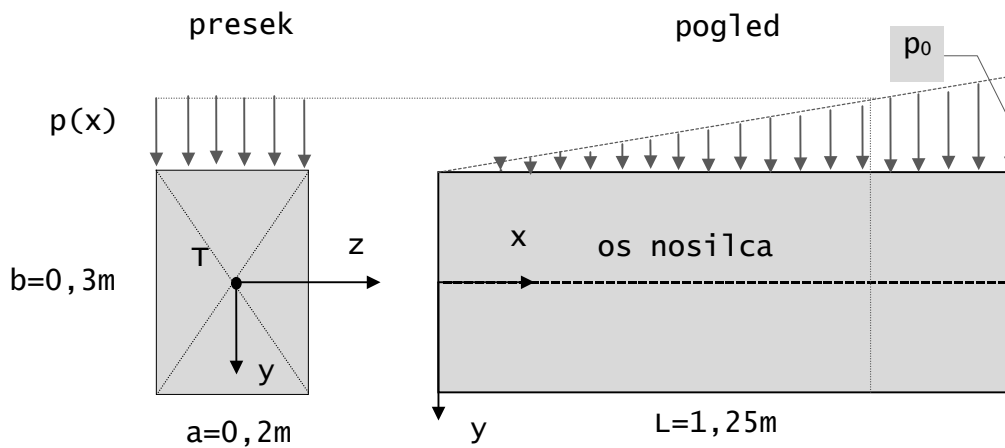
Os linijskih elementov predstavlja neko zvezno krivuljo v prostoru. Zato ima vsaka os linijskega elementa v vsaki točki tangento, normalo in binormalo, ki so med seboj pravokotne. Z njimi določimo lokalni koordinatni sistem z začetkom v obravnavani točki. Tak koordinatni sistem je seveda v splošnem različen za vsako točko osi elementa in od tod tudi njegovo ime: lokalni. **Njegovo izhodišče je hkrati seveda tudi v težišču preseka, ki poteka skozi dano točko osi elementa.** V smeri tangente na os linijskega elementa postavimo  $x$ -os, v smeri normale  $y$ -os in v smeri binormale  $z$ -os koordinatnega sistema. Takemu koordinatnemu sistemu torej **pravimo lokalni koordinatni sistem** (glej sliko 4.5-1). Tako definiran koordinatni sistem je enolično določen, je pravokoten in desni (Kartezijev), njegova lega pa je matematično enolično izračunljiva. Ker ravne preseke linijskega elementa tvorimo zmeraj pravokotno na njegovo os, je tangenta na os elementa hkrati tudi normala na presek, ostali dve koordinatni osi pa ležita v ravnini preseka!



Slika 4.5-1. Prikaz lokalnega koordinatnega sistema v točki  $T_1$  in v točki  $T_2$  osi nekega ukrivljenega linijskega elementa

Če lego osi elementa na neki način matematično podamo, lahko v vsaki njeni točki matematično izračunamo lego lokalnega koordinatnega sistema s Serret-Frenetovimi obrazci. Vendar pa je tak izračun potreben samo pri kompliciranih prostorskih krivuljah, ki imajo dvojno ukrivljenost - normalno in binormalno. V gradbeni praksi imamo najpogosteje opravka z ravninskimi linijskimi elementi in še to daleč najpogosteje kar z ravnimi. Ko imamo ravninski ukrivljeni element, je normala v smeri ukrivljenosti osi elementa in seveda pravokotna na tangento. Zato pri takih elementih lahko kar brez izračunavanja ugotovimo lego lokalnega koordinatnega sistema. Pri **ravnih elementih** nastopita dve posebnosti. Tu namreč lega  $y$  in  $z$  osi ni enolično določljiva, ker je vsaka pravokotnica na os lahko normala ali pa binormala. Zato **lego  $y$  in  $z$  osi poljubno izberemo vendar, seveda tako, da dobimo desni pravokotni koordinatni sistem**. Pri ravnem elementu imajo **vsilni lokalni koordinatni sistemi še enako smer**. Čeprav so med seboj translatorsko premaknjeni, pa je bistveno le to, da imajo v vseh teh sistemih vektorji sil in momentov isti zapis, enake komponente, zato **en sam koordinatni sistem uporabimo za podajanje notranjih sil in momentov in za podajanje lokacije presekov ravnega elementa**.

**Zgled 1. Redukcija obtežbe na os nosilca.** Imamo ravni nosilec pravokotnega preseka  $a \times b = 0,2\text{m} \times 0,3\text{m}$  in dolžine  $1,25\text{m}$ . Na zgornji površini je obremenjen z zvezno obtežbo, ki se linearno spreminja vzdolž nosilca od nične vrednosti pa do največje vrednosti  $p_0 = 5\text{kN/m}^2$ . Teža nosilca je  $20\text{kN/m}^3$ . Izračunajmo ekvivalentno obtežbo po osi nosilca in jo podajmo v odvisnosti od koordinate  $x$  vzdolž osi nosilca glede na izbrani začetek lokalnega koordinatnega sistema prikazan na sliki Z1-1).



Slika 4.5.Z1-1. Dispozicija obtežbe in postavitev koordinatnega sistema.

Vzdolž nosilca se površinska obtežba spreminja v skladu z enačbo

$$\mathbf{p}(x, y, z) = (0, \frac{x}{L} p_0, 0) = (0, \frac{x[m]}{1,25m} 5kN/m^2, 0) = (0, 4 \cdot x[m], 0) kN/m^3,$$

prostorninska pa je po celem nosilcu enaka

$$\mathbf{p}_V(x, y, z) = (0, 20, 0) kN/m^3.$$

Za vsak segment nosilca  $ds=dx$  lociran pri danem  $x$ -u, slika Z1-2, je obtežba na segment osi nosilca enaka rezultanti zunanje obtežbe na segment nosilca.

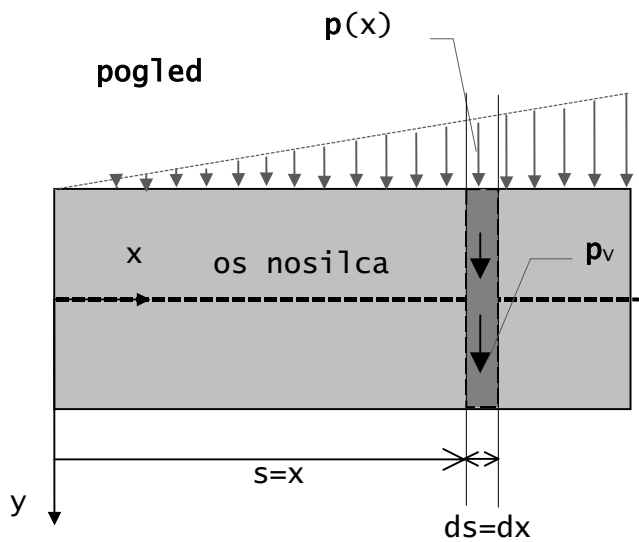
$$d(R_x, R_y, R_z) = (0, 4xa + 20ab, 0) \cdot dx = (0, 0.8x + 1.2, 0) \frac{kN}{m} dx.$$

Izračunamo jo kot linijsko obtežbo na enoto dolžine osi, prikazano na sliki Z1.3.:

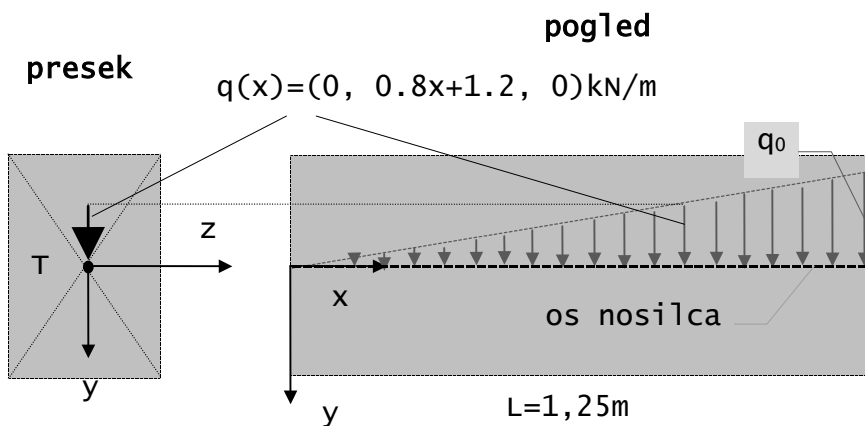
$$\mathbf{q}(x) = d(R_x, R_y, R_z) / dx = (0, 0.8x + 1.2, 0) \frac{kN}{m}.$$

Največja vrednost je pri  $x=L$  in je enaka

$$\mathbf{q}(x=L) = \mathbf{q}_0 = (0, 8 \frac{kN}{m^2} 1.25 + 1.2, 0) = (0, 2.2, 0) kN/m$$



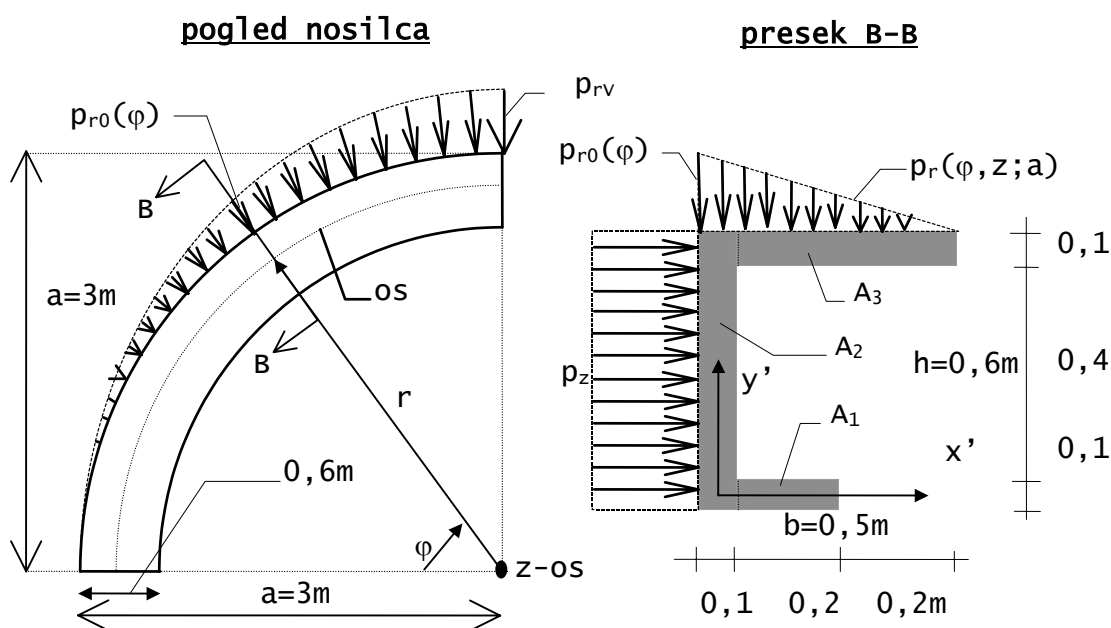
Slika Z1-2. Sile, ki delujejo na segment nosilca.



Slika Z1-3. Prikaz reducirane obtežbe, ki deluje na os nosilca in predstavlja linijsko obtežbo.

**Zgled 4.5.Z2. Izračun težišča preseka in lege osi linijskega elementa ter redukcija obtežbe.** Poglejmo si nekoliko bolj komplicirani primer, kjer se pri redukciji na os nosilca pojavijo momenti, upoštevati pa je treba tudi razliko v dolžinah osi in plašča nosilca.





**Slika Z.2.1.** Prikaz nosilca in njegovega preseka z razdelitvijo na pasnice s površinami  $A_1$ ,  $A_2$ , in  $A_3$ , prikaz obtežbe nosilca in izbire koordinatnih sistemov  $r, \varphi, z$  in  $x', y'$ . Pogled in presek nista prikazana v enakem merilu.

Imamo nosilec z osjo v obliki četrtine kroga. Njegov presek, ki je konstanten in obtežba so podani na sliki Z.2.1. Obtežba je površinska in ima dve komponenti, ki delujeta pravokotno na površino. Prva komponenta je  $p_z=0,8\text{kPa}$ , in je konstantna, druga komponenta pa je  $p_r$  in se spreminja linearno po zgornjem robu preseka ter tudi linearno vzdolž (po loku) nosilca, glej sliko. Največjo vrednost v posameznih presekih označimo z  $p_{r0}(\varphi)$ , vzdolž nosilca pa je največja vrednost na vrhu nosilca in je enaka  $p_{rV}=12\text{kPa}$ . Izračunajmo težišča preseka, postavimo lokalni koordinatni sistem, lego osi in reducirano obtežbo.

Za **izračun lege težišča** preseka si izberemo pomožni koordinatni sistem  $x', y'$ , ki naj ima zaradi enostavnejšega računanja koordinatni začetek v sečišču simetral spodnje in stranske pasnice, slika Z.2.2. Statična momenta površine preseka sta

$$S_{x'} = y_1' \cdot A_1 + y_2' \cdot A_2 + y_3' \cdot A_3 = 0 + 0,25 \times 0,06 + 0,5 \times 0,04 = 0,013 \text{m}^2$$

$$S_{y'} = x_1' \cdot A_1 + x_2' \cdot A_2 + x_3' \cdot A_3 = 0,15 \times 0,02 + 0 + 0,25 \times 0,04 = 0,035 \text{m}^2$$

$$x_T = \frac{S_{y'}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{0,013}{0,02 + 0,06 + 0,04} = 0,10833 \text{m}$$

$$y_T = \frac{S_{x'}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{0,035}{0,02 + 0,06 + 0,04} = 0,29167 \text{m}$$

Izračun ekvivalentne linijske obtežbe. Za vsak presek, katerega lokacija je podana z vrednostjo  $\varphi$ , izračunamo največjo obtežbo na robu zgornje ploskve plašča nosilca z linearno interpolacijo

$$p_{r0}(\varphi) = \frac{\varphi}{\pi/2} \cdot p_{rV} = \frac{\varphi}{\pi/2} \cdot 12 \text{kPa} = \varphi \cdot 7,63944 \text{kPa}$$

in nato ekvivalentni linijsko obtežbo v radialni smeri

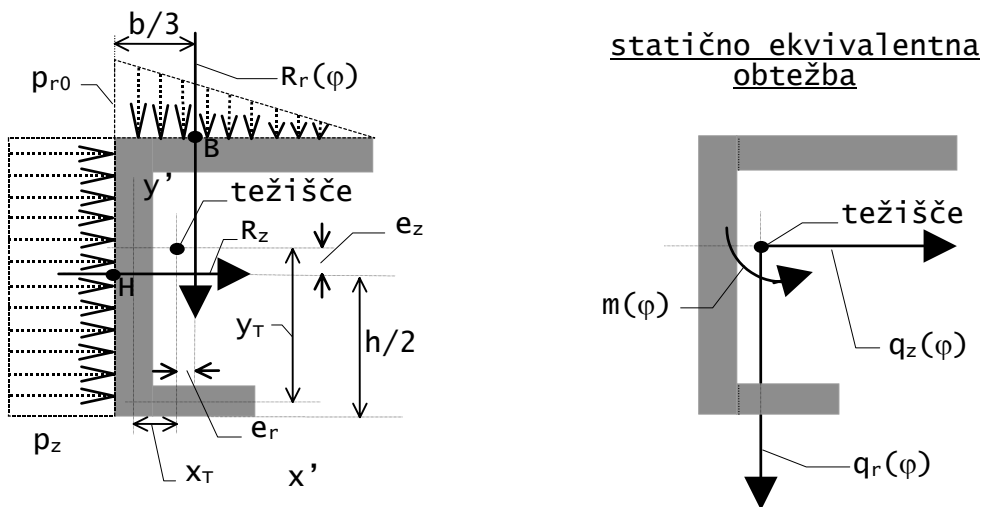
$$R_r(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot p_{r0}(\varphi) = 0,5 \cdot 0,5 \text{ m} \cdot \varphi \cdot 7,63944 \text{ kPa} = \varphi \cdot 1,90986 \text{ kN/m},$$

Ta obtežba je glede na krivuljo, ki leži na 1/3 širine preseka in poteka po zgornji ploskvi nosilca, predstavljeno s točko B na sliki Z2-2.

Ekvivalentna linijska obtežba v smeri z pa je

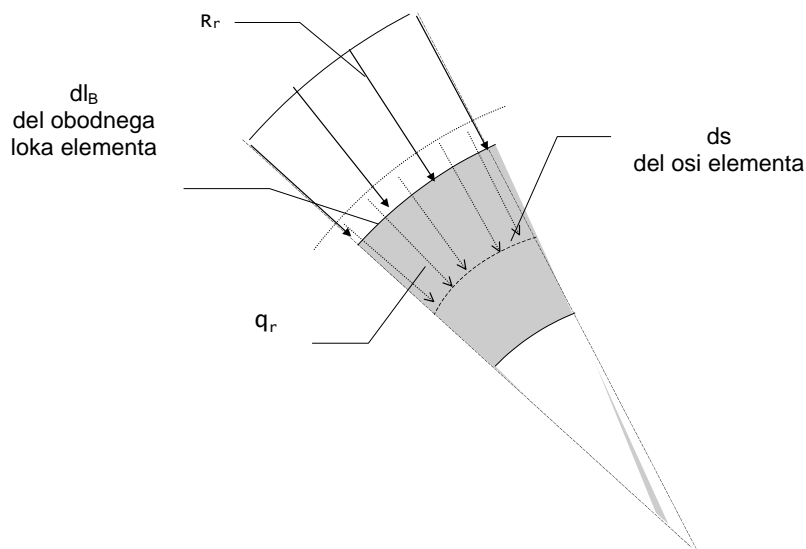
$$R_z(\varphi) = h \cdot p_z = 0,6 \text{ m} \cdot 0,8 \text{ kPa} = 0,48 \text{ kN/m} = \text{konst.}$$

Ta obtežba učinkuje na liniji, ki poteka po sredini višine nosilca vzdolž "čela" nosilca, točka H na sliki Z2-2.



Slika Z2-2. Na levi sliki sta narisani linijski obtežbi, ki sta ekvivalentni podani površinski obtežbi. Na desni sliki je reducirana obtežba na os nosilca, kjer smo upoštevali spremembo ločne dolžine linijske obtežbe ter uvedli moment, da smo ohranili statično ekvivalentnost površinske in linijske obtežbe.

Redukcija obtežbe na os nosilca. Izračunani obtežbi  $R_z$  in  $R_r$  sta linijski obtežbi, kjer je na primer  $R_r$  podana glede na zunanji lok nosilca. Sedaj moramo upoštevati, da obtežba, ki deluje na dani dolžinski segment elementa zunanjega loka, pripada ustreznemu dolžinskemu segmentu osi, ki je krajši (slika Z2-3).



Slika Z2-3. Simbolični prikaz segmentov dolžin osi  $ds$  in obodnega loka  $dl_B$  za infinitezimalni segment linijski elementa. Prikazani sta tudi: ekvivalentni linijski obtežbi na obodno linijo in na osno linijo.

$R_r$  reduciramo v obtežbo  $q_r$  (glede na os nosilca) s pomočjo enačbe, ki podaja enakost rezultatnih sil, ki delujeta na diferencialno mali element  $dl_B$  in  $ds$ :

$$q_r \cdot ds = R_r \cdot dl_B$$

Razmerje dolžin diferencialnih elementov izračunamo s pomočjo analitične geometrije

$$dl_B / ds = \frac{a \cdot d\varphi}{(a - h + 0,05m + y_T) \cdot d\varphi} = \frac{3,0}{(3,0 - 0,6 + 0,05 + 0,29167)} = 1,09422$$

in na os reducirana obtežba je

$$q_r = R_r \cdot dl_B / ds = 0,190986 \frac{kN}{m} \cdot 1,09422 = 0,208981 kN / m .$$

Za izračun  $q_z$  upoštevamo razmerje dolžin linije, ki poteka po središču čelne ploskve elementa in osi elementa.

$$dl_H / ds = \frac{(a - h/2) \cdot d\varphi}{(a - h + 0,05 + y_T) \cdot d\varphi} = \frac{3,0 - 0,6/2}{(3,0 - 0,6 + 0,05 + 0,29167)} = 0,98480$$

Z gornjo enačbo je reducirana obtežba enaka

$$q_z = \frac{dl_H}{ds} R_z = 0,98480 \times 0,48 kN / m = 0,47270 kN / m$$

Ker linijski obtežbi  $R_z$  in  $R_r$  delujeta **ekscentrično glede na težišče preseka, povzročata moment glede na os elementa**. V koordinatnem sistemu  $x', y'$  je oddaljenosti  $R_r$  od težišča preseka enaka

$$e_r = \frac{1}{3}0,5\text{m} - 0,05\text{m} - x_T = 0,11667\text{m} - 0,05\text{m} - 0,10833\text{m} = 0,00834\text{m},$$

oddaljenost  $R_z$  pa je

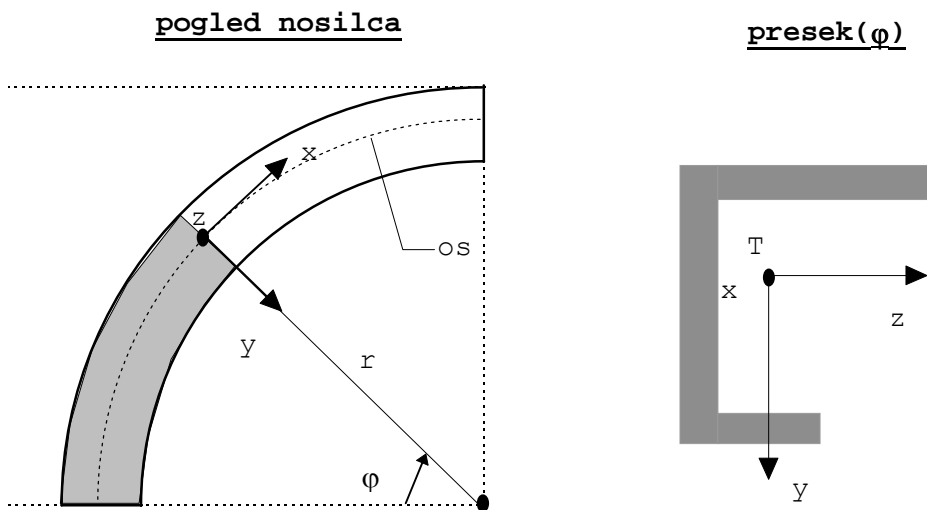
$$e_z = (0,3\text{m} - 0,05\text{m}) - y_T = (0,3\text{m} - 0,05\text{m}) - 0,29167\text{m} = -0,04167\text{m}.$$

Momente, ki ga ta obtežba povzroča na os nosilca, je torzijski moment, ki ga podamo kot linijsko momentno obtežbo. Njena vrednost je enaka:

$$\begin{aligned} m_\varphi(\varphi) &= -\left|e_r \cdot R_r \frac{dl_B}{ds}\right| + \left|e_z \cdot R_z \cdot \frac{dl_H}{ds}\right| = -|e_r \cdot q_r| + |e_z \cdot q_z| = \\ &= -0,00834\text{m} \cdot \varphi \cdot 2,08981\text{kN/m} + 0,04167\text{m} \cdot 0,47270\text{kN/m} \\ &= (-0,01743 + \varphi \cdot 0,01970)\text{kNm/m} \end{aligned}$$

Na koncu velja omeniti: v nekaterih praktičnih primerih redukcije obtežbe na os nosilca ali njene faze dajejo povsem marginalne korekcije računskih obtežb. Inženir mora sam oceniti, kdaj je sicer formalno korekten izračun še smiseln. Opozorimo pa, da pri odprtih tankostenskih presekih prav torzijski moment, ki ga dobimo z redukcijo obtežbe, običajno ne smemo zanemariti.

**Lokalni koordinatni sistem** ima v vsaki točki osi linijskega elementa  $x$  os v smer njene tangente,  $y$  os je pri ravninskih elementih zmeraj v smeri ukrivljenosti (na konkavno stran elementa),  $z$  os pa je pravokotno na ravnino  $x$ - $y$  osi (slika Z2-4).



Slika Z.2.4. Prikaz lokalnega koordinatnega sistema.

V lokalnem koordinatnem sistemu ima na os reducirana obtežba komponente

$$\mathbf{q}'(\varphi) = (q'_x, q'_y, q'_z) = (0, 2,08981 \cdot \varphi, 0,47270)\text{kN/m}$$

in

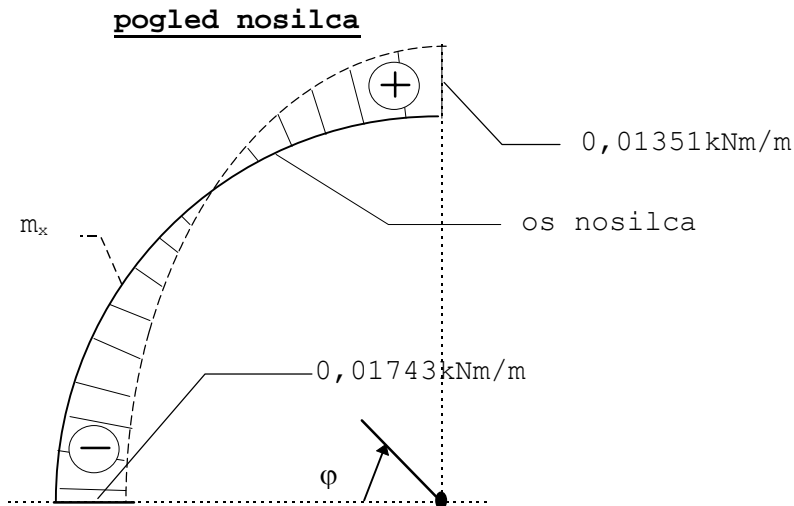
$$\mathbf{m}'(\varphi) = (m'_x, m'_y, m'_z) = (-0,01743 + \varphi \cdot 0,01970, 0, 0)\text{kNm/m}.$$

Na sliki Z2-5 je za ilustracijo prikazan potek torzijske osne obtežbe z diagramom. Prikazan je potek  $m'_x$  komponente, njena vrednost na začetku nosilca je enaka

$$m'_x(\varphi=0) = -0.01743 \text{ kNm/m},$$

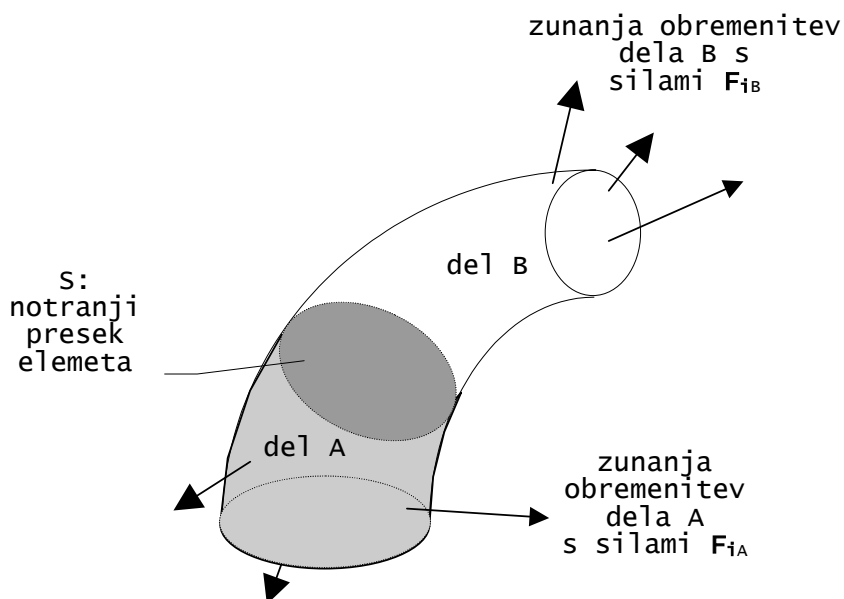
na koncu nosilca pa je

$$m'_x(\varphi=\pi/2) = -0.01743 + 0,01970 \cdot \pi/2 = 0,01351 \text{ kNm/m}.$$

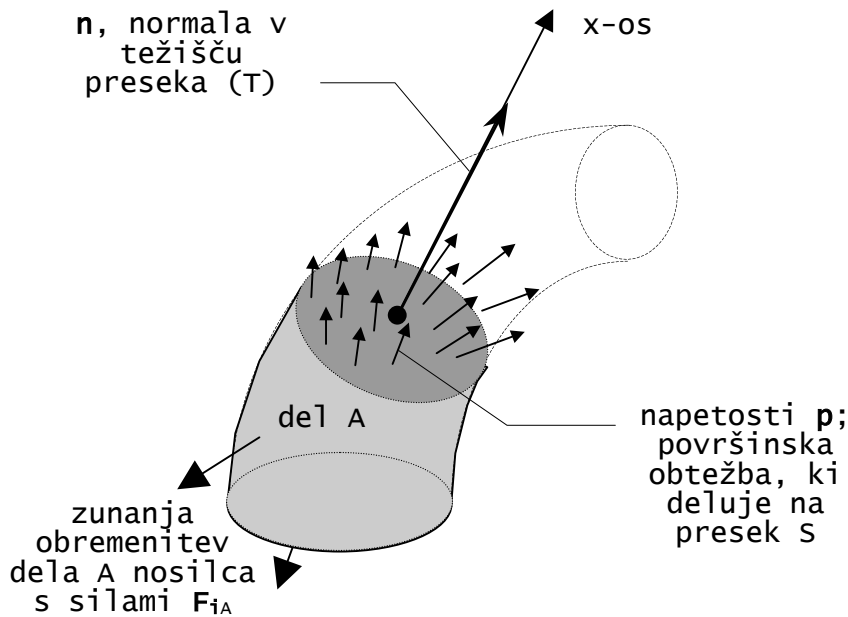


Slika Z2-5. Diagram poteka reducirane obtežbe  $m'_x$  v lokalnem koordinatnem sistemu.

**4.6. Definicija rezultatnih sil in momentov v presekih linijskih elementov.** Opazujemo linijski element, ki je v statičnem ravnotežju. Zaradi enostavnejšega prikaza zunanjo obtežbo ponazorimo s koncentriranimi silami, ki vključujejo tudi reakcije v podporah. Element navidezno razdelimo na dva dela z ravnim prečnim presekom S pravokotno na os elementa. Na sliki 4.6-1 sta to dela A in B, ki sta seveda tudi vsak zase v statičnem ravnotežju. Če opazujemo na primer del A, tedaj smatramo presek S kot del njegove »zunanje« površine, na katero deluje del B s površinskimi silami  $\mathbf{p}$ . To so vezne oziroma odbojne med deloma A in B linijskega elementa, slika 4.6-2.



Slika 4.6-1. Shematični prikaz razdelitve elementa na del A in B s presekom S, ki je pravokoten na os elementa.



Slika 4.6-2. Shematični prikaz obremenitve nosilca, navideznega preseka S ter napetosti, ki nanj delujejo.

Normala opazovanega preseka S je določena glede na to, kateri del linijskega elementa opazujemo. Zmeraj je usmerjena navzven iz opazovanega dela elementa, v našem primeru iz dela A. V tej smeri postavimo x-os. To je v skladu z matematično definicijo normale. Geometrijska telesa so omejena z neko površino, normala pa je usmerjena navzven iz prostornine, ki jo dana površina omejuje. Če bi opazovali del B elementa, tedaj bi normala za isti presek bila obratno obrnjena kot za del A. Tangenta na os elementa sama še ne določa smer normale in s tem x osi. Ko izberemo smer normale na tangenti osi elementa, smo s tem že izbrali oziroma določili kateri del elementa opazujemo. Zapomnimo si, da sile ne delujejo kar na neki presek »brez telesa«, ampak lahko delujejo samo na telo preko njegove površine (z izjemo sile teže). Omenjeni presek mora biti del površine opazovanega dela elementa! Izključno v tem smislu oziroma s tem razumevanjem bomo, kot je v navadi, zaradi enostavnosti kljub temu govorili o silah, ki delujejo na presek. Zapomnimo si še: medtem ko lahko smer x-osi izberemo, pa sta pri ukrivljenem elementu y in z os s tem že enolično določeni.

Rezultanto sil  $\mathbf{p}$ , ki delujejo na presek S, definiramo kot **rezultantno silo preseka S**. Ker bomo imeli s temi silami veliko opravka, povejmo, da jih dostikrat na kratko imenujemo kar **rezultantne notranje sile**, ali še krajše kar samo **notranje sile**. Matematično jih definiramo z enačbo

$$\mathbf{R}_S = \int_S \mathbf{p} \cdot dS, \quad (1.a)$$

kjer v integralu poteka integracija po preseku S. Rezultantni moment sil  $\mathbf{p}$ , izključno glede na težišče preseka S, definiramo kot **rezultantni moment preseka S**. Tudi tukaj govorimo na kratko kar o **notranjih momentih**. Zapišemo ga z enačbo

$$\mathbf{M}_S = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{p} \cdot dS. \quad (1.b)$$

**5. Izračun resultantnih sil in momentov v preseku iz ravnotežja dela linijskega elementa.** Neposredno je možno tak izračun izpeljati samo v primerih, ko s presekom linijski element razpade

na natanko dva dela. To se ne zgodi na primer tedaj, ko imamo zaključeni krožni linijski element. Tedaj z enim presekom ne razpade na dva dela.

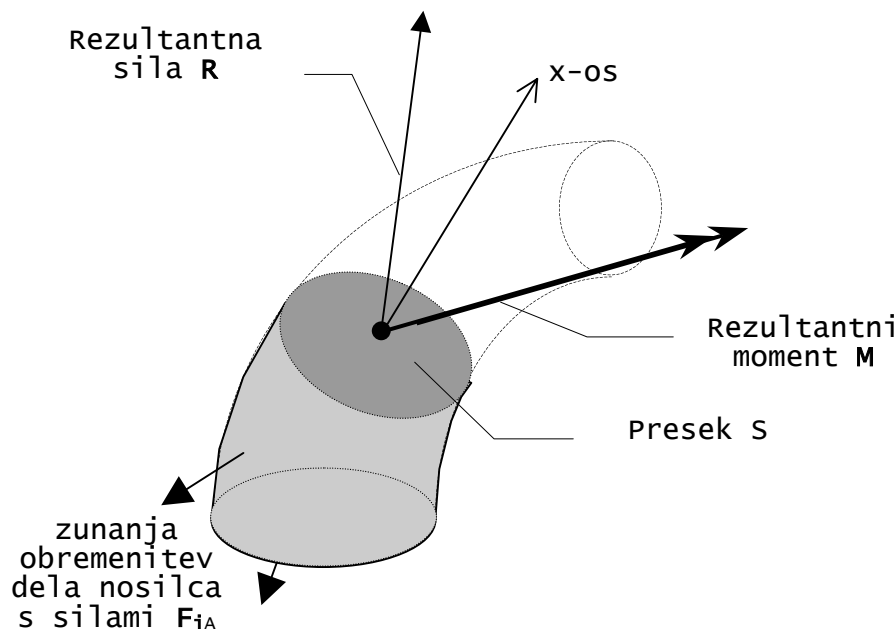
Ker je vsak del linijskega elementa v ravnotežju, sile ki delujejo na presek izpolnjujejo enačbo za translatorsno ravnotežje

$$\sum_i \mathbf{F}_{iA} + \int_S \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (2.a)$$

in enačbo za momentno ravnotežje

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{iA} + \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{0} . \quad (2.b)$$

V gornjih enačbah so sile  $\mathbf{F}_{iA}$  vse sile, vključno z reakcijami podpor, ki delujejo na opazovani del elementa A, razen seveda sil, ki delujejo na presek, glej sliko 3.



Slika 4.6-3. Simbolični prikaz rezultante in resultantnega momenta sil, ki delujejo na presek: rezultantna sila  $\mathbf{R}_S$  in resultantni moment  $\mathbf{M}_S$  glede na težišče preseka.

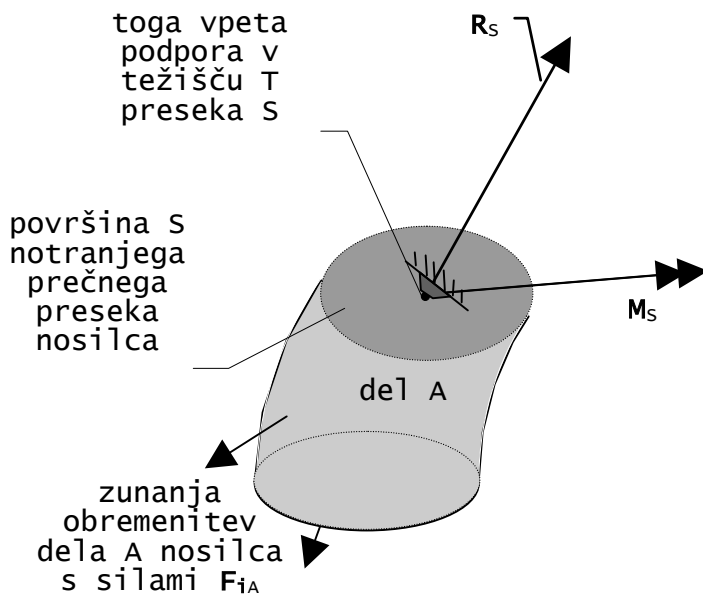
Rezultantne sile in momente v presekih bomo pri statično določenih problemih izračunavali na podlagi gornjih dveh ravnotežnih enačb, torej

$$\mathbf{R}_S = -\sum_i \mathbf{F}_{iA} \quad (3.a)$$

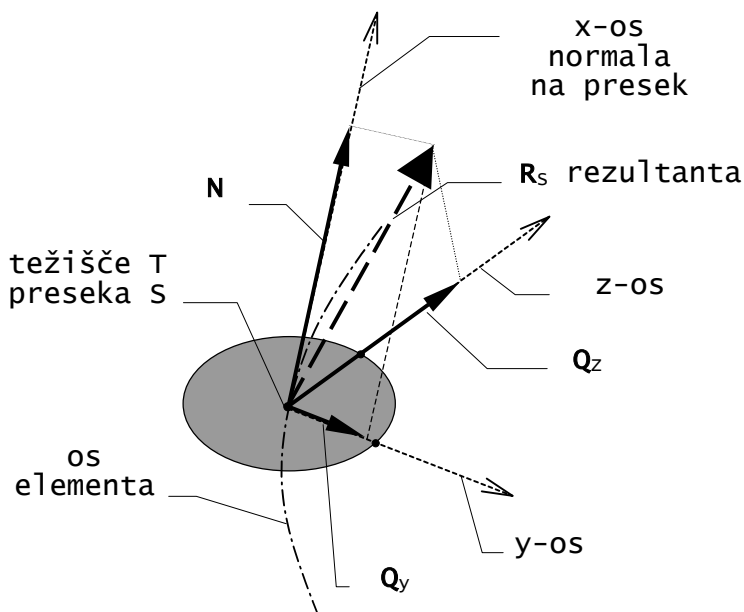
in

$$\mathbf{M}_S = -\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{iA} . \quad (3.b)$$

Pri tem si lahko mislimo, da smo odrezani del elementa A toga vpeli v težišču preseka S, kjer so reakcije enake resultantni sile in resultantnemu momentu v preseku, slika 4.



Slika 4.6-4. Simbolični prikaz rezultatnih sil in momentov preseka S kot reakcij v togi vpeti podpori.



Slika 4.6-5. Komponente rezultatne sile preseka v lokalnem koordinatnem sistemu.

Ko rezultatno notranjo silo podamo v **lokalnem koordinatnem sistemu**, slika 5, enačba 4, njene komponente imenujemo **normalna** ali **osna sila** in **dve strižni** ali **prečni sili**.

$$\mathbf{R}_S = (R_{Sx}, R_{Sy}, R_{Sz}) = (N, Q_y, Q_z). \quad (4)$$

Te komponente običajno označimo z  $N$ ,  $Q_y$  in  $Q_z$ .  $N$  je osna sila in je v smeri lokalne x-osi. Ko je pozitivna, je v pozitivni smeri x-os in "vleče" opazovani del nosilca, pravimo tudi, da deluje iz preseka. Tedaj ji pravimo tudi **natezna osna sila**. Ko deluje v negativni smeri lokalne x-osi, pa jo

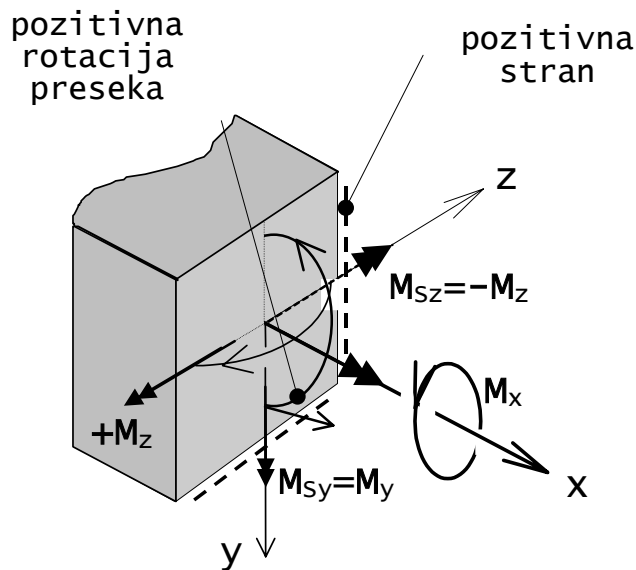


imenujemo **negativna** ali **tlačna** osna sila, ker material tlačí.  $Q_y$  in  $Q_z$  sta **strižni sili** in sta pozitivni, ko delujeta v pozitivni smeri lokalnih  $y$  in  $z$  osi.

Enako razstavimo na komponente **vektor rezultantnega momenta** (glej sliko 6),

$$\mathbf{M}_S = (M_{Sx}, M_{Sy}, M_{Sz}) = (M_x, M_y, -M_z) \quad (5)$$

kjer imenujemo  $M_{Sx}$  **torzijski moment**,  $M_{Sy}$  in  $M_{Sz}$  pa **upogibna momenta**.



Slika 4.6-6. Primerjava pozitivnih komponent vektorja momentov ter pozitivnih momentov v skladu s klasično definicijo.

V gradbeništvu je uveljavljena posebna definicija pozitivnosti upogibnih momentov, imenujemo jo **klasična** oziroma **inženirska**, ki pa žal ni v skladu z vektorsko definicijo pozitivnosti komponent. Pri klasični definiciji uvedemo pojem **pozitivne strani linijskih elementov**, ki je zmeraj na **pozitivnih strani lokalni  $y$  in  $z$  osi**. **Upogibni moment je pozitiven tedaj, ko na pozitivni strani povzroča pozitivne napetosti** - natege. Ta definicija je povsem nedvoumna za simetrične preseke, pri nekaterih nesimetričnih presekih pa lahko pride zaradi pozitivnega momenta tudi do negativnih napetosti na pozitivni strani preseka elementa. Zato je bolje, da opazujemo navidezno rotacijo preseka "okoli" koordinatne osi. Če ta povzroča na pozitivni strani gibanje preseka iz materiala (v smeri  $x$ -osi), tedaj je moment pozitiven po inženirski definiciji. Primerjava klasične in vektorske definicije pokaže, da sta po obeh definicijah torzijski in upogibni moment okoli  $y$  osi skladna, upogibni moment okoli  $z$  osi pa nasprotna (slika 6):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S &= (M_{Sx}, M_{Sy}, M_{Sz}) \text{ VEKTORSKA DEFINICIJA} \\ &= (M_x, M_y, -M_z) \text{ KLASICNA DEFINICIJA} \end{aligned}$$

**Smer notranjih sil in momentov za lice preseka z negativno normalo.** V navideznem preseku oba dela linijski elementa, ki ju presek loči, delujeta drug na drugega. Tako predstavljajo sile  $\mathbf{p}$  na sliki 1 tiste sile, s katerimi del B linijskega nosilca deluje na del A. V skladu z **zakonom o akciji in**

**reakciji** pa preko tega preseka z enakimi vendar nasprotno usmerjenimi silami učinkuje del A na del B. Zato so seveda tudi rezultantne sile na obeh "licih" preseka nasprotni, slika 7. Ko te sile zapišemo kot vektorje, veljajo enačbe:

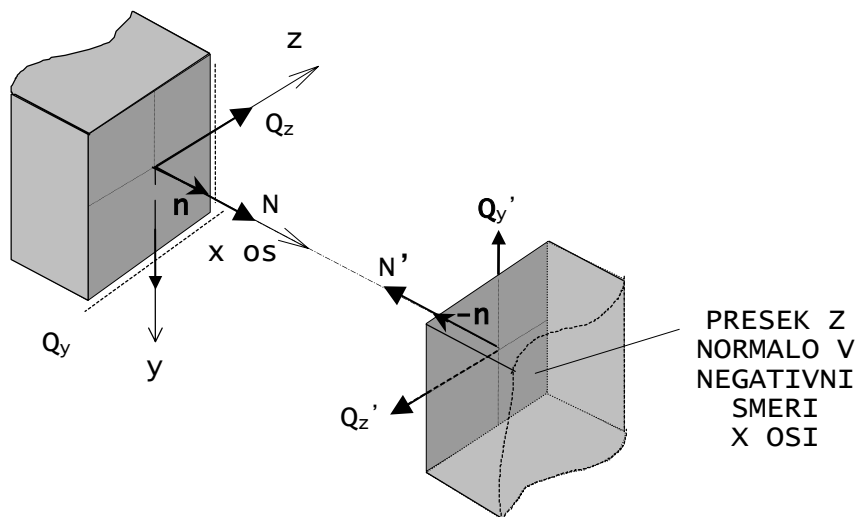
$$N = -N'$$

$$Q_y = -Q_y'$$

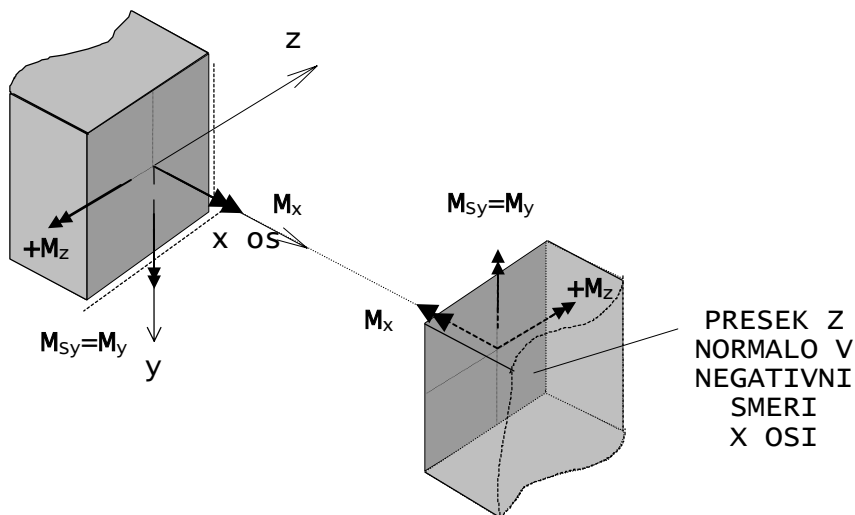
$$Q_z = -Q_z'$$

Stran preseka, ki pripada delu B, ima normalo v negativni smeri x osi izbranega lokalnega koordinatnega sistema, imenujemo ga **presek z negativno normalo**, včasih kar negativni presek. Glede na izbrani lokalni koordinatni sistem so pozitivne rezultantne sile za presek z negativno normalo v negativnih smereh koordinatnih osi. Torej, ko delujejo na presek z negativno normalo notranje sile v negativnih smereh, so hkrati sile, ki delujejo na presek s pozitivno normalo, pozitivne. Pri tem je seveda lokalni koordinatni sistem po definiciji postavljen tako, da je x os v smeri normale, ki jo smatramo za pozitivno normalo.

Za momente velja analogno. Na sliki 8 so prikazani pozitivni momenti na obeh "licih" preseka, upošteva klasično definicijo pozitivnosti momenta  $M_z$ .

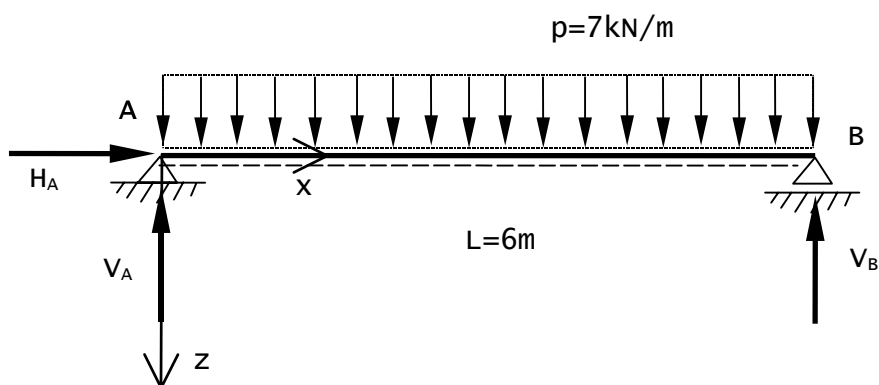


Slika 4.6-7. Prikaz pozitivnih notranjih sil so na preseku z normalo v pozitivni smeri koordinatnih osi, na preseku z negativno normalo pa v obratni smeri.



Slika 4.6-8. Prikaz pozitivnih momentov po klasični definiciji na preseku z normalo v pozitivni smeri x osi ter na preseku z normalo v negativni smeri x osi izbranega lokalnega koordinatnega sistema.

**Zgled 1.** Izračunajmo rezultantne notranje sile za enostavni ravni prostoležeči nosilec obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo, ki je prikazan sliki Z.1.1.



Slika 4.6.Z1-1. Prikaz nosilca, obtežbe in koordinatnega sistema. Na sliki so narisane tudi izbrane predpostavljene smeri reakcij.

**Rešitev.** Začetek koordinatnega sistema izberimo v členkasti nepomični podpori A, lego koordinatnega sistema pa tako, da nosilec in obtežba ležita v ravnini x-z! Imamo torej ravninski problem v ravnini x-z. Ker smo postavili z os obrnjeno navzdol, je pozitivna stran nosilca na spodnji strani in je nakazana s črtkano črto. Izbrani koordinatni sistem uporabimo hkrati kot lokalni za podajanje notranjih sil in globalni, za analizo ravnotežja in podajanje lokacije presekov in notranjih sil, ki delujejo nanje.

Najprej izračunamo reakcije v podporah. Iz ravnotežja v horizontalni in vertikalni smeri ter momentnega ravnotežja okoli točke A, kjer zunanje sile zapišemo kar v izbranem koordinatnem sistemu, dobimo tri enačbe

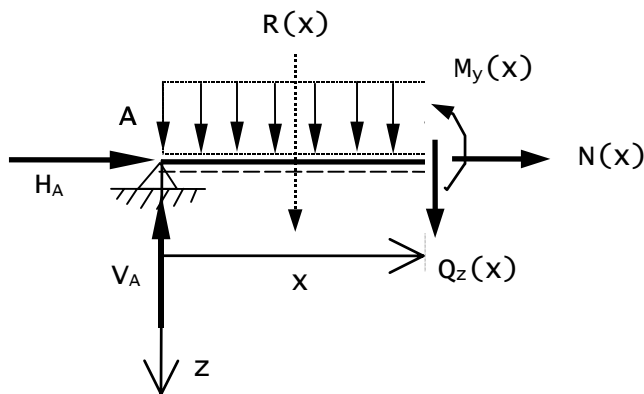
$$\sum_i X_i = H_A = 0$$

$$\sum_i Y_i = -V_A - V_B + p \cdot L = -V_A - V_B + 7 \text{ kN/m} \times 6 \text{ m} = 0$$

$$\sum_i M_{Zi}^A = L \cdot V_B - p \cdot \frac{L^2}{2} = 6m \cdot V_B - 7\text{kN/m} \cdot \frac{(6m)^2}{2} = 0.$$

Rešitev gornjih dveh enačb nam da reakciji

$$V_A = V_B = \underline{21,00\text{kN}}$$



Slika 4.6.Z1-2. Opazovani del nosilca, na katerega deluje obtežba  $H_A$   $V_A$  in  $p$  z rezultanto  $R(x)=p \cdot x$ , notranji rezultatni sili  $N(x)$  in  $Q_z(x)$  ter upogibni moment  $M_y(x)$  v preseku podanem s koordinato  $x$ .

Z izračunanimi reakcijami poznamo vse zunanje sile, ki delujejo na nosilec. Za ravnotežje dela nosilca, ki ga dobimo z navideznim prerezom pri poljubnem  $x$ , slika Z.1.2, dobimo tri ravnotežne enačbe, ki jih je ravno toliko, kolikor je skupaj neznanih rezultatnih sil in momentov v preseku:  $N(x)$ ,  $Q_z(x)$  in  $M_y(x)$ . Njihove predpostavljene smeri so praviloma v pozitivni smeri lokalnega koordinatnega sistema.

Ravnotežne enačbe izpisane v izbranem koordinatnem sistemu so

$$\sum_i X_i = H_A + N(x) = 0$$

$$\sum_i Y_i = -V_A + p \cdot x + Q_z(x) = 0$$

$$\sum_i M_{Zi}^x = -x \cdot V_A + p \cdot \frac{x^2}{2} + M_y(x) = 0,$$

iz katerih izračunamo potek notranjih sil in momentov vzdolž nosilca oziroma za vsak presek določen z vrednostjo  $x$ -a

$$N(x) = 0$$

$$Q_z(x) = V_A - p \cdot x = 21\text{kN} - \frac{7\text{kN}}{m} x[\text{m}]$$

$$M_y(x) = x.V_A - p \cdot \frac{x^2}{2} = x[m].21kN - \frac{7kN}{m} \frac{(x[m])^2}{2} = 21kN \cdot x[m] - 3,5 \frac{kN}{m} (x[m])^2 .$$

V gornjih enačbah smo pripisovali enote dimenzij (meter, kN, kN/m...), ki se morajo deloma okrajšati tako, da dobimo na koncu za prečne sile enote za sile, za momente pa enote za momente. Pripisovanje dimenzij v vmesnih izračunih je zelo priporočljivo tedaj, ko uporabljamo različne velikosti enot ali pa za preverjanje pravilnosti enačb. Dostikrat pa zaradi preglednosti in manjšega obsega pisanja enote napišemo samo rezultatom. Tako enačbo za prečno silo in moment zapišemo krajše kar brez enot

$$Q_z(x) = 21 - 7 \cdot x, \quad 0 \leq x \leq L=6 \quad (1)$$

$$M_y(x) = 21 \cdot x - 3,5 \cdot x^2, \quad 0 \leq x \leq L=6, \quad (2)$$

kjer pa moramo vedeti, kakšne enote imajo posamezna števila in spremenljivke. Pri enačbah zapišemo, kolikor to ni očitno, še področje njene veljavnosti.

Iz enačbe 1 je razvidno, da sta ekstremni vrednosti prečnih sil ob podporah, torej pri  $x=0$  in  $x=L$ :

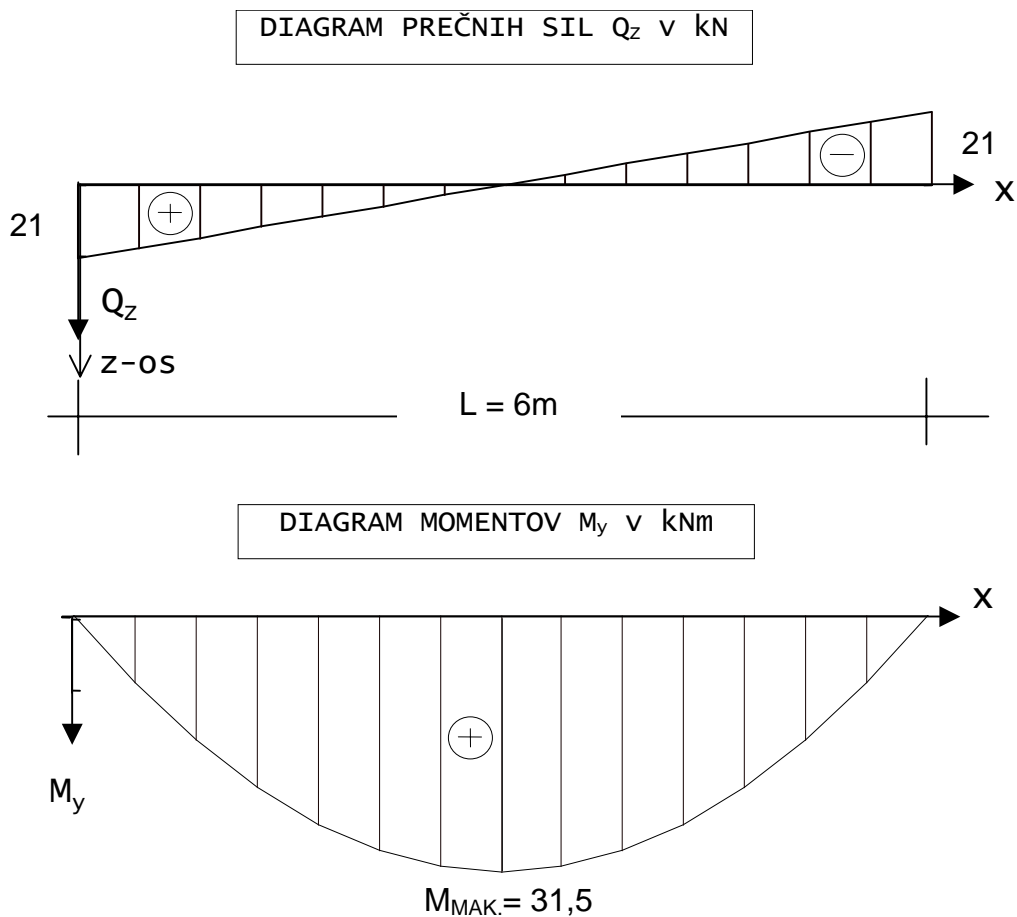
$$Q_z(0) = 21kN - 7kN/m \times 0m = 21kN$$

$$Q_z(x = L = 7m) = 21kN - 7kN/m \times 6m = -21kN .$$

Največji moment dobimo z odvajanjem enačbe 2, tako kot se izračunavajo ekstremi. Odvod je enak nič na sredini nosilca, torej pri  $x=x_{\text{mak}}=L/2=3,0m$ . Največji moment pa je enak

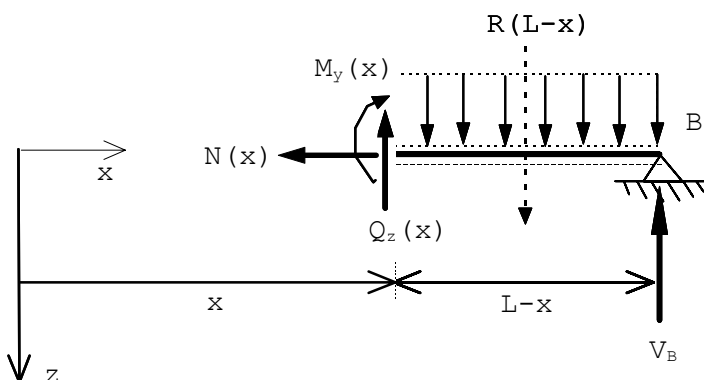
$$M_y(x_{\text{mak}}) = 21x_{\text{mak}} - 6x_{\text{mak}}^2 = 21kN \times 3m - 3,5kN/m \times (3m)^2 = 31,5kNm .$$

Notranje sile in momente prikažemo v obliki **diagrama notranjih sil**. Te diagrame rišemo tako, kot se rišejo funkcije, upoštevaje izbrani koordinatni sistem. V našem primeru  $x$  os poteka po osi nosilca,  $z$  os pa je obrnjena navzdol. Pravokotno na  $x$  os, to je na os nosilca, nanašamo vrednosti notranjih sil in momentov, in sicer pozitivne vrednosti na pozitivno stran nosilca (slika Z.1.3.a,b,c). Tako so pozitivne prečne sile na spodnji strani diagrama, v smeri pozitivne  $z$ -osi. Analogno velja za momente: pozitivne vrednosti so na pozitivni strani, torej v našem primeru na spodnji. V praksi običajno poenostavimo te diagrame tako, da osi na diagramu ne prikazujemo. Tak poenostavljen način bomo pogosto tudi mi uporabljali.



Slika 4.6.Z1-3. Diagrama prečnih sil in upogibnih momentov.

Za zgled prikažimo še izračun notranjih sil, ki ga dobimo iz ravnotežja drugega (desnega) dela elementa, slika Z.1.4. Izračun izvedimo v istem koordinatnem sistemu kot prej. Opozoriti velja, da ima zdaj presek normalo v negativni smeri x osi izbranega koordinatnega sistema, prav tako pa so tudi pozitivne notranje sile na teh presekih obrnjene v negativnih smereh koordinatnih osi.



Slika 4.6.Z1-4. Desni del "presekanega" nosilca.

Na ta del deluje zvezna obtežba, katere rezultanta je

$$R_{L-x} = p \cdot (L-x) = 7 \cdot (6-x) = 42 - 7x.$$

Translatorno ravnotežje v x in z smeri ter momentno ravnotežje okoli podpore B, nam da enačbe

$$\sum_i X_i = N(x) = 0$$

$$\sum_i Y_i = -V_B + p \cdot (L - x) - Q_z(x) = 0$$

$$\sum_i M_{zi}^x = (L - x) \cdot V_B - p \cdot \frac{(L - x)^2}{2} - M_y(x) = 0,$$

iz katerih izračunamo potek notranjih sil oziroma momentov

$$N(x) = 0$$

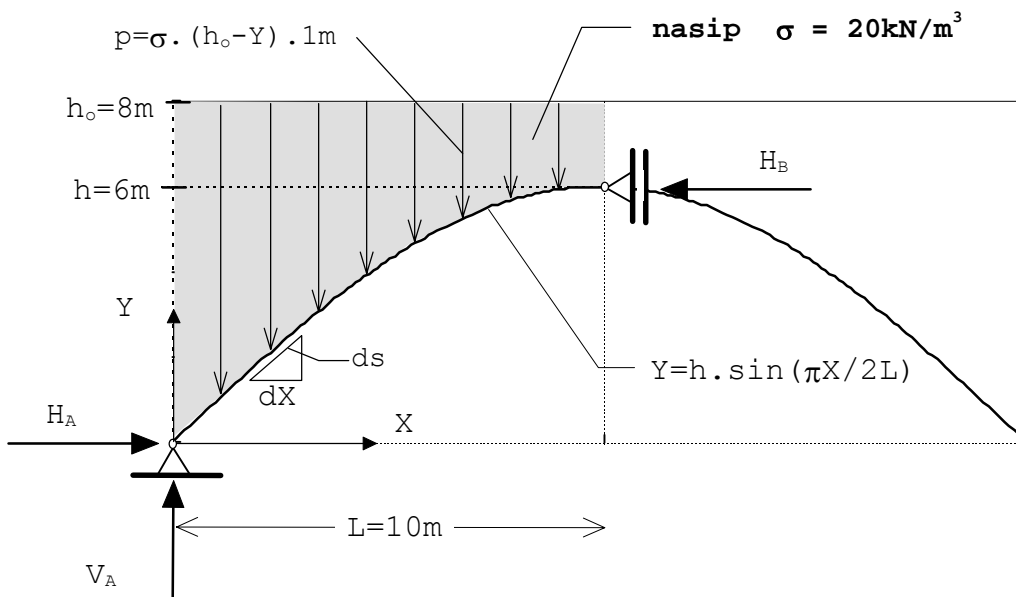
$$Q_z(x) = -V_B + p(L - x) = -21 + 7(6 - x) = 21 - 7 \cdot x$$

$$M_y(x) = (L - x)V_B - p \cdot \frac{(L - x)^2}{2} = (6 - x) \cdot 21 - 7 \cdot \frac{(6 - x)^2}{2} = 21x - 3,5x^2,$$

ki je seveda povsem enak kot pri prvotnem izračunu.

-0-

**Zgled 2.** Izračunajmo potek notranjih sil za polovico oboka viadukta, ki poteka v obliki sinusne krivulje in je obtežen z nasipom (slika Z2-1.). Obok ima na vrhu členek, kjer je zaradi simetrije oboka in obtežbe strižna sila nična in lahko za izračun reakcij na polovici oboka postavimo še drsno podporo. Tak obok predstavlja ukrivljeni linijski element, izračun reakcij in notranji sil je principialno enostaven, matematično pa nekoliko bolj zapleten. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da je obtežba oboka samo v vertikalni smeri in je enaka teži nasipa nad njim.



Slika 4.6.Z2-1. Prikaz dimenzij in nasipa za polovico oboka, ki predstavlja ukrivljeni prostoležeči nosilec, postavitve globalnega koordinatnega sistema XYZ in predpostavljene smeri reakcij.

Za izračun reakcij in notranjih sil je najenostavneje, če upoštevamo obtežbo po loku izraženo glede na tlorisni element dolžine  $dX$  (glej sliko Z2-1) ter za en meter širine nasipa pravokotno na lok:

$$p(X) = \sigma(h_0 - Y) \cdot 1\text{m} = 20\text{kN/m}^3 \cdot \left(8\text{m} - 6\text{m} \cdot \sin \frac{\pi X}{2 \cdot 10}\right) 1\text{m} = 160 - 120 \cdot \sin \frac{\pi X}{20} \quad [\text{kN/m}]$$

Iz ravnotežnih enačb

$$\sum_i F_{iX} = H_A - H_B = 0$$

$$\sum_i F_{iY} = V_A - \int_0^L p(X) dX = 0$$

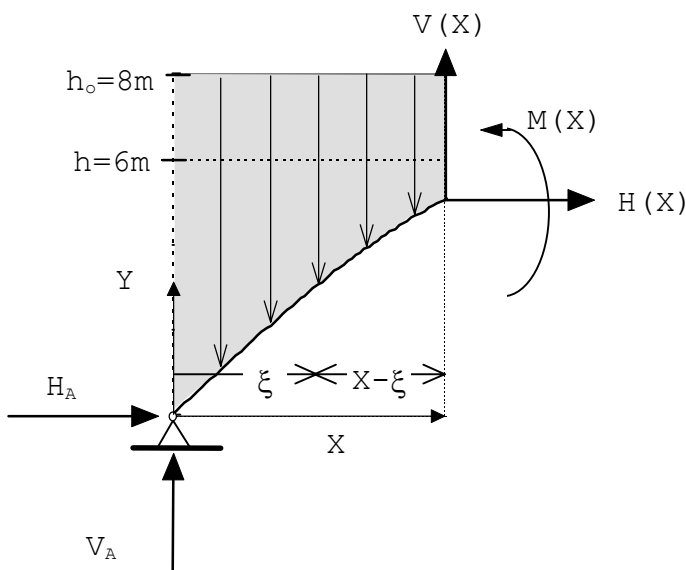
$$\sum_i M_i^A = h \cdot H_B - \int_0^L X \cdot p(X) dX = 0$$

izračunamo reakcije

$$H_A = H_B = \frac{1}{h} \int_0^L X \cdot p(X) dX = \frac{1}{6} \int_0^{10} X \left(160 - 120 \cdot \sin \frac{\pi X}{20}\right) dX = \underline{522,764\text{kN}}$$

$$V_A = \int_0^L p(X) dX = \int_0^{10} \left(160 - 120 \cdot \sin \frac{\pi X}{20}\right) dX = \underline{836,056\text{kN}}$$

Rezultantne sile v presekih izračunajmo najprej v globalnem koordinatnem sistemu  $X, Y, Z$  in jih nato transformirajmo v lokalni sistem  $x, y, z$ .



Slika 4.6.Z2-2. Shematični prikaz "odrezanega" dela loka, resultantnih sil v preseku, določenem z vrednostjo  $X$ -a v globalnem koordinatnem sistemu ter pomen integracijske spremenljivke  $\xi$ .

Iz ravnotežnih enačb za del loka (slika Z2-2)



$$\sum_i F_{iX} = H_A + H(X) = 0$$

$$\sum_i F_{iY} = V_A - \int_0^{\xi=X} p(\xi) d\xi + V(X) = 0$$

$$\sum_i M_i^X = X \cdot V_A - Y \cdot H_A + M(X) + \int_0^{\xi=X} (X - \xi) \cdot p(\xi) d\xi = 0$$

so rezultantne sile in moment v poljubnem preseku določenem z vrednostjo koordinate X:

$$H(X) = -H_A = -522,764 \text{ kN}$$

$$V(X) = -V_A + \int_0^{\xi=X} p(\xi) d\xi = -836,056 + \int_0^{\xi=X} (160 - 120 \cdot \sin \frac{\pi \xi}{20}) d\xi$$

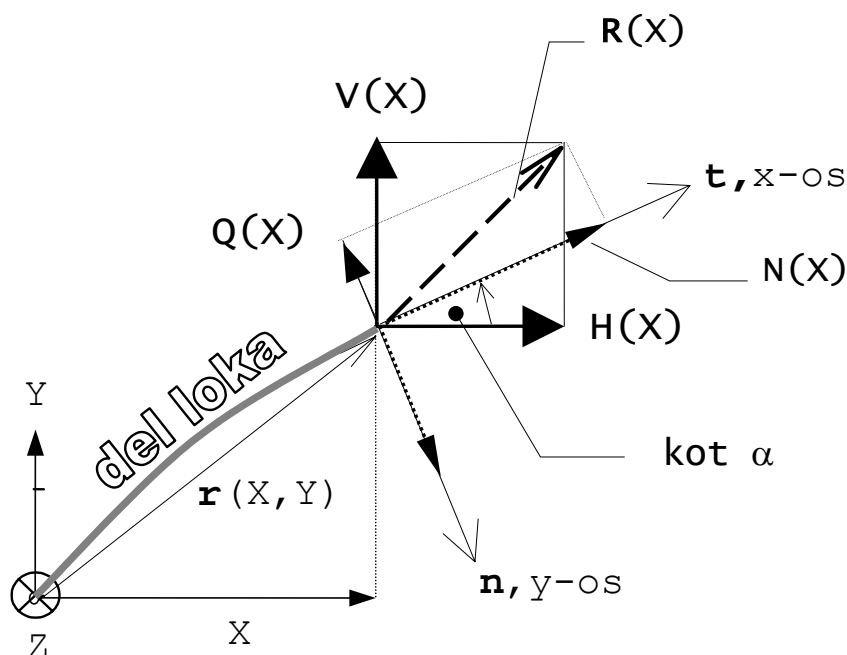
$$V(X) = -1600 + 160X + 763,944 \cdot \cos \frac{\pi X}{20}$$

$$M(X) = -X \cdot V_A + Y \cdot H_A - \int_0^{\xi=X} (X - \xi) \cdot p(\xi) d\xi$$

$$M(X) = -X \cdot 836,056 + 6 \left( \sin \frac{\pi X}{20} \right) \cdot 522,764 - \int_0^{\xi=X} (X - \xi) \cdot (160 - 120 \cdot \sin \frac{\pi \xi}{20}) d\xi$$

$$M(X) = -1600 \cdot X + 8000 \cdot \sin \frac{\pi X}{20} + 80 \cdot X^2$$

Zgoraj izračunane rezultantne sile transformirajmo sedaj še v lokalni koordinatni sistem x, y in z, ki ga tvorijo baza sestavljena iz tangenta, normalnega in binormalnega enotskega vektorja na krivuljo, ki podaja lok (glej sliko Z2-3). Normala je pri ravninskih krivuljah zmeraj usmerjena na konkavno stran krivulje (v smeri središča ukrivljenosti), v našem primeru navzdol, zato je pozitivna stran loka na njegovi spodnji strani!



Slika 4.6.Z2-3. Simbolični prikaz lokalnega koordinatnega sistema  $xyz$ , rezultantne sile  $\mathbf{R}(X)$  v preseku ter njene razstavitve na komponente  $H, V$  v globalnem in razstavitve na komponente  $N, Q$  v lokalnem koordinatnem sistemu. Velja opomniti, da bi bila za prikazano situacijo prečna sila  $Q(x)$  v lokalnem koordinatnem sistemu  $-Q_y(x)$ , torej negativna .

Krajevni vektor  $\mathbf{r}$ , ki podaja lego točk na osi loka, je

$$\mathbf{r} = (X, Y) = ( X, 6 \cdot \sin(\pi X / 20),$$

njegov odvod pa je

$$\mathbf{r}' = d(X, Y(X)) / dX = (1, 3\pi / 10 \cdot \cos(\pi X / 20)).$$

Tangentni in normalni vektor izračunamo s pomočjo enačb diferencialne geometrije

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \frac{\left( 1, \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20} \right)}{\sqrt{1 + \left( \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20} \right)^2}}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|} = \frac{\left( \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20}, -1 \right)}{\sqrt{1 + \left( \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20} \right)^2}}.$$

Omenimo naj, da pri ravninskih krivuljah dobimo tangentni vektor enostavno z normiranjem vektorja  $(1, Y')$ . Normalni vektor pa dobimo kar z zamenjavo komponent tangentnega vektorja in ustreznimi predznaki, da dobimo pravo smer. V našem normiramo vektor  $(Y', -1)$ . Velja opozoriti, da je normala na os loka usmerjena po definiciji na konkavno stran – torej navzdol.

Oсна sila je enaka projekciji rezultante na tangento

$$N(X) = \mathbf{t}(X) \cdot \mathbf{R}(X) = \frac{\left(1, \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20}\right) \cdot \left(-522.764, -1600 + 160X + 763,944 \cos \frac{\pi X}{20}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20}\right)^2}}$$

$$N(X) = \frac{-522.764 + \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20} (-1600 + 160X + 763,944 \cos \frac{\pi X}{20})}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20}\right)^2}},$$

prečna pa projekciji rezultante na normalo

$$Q(X) = \mathbf{n}(X) \cdot \mathbf{R}(X) = \frac{\left(\frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20}, -1\right) \cdot \left(-522.764, -1600 + 160X + 763,944 \cos \frac{\pi X}{20}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20}\right)^2}}$$

$$Q(X) = \frac{-522.764 \times \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20} + 1600 - 160X - 763,944 \cos \frac{\pi X}{20}}{\sqrt{1 + \left(\frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20}\right)^2}}.$$

Glede na lokalni koordinatni sistem predstavljajo izračunane notranje sile in momenti sledeče komponente

$$N(X) = N_x \equiv N$$

$$Q(X) = Q_y(X)$$

$$M(X) = M_z(X).$$

Ekstremni moment dobimo z odvodom:

$$\frac{\partial}{\partial X} M(X) = \frac{\partial}{\partial X} \left(-1600 \cdot X + 8000 \cdot \sin \frac{\pi X}{20} + 80 \cdot X^2\right)$$

$$= -1600 + 8000 \frac{\pi}{20} \cos \frac{\pi X}{20} + 160 \cdot X = 0$$

Rešitev gornje enačbe je pri  $X_{ek.} = 3,005\text{m}$ , ki nam da ekstremni moment

$$M(X = 3,005) = -1600 \times 3,005 + 8000 \times \sin \frac{\pi 3,005}{20} + 80 \times 3,005^2 = -4,4808\text{kNm}$$

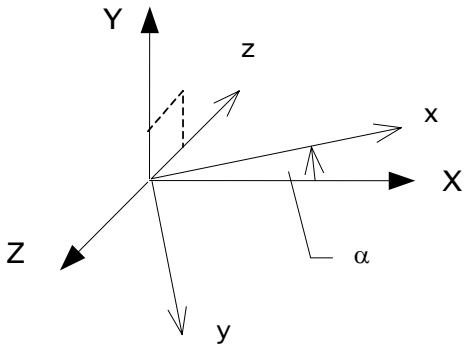
Kasneje bomo dokazali, da ekstremni moment nastopi natanko tam kjer je prečna sila nična.

Velja opozoriti: kadar analiziramo notranje sile najprej v nekem globalnem koordinatnem sistemu, jih izračunamo v lokalnem lahko s **transformacijo**. V našem primeru bi izračunali osno in prečno silo s transformacijo

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q(=Q_y) \\ Q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ V \\ 0 \end{Bmatrix},$$

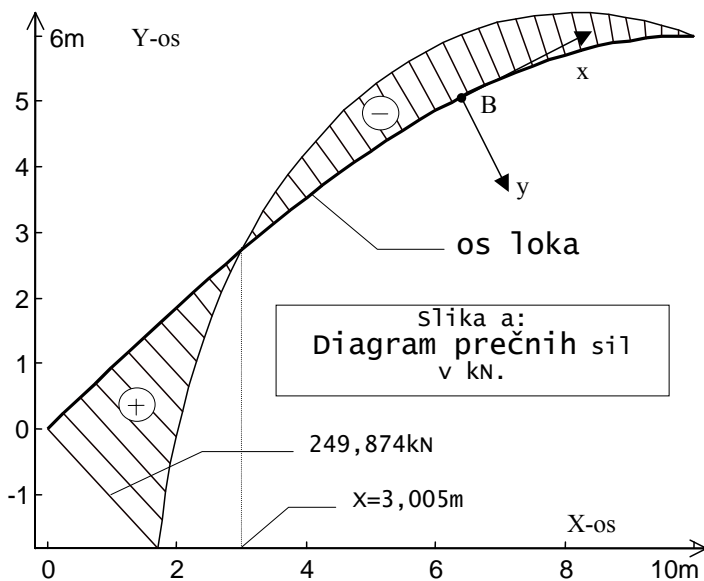
ki nam transformira koordinate vektorja iz koordinatnega sistema  $X, Y, Z$  v koordinatni sistem  $x, y, z$  (glej sliko Z2-4). Kot  $\alpha$  je podan s tangensom naklonskega kota krivulje, ki podaja os lok v koordinatnem sistemu  $X, Y$  (glej sliko Z2-3 in Z2-4):

$$\tan\alpha = Y' = \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi X}{20}.$$

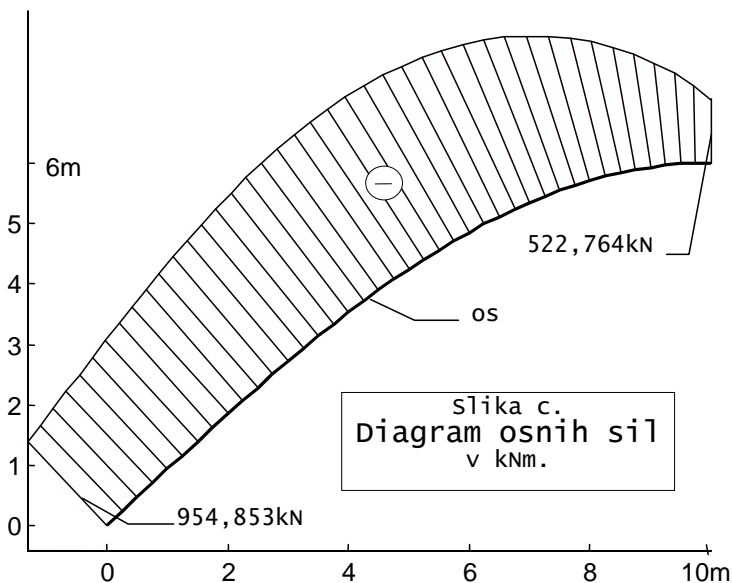
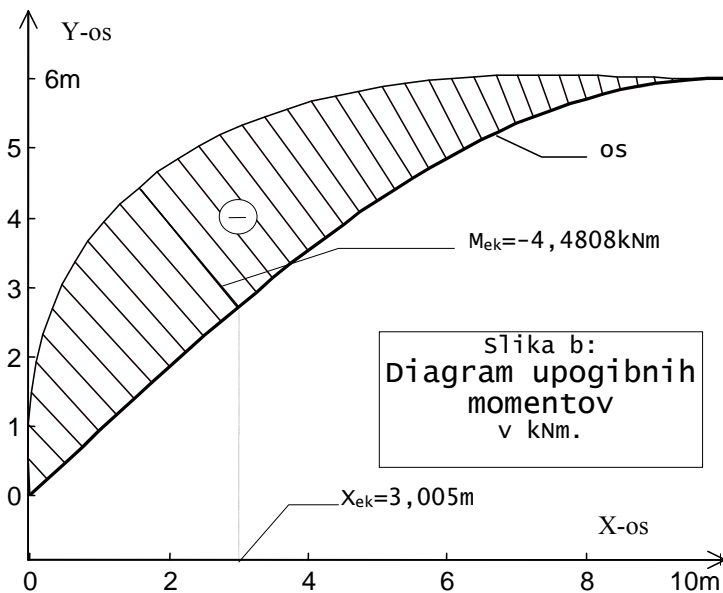


Slika Z2-4. Shematični prikaz medsebojne lege globalnega in lokalnega koordinatnega sistema, kjer osi  $X, Y$  in  $x, y$  ležijo v isti ravnini, osi  $z$  pa sta si nasprotni. Oba sistema sta Kartezijska.

Prikažimo še potek vseh izračunanih vrednosti notranjih sil in momentov z diagrami (slike Z2-5.a,b in c). Na teh diagramih je lega osi loka podana v globalnem koordinatnem sistemu  $XYZ$ . Vrednosti notranjih sil so seveda glede na lokalni sistem in so nanesene pravokotno na os loka. Zaradi poučnosti je na sliki a v točki B narisan lokalni koordinatni sistem.



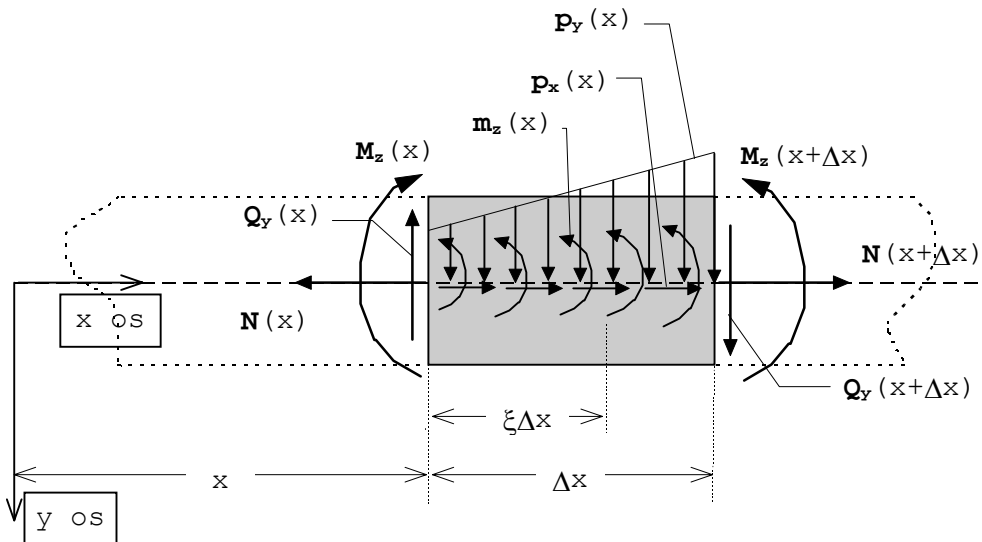
Sliki 4.6.Z2-5 a. Diagram prečnih sil.



Sliki 4.6.Z2-5 b in c. Diagrama osnih sil in momentov.

**4.7. Diferencialne enačbe ravnotežja ravnih linijskih elementov.** Pri statični analizi linijskih elementov nas zanima, kako se spreminjajo notranje sile vzdolž njihovih osi v odvisnosti od obtežbe. Posebno pomembno je ugotoviti, kje se pojavijo ekstremne vrednosti in kolikšne so. S pomočjo diferencialnih enačb ravnotežja ravnih linijskih elementov, na kratko jih imenujmo kar diferencialne enačbe ravnotežja, lahko to učinkovito in pregledno izvedemo. Risanje in analiza diagramov ter analiza vpliva obtežbe je bistveno bolj učinkovita, kot analiza vrednosti notranjih količin v posameznih presekih elementov.

**Izpeljava diferencialnih enačb ravnotežja za ravne elemente.** Zaradi nazornosti obravnavajmo samo ravninski problem. Zaključke namreč lahko enostavno razširimo na splošni prostorski problem. Opazujmo poljubni majhni del ravnega linijskega elementa dolžine  $\Delta x$ , slika 1. Nanj naj deluje najbolj splošna možna spremenljiva vendar **zvezna obtežba**, ki je že reducirana na os elementa. Ta obtežba zajema poleg linijske obtežbe s silami tudi linijsko obtežbo z momenti, ki se praviloma pojavijo pri redukciji obtežbe na os elementa. Praktično se taki momenti pojavljajo na primer pri nosilcih, ki podpirajo v njih vpete plošče. Poleg te obtežbe delujejo na obeh krajiščih opazovanega dela nosilca še rezultantne presečne sile in momenti.



Slika 4.7-1. Simbolični prikaz obtežbe v ravnini x-y na del elementa dolžine  $\Delta x$ . Zaradi preglednosti niso narisani torzijski momenti

Za linijski element v mirovanju, v statičnem ravnotežju, so tudi vse sile in momenti, ki delujejo na del elementa v ravnotežju. Poglejmo si bolj natančno izpeljavo za ravnotežje v y smeri, za ostale smeri je postopek analogen. Za ravnotežje v smeri y najprej ugotovimo, da je  $\Delta P_y$ , to je rezultanta zvezne linijske obtežbe  $p_y$  v smeri y, v skladu z izrekom o povprečni vrednosti funkcije enaka

$$\Delta P_y(x) = p_y(x + \xi \Delta x) \Delta x.$$

$\xi$  zavzema neko vrednost med 0 in 1. Tedaj je ravnotežna enačba enaka

$$\sum_i Y_i = -Q_y(x) + Q_y(x + \Delta x) + p_y(x + \xi \Delta x) \Delta x = 0.$$

Ko enačbo preuredimo, jo delimo z  $\Delta x$  in smatramo, da gre dolžina elementa proti nič, dobimo enačbo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{Q_y(x + \Delta x) - Q_y(x)}{\Delta x} \right\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -p_y(x + \xi \Delta x) \right\}.$$

V enačbi je limita diferenčnega kvocienta, ki je po definiciji enaka odvodu. S tem dobimo diferencialno enačbo ravnotežja v y smeri, ki podaja diferencialno zvezo med prečno silo in prečno obtežbo,

$$\boxed{\frac{d}{dx} Q_y(x) = -p_y(x)}. \quad (1)$$

Ta enačba »pravi«, da je odvod prečne sile po osi elementa, izvrednoten v preseku x, enak negativni vrednosti zvezne prečne obtežbe v tej točki osi elementa.

Za ravnotežje v smeri  $x$  dobimo enačbo

$$\sum_i X_i = -N_y(x) + N_y(x + \Delta x) + p_x(x + \xi_1 \Delta x) \Delta x = 0,$$

ki se na analogen način kot za prečne sile reducira v diferencialno zvezo med osno silo in osno zvezno obtežbo:

$$\boxed{\frac{d}{dx} N(x) = -p_x(x)} \quad (2)$$

Momentno ravnotežje okoli težišča preseka pri  $x + \Delta x$  nam da enačbo

$$\sum_i M_{zi}^{(x+\Delta x)} = -Q_y(x) \Delta x + M_z(x) - M_z(x + \Delta x) - m_z(x + \xi_2 \Delta x) \Delta x - p_y(x + \xi_3 \Delta x) \Delta x \cdot (\xi_3 \Delta x) = 0$$

kjer predzadnji sumand predstavlja rezultatni moment zvezne momentne obtežbe, zadnji sumand pa predstavlja produkt rezultante zvezne obtežbe  $p_y$  in njene ročice  $\xi_2 \Delta x$ . Faktorji  $\xi$ ,  $\xi_2$  in  $\xi_3$  pa imajo vrednost med 0 in 1. Enačbo preuredimo, jo delimo z  $\Delta x$  in limitiramo dolžino elementa proti nič:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{M_z(x + \Delta x) - M_z(x)}{\Delta x} \right\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ Q_y(x) - m_z(x + \xi_2 \Delta x) - p_y(x + \xi_3 \Delta x) \xi_2 \Delta x \right\}.$$

V limiti vpliv zvezne obtežbe izgine, ker je pomnožena z  $\Delta x$ , rezultat pa je diferencialna zveza med upogibnim momentom, prečno silo in zvezno momentno obtežbo

$$\boxed{\frac{d}{dx} M_z(x) = -m_z(x) + Q_y(x)}. \quad (3)$$

V gornji enačbi smo upoštevali, da je linijsko razporejeni obremenitveni moment  $m_z(x)$  pozitiven glede na klasično definicijo pozitivnosti. V primerih, ko je ta zvezni obremenitveni moment ničen, nam gornja enačba pove, da nastopi **lokalna ekstremna vrednost upogibnega momenta v preseku, kjer je prečna sila nična!** Povsem natančno rečeno je nični odvod momenta, torej nična prečna sila, samo potreben pogoj za nastop ekstrema. Nastopil bi namreč lahko še prevoj, kjer je prečna sila tudi nična, vendar pa pri realnih obremenitvah takšen slučaj redko nastopi. Tedaj bi, na primer, morala delovati poleg sile teže še na delu nosilca obtežba v nasprotni smeri. Tako lahko mesto ekstremnega momenta ugotovimo kar iz diagrama prečnih sil. Obenem je to dejstvo zanimivo z inženirskega stališča, ker nam zagotavlja, da ne pride do koncentracije največjih obremenitev hkrati z ekstremnim upogibnim momentom in prečno silo. Iz gornje enačbe sledi še en koristen zaključek, in sicer, da je ob  $m_z=0$  **tangens naklonskega kota tangente na diagramu momentov enak prečni sili:**

$$\tan(\alpha_{M(x)}) = Q(x).$$

Neposredno zvezo med zvezno obremenitvijo  $p_y(x)$  in upogibnim momentom  $M_z(x)$  dobimo, ko moment v enačbi (3) še enkrat odvajamo:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} M_z(x) \right\} = \frac{d}{dx} \left\{ -m_z(x) + Q_y(x) \right\}.$$

Ob upoštevanju, da je odvod prečne sile enak prečni obtežbi, enačba 1, dobimo iz gornje enačbe enačbo 4.

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} M_z(x) = -\frac{d}{dx} m_z(x) - p_y(x)}. \quad (4)$$

Na analogen način izpeljemo še enačbe za ravnotežje v ravnini x-z

$$\frac{d}{dx} Q_z(x) = -p_z(x) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} M_y(x) = -m_y(x) + Q_z(x) \quad (6)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} M_y(x) = -\frac{d}{dx} m_y(x) - p_z(x) \quad (7)$$

ter za torzijski moment

$$\frac{d}{dx} M_x(x) = -m_x(x) \quad (8)$$

**Rešitve diferencialnih enačb ravnotežja** nam dajo potek notranjih sil in momentov na posameznih segmentih ravnih linijskih elementov, kjer splošne rešitve lahko dobimo z zaporednimi integracijami enačb. Za primer, splošni rešitvi enačbe za prečne sile, enačba (1), in za momente brez zvezne momentne obtežbe  $m_z(x)=0$ , enačba (4), sta:

$$Q(x) = \int p dx + C_1 \quad (9)$$

$$M(x) = \iint p dx^2 + C_1 x + C_0. \quad (10)$$

V prvi enačbi integracijsko konstanto  $C_1$  za prečne sile lahko izvednotimo, če poznamo v neki točki vrednost prečne sile. Integracijski konstanti  $C_1$  in  $C_0$  za momente lahko izvednotimo, če poznamo vrednost momenta v dveh točkah, ali pa moment in prečno silo v isti ali dveh različnih točkah. Dobljene rešitve enačb 9 in 10 so seveda povsem identične rešitvam, ki jih dobimo iz ravnotežnih enačb za "odrezani" del linijskega elementa, kot smo to prikazali v predhodnih poglavjih. Lahko bi rekli, da je slednji način inženirsko bolj pregleden in pomenljiv, zato se v praksi analiza notranjih sil z reševanjem diferencialnih enačb ni posebno uveljavila.



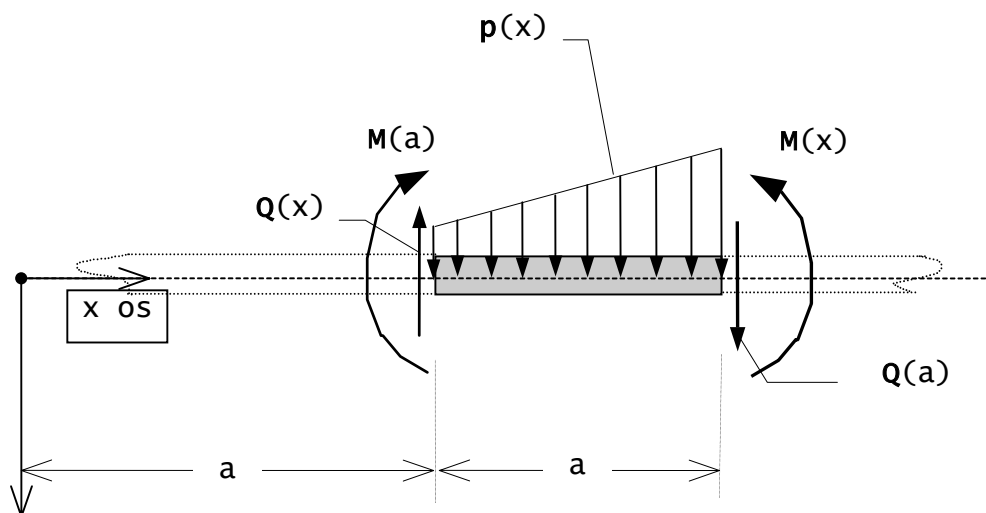
Zapišimo še rešitve gornjih enačb ob predpostavki, da poznamo ustrezne vrednosti v točki  $x=a$ :

$$Q(x) = \int_a^{t=x} p(t)dt + Q(a) \quad (11)$$

in

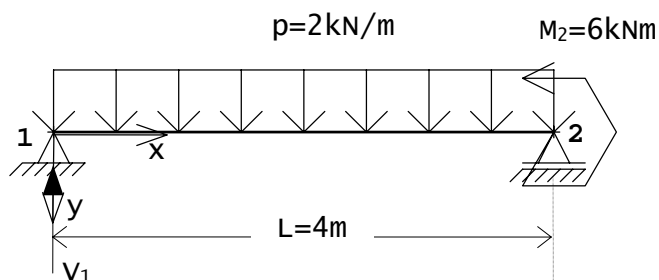
$$M(x) = \int_{s=a}^x ds \int_{t=a}^s p(t)dt + Q(a)x + M(a). \quad (12)$$

Pomen gornjih enačb je bolj razumljiv, če si pogledamo sliko 2, ki prikazuje segment elementa. Začetek segmenta je pri  $x=a$ , konec pa pri  $x$ , obremenjen pa je z obtežbo  $p(x)$ . Iz ravnotežja v vertikalni smeri dobimo natanko enačbo 9, kjer integral pomeni rezultanto obtežbe  $p(x)$ . Iz momentnega ravnotežja okoli točke, ki jo določa presek  $x$ , dobimo enačbo 10. Integral v tej enačbi predstavlja moment obtežbe  $p(x)$  glede na omenjeno točko  $x$ . Te enačbe so zelo priročne za računanje notranjih sil za dolge ravne elemente, ki so obremenjeni z različno segmentno obtežbo. Tedaj računamo notranje sile sukcesivno: po segmentih. Pri tem so zmeraj vhodni podatki rezultati izračuna predhodnega segmenta. S tem se izognemo, da bi vsakokrat računali vso obtežbo na »odrezanem« delu elementa.



Slika 4.7-2. Segment elementa ter sile in momenti, ki nanj delujejo. Iz obtežbe in znanih vrednosti  $Q(a)$  in  $M(a)$  v levem preseku lahko izračunamo vrednosti desnega preseka  $Q(x)$  in  $M(x)$ .

**Zgled 1.** Za prostoležeči nosilec z enakomerno zvezno obtežbo in robno momentno obremenitvijo podan na sliki Z1-1. izračunajmo potek prečnih sil in momentov.



Slika 4.7.Z1-1. Prikaz obtežbe, dimenzij in koordinatnega sistema za prostoležeči nosilec.

Rešitev. Samo zaradi poučnosti rešimo problem s pomočjo rešitev diferencialnih enačb, čeprav je to način, ki ni običajen. Ob reševanju pa si oglejmo še nekatere druge pomembne relacije.

Za prečne sile velja enačba

$$Q(x) = -\int p dx + C_1 = -\int 2 dx + C_1 = -2x + C_1. \quad (Z1-1)$$

Ker v tem primeru ne poznamo prečne sile nikjer, jo moramo izračunati v neki izbrani točki. Izračunajmo prečno silo ob podpori 1 iz momentnega ravnotežja okoli podpore 2. Ta prečna sila je seveda enaka reakciji  $V_1$ :

$$Q(x=0) = \frac{1}{L} M_2 + p \cdot L/2 = \frac{1}{4} 6 + 2 \times 4/2 = 5,5 \text{ kN}.$$

Iz splošne rešitve (1) izračunamo konstanto  $C_1$

$$Q(x=0) = 5,5 \text{ kN} = -2 \times 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 5,5 \text{ kN}$$

in rešitev za prečne sile je

$$Q(x) = -2x + 5,5.$$

Splošna rešitev za momente je

$$M(x) = -\iint p dx^2 + C_1 x + C_0 = -\iint 2 dx^2 + C_1 x + C_0 = -2 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_0. \quad (Z1-2)$$

Ker poznamo dve vrednosti za momente, pri  $x=0$  je  $M=0$  in pri  $x=L$  je  $M=M_2$ , izračunamo konstanti iz enačb

$$M(0) = 0 = -2 \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_0$$

$$M(x=L=4) = M_2 = 6 = -2 \frac{L^2}{2} + C_1 L + C_0 = -2 \frac{4^2}{2} + C_1 4 + C_0.$$

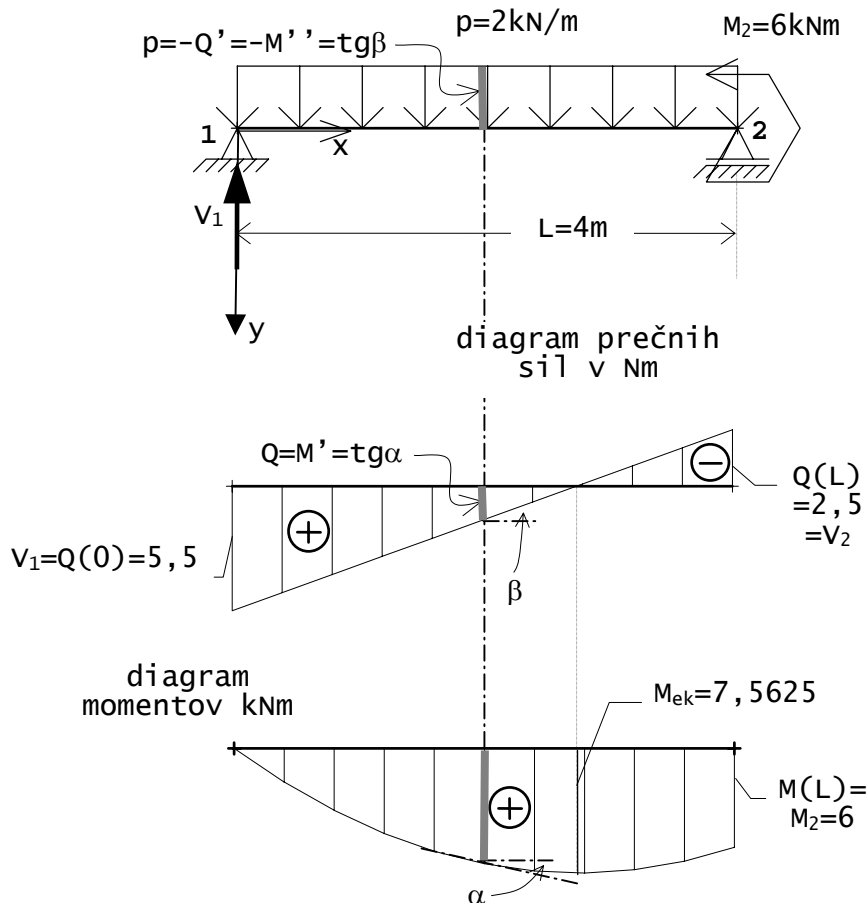
Rešitvi sta

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 5,5$$

in momenti so

$$M(x) = -x^2 + 5,5x.$$



Slika 4.7.Z1-2. Diagram prečnih sil in upogibnih momentov.

Izračunajmo še lokacijo in vrednost največjega momenta:

$$Q(x) = \frac{d}{dx} M(x) = \frac{d}{dx} (-x^2 + 5,5x) = -2x + 5,5$$

$$Q(x) = -2x + 5,5 = 0 \Rightarrow x_{ek} = 2,75\text{m} \quad (3)$$

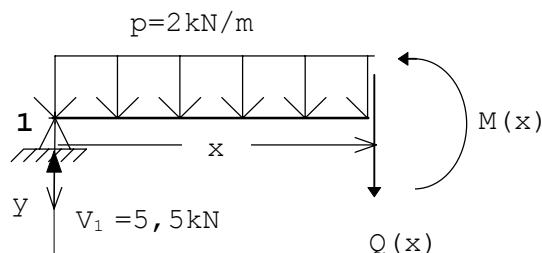
$$M(x_{ek}) = -x_{ek}^2 + 5,5x_{ek} = -2,75^2 + 5,5 \times 2,75 = 7,5625\text{kNm}. \quad (4)$$

Potek izračunanih prečnih sil in momentov je prikazan na diagramih na sliki Z.1.2. Na diagramih še preglejmo nekatere zakonitosti, ki izhajajo iz diferencialnih enačb. Te zakonitosti so na sliki prikazane na eni vertikalni liniji. Odvod momenta je tangens naklonskega kota diagrama momenta,  $\tan\alpha$ , in je enak prečni sili  $Q$ . Odvod prečne sile je tangens naklonskega kota diagrama prečne sile,  $\tan\beta$ , in je enak negativni vrednosti prečne obtežbe  $p$ . Upoštevati moramo, da je  $y$  os postavljena navzdol, zato je pozitiven nagib tudi navzdol. Vrednosti reakcij so z ustreznim predznakom enake prečnim silam na krajiščih diagrama.

Za zaključek omenimo, da bi enačbi za prečne sile in momente, enačbi 3 in 4, dobili iz analize ravnotežja dela nosilca, ki je prikazan na sliki Z.1.3. Iz momentnega ravnotežja okoli preseka  $x$  sledi:

$$-M(x) + V_1x - px^2 / 2 = 0 \Rightarrow M(x) = 5.5x - x^2.$$

Z odvajanjem te enačbe ali pa direktno iz ravnotežja v vertikalni smeri pa dobimo še analitični izraz za prečne sile.



Slika 4.7.Z1-3. “Odrežani” del nosilca za izračun notranjih sil.

-0-

Iz **diferencialnih enačb ravnotežja lahko ugotovimo principialni potek notranjih sil**. Če je na primer na nekem delu ravnega linijskega elementa zvezna obtežba konstantna, tedaj iz enačbe (5) sledi, da se prečne sile spreminjajo linearno, iz enačbe 7 pa ugotovimo, da se momenti spreminjajo v skladu s kvadratno parabolo (glej tudi zgornji zgled). Formalno lahko to premislamo v obratni smeri. Predpostavimo, da moment poteka po kvadratni paraboli,

$$M(x) = a + bx + cx^2$$

tedaj je prečna sila enaka

$$Q(x) = \frac{\partial}{\partial x} M(x) = \frac{\partial}{\partial x} (a + bx + cx^2) = b + 2cx$$

in poteka linearno. Obtežba pa je konstantna:

$$p(x) = -\frac{\partial}{\partial x} Q(x) = -\frac{\partial}{\partial x} (b + 2cx) = -2c.$$

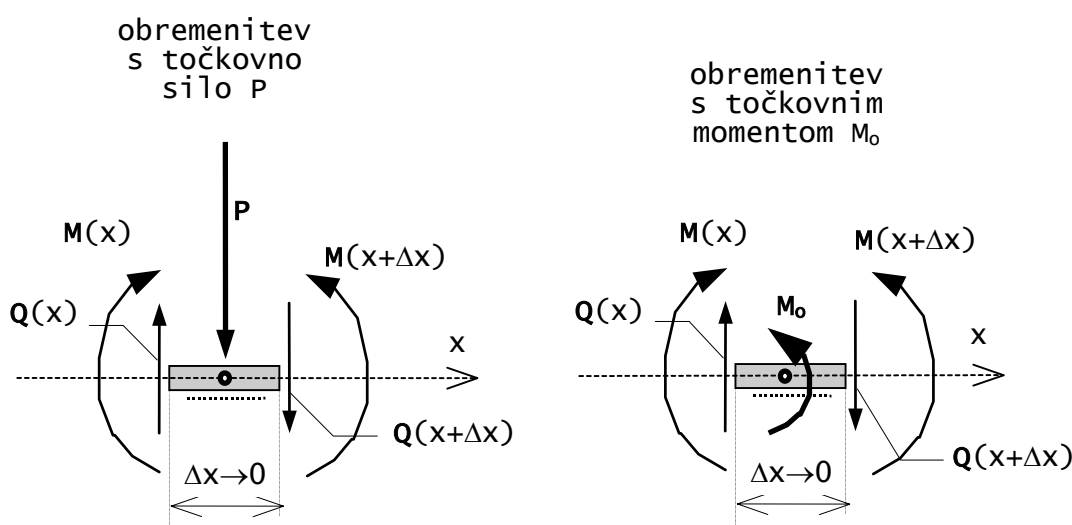
obtežba $p(x)$	potek prečnih sil $Q(x)$	potek upogibnih momentov $M(x)$
$p(x)=0$ (ni obtežbe)	konstanten	linearen
$p(x)=\text{konstanta}$	linearen	po kvadratni paraboli
obtežba se spreminja linearno	po kvadratni paraboli	po kubični paraboli

**Tabela 1.** Soodvisnost poteka obtežbe, prečnih sil in upogibnih momentov v praksi najbolj pogostih tipov obtežb.

V tabeli 4.7-1, ki jo bomo s pridom uporabljali pri statični analizi, so podani poteki prečnih sil in momentov za nekatere v praksi najbolj pogoste primere obtežb.

Poleg zvezne obtežbe so lahko **linijski elementi obremenjeni še s koncentriranimi silami in momenti**. Zato si oglejmo potek notranjih sil in momentov pri taki obtežbi. Pri analizi takih obremenitev si ne moremo pomagati z diferencialnimi enačbami, ker so na mestih koncentriranih obremenitev odvodi nezvezni. Omenimo naj, da formalno matematično lahko take probleme rešujemo z razporeditvenimi funkcijami (Dirakova in Heavisideova funkcija), vendar pa je tak pristop primernejši samo za teoretične analize in tudi na primer za kodiranje računalniških programov za statično ali dinamično analizo konstrukcij.

Poglejmo si del linijskega elementa, kjer deluje točkovna (koncentrirana) sila in del, kjer deluje točkovni moment (slika 2).



Slika 2. Infinitezimalno mali segment linijskega elementa obremenjen s točkovno silo in segment s točkovnim obremenjen z momentom.

Iz ravnotežja diferencialno majhnega segmenta linijskega elementa **obremenjenega s točkovno silo** sledi enačbi

$$Q(x+dx) - Q(x) = -P$$

in

$$M(x+dx) = M(x),$$

ki pravita, da ima **prečna sila na mestu obremenitve s točkovno prečno silo P diskontinuiteto, ki je enaka velikosti sile, upogibni moment pa je zvezen**, slika 3.

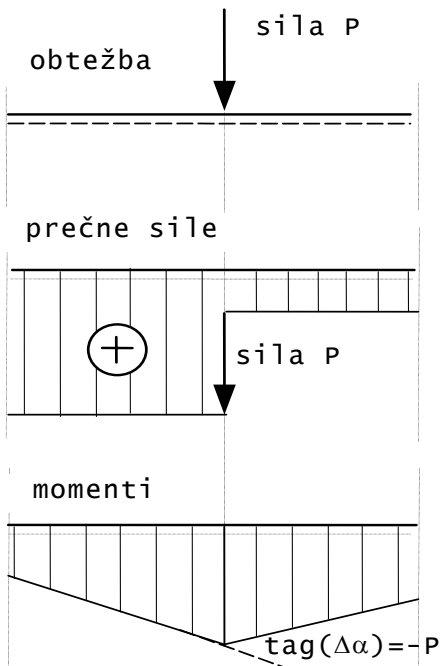
Iz ravnotežja segmenta **obremenjenega s točkovnim momentom** pa ugotovimo, da je

$$Q(x+dx) = Q(x)$$

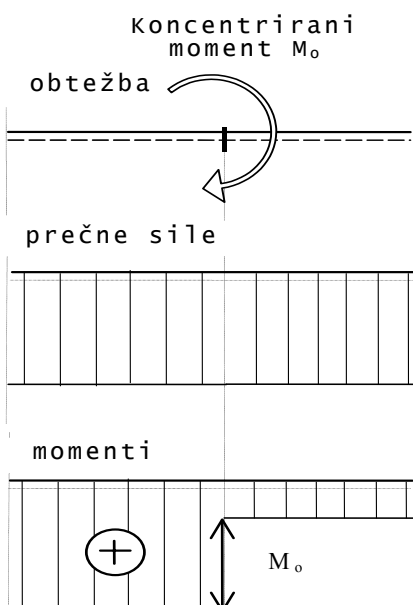
in

$$M(x+dx) - M(x) = -M_0.$$

Z besedami povedano: **prečna sila je na mestu obremenitve s točkovnim momentom  $M_0$  zvezna, upogibni moment pa ima diskontinuiteto, ki je enaka velikosti momenta  $M_0$ .** Za točkovne osne sile in torzijske obremenitve pridemo do analognih zaključkov. Na sliki 3 je simbolični prikaz poteka notranjih prečnih sil in momentov na segmentu obremenjenem s točkovno silo, na sliki 4 pa za obremenitev s koncentriranim momentom.



Slika 4.7-3. Principialni potek prečnih sil in momentov na segmentu obremenjenem s točkovno silo P.



Slika 4.7-4. Principialni potek prečnih sil in momentov na segmentu obremenjenem s točkovnim momentom  $M_0$ .

**4.8. Poimenovanje linijskih elementov** kot konstruktivnih elementov ne zavisi od njihove oblike, ampak od njihove konstruktivne vloge. Običajno velja sledeča terminologija, ki jo navajamo za najbolj pogoste primere ravnih linijskih elementov:

- 1) **Nosilec** je linijski element, ki je položen horizontalno, podprt na obeh koncih in prenaša predvsem vertikalno (prečno obremenitev). Odvisno od robnih pogojev govorimo o obojestransko vpetem nosilcu, enostransko vpetem nosilcu, ki je na drugi strani vrtljivo podprt, in prostoležečem nosilcu
- 2) **konzolni nosilec** je linijski element, ki je položen horizontalno, samo na eni strani je vpet, na drugi pa ni podpore, prenaša predvsem vertikalno (prečno obremenitev)
- 3) **steber** je linijski element, ki stoji vertikalno, podprt je na enem ali obeh koncih in prenaša predvsem osno obremenitev. Odvisno od robnih pogojev govorimo o obojestransko vpetem stebru, enostransko vpetem, ki je na drugi strani vrtljivo podprt, in konzolnem stebru.

	<p>prostoležeči nosilec z enakomerno zvezno obtežbo</p> <p>reakcije</p> $V_A = V_B = \frac{pL}{2}$ <p>ekstremni moment</p> $M(L/2) = \frac{pL^2}{8}$
	<p>prostoležeči nosilec s koncentrirano silo P</p> <p>reakcije</p> $V_A = \frac{Pb}{L} \quad V_B = \frac{Pa}{L}$ <p>ekstremni moment</p> $M = \frac{Pab}{L}$
	<p>prostoležeči nosilec s koncentriranim momentom</p> <p>reakcije</p> $V_A = V_B = \frac{M_o}{L}$ <p>ekstremna momenta</p> $M_L = \frac{M_o a}{L}, \quad M_L = -\frac{M_o b}{L}$

Tabela 4.8-1. Diagrami prečnih sil in momentov ter ekstremne vrednosti za nekatere najbolj pogoste in enostavne obtežne primere prostoležečega nosilca.

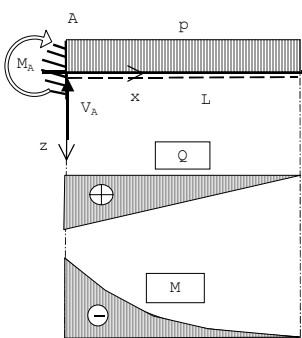
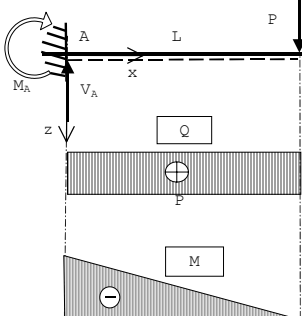
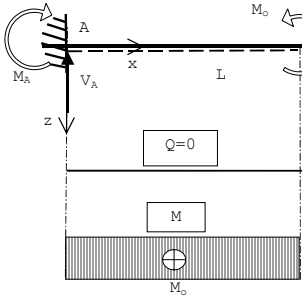
	<p>konzolni nosilec z enakomerno zvezno obtežbo</p> <p>reakcija  <math>V_A = pL</math></p> <p>ekstremni moment  <math>M = \frac{pL^2}{2}</math></p>
	<p>konzolni nosilec s koncentrirano silo P</p> <p>reakcija  <math>V_A = P</math></p> <p>ekstremni moment  <math>M = PL</math></p>
	<p>konzolni nosilec s koncentriranim momentom</p> <p>reakcije  <math>V_A = 0</math></p> <p>ekstremni moment  <math>M = M_o</math></p>

Tabela 4.8-2. Diagrami prečnih sil in momentov ter ekstremne vrednosti za nekatere najbolj pogoste in enostavne obtežne primere konzolnega nosilca.

Poglejmo si reakcije in **potek notranjih sil in momentov za najbolj pogoste slučaje** prikazane v Tabelah 1 in 2.

V tabeliranih primerih si velja zapomniti nekatere pomembne značilnosti. Pri obremenitvi prostoležečega nosilca s koncentrirano silo nastopi največji moment, ko je sila na sredini. Tedaj je moment enak  $PL/4$ , reakciji pa enaki,  $PL/2$ . Če primerjamo to obtežbo z zvezno obtežbo  $p(x)=p_o=\text{konst.}$ , katere rezultanta je enaka P, torej  $pL=P$ , tedaj je največji moment dvakrat manjši od momenta za koncentrirano silo. Torej se z enakomerno razporeditvijo sile po celem nosilcu moment za dvakrat zmanjša.

Pri obremenitvi prostoležečega nosilca s koncentriranim momentom reakcije niso odvisne od njegove lokacije, ekstremni notranji momenti pa so odvisni. Največji so, ko je obremenitev z momentom kar na krajišču nosilca in so seveda enaki obremenilnemu momentu.

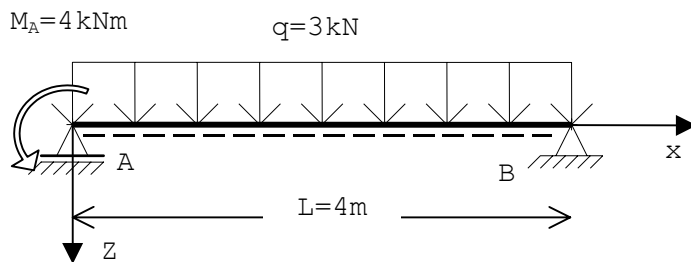
Pri obremenitvi konzolnega nosilca s koncentriranim momentom reakcijskih sil ni, notranji momenti pa so konstantni. Pri obremenitvi s koncentrirano silo nastopijo notranje sile in momenti samo na delu med prijemališčem sile in podporo – na prostih delih konzol seveda ni nikakršnih notranjih sil ali momentov. Pri obremenitvi z zvezno konstantno obtežbo je največji moment  $pL^2/2$  in je v primerjavi z enako dolgim



prostoležečim nosilec štirikrat večji. Torej so v konzolah notranje sile in predvsem momenti bistveno večji kot pri prostoležečih nosilcih.

Na podlagi teh enostavnih primerov lahko z enostavno **superpozicijo ugotovimo potek diagramov notranjih sil in momentov za bolj komplicirane primere.**

**Zgled 1.** Za nosilec na sliki Z1-1 nariši diagrame notranjih sil in momentov na podlagi (a) analitičnega izračuna, (b) s superpozicijo enostavnejših obremenitev



Slika 4.8.Z1-1.

**Rešitev.** (a) Horizontalnih reakcij očitno ni, vertikalni reakciji  $V_A$  in  $V_B$  predpostavimo v smeri navzgor in ju izračunamo iz momentnih enačb okoli podpore A in B:

$$L \cdot V_B - qL^2/2 + M_A = 0$$

$$-L \cdot V_A + qL^2/2 + M_A = 0$$

in  $V_A = 7\text{ kN}$  ter  $V_B = 5\text{ kN}$ .

Prečne sile in momente izračunajmo iz levega dela elementa, slika Z1-2. Iz ravnotežja v vertikalni smeri in ravnotežja za momente okoli preseka x dobimo enačbi

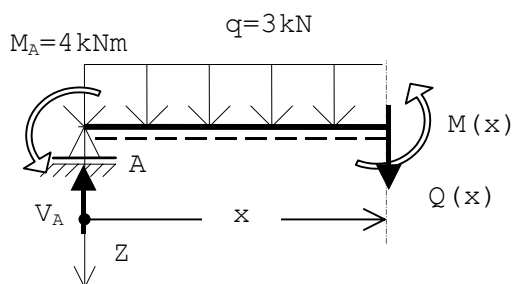
$$-V_A + q \cdot x + Q(x) = 0$$

$$M(x) + qx^2/2 - M_A = 0$$

in rešitvi sta

$$Q(x) = V_A - q \cdot x = 7 - 3 \cdot x$$

$$M(x) = -M_A + V_A x - qx^2/2 = -4 + 7x - 3x^2/2$$



Slika 4.8.Z1-2.

Seveda lahko enačbo za  $Q(x)$  izračunamo kar z odvodom enačbe za moment  $M(x)$ . Gornji enačbi iz vrednotimo v posameznih presekih. Za momente so rezultati prikazani v tabeli Z1-1, diagrama  $Q(x)$  in  $M(x)$  pa sta narisana na sliki Z1-3. Hkrati velja opozoriti: obtežba je konstantna, zato je potek prečnih sil linearen, momenti pa potekajo po kvadratni paraboli. Pri risanju diagramov se običajno držimo nekaj principov. V diagram vpišemo predznak notranje količine, vrednosti pa vpišemo kot absolutne. Za linearni potek vpišemo dve vrednosti, za kubični potek notranje količine pa 3 vrednosti in podamo njihovo lokacijo. Tedaj lahko samo iz diagrama preračunamo analitični izraz za notranje količine in s tem so vse vrednosti izračunljive. Za podajanje številčnih vrednosti izbiramo inženirsko značilne lokacije: na robovih elementa, na sredini ali pa ekstremne vrednosti. Koordinatni sistem običajno izpustimo, iz oznak diagrama pa mora biti jasno za kateri element oziroma del elementa diagram velja in v kakšnih enotah so notranje količine podane. Ko diagrame rišemo natančno, moramo podati tudi merilo. V mnogih primerih pa zadostuje skiciranje diagrama, iz katerega so razvidne ključne vrednosti in značilnosti poteka notranjih količin. V nadaljnjem v diagramih ne bomo posebej prikazovali koordinatnega sistema.

Največji moment nastopi, kjer je presečna sila nična

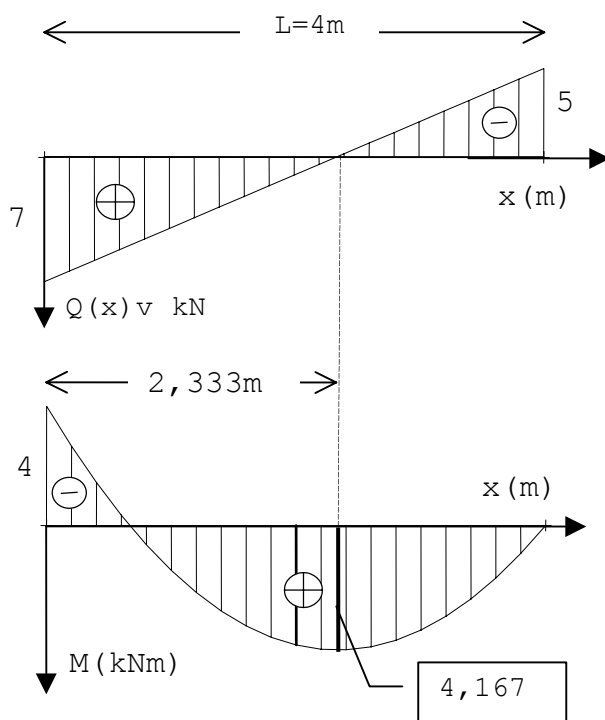
$$Q(x) = V_A - q \cdot x = 7 - 3 \cdot x = 0$$

to je pri

$$x_m = 2,333\text{m}$$

in je enak

$$M(x=2,333) = -4 + 7 \cdot 2,333 - 3 \cdot 2,333^2 / 2 = 4,167\text{kNm}$$



Slika 4.8.Z1-3. Diagrama poteka prečnih sil in momentov.

Poglejmo si, kako **iz diagramskih vrednosti lahko izračunamo analitični potek momentov**. Na sliki Z1-1 so znane tri vrednosti, in sicer

$M(x=0)=-4$ ,  $M(x=2,333)=4,167$  in  $M(x=L=4)=0$ . Moment poteka po kvadratni paraboli

$$M(x) = a + bx + cx^2$$

kjer so konstante  $a, b$  in  $c$  neznanе. Izračunamo jih iz treh linearnih enačb za gornje vrednosti:

$$M(x=0) = -4 = a + b \cdot 0 + c \cdot 0$$

$$M(x=2,333) = 4,167 = a + b \cdot 4,167 + c \cdot 4,167^2$$

$$M(x=L=4) = 0 = a + b \cdot 4,0 + c \cdot 4,0^2$$

Rešitev je

$$a = -4, \quad b = 7, \quad c = -1,5$$

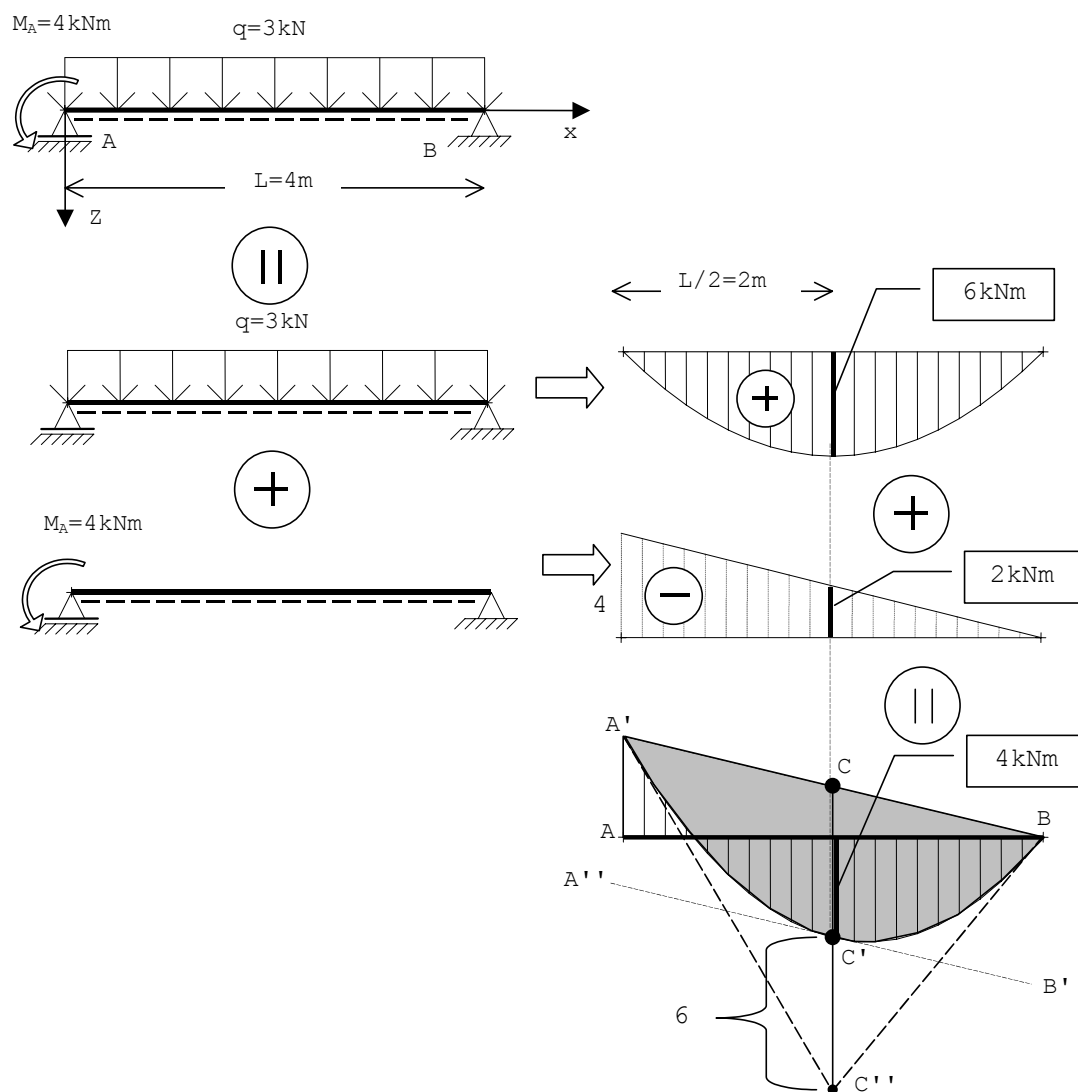
in s tem je

$$M(x) = -4 + 7x - 1,5x^2.$$

x(m)	M(kNm)	x(m)	M(kNm)
0,000	-4,000	2,200	4,140
0,200	-2,660	2,400	4,160
0,400	-1,440	2,600	4,060
0,600	-0,340	2,800	3,840
0,800	0,640	3,000	3,500
1,000	1,500	3,200	3,040
1,200	2,240	3,400	2,460
1,400	2,860	3,600	1,760
1,600	3,360	3,800	0,940
1,800	3,740	4,000	0,000
2,000	4,000		

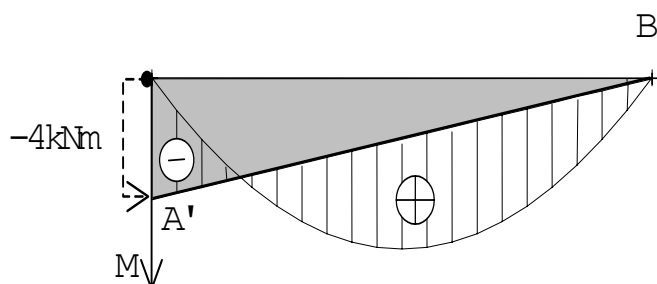
Tabela 4.8.Z1-1. Vrednost momentov v presekih podanih z vrednostjo  $x$ -a.

**4.9. Risanje diagramov s superpozicijo enostavnih obtežb** iz tabel 4.8-1 in 2 si oglejmo na problemu iz zadnjega zgleда, označenega z zgleđ 4.8-Z1. Obtežbo nosilca razstavimo na zvezno obtežbo in obtežbo z robnim momentom, slika 4.9.Z1-1, torej na osnovni obtežbi podani v Tabeli 1. Za ti dve obtežbi sta diagrama momentov narisana na desni strani slike. Ko diagramске vrednosti algebrajsko seštejemo, dobimo diagrama momentov za celotno obtežbo, zadnji diagram na sliki 4.9.Z1-1. Pri grafičnem konstruiranju tega diagrama lahko ravnamo na sledeči način: najprej narišemo diagram za obtežbo z robnim momentom, ki ima negativne vrednosti. Na sliki je prikazan s trikotnikom A-B-A<sup>‘</sup>. Diagram za zvezno obtežbo je prikazan zatemnjeno in ima pozitivne vrednosti, ki jih na zveznico A<sup>‘</sup>-B nanesemo na pozitivno stran te zveznice. Pri tem si lahko pomagamo z diagramom za rezultantno koncentrirano silo zvezne obtežbe. Ta diagram je prikazan s trikotnikom A<sup>‘</sup>-C<sup>‘</sup>-B. Njegov moment je prikazan z daljico C-C<sup>‘</sup> in je, kot vemo, natanko dvakrat večji od momenta za zvezno obtežbo, ki je prikazan z daljico C-C<sup>‘</sup>. Prečni sili na robovih nosilca sta enaki tako za zvezno obtežbo kot za pripadajočo rezultantno silo. Zato je naklon momentnih diagramov na robovih nosilca enak, kar je podano s premicama A<sup>‘</sup>-C<sup>‘</sup> in B-C<sup>‘</sup>. Ko potegnemo vzporednico A<sup>‘</sup>-B<sup>‘</sup> k liniji A<sup>‘</sup>-B, glej sliko, dobimo okvir v, katerega narišemo diagram za zvezno obtežbo. Rezultantni diagram je prikazan črtkano, vrednosti pa merimo od osi nosilca.



Slika 4.9.Z1-1. Diagram momentov kot superpozicija enostavnejših diagramov: k momentnemu diagramu za robno momentno obtežbo prištejemo diagram za zvezno obtežbo.

Diagrame je nekoliko lažje „sešteti“, če najprej narišemo nelinearni diagram, v našem primeru momentni diagram zvezne obtežbe, nato pa prištejemo še linearnega, v našem primeru momentni diagram zaradi robne momentne obremenitve. Na sliki 4.9.Z1-2 je prikazano tako seštevanje. K pozitivnemu momentnemu diagramu za zvezno obtežbo algebrajsko prištejemo negativni linearni momentni diagram tako, da absciso premaknemo v pozitivni smeri za vrednosti diagrama robne momentne obtežbe, glej zatemnjeni trikotnik, kot kaže slika Z1-2. Vrednosti rezultirajočih momentov so prikazane s črtastim delom diagrama. Te vrednosti torej merimo glede na „premknjeno absciso“ A'-B.



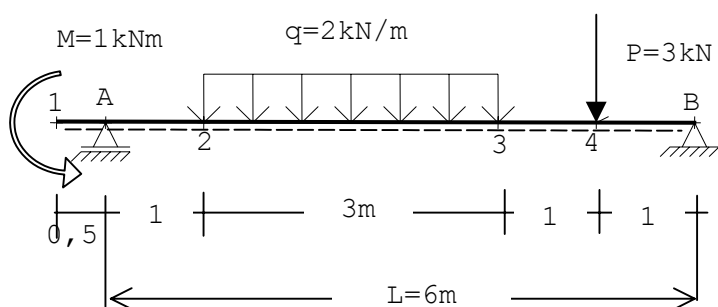
Slika 4.9.Z1-2. Diagram momentov konstruiran tako, da momentnega k diagramu za zvezno obtežbo prištejemo diagram za robno momentno obtežbo.

Notranje količine lahko izračunamo pri vsakem statično določenem nosilcu na dva načina, ki ju v bistvu že poznamo. Ta načina lahko imenujemo **direktna metoda** in **segmentna metoda**. V vsakem primeru pa najprej izračunamo reakcije.

**4.10. Direktna metoda** je postopek, s katerim izračunamo notranje statične količine v izbranem preseku neposredno. Tedaj element razdelimo s presekom na dva dela in za izbrani del izračunamo notranje količine iz ravnotežnih enačb za enega izmed izbranih delov.

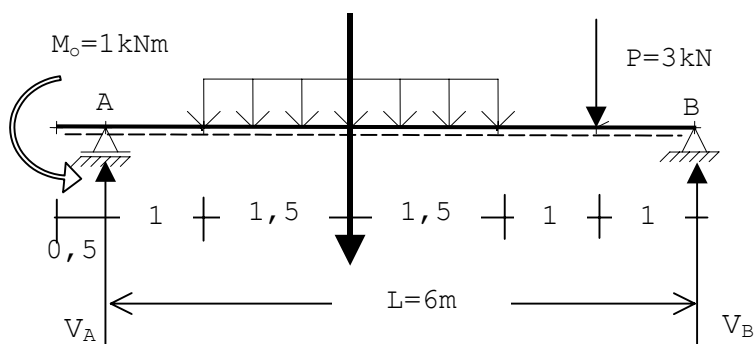
**Zgled 4.10.Z1.** Na sliki Z1-1 je prikazan prostoležeči nosilec s previsom. Obtežba v polju predstavlja enostaven primer raznolike obtežbe v polju nosilca.

**Izračun. Reakciji** sta samo vertikalni in ju predpostavljamo navzgor v navpični smeri. Izračunamo ju lahko iz momentnih pogojev glede na podporo A in glede na podporo B. Pri tem je računsko ugodno, da zvezno obtežbo nadomestimo z rezultanto, slika Z1-2.



Slika 4.10.Z1-1. Prostoležeči nosilec s previsom, dimenzije in obtežba. Z 1,A,2,3,4 in B so označene značilne točke obtežbe.

$$R = 3q = 3 \times 2 = 6 \text{ kN}$$



Slika 4.10.Z1-2. Predpostavljene smeri reakcij in nadomestitev zvezne obtežbe z rezultanto.

$$\sum M_i^{(A)} = L \cdot V_B + M_0 - 2,5R - 5P$$

$$= 6 \cdot V_B + 1 - 2,5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = 0 \rightarrow \underline{V_B = 4,833 \text{ kN}}$$

$$\sum M_i^{(B)} = L \cdot V_A - M_0 - 3,5R - 1 \cdot P$$

$$= 6 \cdot V_A - 1 - 3,5 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 0 \rightarrow \underline{V_A = 4,167 \text{ kN}}$$

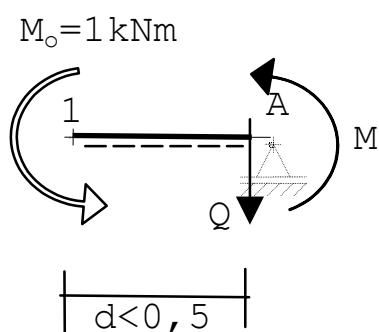
Potek notranjih količin je značilen v segmentih med značilnimi točkami 1,A,2,3,4 in B. Ta potek je podan v Tabeli 4.10.Z1-1 in velja znotraj segmenta – brez robnih točk. Če izračunamo notranje količine v teh točkah, lahko na enostavni način narišemo njihov potek po celotnem nosilcu s previsom. Koncentrirani moment je samo v točki 1, zato je potek momentov zvezen. Koncentrirane sile so samo v točkah A (reakcija), 4 in B. Samo v teh točkah je potek prečnih sil nezvezen, ki jih moramo zato računati v presekih tik levo in desno od teh točk.

segment	obtežba	potek $Q(x)$	potek $M(x)$
1-A	0	$Q=0$	konstanten
A-2	0	konstanten	linearno
2-3	konstantna	linearno	kvadratna parabola
3-4	0	konstanten	linearno
4-B	0	konstanten	linearno

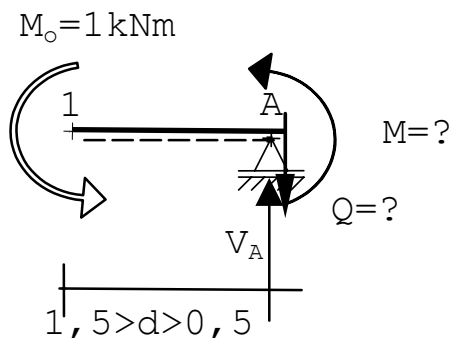
Tabela 4.10.Z1-1. Potek notranjih količin po segmentih

Za obravnavani problem, zgled 4.10.Z1, sil v horizontalni smeri ni in s tem so osne sile nične. Presek A levo razdeli element na dva dela. Na sliki 4.10.Z1-3 je prikazan levi del elementa. Iz enačb za ravnotežje v vertikalni smeri in iz momentne enačbe okoli osi v preseku izračunamo prečno silo in moment:

$$Q=0, M = -M_0 = -1.$$



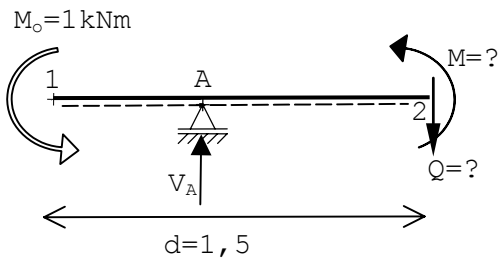
Slika 4.10.Z1-3. Presek je pred podporo (preseki A levo), ki ne spada k temu delu nosilca in je zato simbolično narisana s črtkastimi linijami.



Slika 4.10.Z1-4. Presek tik desno ob podpori - presek A-desno.

Za presek A-desno je obravnavani del nosilca prikazan na sliki 4.10.Z1-4. Momenta ni treba računati, ker je v točki A zvezen in smo ga že izračunali v prejšnjem preseku. Prečna sila pa sledi iz ravnotežne enačbe:

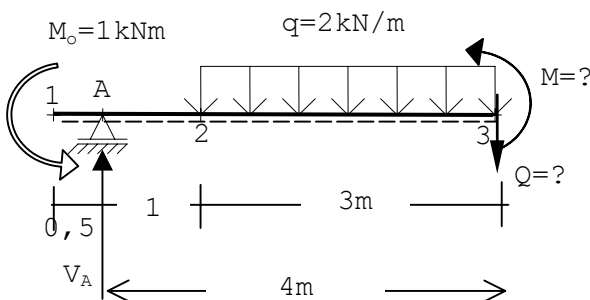
$$\sum V_i = V_A - Q = 0 \rightarrow Q = 4,167 \text{ kN}$$



Slika 4.10.Z1-5. Presek številka 2.

Za presek 2 je obravnavani del nosilca prikazan na sliki 4.10.Z-5. Prečne sile ni treba računati, ker med točko A in točko 1 ni obtežbe, moment pa sledi iz ravnotežne enačbe:

$$\sum M_i^{(2)} = M - 1 \cdot V_A + M_o = 0 \rightarrow M = 1,4,167 - 1 = 3,167 \text{ kNm}$$



Slika 4.10.Z2-6. Presek številka 3.

Presek 3. Obravnavani del nosilca je prikazan na sliki 4.10.Z1-6. Prečne sile in moment sledita iz ravnotežnih enačb:

$$\sum V_i = -Q + V_A - 3 \cdot q = 0 \rightarrow Q = 4,167 - 3 \cdot 2 = -1,833 \text{ kN}$$

$$\sum M_i^{(3)} = M + M_o - 4 \cdot V_A + q \cdot 3^2 / 2 = 0 \rightarrow$$

$$M = -1 + 4 \cdot 4,833 - 2 \cdot 3^2 / 2 = -6,667 \text{ kNm}$$

Na enak način izračunamo še vrednosti za presek 4, kjer je treba upoštevati, da je prečna sila levo in desno od preseka različna. Izračunane vrednosti so podane v tabeli 4.10.Z1-1, diagrama notranjih količin pa sta narisana na slikah 4.10.Z2-7.

presek	prečna sila Q (kN)	moment M (kNm)
1	0.000	-1.000
A-levo	-II-	-II-
A-desno	4.167	-II-
2	-II-	3.167
3	-1.833	6.667
4-levo	-II-	4.833
4-desno	-4.833	-II-
B	-II-	0.000

Tabela 4.10.Z2-1.

**Ekstremni moment.** Najprej je potrebno oceniti, v katerem segmentu nastopi, ker ga računamo na podlagi analitičnega izraza, ki velja samo za segment, kjer obtežba poteka zvezno. V našem primeru nastopi

ekstremni moment na segmentu 2-3. Izračunamo ga na podlagi slike 4.10.Z1-8. Računanje je najenostavnejše, ko koordinatno izhodišče postavimo na začetek zvezne obtežbe. Iz momentnega ravnotežja okoli preseka  $x$  sledi enačba

$$M(x) + M_0 - (1+x) \cdot V_A + qx^2/2 = 0$$

$$M(x) = -1 + (1+x) \cdot 4,167 - 2 \cdot x^2/2$$

$$M(x) = -x^2 + 4,167x + 3,167 \quad 0 \leq x \leq 3\text{m}$$

$$Q(x) = M'(x) = -2x + 4,167 = 0$$

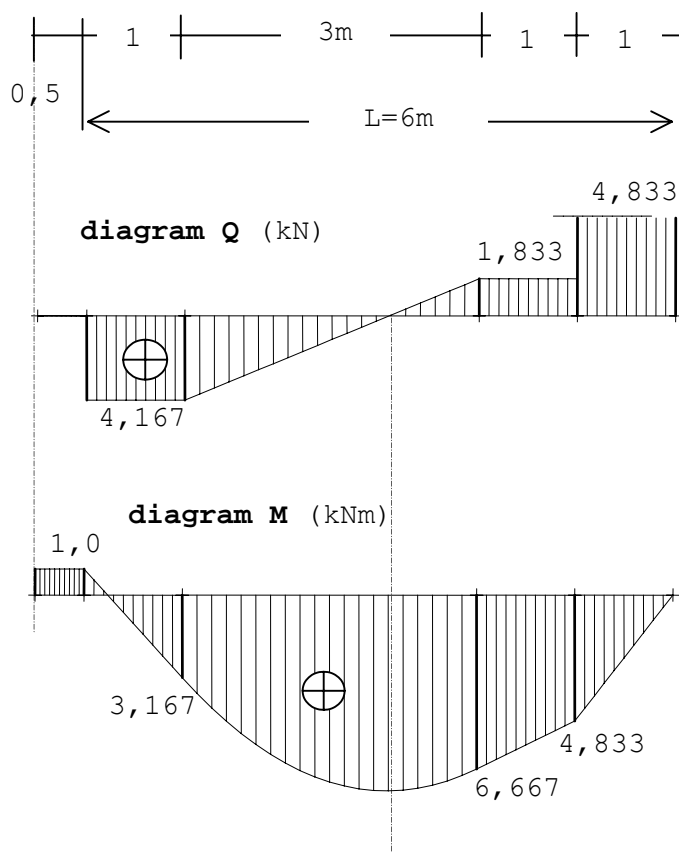
$$x_m = 4,167/2 = 2,084\text{m}$$

Ekstrem je v področju veljavnosti analitičnega izraza za moment,

$$0 \leq 2,084 \leq 3\text{m},$$

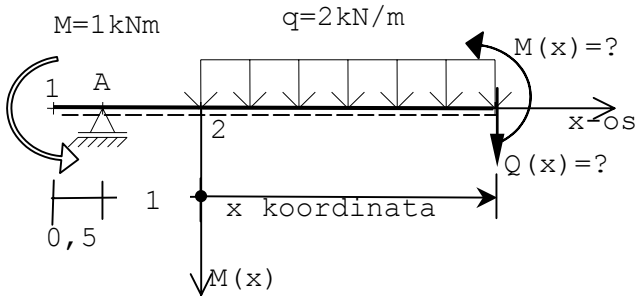
in je

$$M_{\text{ekst.}} = M(2,084) = -2,084^2 + 4,167 \cdot 2,084 + 3,167 = 7,510\text{kNm}.$$



Slika 4.10.Z1-7. Diagrama poteka prečnih sil in momentov.



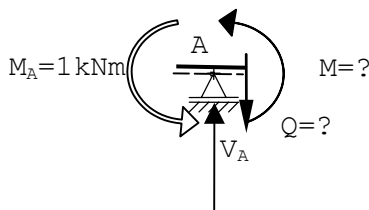


Slika 4.10.Z1-8. Del nosilca in koordinatni sistem za izračun ekstremnega momenta.

**4.11. Segmentna metoda** temelji na izračunavanju notranjih statičnih količin v zaporednih presekih, s katerimi element razdelimo na segmente. Pri vsakem takem izračunu morajo biti znane vrednosti v preseku, ki je krajšiče predhodno analiziranega segmenta, in hkrati začetek tekoče obravnavanega segmenta. Tako imamo zmeraj toliko neznanih notranjih količin, kot je ravnotežnih enačb. Poglejmo si ta postopek na prej obravnavanem problemu, zgled 4.10.Z1. Nosilec razdelimo na segmente med že prej izbranimi značilnimi točkami in računamo notranje količine konsektivno. Pri tem moramo dodati še segmente, kjer nastopijo nezveznosti notranjih količin. V našem primeru je to v podpori A in v točki 4. Prvi segment je že podan na sliki 4.10.Z1-3, izračunali pa smo že tudi prečno silo in moment. Naslednji segment obsega podporo A, slika 4.11.Z1-9, kjer na njegovi levi strani poznamo obe notranji količini. Vrednosti na desni strani izračunamo iz ravnotežnih enačb in sta:

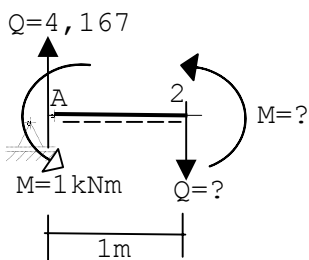
$$Q = V_A = 4,167\text{kN}$$

$$M = -1.$$



Slika 4.11.Z1-9. Segment, ki obsega podporo. Na levi strani je prečna sila nična.

Iz segmenta A-2, slika 4.11.Z1-9, izračunamo:



Slika 4.11.Z1-9. Segment A-2.

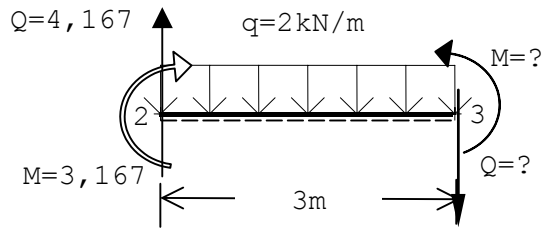
$$Q = 4,167$$

$$M = 1,4,167-1 = 3,167.$$

Iz segmenta 2-3, slika 4.11.Z2-10 pa sledi:

$$Q = 4,167 - 2.3 = -1,833 \text{ kN}$$

$$M = 3.4,167 + 3,167 - 2.3^2/2 = 6,667 \text{ kNm}$$

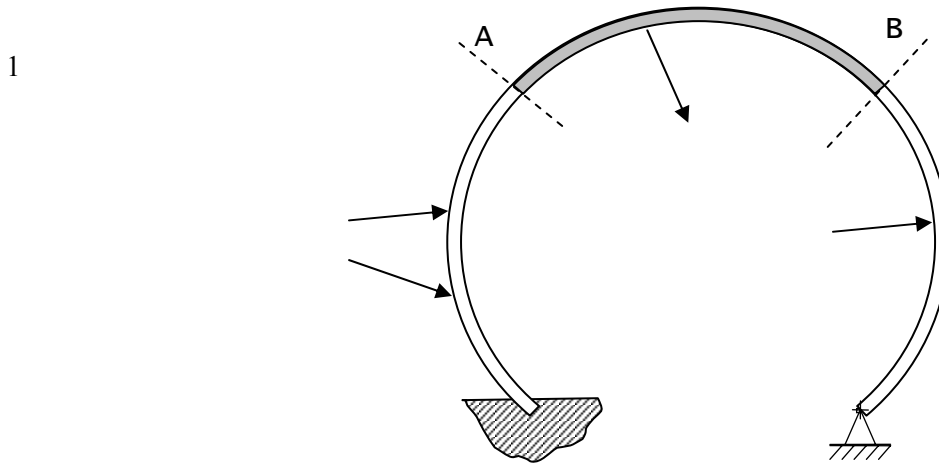


Slika 4.11.Z2-10. Segment 2-3.

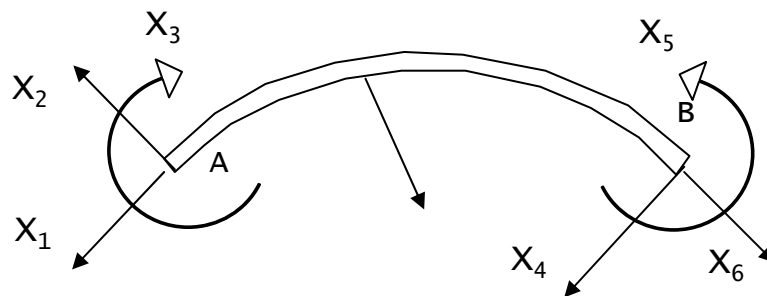
Z nadaljevanjem izračunavanj po sledečih segmentih izračunamo vse notranje količine v značilnih presekih.

Segmentna metoda zahteva znatno manj računanja za dolge nosilce s precej raznoliko obtežbo, njena velika slabost v primerjavi z direktno pa je, da se vsaka napaka nadaljuje v nadaljnjih izračunih.

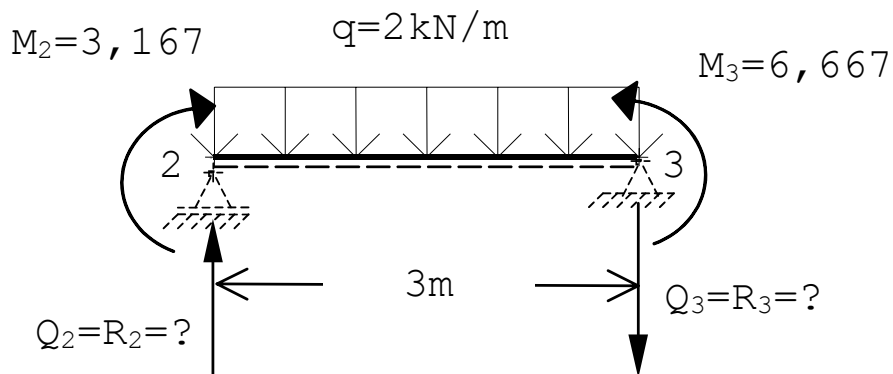
**4.12. Določenost notranjih količin segmenta elementa.** Na kraju velja opozoriti, da ima poljubni segment linijskega elementa za ravninski problem v splošnem 6 robnih količin, za prostorski pa 12, slika 1 in 2. Pri tem je element sam lahko statično nedoločen. Če se omejimo na ravninski problem, imamo za segment na razpolago 3 ravnotežne enačbe. Če poznamo 3 ali več robnih vrednosti, lahko iz teh ravnotežnih enačb izračunamo preostale robne vrednosti in vse notranje količine segmenta.



Slika 4.12-1. Simbolični prikaz linijskega elementa in neki poljubni segment A-B.

Slika 4.12-2. Simbolični prikaz robnih sil in momentov segmenta za ravninski problem označenih z  $X_1$ ,  $X_1$ , ...  $X_6$ .

Zgled 1 (nadaljevanje prejšnjega zгледа). Poglejmo si ravninski segment 2-3 nosilca s previsom iz prejšnjega zгледа, kjer predpostavimo, da poznamo samo momenta v preseku 2 in 3. Tak problem se v praksi pogosto pojavi, ko poznamo nekaj vrednosti momentnega diagrama. Tak segment lahko predstavimo kot prostoležeči nosilec, kjer poznamo robna momenta, prečni robni sili pa sta enaki reakcijam, slika Z1-1.



Slika 4.12-1. Segment 2-3 obravnavan kot prostoležeči nosilec.

V obravnavanem primeru osnih sil ni, prečni pa izračunamo iz momentnih enačb:

$$\Sigma M_i^{(3)} = M_2 - M_3 + 3 \cdot Q_2 - q \cdot 3^2 / 2 = 0$$

$$Q_2 = -(3,167 - 6,667 - 2 \cdot 3^2 / 2) / 3 = 4,167 \text{ kN}$$

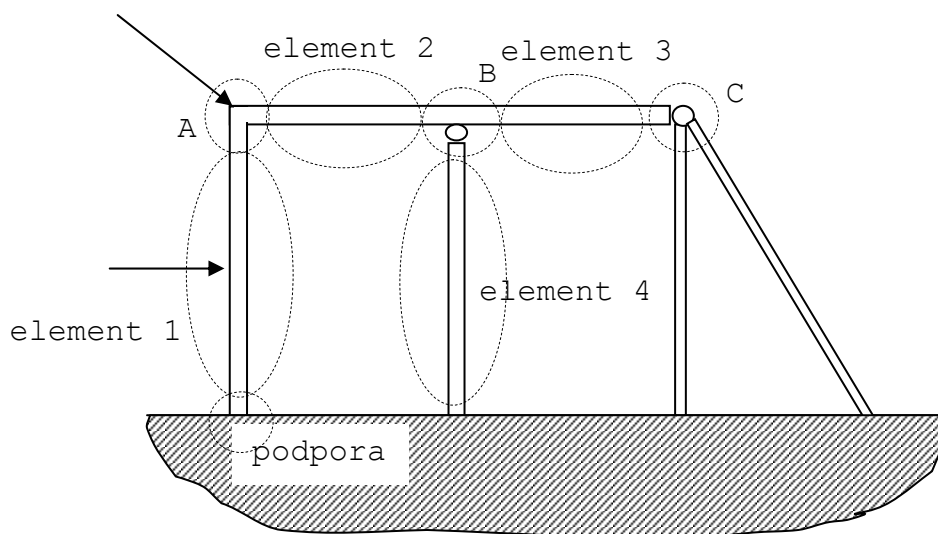
$$\Sigma M_i^{(2)} = M_2 - M_3 + 3 \cdot Q_3 + q \cdot 3^2 / 2 = 0$$

$$Q_3 = -(3,167 - 6,667 + 2 \cdot 3^2 / 2) / 3 = -1,833 \text{ kN}$$

Na tak način lahko iz momentnega diagrama preračunamo diagram prečnih sil na robovih segmentov in nato še vse notranje količine po poljih segmentov.

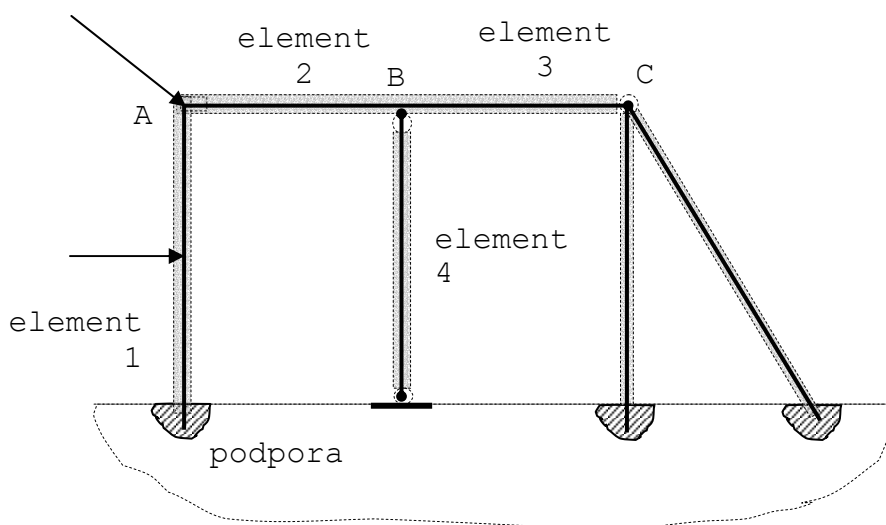
## 5. LINIJSKE KONSTRUKCIJE.

**1. Uvod.** Z medsebojnim povezovanjem linijskih elementov tvorimo linijske konstrukcije. Elemente lahko na različne načine spojimo med seboj v njihovih krajiščih, lahko pa tudi v poljih elementov. Spojišča elementov imenujemo **vozlišča konstrukcije**, slika 1.



Slika 1-1. Simbolični prikaz konstrukcije, elementov in vozlišč.

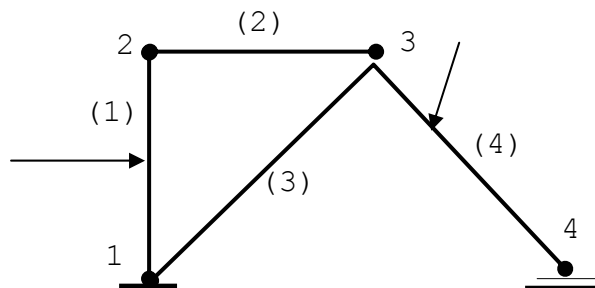
Elementi so lahko togo spojeni, vozlišče A, ali pa členkasto, vozlišče C. Vozlišče A imenujemo togo vozlišče, C pa členkasto. Kadar je element izdelan v enem kosu, kot je element od podpore preko vozlišča A do vozlišča C, ga v analizi konstrukcij računsko obravnavamo kot več elementov, ki potekajo od vozlišča do vozlišča. Običajno smatramo tudi mesta, kjer se element lomi, kot vozlišča. To je na sliki simbolično prikazano z elementi 1, 2 in 3 in zaključimo: **računsko smatramo, da element poteka med dvema sosednjima vozliščema**. Obremenitev konstrukcije je lahko v vozliščih, vozlišče A na sliki, ali pa po elementih. Vozlišče B predstavlja kombinacijo toge spojitve elementa 2 in 3 ter členkasto priključenega elementa 4, imenujemo pa ga kombinirano vozlišče. Podpore konstrukcije obravnavamo kot vozlišča. Na kraju velja pripomniti, da lahko po potrebi vsak element z uvedbo vozlišča formalno razdelimo na dva elementa.



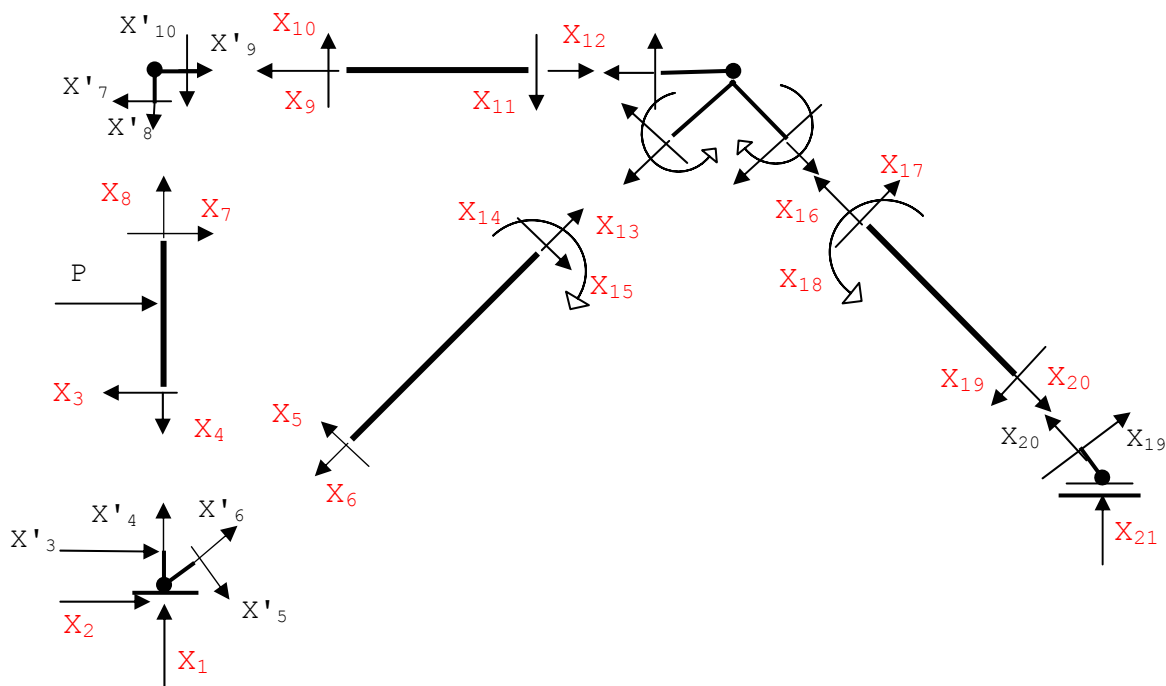
Slika 1-2. Idealizacija konstrukcije.

V analizi resultantnih notranjih sil in momentov ter reakcij **elemente podajamo z njihovimi osmi, vozlišča pa kot točke**, kjer se osi elementov stikajo: Taka računsko idealizacija konstrukcije je prikazana na sliki 2. Dejansko obtežbo moramo reducirati na osi elementov oziroma v točkasta vozlišča.

**2. Analiza konstrukcije** temelji na analizi sil, s katerimi elementi na svojih krajiščih delujejo na vozlišča - in na reakcijah, s katerimi vozlišča delujejo na elemente. Podpore obravnavamo kot vozlišča, na katera delujejo temeljna tla in elementi konstrukcije. Ko izračunamo rezultantne sile in momente na krajiščih elementov, lahko izračunamo še potek notranjih količin po elementih z metodami prejšnjega poglavja.



Slika 2-1.



Slika 2-2. Simbolična razdelitev konstrukcije na elemente in vozlišča. Neznanke so sile in momenti, ki delujejo na elemente, medtem ko sile in momenti, ki delujejo na vozlišča, ne predstavljajo dodatnih neznank. Zaradi preglednosti sile in momenti, ki delujejo na vozlišče 3, niso označeni.

Poglejmo si, kako formalno lahko analiziramo konstrukcijo na sliki 1, ki predstavlja ravninski problem. Najprej elemente in vozlišča konstrukcije označimo s številkami. Nato jo simbolično razdelimo na vozlišča in elemente ter označimo sile in momente, ki nanje delujejo, slika 2. Te sile in momenti so naše neznanke. Če pri označbi neznank upoštevamo zakon o akciji in reakciji, tedaj kot neznanke smatramo samo sile in momente, ki delujejo na krajišča elementov, medtem ko sile in momenti, ki delujejo na vozlišča, niso več neznanke. Te količine so na sliki 2 označene z apostrofovom.

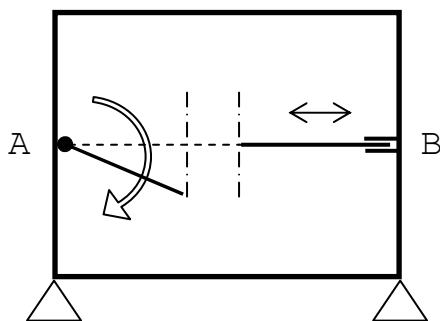
Iz slike 2 vidimo, da je neznank 21. Za vsak element so razpolago po tri ravnotežne enačbe, skupaj 4x3 enačb, to je 12 enačb. Poleg tega morajo sile, ki delujejo na členkasto vozlišče, zadoščati dvema translatorskima ravnotežnima enačbama. Vozlišča 1, 2 in 4 so takšna čista členkasta vozlišča, zato nam dajo

3x2 enačb, to je 6 enačb. Na vozlišče 3 delujeta tudi momenta, ki morata biti v ravnotežju. To vozlišče nam da skupaj 3 enačbe. Vseh enačb skupaj je torej

$$E = 12 + 6 + 3 = 21.$$

Vidimo, da je neznank natanko toliko kot enačb in konstrukcija je zato statično določena – lahko jo rešimo samo na podlagi ravnotežnih enačb. Vendar pa konstrukcij »ročno« ne rešujemo na tak način, ker že relativno enostavna konstrukcija zahteva reševanje velikega sistema enačb.

**3. Stopnja statične nedoločnosti.** Gornji prikazani pristop, ki ga nekoliko poenostavimo, nam služi za ugotavljanje, ali je konstrukcija statično določena oziroma kolikokrat je statično nedoločena. Pri tem **ugotavljamo, kolikšna je razlika med številom neznank in številom ravnotežnih enačb.** Posamezne elemente konstrukcije opredelimo glede na to, koliko neznanih robnih sil in momentov imajo. Za **ravninske probleme** ima element, ki je na obeh koncih togo vpet v vozlišče, na vsakem krajišču osno in prečno silo ter moment, skupaj 6 neznank. Zato ga imenujemo element  $e_6$ . Vendar pa morajo te neznanke skupaj z obtežbo po polju elementa izpolnjevati po tri ravnotežne enačbe. Tako nam vsak element  $e_6$  »doprinese« neto po tri neznanke. Podobno velja za ostale tipe elementov prikazanih v tabeli 1, kjer so prikazani samo najbolj običajni elementi. Koliko robnih sil in momentov je na krajiščih elementa, lahko ugotovimo tako, da si predstavljamo, da element prerežemo na sredini, slika 3-1. Predpostavimo, da je vozlišče nepremično in ugotavljamo v katerih prostostnih stopnjah pomikov obravnavani kraj nosilca ne moremo premakniti. Na sliki 3-1 je prikazan element A-B, ki smo ga »prerezali«. Levi del ne moremo premakniti translatorsko niti v vertikalni niti v horizontalni smeri. Zaradi neke obremenitve v teh dveh smereh nastopita reakcijski sili, vrtenje pa je možno brez vsakega odpora. Ta konec elementa ima torej dve robni sili, ki sta naši neznanki. Desni del elementa A-B lahko premikamo horizontalno, v ostalih prostostnih stopnjah pa ne. Kot robni količini nastopita v krajišču B moment in prečna sila. Takšen element ima skupaj štiri robne statične količine in je zato tipa  $e_4$ .

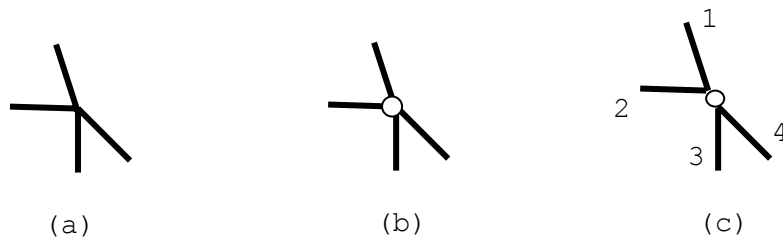


Slika 3-1. Shema za ugotavljanje števila robnih neznanih sil in momentov elementa.

Za ugotovitev števila neznank v konstrukciji njene elemente označimo po tipih. Vsak element  $e_6$  nam da 3 neznanke, element  $e_5$  2 neznanki, element  $e_4$  eno neznanko, elemente  $e_3$  pa lahko izpustimo, ker nam ne doprinesejo neznank. Če z oznako tipa elementa hkrati označimo tudi njihovo skupno število v konstrukciji, z  $r$  pa označimo število reakcij, tedaj je **skupno število neznank** enako:

$$N = 3.e_6 + 2.e_5 + 1.e_4 + r \quad (1)$$

**Vozlišča označimo glede na to, koliko ravnotežnih enačb morajo izpolnjevati momenti in sile,** ki na njih delujejo. Na togo vozlišče deluje več sil v različnih smereh, ki morajo izpolnjevati dve translatorski ravnotežni enačbi, pa tudi vsota vseh momentov mora biti nič. Tako vozlišče nam da tri ravnotežne enačbe in ga zato označimo z  $v_3$ . Simbolično je prikazano na sliki 3a. Na sliki 3b je členkasto vozlišče, kjer ni brez momentov, sile izpolnjujejo dve ravnotežni enačbi, označimo pa ga z  $v_2$ . Na sliki 3c je členkasto vozlišče  $v_4$ , kjer sta elementa 1 in 2 ter 3 in 4 paroma med seboj togo spojena. Izpolnjeni morata biti dve translatorski ravnotežni enačbi, vsoti momentov od elementov 1 in 2 ter 3 in 4 pa morata biti nični, torej imamo skupaj štiri ravnotežne enačbe. V tem smislu so možna še »višja« vozlišča ter vozlišče  $v_1$ .



Slike 3-2.a,b in c. Simbolični prikaz tipov vozlišč.


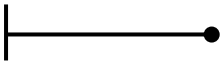
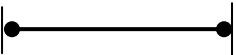
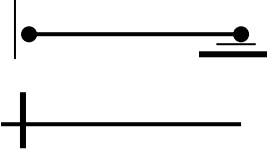
tip elementa in simbolična oznaka	število robnih sil in momentov	oznaka	neto število neznank
obojestransko vpeti element 	6	$e_6$	3
na eni strani vpeti, na drugi pa členkasto podprti element 	5	$e_5$	2
obojestransko členkasto podprti element 	4	$e_4$	1
prostoležeči nosilec in konzola 	3	$e_3$	0

Tabela 3-1. Tipi elementov glede na število robnih količin.

Če z oznako tipa vozlišča hkrati označimo tudi njihovo število v konstrukciji, je **skupno število enačb** enako:

$$E = 4.v_4 + 3.v_3 + 2.v_2 + 1.v_1 \quad (2)$$

Razliko med številom neznank in številom enačb imenujemo **stopnja statične nedoločenosti**,

$$SN = N - E, \quad (3)$$

ki je lahko negativno število, nič ali pozitivno število. Če je to število nič, je število neznank  $N$  enako številu enačb  $E$ , in konstrukcija je **statično določena**. **Rešimo jo lahko samo s pomočjo ravnotežnih enačb**. Če je  $SN = n > 0$ , je konstrukcija statično  **$n$  krat nedoločena**. Ko je  $SN = n < 0$ , pravimo, da je konstrukcija statično **predoločena**. Take konstrukcije so labilne in vsaj en element se lahko v vsaj eni prostostni stopnji prosto giblje. Na kraju še opozorimo, da je stopnja statične nedoločenosti značilnost konstrukcije in ne obtežbe. S tem je mišljeno, da se, na primer, statično določena konstrukcija da analizirati samo z ravnotežnimi enačbami ne glede na to kakšna obtežba nanjo deluje.

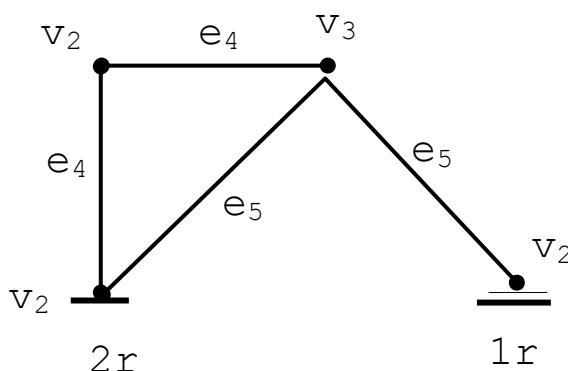
**Zgled 3Z1.** Izračunajmo s pomočjo obrazcev 1 in 2 stopnja statične nedoločenosti za konstrukcijo na sliki 2-1. Najprej označimo elemente in vozlišča ter število reakcij, slika 3Z1-1.

Skupaj imamo dva elementa  $e_5$ , dva elementa  $e_4$ , eno vozlišče  $v_3$ , tri vozlišča  $v_2$  in tri reakcije. Stopnja statične nedoločenosti je

$$SN = N - E = 3 \cdot e_6 + 2 \cdot e_5 + 1 \cdot e_4 + r - (4 \cdot v_4 + 3 \cdot v_3 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_1)$$

$$= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 - (4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0) = 9 - 9 = 0.$$

Torej je konstrukcija statično določena, kot smo že prej ugotovili.



Slika 3Z1-1.

**Zgled 3Z2.** Poglejmo si še konstrukcijo na sliki 3Z2-1. Zgornje obkrožene elemente lahko združimo glede na neznanke v en element  $e_6$ , da imamo manj dela. Število neznank je

$$N = 3 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 1 + 3 = 14.$$

Število enačb je

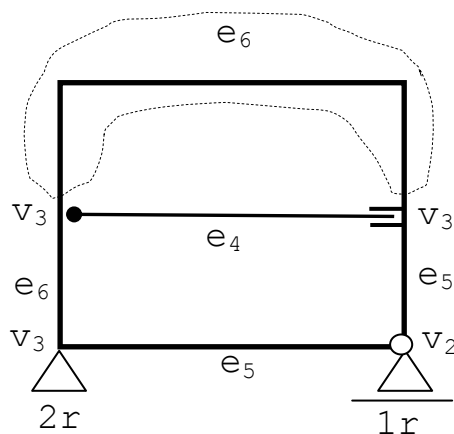
$$E = 3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$$

in

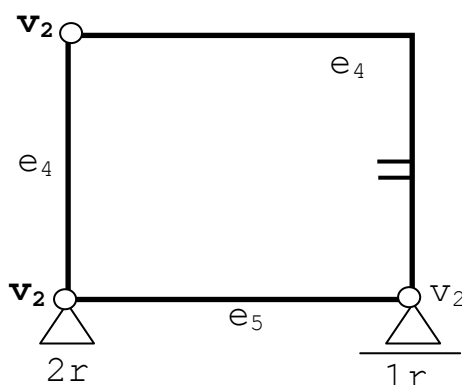
$$SN = N - E = 14 - 11 = 3.$$

Konstrukcija je trikrat statično nedoločena, vendar pa lahko kljub temu izračunamo reakcije. Taki konstrukciji pravimo, da je **zunanje statično določena**.





Slika 3Z2-1.



Slika 3Z2-2. Statično določena konstrukcija, ki jo dobimo s sprostitevjo statično nedoločene konstrukcije iz slike Z2-1.

-0-

Pri formalni rabi obrazca za izračun statične nedoločenosti moramo biti previdni. Statična določenost oziroma nedoločenost še ne zagotavlja stabilnosti. Lahko se primeri, da je del konstrukcije statično nedoločen, del pa predoločen, skupaj pa je še vedno nedoločen. Tedaj bi se vsaj del konstrukcije »porušil«. Dobro je, da izračun preverimo. Če v našem primeru uvedemo tri sprostitevje notranjih sil ali momentov, mora postati konstrukcija statično določena. V ta namen bi lahko uvedli dva členka in umaknili sredinski element, kot kaže slika Z2-2. Če tedaj ne opazimo, da je konstrukcija še stabilna, nas na to opozori kasnejša analiza notranjih sil, ki jo bomo spoznali v naslednjem poglavju.

**4. Značilni tipi linijskih konstrukcij.** Posamezne linijske konstrukcije imajo nekatere značilnosti glede na obtežbo in notranje statične količine, ki v njih nastopajo, glede na elemente in vozlišča, ki jih sestavljajo, glede na način gradnje in uporabo ter glede na način, kako jih analiziramo. Tako lahko konstrukcije razdelimo na sledeče tipe: **tričlenski lok**, kot najenostavnejšo konstrukcijo, **paličja** in **okvirne konstrukcije**. **Kompleksne konstrukcije** so lahko sestavljene iz sklopov, ki jih imenujemo **podkonstrukcije** in predstavljajo omenjene posamezne tipe. Poleg teh značilnih tipov konstrukcij pa so tudi konstrukcije, ki jih ne moremo kot celote ali po delih natančno opredeliti po značilnih tipih, ampak so »mešanica« različnih tipov.

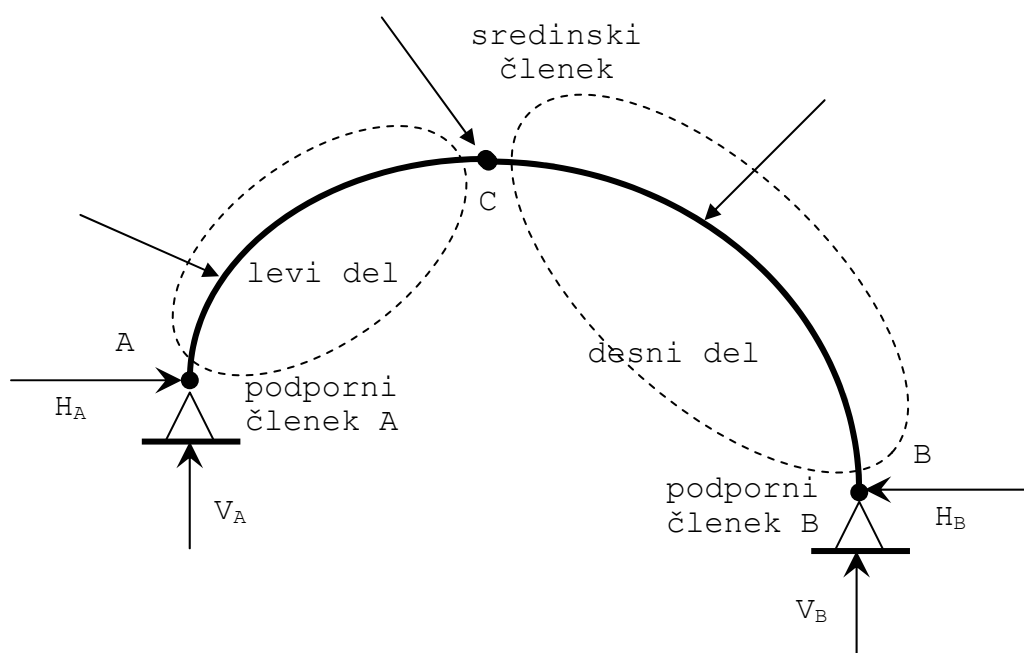
Vse te konstrukcije lahko nastopajo kot ravninski problem, kjer imajo vse statične količine samo komponente v eni ravnini, ali pa kot prostorski problem, kjer imajo nekatere ali pa kar vse statične količine komponente v vseh treh dimenzijah. Mnogokrat zaradi preglednosti in jasnosti analize rešujemo prostorski problem kot dva ravninska.

Že v podpoglavju 2 smo videli, da nam že relativno enostavna konstrukcija da velik sistem enačb, če jo analiziramo z razcepom na elemente in vozlišča. Na tak način je smiselno reševanje, če ga izvajamo

avtomatsko s pomočjo ustreznega računalniškega programa. Kadar pa konstrukcije rešujemo »ročno«, s pomočjo žepnega računalnika, pa jo analiziramo po delih tako, da v posameznih računskih korakih rešujemo samo nekaj enačb – za ravninske probleme so to praviloma do največ tri enačbe, za prostorske pa do največ šest enačb. Tak način pa ni pomemben samo zaradi lažjega računskega dela, ampak nam daje jasn vpogled na vpliv obtežbe na konstrukcijo ter s tem hkrati tudi, kako jo moramo inženirsko smiselno koncipirati in kako jo moramo graditi. Pri avtomatskem reševanju namreč nimamo pravega vpogleda, kako naj konstrukcijo naredimo bolj optimalno in kako jo naj gradimo – tam imamo samo ogromen sistem enačb in po rešitvi rezultate, ki nam ne povedo dosti o tem, ali je konstrukcija »dobra« in kako jo spremeniti, če ni.

V nadaljnjem tekstu se bomo posvetili samo ročnemu reševanju. To reševanje nam tudi pomaga bolje razumeti inženirski pomen rezultatov dobljenih iz avtomatskih računalniških analiz in je zato nepogrešljiv del inženirskega znanja.

**4.1. Tričlenski lok.** Ime za to konstrukcijo je zgodovinsko, izvira pa iz obokov, kjer so na vrhu dodali členek. S tem je postala analiza in tudi izgradnja obokov kot tričlenskih lokov bistveno enostavnejša. Kot že ime nakazuje, je to konstrukcija sestavljena iz dveh lokov, ki sta povezana s členkom in na krajiščih podprta s členkastima nepomičnima podporama, slika 4.1-1. Obremenjen je lahko po lokih in v sredinskem členu. Tričlenski lok, obravnavan kot ravninski problem, ima štiri reakcijske sile oziroma dve z neznano velikostjo in smerjo – torej štiri neznanke. Za rešitev potrebujemo štiri ravnotežne enačbe. Te so: dve enačbi za translatorsko ravnotežje in eno momentno enačbo za ves tričlenski lok glede na poljubno izbrani pol ter še eno momentno enačbo za levi ali pa za desni del. Ta Momentna enačba mora biti nastavljena za momente glede na os v sredinskem členu. S to enačbo zagotovimo, da je upoštevana značilnost tričlenskega loka kot konstrukcije z dvema trdnima elementoma, ki sta povezana s členkom, kjer seveda ni momentov. Vse omenjene štiri enačbe skupaj, enačbe 4.1-1 do 4, nam zagotavljajo, da je vsak izmed obeh delov loka v statičnem ravnotežju, s tem pa cela konstrukcija.



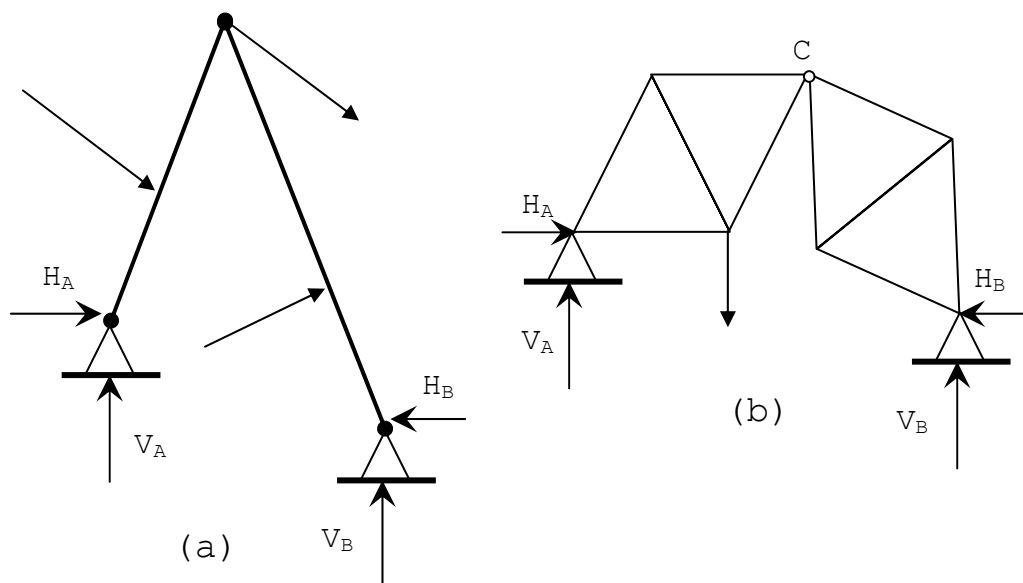
Slika 4.1-1. Simbolični prikaz tričlenskega loka.

$$\Sigma F_{i,x} = 0 \quad \text{za ves tričlenski lok} \quad (4.1-1)$$

$$\Sigma F_{i,y} = 0 \quad \text{za ves tričlenski lok} \quad (4.1-2)$$

$$\Sigma M_i = 0 \quad \text{za ves tričlenski lok} \quad (4.1-3)$$

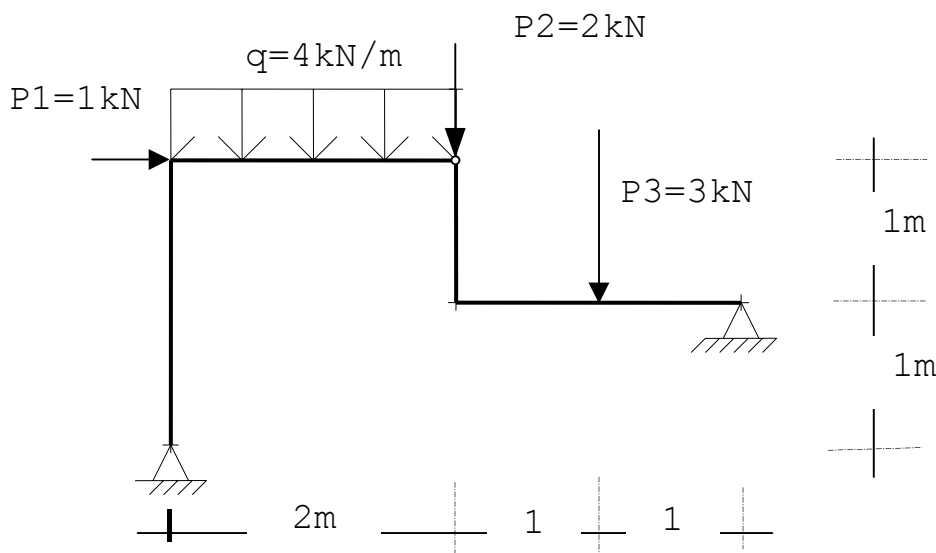
$$\Sigma M_i^{(C)} = 0 \quad \text{samo za levi ali desni del loka} \quad (4.1-4)$$



Sliki 4.1.-2a in b. (a) Dva ravna členkasta elementa kot tričlenski lok.  
(b) Dve paličji kot elementa tričlenskega loka.

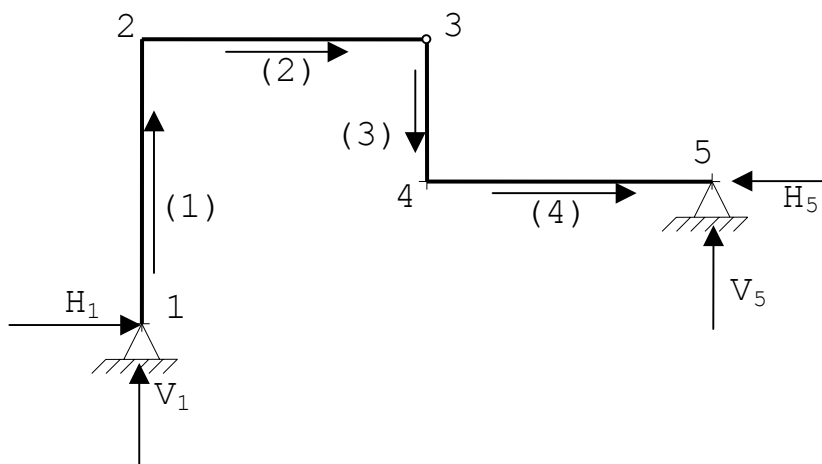
Po principu tričlenskega loka izračunavamo reakcije za poljubni dve trdni konstrukciji, ki sta vezani s členkom in podprti s členkasto nepomično podporo, slika 4.1-2a in b. Ko izračunamo reakcije, računamo notranje statične količine ter sile, ki delujejo na sredinski členek, po običajnem postopku veljavnem za posamezne elemente oziroma za enostavno podprte konstrukcije.

**Zgled. 4.1.Z1.** Za tričlenski lok na sliki Z1-1 izračunajmo reakcije, notranje statične količine in sile, ki delujejo na osrednji členek.



Slika 4.1.Z1-1. Dispozicija tričlenskega loka in obtežbe.

**Rešitev.** Najprej označimo vozlišča in elemente, slika Z1-2. Izberemo smeri lokalnih x-osi in pozitivne strani elementov in predpostavimo smeri reakcij. V vozlišču 3 je členek, levi del tričlenskega loka poteka od vozlišča 1 preko vozlišča 2 do 3, desni del pa od vozlišča 3 do vozlišča 5.



Slika 4.1.Z1-2. Označitev vozlišč z zaporednimi številkami in elementov z zaporednimi številkami v oklepajih. Smeri lokalnih x-osi potekajo po oseh elementov in so prikazane s puščicami. Pozitivne strani elementov so na strani označb elementov.

Glede na globalni koordinatni sistem postavljen v vozlišče 1, s horizontalno x osjo na desno in vertikalno y osjo navzgor, sta ravnotežni enačbi 4.1-1 in 2 enaki

$$\Sigma F_{i,x} = H_1 + P_1 - H_5 = H_1 - H_5 + 1 = 0$$

$$\Sigma F_{i,y} = V_1 - 2q - P_2 - P_3 + V_5 = V_1 + V_5 - 2 \times 4 - 2 - 3 = V_1 + V_5 - 13 = 0.$$

Za momentno enačbo za ves tričlenski »lok« postavimo pol v podporo 1:

$$\Sigma M_i^{(1)} = 2P_1 + 1 \times 2q + 2P_2 + 3P_3 - 1H_5 - 4V_5 = -1H_5 - 4V_5 + 2 \times 1 + 1 \times 2 \times 4 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = -1H_5 - 4V_5 + 23 = 0$$

Za momentno enačbo za desni del tričlenskega loka, seveda s polom v osrednjem členku, dobimo:

$$\Sigma M_i^{(C)} = -1P_3 - 1H_5 + 2V_5 = -1 \times 3 - 1H_5 + 2V_5 = 0.$$

Zaradi preišljene izbire koordinatnega sistema ter pola lahko v gornjih štirih enačbah rešimo skupaj prvo in tretjo na

$$H_5 = 5,667 \text{ kN} \quad \text{in} \quad V_5 = 4,333 \text{ kN}$$

ter nato še preostali dve enačbi na neznani reakciji

$$H_1 = 4,667 \text{ kN} \quad \text{in} \quad V_1 = 8,667 \text{ kN}.$$

Notranje statične količine izračunamo na direktni način ali pa s segmentno metodo. Preseke kjer računamo te količine izberemo na podlagi pregleda, kako le-te potekajo. Principialen potek je podan v tabeli Z1-1, velja pa za lokalne osi elementov. Element 4 smo s točko 4', kjer je koncentrirana sila, razdelili na dva enaka dela.

segment	obtežba $q_x$	potek $N(x)$	obtežba $q_v$	potek $Q(x)$	potek $M(x)$
1-2	0	konst.	0	konst.	linearen
2-3	0	konst.	konst.	linearen	kvadratna parabola
3-4	0	konst.	0	konst.	linearno
4-4'	0	konst.	0	konst.	linearno
4'-5	0	konst.	0	konst.	linearno

Tabela Z1-1.

Preseki, kjer računamo **notranje statične količine**, so torej na obeh straneh točk 2,3,4,4' ter 5 in jih praviloma **predpostavimo v pozitivni smeri lokalnih osi**. Za presek elementa (1) v vozlišču 2 izračunamo notranje statične količine na podlagi slike Z1-3. Iz ravnotežja dobimo

$$N_{2S} = -8,667 \text{ kN}$$

$$Q_{2S} = -4,667 \text{ kN}$$

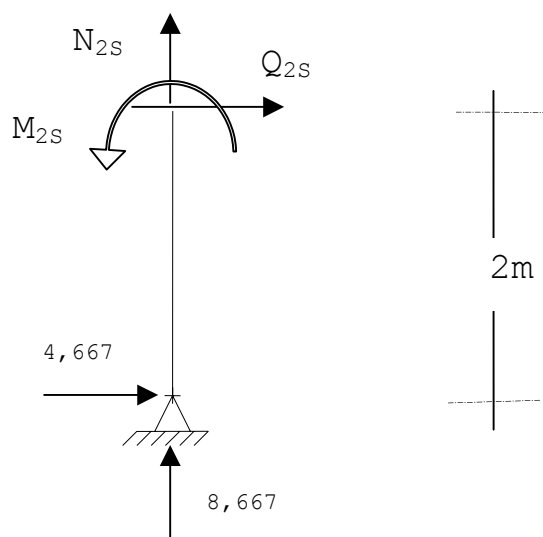
$$M_{2S} = -9,334 \text{ kNm}$$

Notranje statične količine za presek elementa (2) v vozlišču 2 izračunamo v smislu direktne metode na podlagi slike Z1-4:

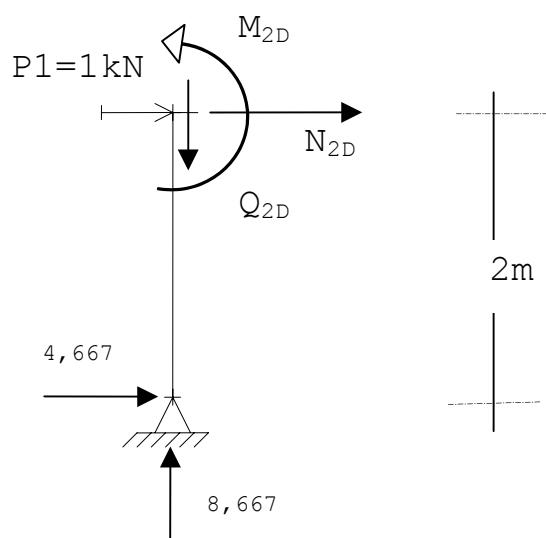
$$N_{2D} = 8,667 \text{ kN}$$

$$Q_{2D} = -5,667 \text{ kN}$$

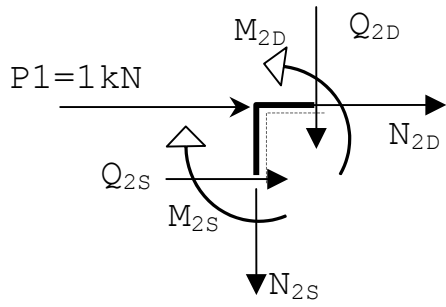
Moment je v točki 2 zvezen. Lahko bi računali v smislu segmentne metode, kjer v prvem preseku poznamo notranje sile in momente. Tedaj opazujemo ravnotežje »izrezanega« vozlišča 2 prikazanega na sliki Z1-5. Sile, ki delujejo na levi del tričlenskega loka izračunamo iz ravnotežja sil in momentov na sliki Z1-6. Izračunane vrednosti v izbranih presekih so podane v tabeli Z1-2, diagrami pa narisani na slikah Z1-6-9.



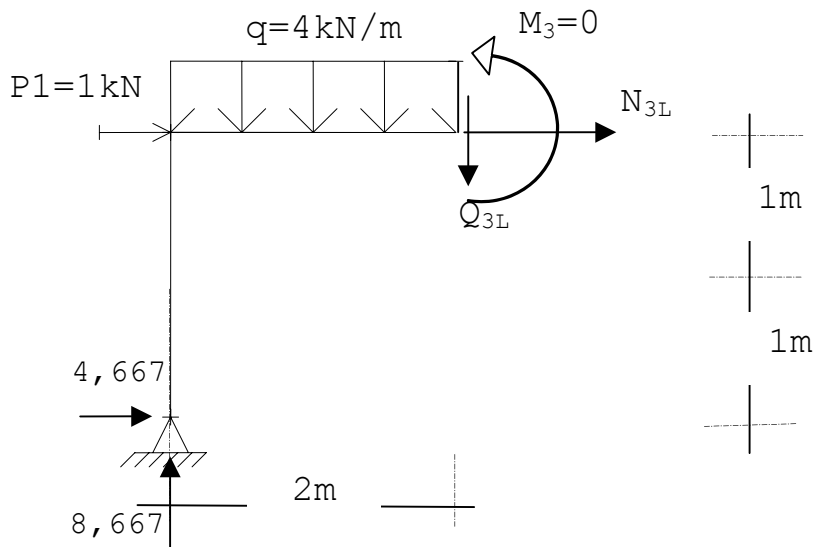
Slika 4.1.Z1-3. Sile in moment, ki delujejo na element 1.



Slika 4.1.Z1-4. Neznane sile in moment, ki delujejo na presek 2 elementa 2.



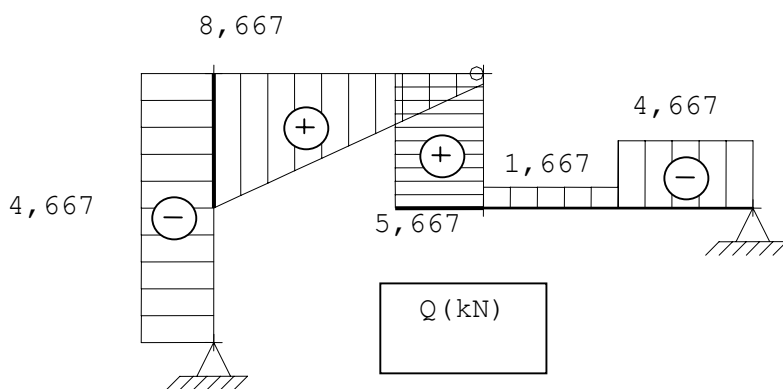
Slika 4.1.Z1-5. Iz poznanih vrednosti v preseku 2S izračunamo vrednosti v preseku 2D.



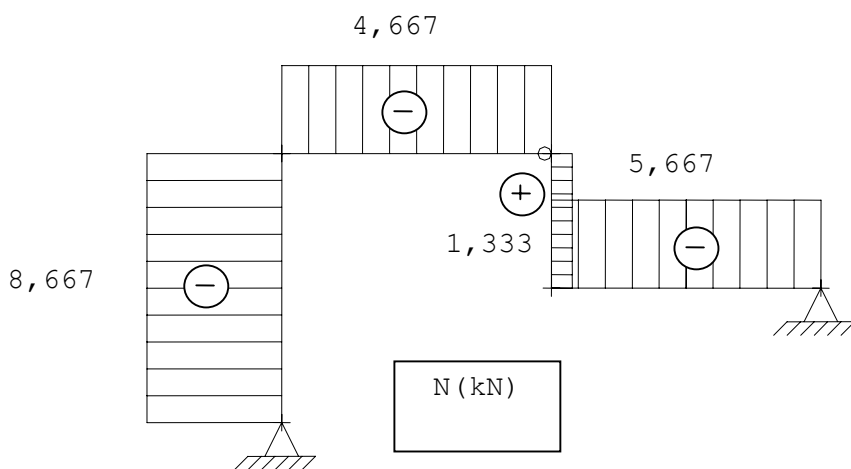
Slika 4.1.Z1-6. Levi del tričlenskega loka ter sile in momenti, ki nanj delujejo.

element	vozišče	osne sile N (kN)	prečne sile Q (kN)	upogibni momenti M (kNm)
1	1	-8.667	-4.667	0.000
1	2	-8.667	-4.667	-9.333
2	2	-5.667	8.667	-9.333
2	3	-5.667	0.667	0.000
3	3	-1.333	5.667	0.000
3	4	-1.333	5.667	5.667
4	4	-5.667	-1.333	5.667
4	5	-5.667	-4.333	0.000

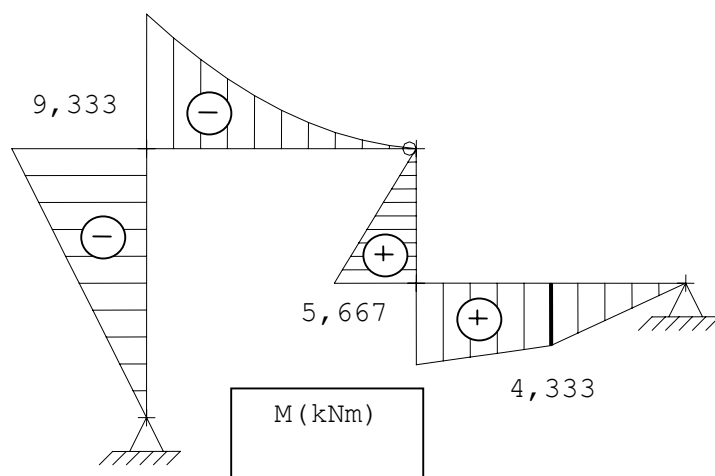
Tabela Z1-2.



Slika 4.1.Z1-7. Diagram prečnih sil v kN.



Slika 4.1.Z1-8. Diagram osnih sil v kN.

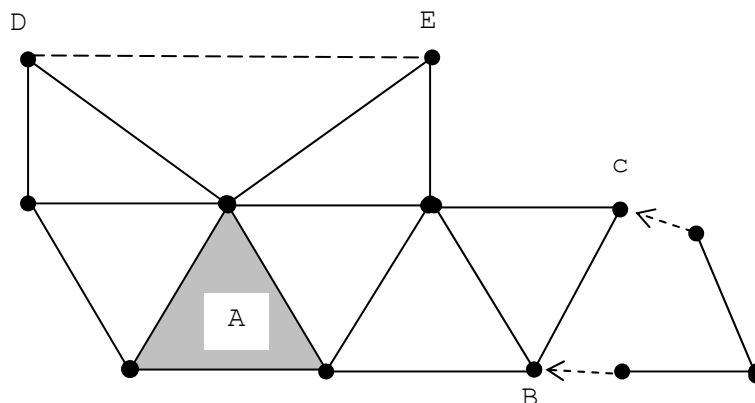


Slika 4.1.Z1-9. Diagram upogibnih momentov v kNm.

**4.2. Paličja** so konstrukcije, kjer lahko dosegamo najvišji izkoristek materiala in so izredno ekonomične. Sestavljena so iz ravnih elementov, palic, in imajo izključno **samo členkasta vozlišča**. **Obtežba paličja in podpiranje je v vozliščih**. **Notranje sile so samo osne sile**, če ne upoštevamo lastne teže. Če v elementih paličja nastopijo momenti in prečne sile, tedaj ga ne smatramo kot pravo paličje. Ime »palica« je rezervirano za tiste elemente, kjer v njih nastopajo samo osne sile – isti element so lahko nosilci, če v njih nastopajo tudi upogibni momenti. Statično določeno ravninsko **paličje koncipiramo** tako, da osnovnemu sklopu palic, ki je

v obliki trikotnika, dodajamo po dve palici, slika 4.2-1. Tako dobimo trdno konstrukcijo. Če s palico povežemo dve sosednji vozlišči, dobimo statično nedoločeno paličje.

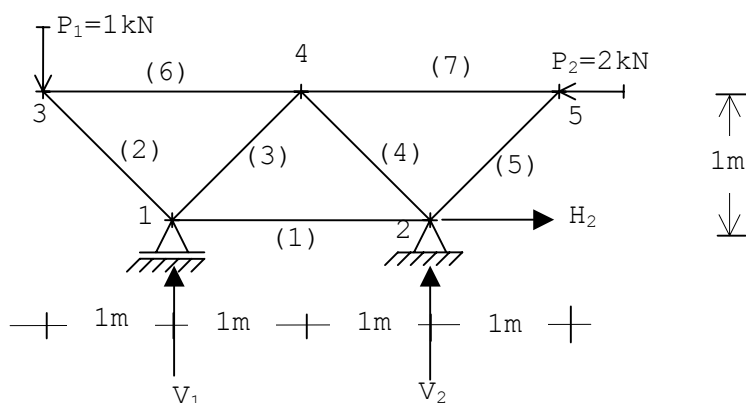
»Ročno« analiziranje paličja je dokaj stereotipno in rutinsko. Rešujemo ga po vozliščni metodi ali pa za nekatere primere z Ritterjevim rezom. V paličju so osne po posameznih elementih konstantne, ker je obtežba v členkastih vozliščih.



Slika 4.2-1. Paličje z osnovno celico A, simbolični prikaz sestavljanja paličja z dodajanjem po dveh palic v vozlišči B in C, ter nastanek statično nedoločenega paličja s povezovanjem sosednjih vozlišč z eno palico, črtkano prikazana palica D-E.

**4.2.1. Vozliščna metoda.** Ta metoda temelji na analizi ravnotežja osnih sil palic, ki delujejo na vozlišče. Njihove smeri praviloma predpostavimo v smeri iz vozlišča – tako nam pozitivni rezultati pomenijo natezno silo, negativni pa tlačno. Razlika v predznaku je iz inženirskega stališča zelo pomembna, ker se tlačne in natezne palice dimenzionirajo povsem različno. Pri ravninskem paličju analiziramo vozlišča v takem zaporedju, da sta zmeraj samo največ dve osni sili neznan, pri prostorskem pa tri. Te neznanke izračunamo iz ravnotežnih enačb. To je problem sil s skupnim prijemališčem, ki ga poznamo iz povsem začetnega poglavja. Tako lahko izračunamo vse osne sile v palicah in pri tem rešujemo naenkrat samo največ po dve enačbi za 2D paličje in po tri enačbe za 3D paličje. Ko najprej izračunamo reakcije paličja, ki ga obravnavamo kot eno trdno telo, lahko nato po prej omenjenem postopku rešimo vsako statično določeno paličje.

Zgled 4.2.1.Z1. Izračunajmo osne sile v paličju na sliki 4.2.1.Z1-1.



Slika 4.2.1.Z1-1. Dimenzije in obtežba paličja ter označitev vozlišč in elementov. Na sliki so izbrane pozitivne smeri reakcij.

**Izračun.** Vozlišča in palice označimo z zaporednimi številkami in nato izračunamo reakcije. Te so

$$V_1 = 2,5 \text{ kN}$$

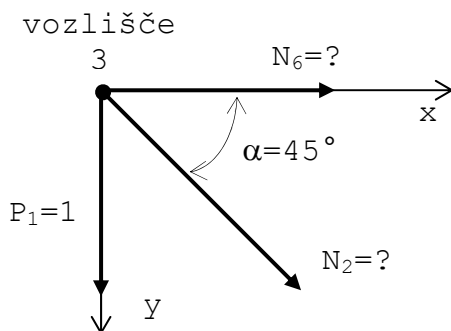
$$H_2 = 2,0 \text{ kN}$$

$$V_2 = -1,5 \text{ kN}.$$



Ugotovimo, v kakšnem zaporedju bomo reševali vozlišča. V vozlišču 1, to je v podpori, ne moremo začeti, ker so tam priključene tri palice, torej so tam neznane tri sile – na razpolago pa imamo samo dve enačbi a translatorsno ravnotežje. Začnemo lahko v vozlišču 3: iz ravnotežja izračunamo osni sili v palicah 2 in 6. Nato lahko nadaljujemo z vozliščem 1, kjer sta tedaj neznani sili samo v palicah 1 in 3. Tako nadaljujemo v zaporedju po vozliščih 4, 2 in 5. Seveda je lahko potek računanja tudi v kakšnem drugem zaporedju. Izračunajmo sedaj te sile.

Sile, ki delujejo **na vozlišče 3**, so prikazane na sliki Z1-2.



Slika Z1-2. Sile, ki delujejo na vozlišče 3. Smer neznanih sil  $N_2$  in  $N_6$  sta v smeri od vozlišča.  
Neznane sile

Koordinatni sistem za sile lahko izberemo kot je prikazano na sliki. Ravnotežni enačbi sta

$$\sum F_{i,x} = N_2 \cos 45^\circ + N_6 = 0$$

$$\sum F_{i,y} = 1 + N_2 \sin 45^\circ = 0,$$

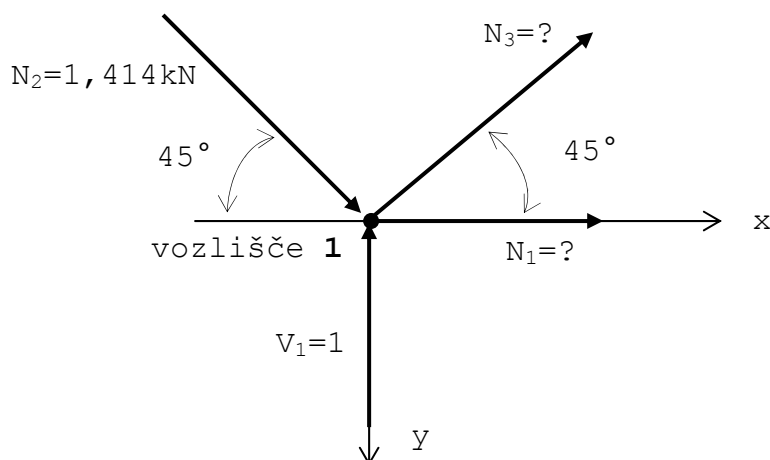
rešitvi pa sta

$$N_2 = -1,414 \text{ kN}$$

$$N_6 = 1,000 \text{ kN}.$$

Torej je sila  $N_2$  tlačna, sila  $N_6$  pa natezna.

Sile, ki delujejo **na vozlišče 1**, so prikazane na sliki Z1-3. Sila  $N_6$  je sedaj znana. Ker je negativna, tlači vozlišče in je usmerjena k vozlišču.



Slika Z1-3. Sile, ki delujejo na vozlišče 1.

Ravnotežni enačbi vozlišča sta

$$\Sigma F_{i,x} = 1,414\cos45^\circ + N_3\cos45^\circ + N_1 = 0$$

$$\Sigma F_{i,y} = -1 + 1,414\sin^\circ - N_3\sin45^\circ = 0,$$

rešitvi pa

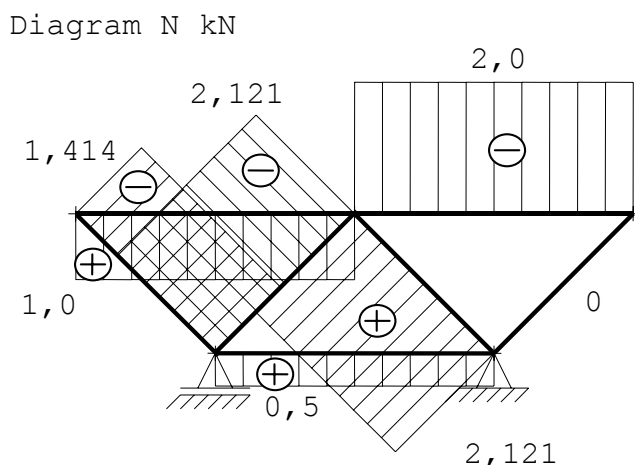
$$N_1 = 0,500\text{kN}$$

$$N_3 = -2,121\text{kN}.$$

Na tak način izračunamo vse sile v paličju. Rezultati so prikazani v tabeli Z1-1, diagram osnih sil pa na sliki Z1-4.

element	osna sila kN
1	0.500
2	<b>-1.414</b>
3	<b>-2.121</b>
4	2.121
5	0.000
6	1.000
7	<b>-2.000</b>

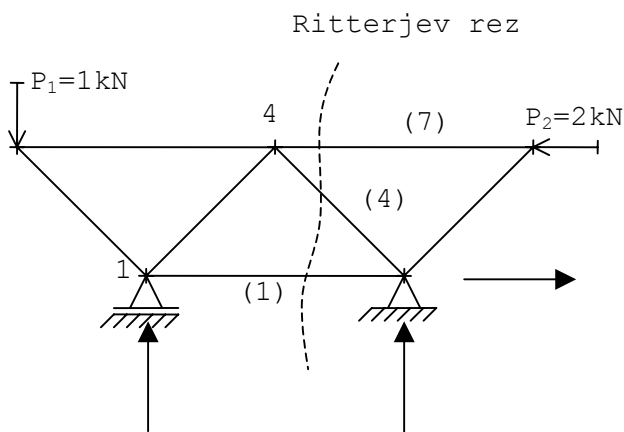
Tabela Z1-1. Osne sile v paličju.



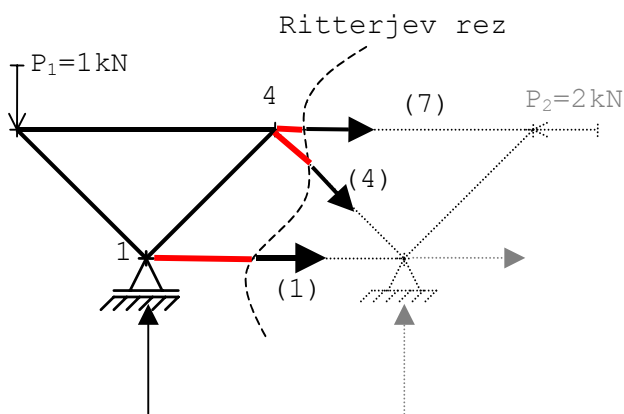
Slika Z1-4. Diagram osnih sil v kN.

4.2.2. **Ritterjev rez.** Če lahko ravninsko paličje z rezom skozi tri palice razdelimo na dva dela, imenujemo tak rez Ritterjev rez, slika 4.2.2-1.

Izbrani del paličja mora biti v ravnotežju. Ob izračunanih reakcijah so neznane sile samo osne sile v prereznih palicah, slika 4.2.2-2. Na razpolago imamo tri ravnotežne enačbe, iz katerih izračunamo te sile. Pri prostorskem paličju režemo skozi šest palic, ker imamo na razpolago šest enačb. Z Ritterjevim rezom lahko torej neposredno izračunamo sile v tistih palicah, kjer nas zanimajo osne sile – z vozliščno metodo pa moramo računati po vozliščih tako dolgo, dokler ne »pridemo« do obravnavanih palic. Ker morebitna napaka pri vozliščni metodi povzroči, da so vsi nadaljnji računi napačni, lahko Ritterjev rez uporabimo za preverjanje vmesnih rezultatov. Opozoriti velja, da nekatera bolj kompleksna paličja ni mogoče razdeliti na dva dela z enim rezom skozi samo tri palice – tedaj Ritterjeva metoda ni uporabna.



Slika 4.2.2-1. Ritterjev rez.



Slika 4.2.2-2. Za del paličja, razdeljen z Ritterjevim rezom, je neznanih osnih sil natanko toliko, kot je na razpolago ravnotežnih enačb.

**Zgled 4.2.2.Z1.** Za paličje iz prejšnjega zgleda (4.2.1.Z1) izračunajmo osno silo v palici 1.

**Rešitev.** Ritterjev rez mora potekati skozi palico 1. Vendar pa je možno paličje razdeliti na dva dela samo tako, da rez poteka še skozi palici 4 in 7. Če uporabimo momentni ravnotežni pogoj s polom v vozlišču 4, lahko kar samo s to enačbo izračunamo želeno osno silo:

$$\Sigma M_1^{(4)} = 1 \cdot V_1 - 2P_1 - 1 \cdot N_1 = 0$$

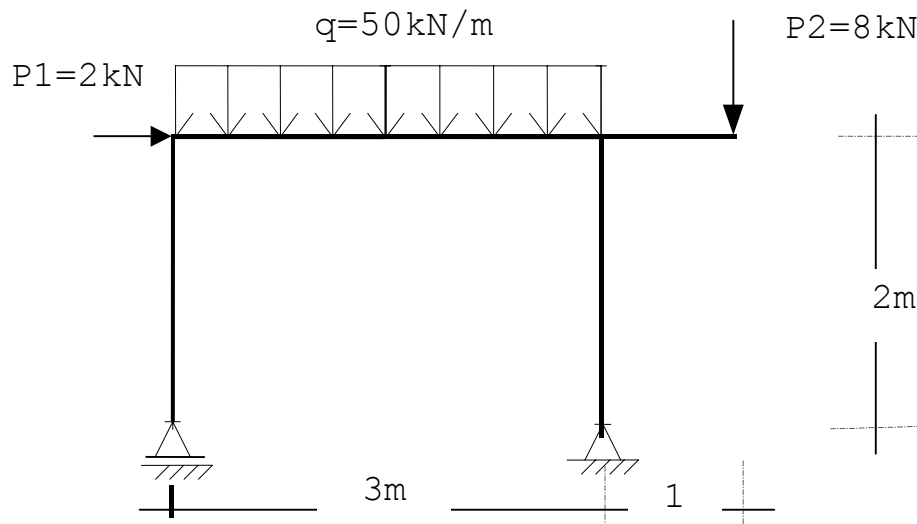
in

$$N_1 = 1 \cdot V_1 - 2P_1 = -1,2,5 + 2 \cdot 1 = 0,5 \text{ kN.}$$

Rezultat za osno silo je seveda enak kot po vozliščni metodi.

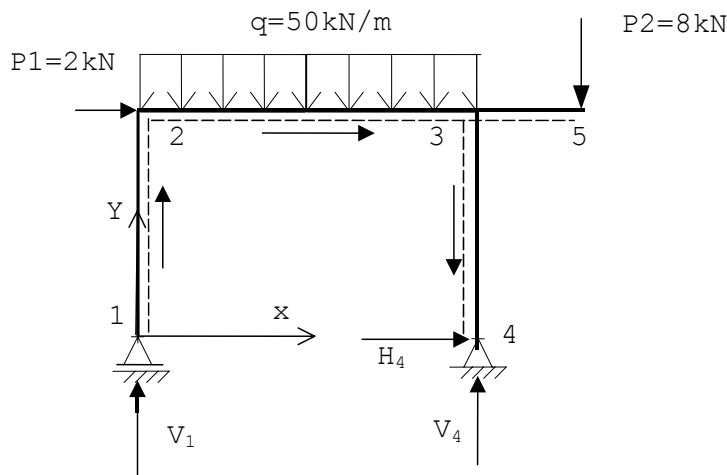
**4.3. Okvirne konstrukcije** so sestavljene iz vertikalnih stebrov ter horizontalnih nosilcev, ki so med seboj togo ali členkasto spojeni. Nekatere zgradbe, posebno pa tiste z jeklenim nosilnim ogrodjem, so okvirne konstrukcije. Za njih je značilno, da v stebrih prevladujejo osne sile, v nosilcih pa upogibni momenti, vendar pa teh značilnosti za opredelitev konstrukcij ne smemo jemati preveč strogo. Vsekakor pa te konstrukcije ne predstavljajo neke posebnosti, ki bi s stališča analize zahtevale posebne računske metode. Analiziramo jih v principu enako kot osnovne elemente oziroma kot vse enostavne konstrukcije – z direktno ali pa s segmentno metodo.

**Zgled 4.3.Z1.** Konstrukcija na sliki 4.3.Z1-1 predstavlja enostaven statično določen okvir. Izračunajmo reakcije, notranje sile in momente.



sliki 4.3.Z1-1.

**Rešitev.** Označimo vozlišča in postavimo lokalne koordinatne sisteme in predpostavljene smeri reakcij. Na sliki 4.3.Z1-2 so smeri lokalnih x osi prikazane s puščicami ter globalni koordinatni sistem XY, v katerem analiziramo ravnotežje. Običajno izberemo pozitivne strani elementov na notranji strani okvirja. Elemente bomo označevali z dvema indeksoma, ki določata vozlišča, med katerima element poteka. Prav tako bomo z dvema indeksoma označevali notranje količine, kjer prvi indeks določa h kateremu vozlišču pripada presek v katerem nastopa notranja količina, drugi indeks pa s prvim določa, v katerem elementu je presek. S temi oznakami nam ni potrebno elemente posebej oštevilčiti, moramo pa zato označiti še konec konzole kot vozlišče. Velja omeniti, da so v uporabi različne oznake, med drugim tudi oznake, kjer indeksa zaporedoma pomenita številko vozlišča in številko elementa.



sliki 4.3.Z1-2. Oštevilčenje vozlišč ter postavitev lokalnih in globalnega koordinatnega sistema.

Reakcije izračunamo iz enačb ravnotežja celotnega okvirja z zapisom komponent vektorjev v globalnem koordinatnem sistemu ter polom v podpori 1:

$$\sum F_{i,x} = H_4 + P_1 = H_4 + 2 = 0$$

$$\sum F_{i,y} = V_1 - 3q - P_2 + V_4 = V_1 + V_4 - 3 \times 50 - 8 - 3 = 0.$$

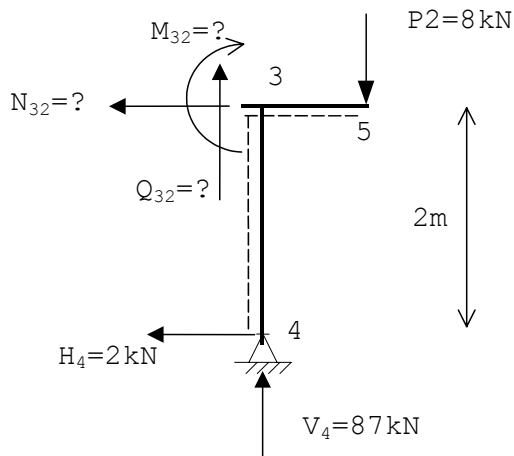
$$\sum M_i^{(1)} = -2P_1 - 3qx \frac{3}{2} - 4P_2 + 3V_4 = -2 \times 2 - 3 \times 50 \times \frac{3}{2} - 4 \times 8 + 3V_4 = 0$$

$$V_1 = 71 \text{ kN}, H_4 = -2 \text{ kN}, V_4 = 87 \text{ kN}.$$

Notranje statične količine računamo po direktni ali pa po segmentni metodi. Na sliki 4.6.Z1-3 je za zgled prikazan del okvirja, ki nam na podlagi ravnotežja da prečno silo  $Q_{32}$  in osno silo  $N_{32}$  ter moment  $M_{32}$ :

$$\begin{aligned}\Sigma F_{i,x} &= -H_4 + N_{32} = -2 + N_{32} = 0 \\ \Sigma F_{i,y} &= V_4 - P_2 + Q_{32} = 87 - 8 + Q_{32} = 0. \\ \Sigma M_i^{(3)} &= -2H_4 - 1P_2 + M_{32} = -2 \cdot 2 - 1 \cdot 8 + M_{32} = 0\end{aligned}$$

$$N_{32} = 2 \text{ kN}, Q_{32} = -97 \text{ kN}, V_4 = 12 \text{ kN}.$$



Slika 4.3.Z1-3. Desni del okvirja za izračun  $Q_{32}$ ,  $N_{32}$  in  $M_{32}$ .

Na analogen način izračunamo še vse ostale vrednosti na krajiščih elementov. Rezultati so v tabeli Z1-1, vsi diagrami pa na slikah 4-6. Potek momentov po elementu 2-3 izračunamo na podlagi slike 7. Upogibni moment v preseku  $x$  je enak

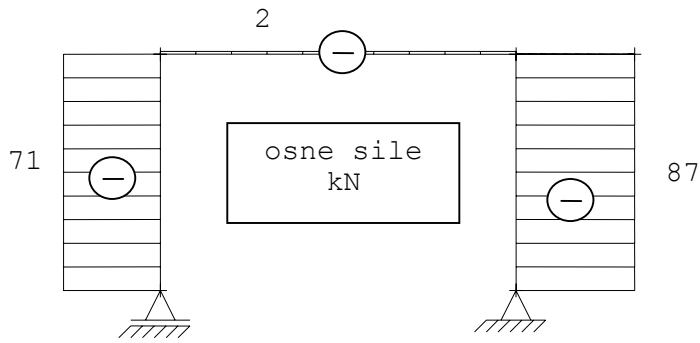
$$M(x) = x \cdot Q_{32} - qx^2/2 = 79x - 50x^2/2.$$

Na sredini elementa pa je

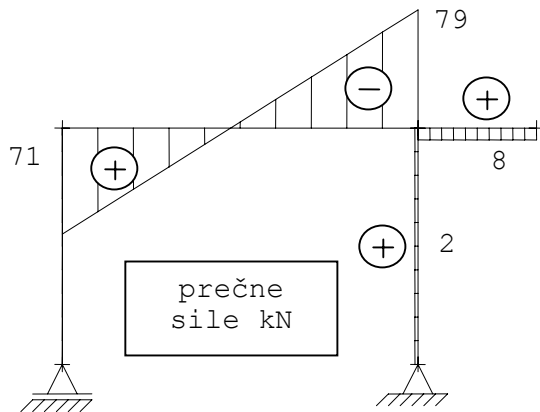
$$M(x=1.5) = 71 \cdot 1,5 - 50 \cdot 1,5^2/2 = 50,25 \text{ kNm}.$$

element	vozišče	osna sila kN	prečna sila kN	upogibni moment kNm
1-2	1	-71.000	0.000	0.000
1-2	2	-71.000	0.000	0.000
2-3	2	-2.000	71.000	0.000
2-3	3	-2.000	-79.000	-12.000
3-4	3	-87.000	2.000	-4.000
3-4	4	-87.000	2.000	0.000
4-5	3	0.000	8.000	-8.000
4-5	5	0.000	8.000	0.000

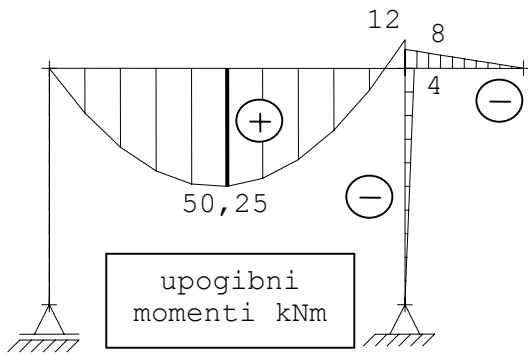
Tabela 4.3.Z1-1.



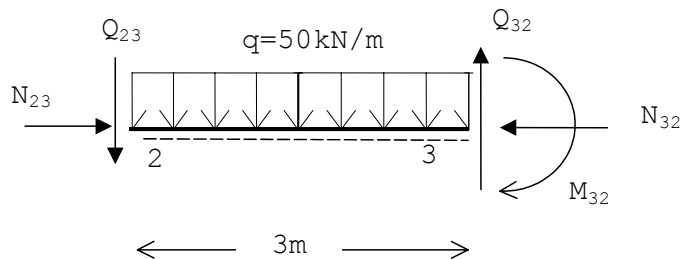
Slika 4.3.Z1-4. Osne sile.



Slika 4.3.Z1-5. Prečne sile.



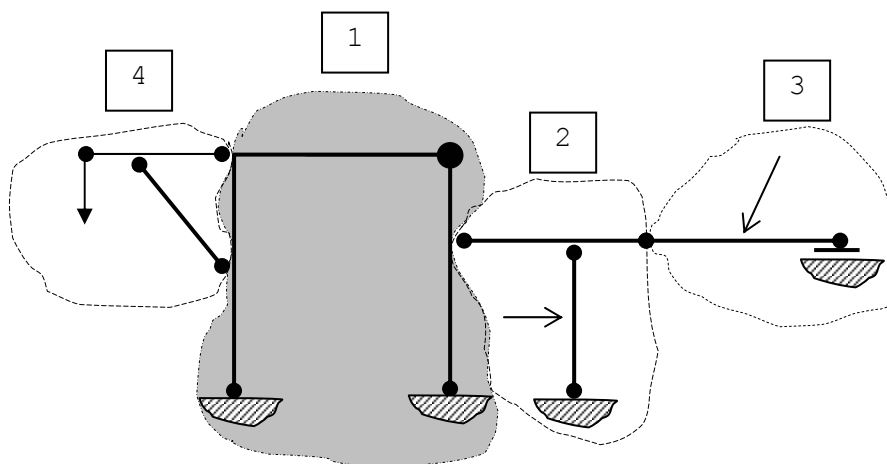
Slika 4.3.Z1-6. Upogibni momenti.



Slika 4.3.Z1-7. Za izračun poteka notranjih količin obravnavamo element 2-3 ločeno. Robne vrednosti so poznane iz tabele 1 in so narisane v smereh, v katerih dejansko učinkujejo.

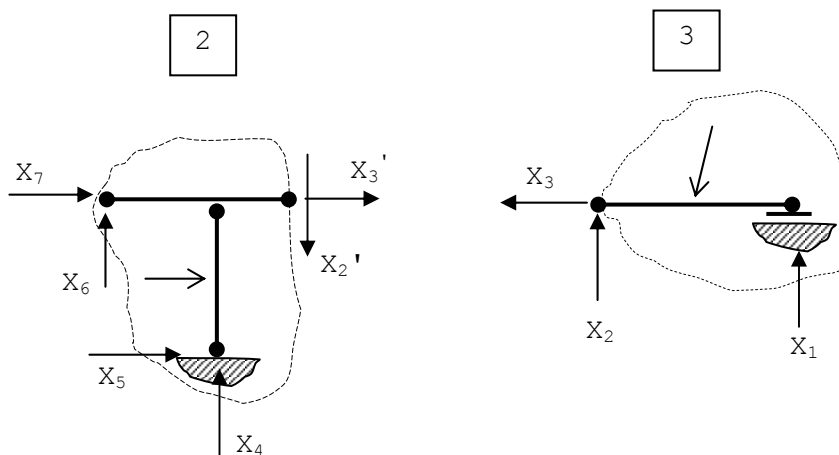
4.4. **Kompleksne konstrukcije** so sestavljene iz mnogih elementov. Poizkušamo jih razstaviti na enostavne elemente, tričlenske loke in enostavne sklope tako, da jih lahko analiziramo sukcesivno v določenem

zaporedju in pri tem rešujemo največ po tri ravnotežne enačbe (za ravninski problem). Ta postopek je najbolj nazoren, če ga primerjamo s postavljanjem konstrukcije. Oglejmo si to na primeru prikazanem na sliki 4.4-1. Slika prikazuje sestavljeno konstrukcijo.



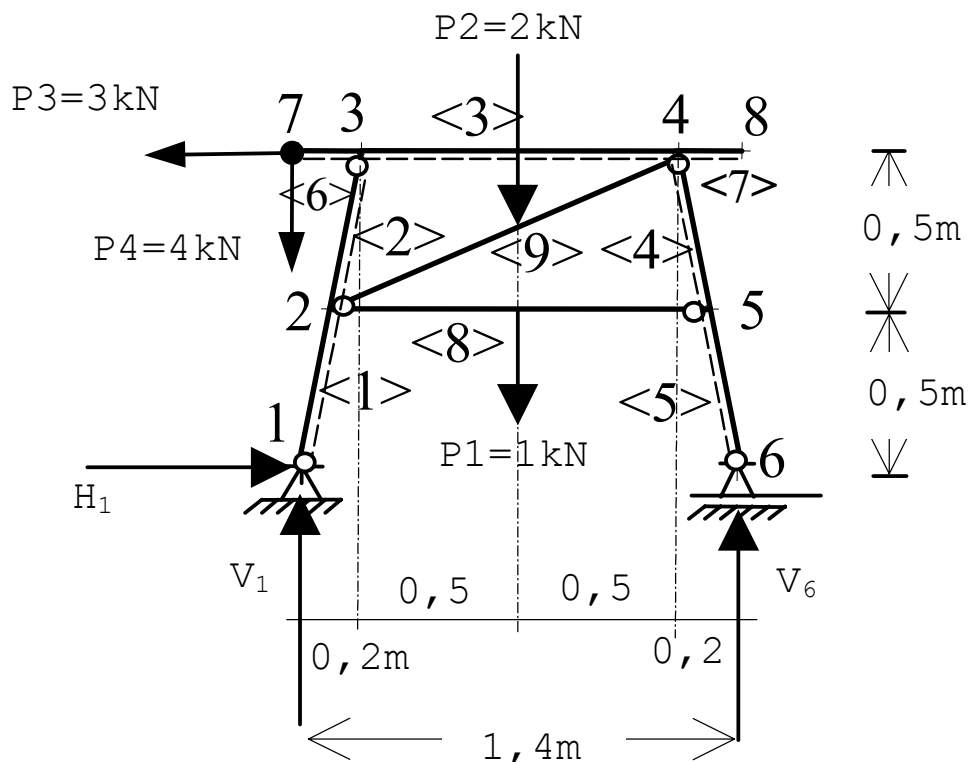
Slika 4.4-1. Možno zaporedje postavljanja sklopov.

Postavljamo jo lahko po sklopih samo v določenem zaporedju. Na sliki je označeno možno zaporedje. Sklop (1) lahko smatramo kot tričlenski lok, je stabilno podprt in ga postavimo najprej. Nato sklop deloma naslonimo na sklop (1), sklop (3) je prostoležeči nosilec, ki je naslonjen na sklop 2 in zunanjo podporo. Nazadnje postavimo še sklop 4. Celotno konstrukcijo analiziramo po sklopih v obratnem vrstnem redu. Tedaj v vsakem koraku obravnavamo samo po en sklop in izračunavamo samo neznane reakcije, s katerimi deluje na ta sklop del konstrukcije, ki smo jo v mislih predtem dogradili. Reakcijske sile, obrnjene v nasprotno smer, postanejo za naslednji korak akcijske sile in postopek ponovimo. Postopek je razviden iz simboličnega prikaza na sliki 4.4-2. Najprej izračunamo reakcije prostoležečega nosilca. Te so  $X_1$ ,  $X_2$  in  $X_3$ . Notranje statične količine za tak element pa že znamo izračunati. Sili  $X_2'$  in  $X_3'$ , ki sta nasprotno enakim reakcijam  $X_2$  in  $X_3$ , delujeta na sklop 2 in predstavljata zunanjo obremenitev. Sklop 2 analiziramo kot tričlenski lok. Reakcijske sile so  $X_4$ ,  $X_5$ ,  $X_6$  in  $X_7$ . S silama  $X_6'$  in  $X_7'$ , ki sta nasprotno enaki reakcijam  $X_6$  in  $X_7$ , pa deluje sklop 2 na sklop 1. Ko na tak način izračunamo še učinek sklopa 4 na sklop 1, pa lahko na koncu analiziramo še sklop, ki smo ga postavili kot prvega.



Slika 4.4-2. Prikaz neznank pri zaporednem računanju konstrukcije razdeljene na sklope. Prikazana sta samo prva dva sklopa, ki jih računamo.

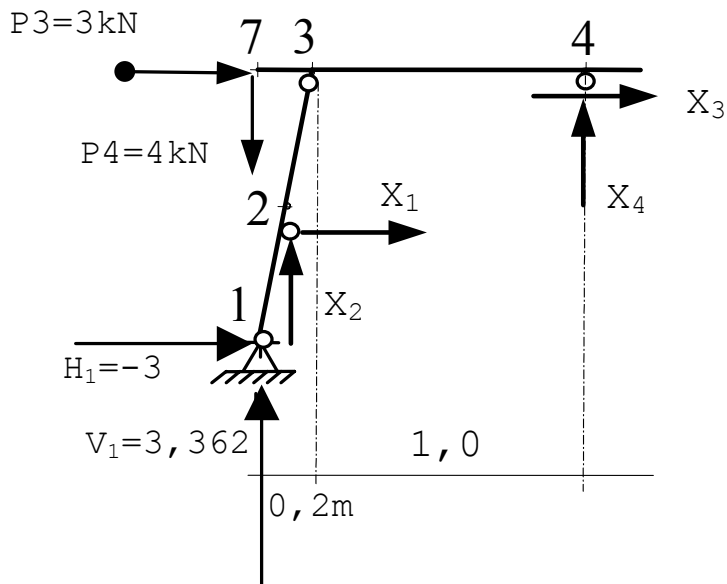
Žal, vedno ni mogoče konstrukcijo razstaviti na tako očiten način in na tako enostavne sklope. Poglejmo si primer konstrukcije, ki predstavlja navadno zidarsko »koko«, ki je statično določena konstrukcija, slika 4.4-3.



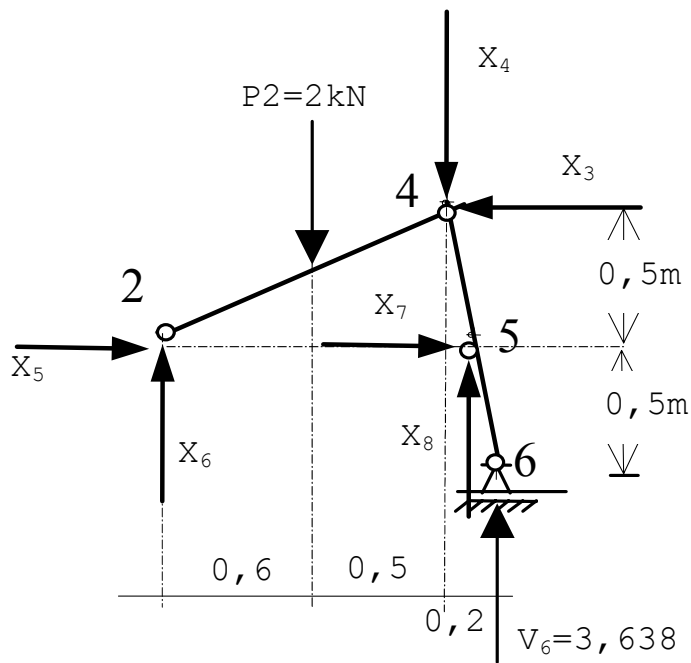
slika 4.4-3.

Če v resnici ne bi bilo nekaj trenja v členkih, je ne bi mogli postaviti po delih – če manjka že en sam element, je konstrukcija nestabilna in ni nekega začetnega stabilnega dela, ki ga najprej postavimo. Kljub temu pa je analiza konstrukcije po delih možna. Na slikah 4.3-4,5 in 6 so prikazani sklopi, na katere konstrukcijo razdelimo. Ko izračunamo zunanje reakcije, imamo osem neznanih veznih sil med sklopi, ki so označene na slikah. Smeri neznanih sil so predpostavljene. Izbira vrstnega reda analiziranja sklopov temelji na premisleku: izračun začnemo s sklopom, ki je prikazan kot prvi, slika 4.3-4. Samo v tem sklopu, ki predstavlja tričlenski lok, je število neznank enako štirim razpoložljivim ravnotežnim enačbam, ki razrešijo tričlenski lok. V drugem sklopu na sliki 4.3-5 je vseh neznank 6, vendar pa sta neznanki  $X_3$  in  $X_4$  vezni sili med njim in prvim sklopom, ki smo ju, predpostavimo, pa prvi sklop že izračunali. Seveda ti dve sili delujeta na drugi sklop kot akcijski sili in sta zato obrnjeni v nasprotno smer kot reakciji na prvi sklop. Opozoriti velja, da neznani sili  $X_5$  in  $X_6$  nista vezni sili med prvim in drugim sklopom ampak sta rezultanti sil, s katerimi deluje tako prvi sklop kot tudi element 2-5 na drugi sklop. Za drugi sklop imamo tako neto štiri neznanke, ki jih rešimo. Na zadnji sklop, slika 4.3-6, ki je enostavni element, delujeta oba prej omenjena sklopa – novih neznank pa ni. S kontrolo ravnotežja tega elementa lahko zato samo preverimo, ali so naši izračuni točni. Oglejmo si na kratko te izračune.

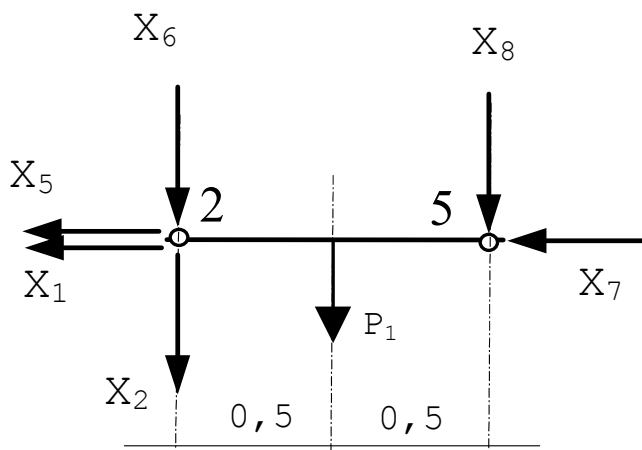




Slika 4.3-4. Prvi sklop – tričlenski lok.



Slika 4.3-5. Drugi sklop – tričlenski lok.



Slika 4.3-6. Tretji oziroma zadnji sklop – obojestransko členkasto vpeti nosilec.

Izberimo  $x$  os v horizontalni smeri na desno,  $y$  os pa v vertikalni smeri navzgor. Reakcije na celotno konstrukcijo dobimo iz enačb

$$\begin{aligned}\Sigma F_{i,x} &= H_1 - P_3 = H_1 - 3 = 0 \\ \Sigma F_{i,y} &= V_1 + V_6 - P_1 - P_2 - P_4 = V_1 + V_2 + 7 = 0 \\ \Sigma M_i^{(1)} &= +1,4V_6 - 0,7P_1 - 0,7P_2 - 1 \cdot P_3 = 1,4V_6 - 1,9 = 0.\end{aligned}$$

$$H_1 = 3\text{kN} \quad V_1 = 3,36\text{kN} \quad V_6 = 3,64\text{kN}$$

Za sklop 1 so ravnotežne enačbe

$$\begin{aligned}\Sigma F_{i,x} &= H_1 + X_1 + X_3 - P_3 = -3 + X_1 + X_3 + 3 = 0, \\ \Sigma F_{i,y} &= V_1 + X_2 + X_4 - P_4 = 3,36 + X_2 + X_4 - 4 = 0,\end{aligned}$$

za ves tričlenski lok

$$\Sigma M_i^{(2)} = 1,1X_4 + 0,1P_4 - 0,1V_1 + 0,5P_3 - 0,5H_3 = 0,$$

in za element 7-3-4

$$\Sigma M_i^{(3)} = 1,1X_4 + 0,5P_3 - 0,1P_4 = 0.$$

Rešitve so

$$X_1 = 7,64\text{kN}, X_2 = 1,44\text{kN}, X_3 = -7,64\text{kN}, X_4 = -0,8\text{kN}.$$

Za ta sklop lahko izračunamo vse notranje sile in momente ter narišemo diagrame. Rezultati so v tabeli 1, diagrami pa na slikah 4.3-10, 11 in 12.

Za drugi sklop so ravnotežne enačbe

$$\begin{aligned}\Sigma F_{i,x} &= X_5 + X_7 - X_3 = 0, \\ \Sigma F_{i,y} &= V_6 + X_6 + X_8 - X_4 - P_2 = 0,\end{aligned}$$

za ves tričlenski lok

$$\Sigma M_i^{(5)} = +0,6P_2 + 0,1X_4 + 0,5X_3 - 1,2X_6 + 0,1V_6 = 0,$$

in za element 2-4

$$\Sigma M_i^{(4)} = 0,5X_5 - 1,1X_6 + 0,5P_2 = 0.$$

Ker poznamo vrednosti za  $X_3 = -7,64\text{kN}$  in  $X_4 = -0,8\text{kN}$ , so gornje enačbe enake

$$\begin{aligned}\Sigma F_{i,x} &= X_5 + X_7 - (-7,64) = 0, \\ \Sigma F_{i,y} &= 3,64 + X_6 + X_8 - (-0,8) - 2 = 0,\end{aligned}$$

za ves tričlenski lok

$$\Sigma M_i^{(5)} = +0,6 \cdot 2 + 0,1(-0,8) + 0,5(-7,64) - 1,2X_6 + 0,1 \cdot 3,64 = 0,$$

in za element 2-4

$$\Sigma M_i^{(4)} = 0,5X_5 - 1,1X_6 + 0,5 \cdot 2 = 0.$$

Rešitve so

$$X_5 = -6,28\text{kN}, X_6 = 1,95\text{kN}, X_7 = -1,39\text{kN}, X_8 = -0,49\text{kN}.$$

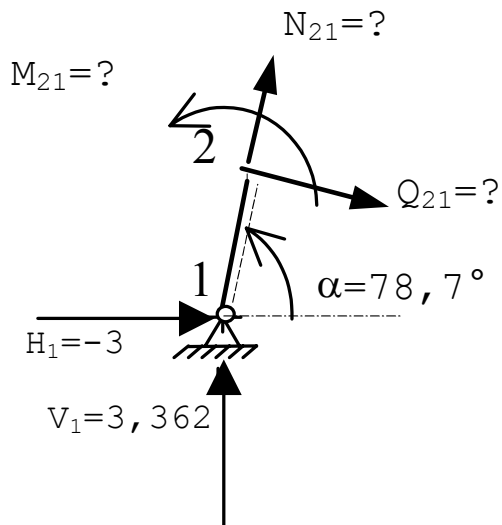
Ravnotežje elementa 2-5 izkoristimo za kontrolo pravilnosti izračunanih veznih sil:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{i,x} &= -X_1 - X_5 - X_7 = -7,64 - (-6,28) + 1,39 = 0,03 \approx 0 \\ \Sigma F_{i,y} &= -P_1 - X_2 - X_6 - X_8 = -1 - 1,44 + 1,95 + 0,49 = 0.\end{aligned}$$

Ko imamo te vezne sile, izračunamo še vse preostale notranje sile in momente za preostala sklopa in narišemo diagrame.

Opomniti velja, da prikazana razdelitev na podsklope ni edina možna. Verjetno obstajajo celo bolj učinkovite razdelitve. Vendar pa ni smiselno porabiti več časa za iskanje in študij optimalne razdelitve, kot ga porabimo za analizo konstrukcije po neki razdelitvi, ki se nam zdi dovolj primerna.

Za zgled izračunajmo notranje količine v nekaj presekih.



Slika 7.

Notranje količine elementu 1 v preseku ob vozlišču 2, slika7, lahko izračunamo iz enačb ravnotežja v smeri osne sile, v smeri prečne sile in enačbe momentnega ravnotežja okoli vozlišča 2:

$$N_{21} + H_1 \cos \alpha + V_1 \sin \alpha = 0$$

$$Q_{21} + H_1 \sin \alpha - V_1 \cos \alpha = 0$$

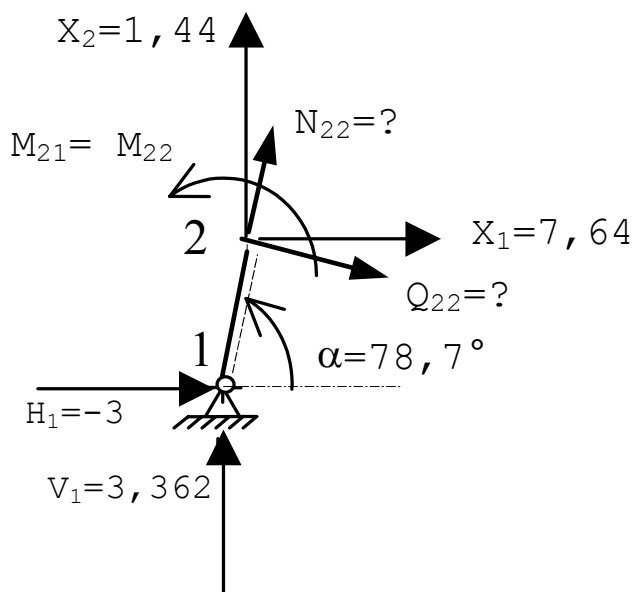
$$M_{21} + 0,5H_1 - 0,1V_1 = 0$$

oziroma

$$N_{21} = 3 \cos 78,7^\circ - 3,36 \sin 78,7^\circ = -2,71 \text{ kN}$$

$$Q_{21} = 3 \sin 78,7^\circ + 3,36 \cos 78,7^\circ = 3,60 \text{ kN}$$

$$M_{21} = -0,5(-3) + 0,1 \times 3,36 = 1,84 \text{ kNm}$$



Slika 8.

Za presek ob vozlišču 2 v elementu 1, slika 8, sta ravnotežni enačbi v smeri osne sile in v smeri prečne sile:

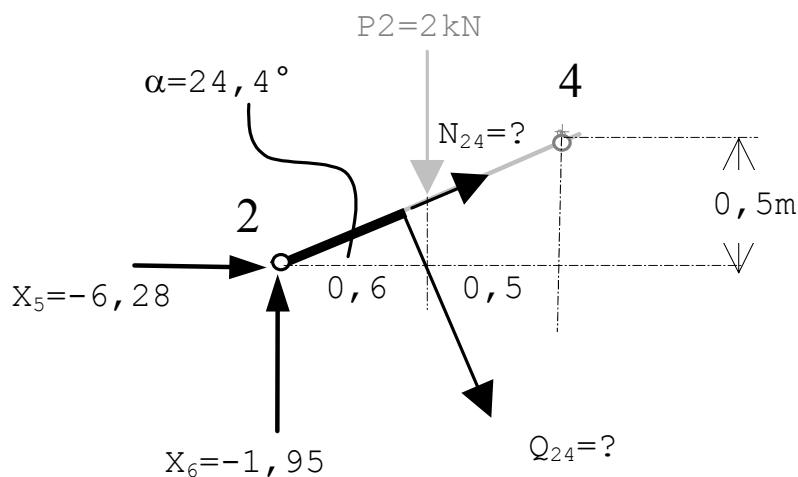
$$N_{22} + H_1 \cos \alpha + V_1 \sin \alpha + X_1 \cos \alpha + X_2 \sin \alpha = 0$$

$$Q_{22} + H_1 \sin \alpha - V_1 \cos \alpha + X_1 \sin \alpha - X_2 \cos \alpha = 0$$

oziroma

$$N_{22} = 3 \cos 78,7^\circ - 3,36 \sin 78,7^\circ + 7,64 \cos 78,7^\circ - 1,44 \sin 78,7^\circ = -5,62 \text{ kN}$$

$$Q_{22} = 3 \sin 78,7^\circ + 3,36 \cos 78,7^\circ + 7,64 \sin 78,7^\circ - 1,44 \cos 78,7^\circ = -3,60 \text{ kN}$$



Slika 9.

element	vozlišče	osne sile kN	strižne sile kN	upogibni momenti kNm
1	1	-2.708	3.601	0.000
1	2	-2.708	3.601	1.836
2	2	-5.615	-3.601	1.836
2	3	-5.615	-3.601	0.000
3	3	-7.632	0.800	-0.800
3	4	-7.632	0.800	0.000
4	4	-3.343	0.714	0.000
4	5	-3.343	0.714	0.364
5	5	-3.568	-0.714	0.364
5	6	-3.568	-0.714	0.000
6	7	-3.000	-4.000	0.000
6	3	-3.000	-4.000	-0.800
7	4	0.000	0.000	0.000
7	8	0.000	0.000	0.000
8	2	1.355	0.500	0.000
8	5	1.355	-0.500	0.000
9	2	6.516	0.833	0.000
9	4	7.344	-0.988	0.000

Tabela 4.3-1.

Za presek ob vozlišču 2 v elementu 9, slika 9, sta ravnotežni enačbi v smeri osne sile in v smeri prečne sile enaki:

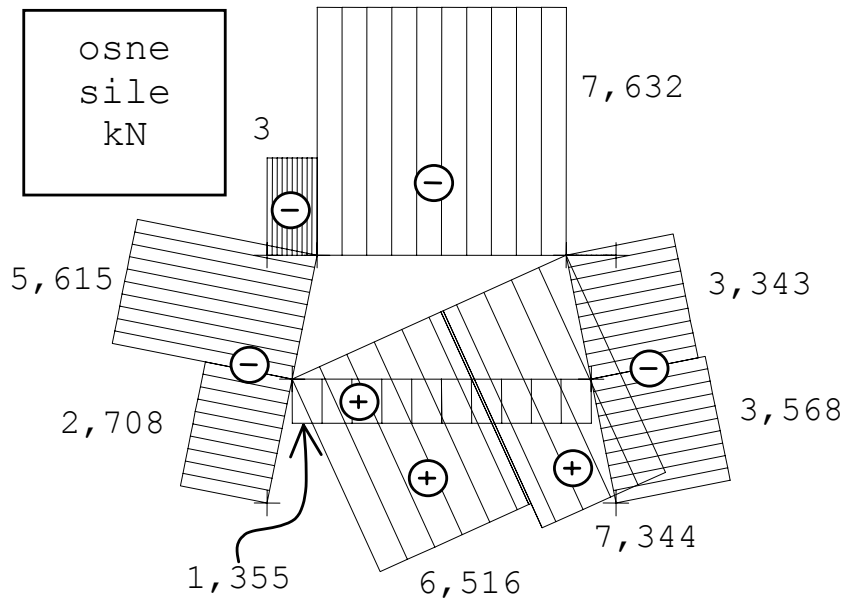
$$N_{24} + X_5 \cos \alpha + X_6 \sin \alpha = 0$$

$$Q_{24} + X_5 \sin \alpha - X_2 \cos \alpha = 0,$$

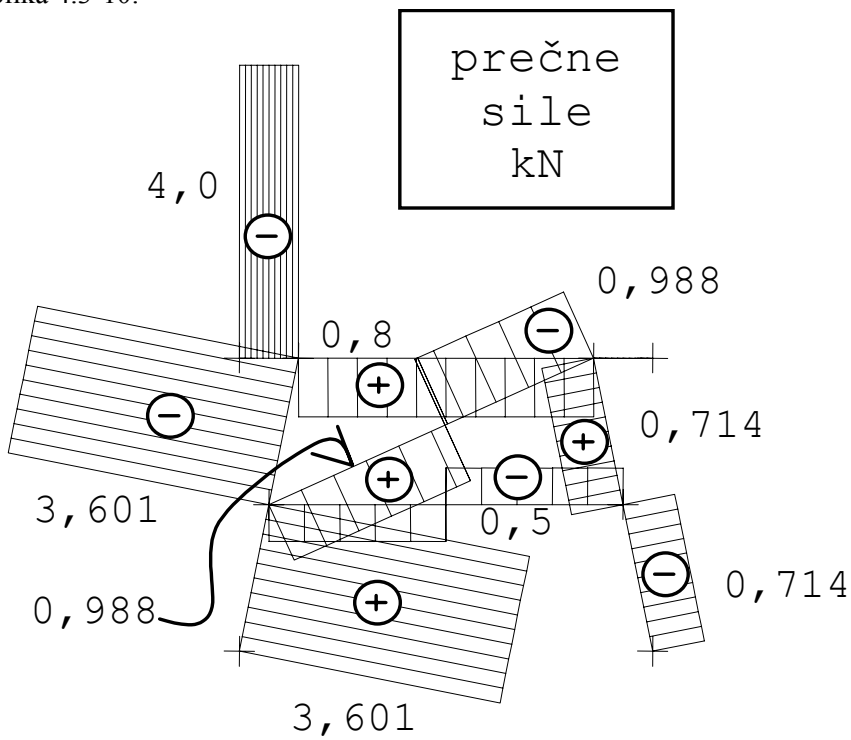
oziroma

$$N_{24} = 6,28 \cos 24,4^\circ + 1,95 \sin 24,4^\circ = -6,52 \text{ kN}$$

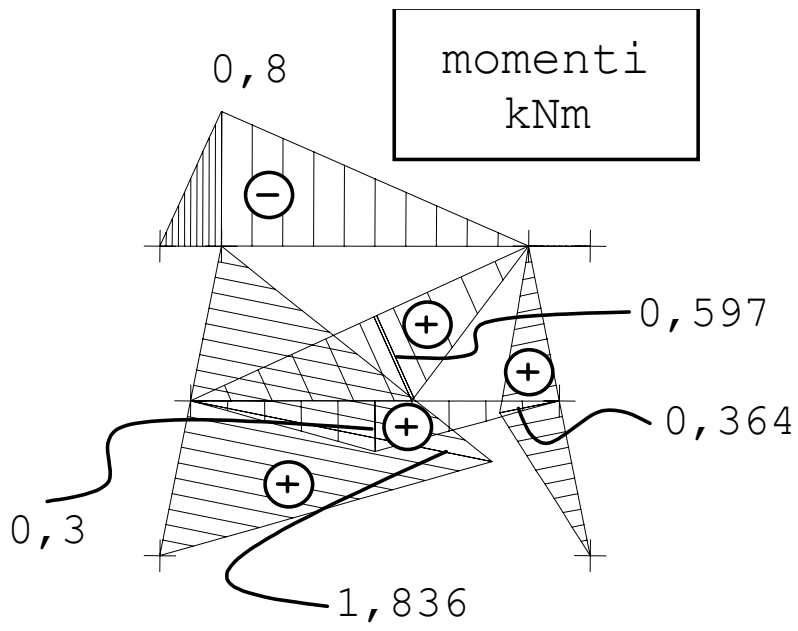
$$Q_{22} = 6,28 \sin 24,4^\circ - 1,95 \cos 24,4^\circ = 0,83 \text{ kN}.$$



Slika 4.3-10.



Slika 4.3-11.

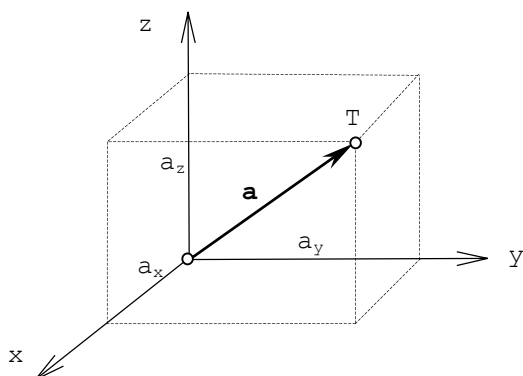


Slika 4.3-12.

**(A) OSNOVE VEKTORSKE ALGEBRE**

**(A1) Osnovni koncept vektorjev.** Sodobni koncept vektorjev in vektorske algebre sta lahko razumljiva, če ju študiramo v povezavi s problemom podajanja lege točke v prostoru in pomikov, s katerimi točka pride v to lego.

Legi točke je lahko določena samo relativno glede na neki koordinatni sistem, katerega lego v prostoru poznamo. Najosnovnejši in najbolj pogosto uporabljan je desni pravokotni koordinatni sistem, ki ga imenujemo **kartezijski koordinatni sistem**. V tem koordinatnem sistemu je lega točke T določena z odseki  $a_x$ ,  $a_y$  in  $a_z$  na koordinatnih oseh x,y,z, ki jih določa pripadajoči pravokotni kvader, slika 1. Te odseke podajamo s števili. Če je odsek na negativni strani koordinatne osi, pa je seveda pripadajoča vrednost števila negativna.



Slika A1-1. Lega točke T določena z odseki  $a_x$ ,  $a_y$  in  $a_z$  na koordinatnih oseh x,y,z, ki jih določa pripadajoči pravokotni kvader.

Trojico števil, ki podaja lego točke v prostoru, formalno zapišemo v oklepaju kot **urejeno trojico**  $(a_x, a_y, a_z)$ , lahko pa jo zapišemo s številčnimi indeksi  $(a_1, a_2, a_3)$ , kjer številke označujejo osi koordinatnega sistema. Urejenost trojice pomeni, da ni vseeno na katerem mestu leži posamezni člen. Tako sta trojici  $(2,3,4)$  in  $(3,2,4)$  različni in vsaka določa svojo točko v prostoru, čeprav imata enake člene.

Matematično so omenjene trojice vektorji, če med njimi definiramo operaciji seštevanja in množenja s skalarjem, za kateri pa morajo veljati še določene zakonitosti oziroma pravila, ki jih bomo natančneje spoznali nekoliko kasneje. Pravimo, da vektorji skupaj z omenjenima operacijama in pravili tvorijo vektorski prostor. Za uporabo vektorjev v mehaniki pa morata imeti obe operaciji vključno s pripadajočimi zakonitostmi geometrijski oziroma fizikalni smisel. Matematično je namreč vektorski prostor definiran povsem abstraktno ne glede na njegovo uporabnost. Urejene trojice so samo ena izmed mnogih modelov vektorskega prostora, ki pa ima odliko, da je za mehaniko zelo uporabna – za primer neke druge konkretizacije omenimo množico vseh polinomov, ki z definiranimi operacijama seštevanja in množenja s skalarjem tudi tvori vektorski prostor. V nadaljnjem tekstu se bomo omejili na vektorje, ki smo jih definirali kot urejene trojice in imajo očitni geometrijski pomen, ki pa ga bomo razširili še na druge pomembne mehanske količine.

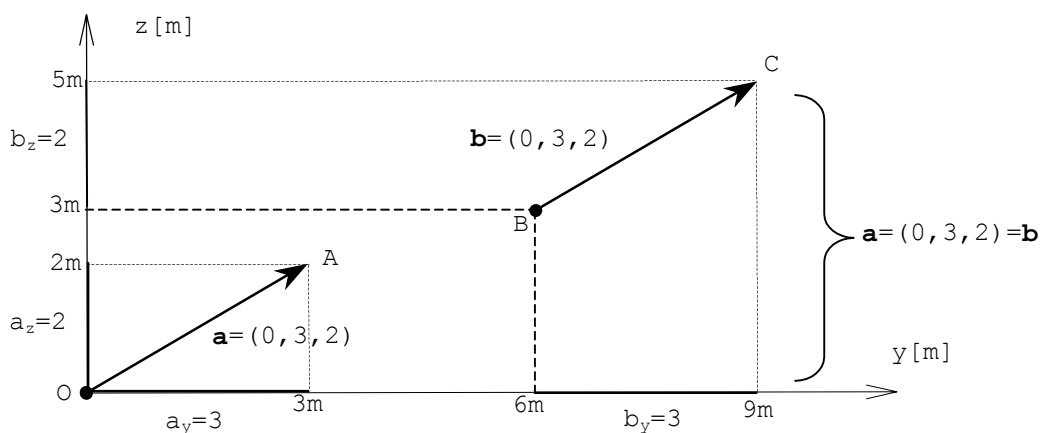
V rokopisnem besedilu vektorje običajno označujemo s puščicami nad simboli:  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , itd., vendar se je iz praktičnih tiskarskih razlogov v literaturi uveljavil zapis simbolov s poudarjenim (debelim) tiskom: **a**, **b**, **c** itd. Tako na primer označimo vektor  $(a_x, a_y, a_z)$  z debelo tiskanim **a**, enačba 1.

$$(a_x, a_y, a_z) \equiv \mathbf{a} \tag{A1-1}$$

Ko vektor podamo z urejeno trojico pravimo, da ga podamo po komponentah, kjer posamezne člene trojice imenujemo **skalarne komponente vektorja** ali na kratko kar samo komponente vektorja (za razliko od vektorskih komponent, ki jih bomo spoznali kasneje).

Vektor  $\mathbf{a}$ , ki določa lego točke T glede na koordinatni sistem  $x,y,z$ , grafično predstavimo s tako imenovano **vektorsko puščico**, slika 1. Začetek puščice (rep puščice) je v koordinatnem izhodišču, konec ali glava puščice pa je v točki T. Za lažje nadaljnje razumevanje koncepta vektorjev je koristno, če **lego točke opredelimo še s pomočjo pomikov**. Tako je lega točke T določena z njenim pomikom vzdolž vektorske puščice iz koordinatnega izhodišča v končno lego. S to razlago je tudi bolj razumljivo poimenovanje začetka in konca vektorske puščice.

**Enakost vektorjev.** Ko z vektorjem podajamo lego točke glede na začetek koordinatnega sistema, tedaj takšen vektor imenujemo **krajevni vektor** ali **radij vektor** in ga običajno označimo z  $\mathbf{r}$  s komponentami  $r_x$ ,  $r_y$  in  $r_z$  ali krajše kar  $x,y,z$ . Grafično ga prikažemo s puščico, ki izhaja iz koordinatnega začetka, glej vektor  $\mathbf{a}$  na sliki 2. Pri podajanju pomikov pa se srečamo s problemom kako podati pomik, ki se ne prične v koordinatnem začetku, glej pomik iz točke B v točko C na sliki. Vektorsko ta pomik zapišemo povsem enako kot enako velik in vzporeden pomik iz koordinatnega začetka v točko A, ker so komponente obeh vektorjev pomikov enake. Na sliki je na primer za vektor pomika  $\mathbf{a}$  komponenta  $a_y$  enaka 3m, komponenta vektorja pomika  $\mathbf{b}$  pa je enaka:  $b_y=9m-6m=3m$ . Drugače povedano, v samem zapisu vektorja sploh ni podatka o njegovi lokaciji. Pravimo tudi, da se vektor pri translaciji ne spremeni. Takšna matematična definicija vektorjev pa ima globlji fizikalni pomen – naj omenimo samo, da je zaradi nje zagotovljena invariantnost vektorjev pri translaciji koordinatnega sistema. Zaradi tega nekateri govorijo o prostih vektorjih, vendar je izraz vprašljiv, saj teorija vektorjev drugačnih ne pozna. Pomanjkljivost nedoločenosti lege vektorja pa lahko hitro rešimo. Ko je, na primer, potrebno poleg samega pomika podati tudi njegovo lokacijo, podamo poleg vektorja pomika še krajevni vektor, ki določa lokacijo. V takih primerih torej podamo celotno informacijo z dvema vektorjema.



Slika A1-2. Enakost vektorjev.

**Seštevanje vektorjev.** Na sliki 3a določa vektor  $\mathbf{c}$  premik iz točke A v točko C. Premik v točko C pa dobimo tudi, če najprej izvršimo premik v točko B, ki ga določa vektor  $\mathbf{a}$ , in nato še premik iz točke B v točko C, ki ga določa vektor  $\mathbf{b}$ . Torej, če h glavi vektorja  $\mathbf{a}$  pritaknemo rep vektorja  $\mathbf{b}$ , dobimo vektor  $\mathbf{c}$ , ki ima začetek na začetku vektorja  $\mathbf{a}$  in konec (glavo) na koncu vektorja  $\mathbf{b}$ . Tako grafično seštevamo vektorje, takšen način seštevanja pa imenujemo **trikotniško pravilo**, ki je grafična predstavitev enačbe 2a,

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (\text{A1-2a})$$

kjer vsota vektorjev  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  določata isti premik kot vektor  $\mathbf{c}$ . Če povemo to z drugimi besedami: enačaj pomeni enakost pomikov, ki ju določata desna in leva stran enačbe. Vektorju  $\mathbf{c}$  pravimo tudi **vsota**, **rezultat** ali **rezultantni vektor** (tudi **rezultanta**). Isti rezultat pa dobimo tudi, če k vektorju  $\mathbf{b}$  prištejemo vektor  $\mathbf{a}$ , (trikotnik AB'C na sliki 3a).

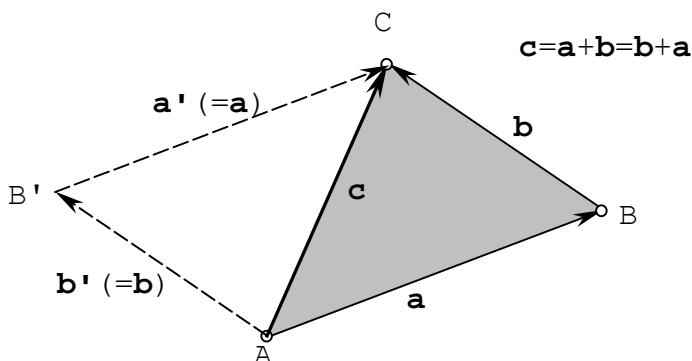
$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad (\text{A1-2b})$$

Enačbi 2a in 2b povesta, da je vrstni red seštevanja poljuben, rezultat pa je zmeraj enak. To lastnost imenujemo **komutativnost seštevanja** in jo zapišemo



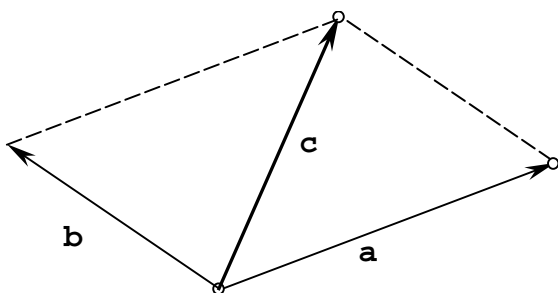
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{A1-2c}).$$

Komutativnost je v grafičnem prikazu seštevanja v skladu z razlago, da se pri translatorsnem pomiku vektor ne spremeni, torej na sliki velja  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}'$  in  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}'$ .



Slika A1-3a. Seštevanje vektorjev – trikotniško pravilo.

Obodni lik na sliki 3a je paralelogram, kjer vektorja  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  v obeh legah ležita na stranicah, rezultatni vektor pa je njegova usmerjena diagonala. Na tak način pojasnjeno grafično seštevanje imenujemo **paralelogramsko pravilo** in je posebej prikazano na sliki 3b. Opozorimo še, da imajo pri seštevanju po paralelogramskem pravilu vsi trije vektorji začetek v isti točki, pri trikotniškem pa ne.



Slika A1-3b. Seštevanje vektorjev – paralelogramsko pravilo.

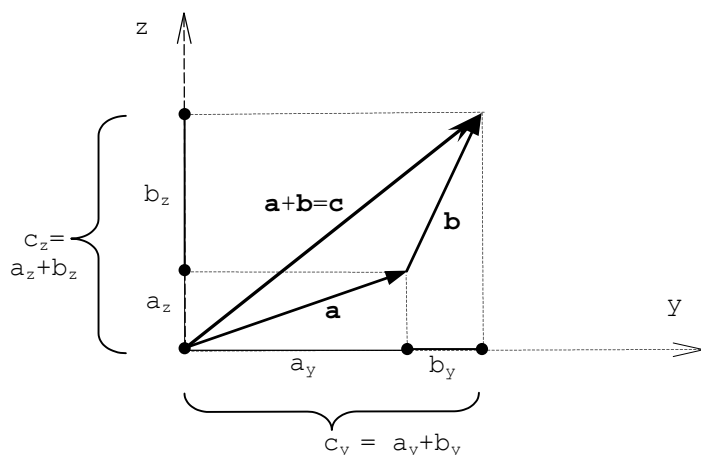
Analično seštevanje vektorjev, ko so podani po komponentah, je definirano v skladu s sliko 4 (zaradi preglednosti slike je prikazan samo ravninski slučaj). Očitno so komponente rezultatnega vektorja vsote istoležnih komponent seštevancev, enačba 3.

$$(\mathbf{c}_x, \mathbf{c}_y, \mathbf{c}_z) = (\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z) + (\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z) = (\mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x, \mathbf{a}_y + \mathbf{b}_y, \mathbf{a}_z + \mathbf{b}_z) \quad (\text{A1-3})$$

Pravimo, da vektorja seštejemo tako, da seštejemo istoležne komponente. Očitno pa je tako definirano seštevanje tudi komutativno:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z) + (\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z) &= (\mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x, \mathbf{a}_y + \mathbf{b}_y, \mathbf{a}_z + \mathbf{b}_z) = (\mathbf{b}_x + \mathbf{a}_x, \mathbf{b}_y + \mathbf{a}_y, \mathbf{b}_z + \mathbf{a}_z) \\ &= (\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z) + (\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z) \end{aligned}$$

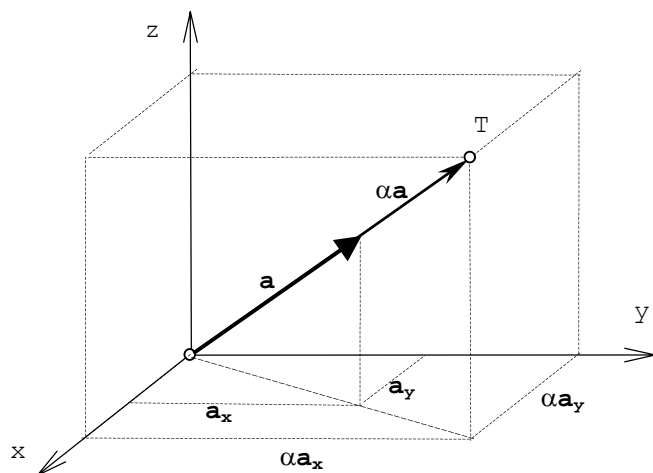
Za uporabo vektorjev v mehaniki je veljavnost komutativnosti nujna, da je operacija seštevanja vektorjev pomikov skladna z realnostjo pomikov. Vemo namreč, da če se točka premakne najprej za pomik, ki ga podaja vektor  $\mathbf{a}$ , nato pa se premakne še za pomik, ki ga določa vektor  $\mathbf{b}$ , je končna lega točke enaka kot tedaj, če bi vrstni red pomikanja zamenjali, glej sliko 3a.



Slika A1-4. Ilustracija operacije seštevanja vektorjev s seštevanjem njegovih komponent.

**Množenje vektorja s skalarjem.** Grafično predstavlja množenje vektorja pomika  $\mathbf{a}$  s skalarjem  $\alpha$  njegovo  $\alpha$  kratno povečanje ali skrčitev, ko je  $0 < \alpha < 1$ , slika 5. Če je  $\alpha$  pozitiven, je povečanje v smeri vektorja, če pa je  $\alpha$  negativen, pa v nasprotni smeri. Pri povečanju vektorja pomika se vse njegove komponente povečajo za isti faktor, kot je razvidno iz slike. Zato je množenje vektorja s skalarjem definirano: vektor množimo s skalarjem tako, da z njim pomnožimo vse njegove komponente, enačba 5.

$$\alpha \mathbf{a} = \alpha (a_x, a_y, a_z) = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z) \quad (5)$$



Slika A1-5. Ilustracija množenja vektorja s skalarjem.

**(A2) Definicija vektorske algebre.** Z enačbama 3 in 5 je definirano seštevanje vektorjev in množenje vektorja s skalarjem, ko vektor zapišemo po komponentah. Za seštevanje smo že spoznali, da je komutativno. Velja pa še nekaj pravil, za katera se lahko hitro prepričamo, da so vsa skladna z dejanskimi relacijami v geometriji in mehaniki. Podajmo sistematsko vsa pravila, ki definirajo vektorski prostor:

Če z  $\alpha$  in  $\beta$  in  $\gamma$  označimo neke poljubne skalarje,

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R},$$

z  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{c}$  pa neke poljubne vektorje.

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathfrak{V},$$

veljajo za **seštevanje vektorjev** zakonitosti (označimo te zakonitosti z A, kot s tujko zapišemo seštevanje - adicija) :

(A-1) vsota dveh vektorjev,  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , je spet vektor

(A-2) asociativnost za seštevanje

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

(A-3) obstajata nevtralni element  $\mathbf{0}$  in k  $\mathbf{a}$ -ju nasprotni element  $-\mathbf{a}$ , za katera velja:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a},$$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Za množenje vektorja s skalarjem velja:

(M-1) produkt vektorja s skalarjem,  $\alpha \cdot \mathbf{a}$ , je tudi vektor

(M-2) asociativnost ( v skalarnem faktorju)

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{a})$$

(M-3) distributivnost za vektorski in skalarni faktor

$$\alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \cdot \mathbf{b}$$

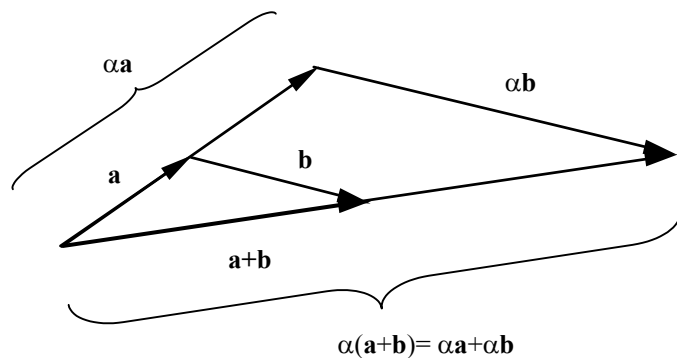
$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{a}$$

(M-4) obstaja nevtralni element za množenje

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

Matematično so vse količine, za katere sta definirani operaciji seštevanja in množenja s skalarjem in izpolnjujejo vsa gornja pravila, vektorji. Vektorje skupaj z gornjimi pravili imenujemo **linearni vektorski prostor** ali na kratko kar **vektorski prostor**. Lahko je preveriti, da naše urejene trojice, kjer z enačbama 3 in 5 definiramo seštevanje in množenje s skalarjem, izpolnjujejo gornja pravila. Zato so te urejene trojice vektorji.

Vsa gornja pravila med vektorji in skalarji imajo za urejene trojice tako geometrijsko interpretacijo kot tudi pomen, ki ga bomo s pridom uporabljali v mehaniki, na primer pri računanju s silami. Za zgled si pogledjmo geometrijski pomen samo prve izmed zakonitosti M-3, ki ga grafično ilustriramo na sliki 1.



Slika A2-1. Grafična predstavitev distributivnosti v vektorskem faktorju.

Če dva vektorja  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  povečamo za  $\alpha$ -krat je vsota povečanih vektorjev  $\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$  enaka  $\alpha$ -kratni vrednosti vsote vektorjev  $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ , torej  $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ . To zakonitost lahko enostavno geometrijsko preverimo s pomočjo podobnih trikotnikov na sliki 1. Fizikalno, na primer za sile, pa ta zakonitost pomeni, da če neki sistem sil povečamo za  $\alpha$ -krat se tudi njihova rezultanta poveča za  $\alpha$ -krat.

Posebej si velja poglobljeno ogledati grafično **seštevanje več vektorjev**, ker je pri reševanju problemov v mehaniki mnogokrat potrebno sešteti več sil, ki jih podajamo z vektorji. Princip seštevanja več vektorjev seveda sledi iz osnovnih zakonitosti vektorskega prostora, ki pa jih je treba večkrat aplicirati in med seboj kombinirati. Poglejmo si seštevek sil  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$  in  $\mathbf{F}_4$  na sliki 2-a. Lastnost komutativnosti in asociativnosti seštevanja ima za posledico, da se grafično seštevanje sil izvede v obliki tako imenovanega (odprtega) *poligona sil*. Poligon sil je v bistvu zaporedno grafično seštevanje sil po trikotniškem (ali paralelogramskem) pravilu, slika 2-b. Najprej seštejemo dve izbrani sili,

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2,$$

nato k rezultanti prištejemo naslednjo silo,

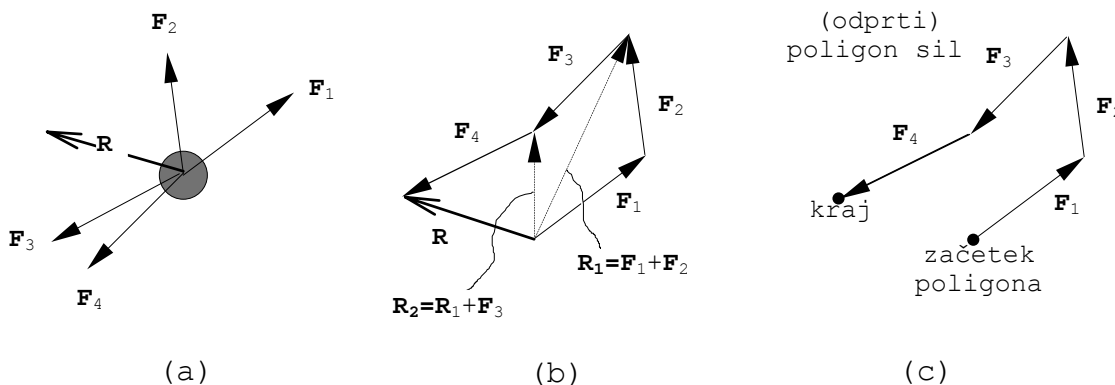
$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{F}_3,$$

in tako naprej.

Seštevek ali rezultanta vseh sil pa je

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4.$$

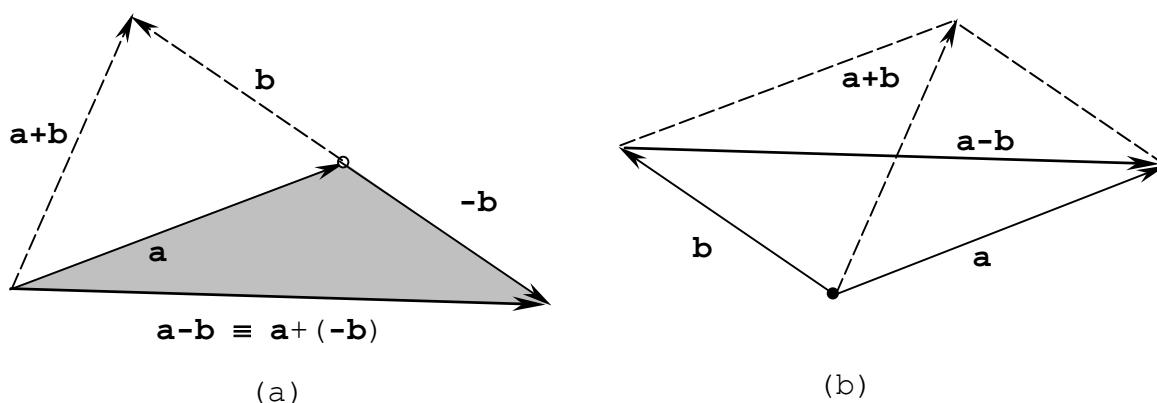
Pri grafičnem seštevanju vse vmesne rezultante  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  in  $\mathbf{R}_3$  izpustimo, če nas seveda le-ti posebej ne zanimajo, slika 2-c. Zapomnimo si, da ima rezultantni vektor začetek v začetku poligona in konec v koncu poligona.



Slika A2-2. Grafično seštevanje vektorjev sil – poligon sil.

S poligonom sil ugotavljamo rezultanto poljubnega sistema sil, ne glede na to, če je končna rezultanta enaka nič in tudi ne glede na to, če sile nimajo skupnega prijemališča. V slednjem primeru je težava samo v tem, da samo s poligonom sil ne moremo ugotoviti lego prijemališča rezultante. Če se začetek in kraj poligona sil stakneta, tedaj imamo *zaprti poligon*, rezultanta pa je nična! Ker je vrstni red seštevanja danih vektorjev lahko različen, imajo poligoni lahko različne oblike, ki so odvisne od izbranega vrstnega reda seštevanja, seštevek (rezultanta) pa je seveda zmeraj isti. Opozorimo še, da v moderni praksi grafičnega seštevanja za prostorski sistem sil skoraj ne uporabljamo več, ker hitreje in lažje rezultat izračunamo numerično.

Ilustrirajmo še, kako grafično odštejemo dva vektorja, torej  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ? Enostavno:  $-\mathbf{b}$  je nasprotni vektor  $\mathbf{b}$ -ja, ki ga prištejemo  $\mathbf{a}$ -ju, torej  $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ . Odštevanje je prikazano na sliki 3-a s trikotniškim pravilom in sliki 8-b še s paralelogramskim pravilom, ki pa je manj priporočljivo, ker je treba biti previden pri smeri rezultata (puščica je usmerjena od vektorja  $\mathbf{b}$  do vektorja  $\mathbf{a}$ ).



Slika A2-3. Odštevanje vektorjev: (a) trikotniško in (b) paralelogramsko pravilo.

**Zgled A1-Z1.** Vektorje  $\mathbf{a}=(2,4,3)$ ,  $\mathbf{b}=(1,-2,2)$  in  $\mathbf{c}=(-3,0,1)$  povečajmo za dvakrat in jih seštejmo. To nalogo zapišemo z enačbo  $\mathbf{R}=3\mathbf{a}+3\mathbf{b}+3\mathbf{c}$ .

Rešitev. Za hitrejši izračun uporabimo pravilo distributivnosti za vektorski faktor, torej najprej seštejemo vektorje in vsoto pomnožimo s tri:

$$\mathbf{R}=3(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=3((2,4,3)+(1,-2,2)+(-3,0,1))=3(0,2,6)=(0,6,18).$$

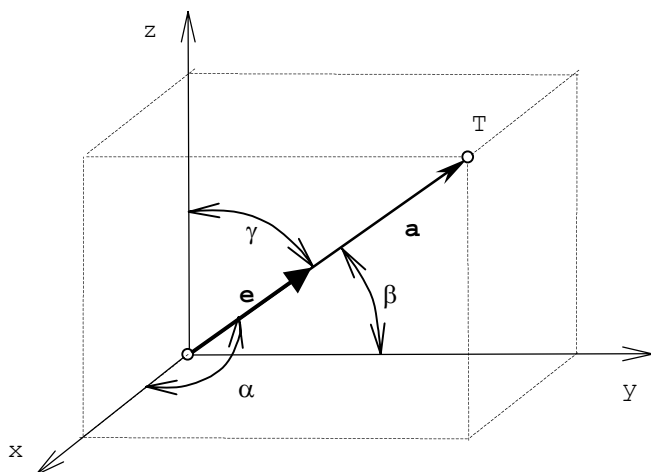
-0-

V zvezi z vektorji je treba poznati še vrsto količin, ki jih s pridom uporabljamo v mehaniki. Poglejmo si jih.

**Velikost vektorja.** Lega točke v koordinatnem sistemu oziroma ustrezní pomik sta določena z vektorjem, slika A1-1. Oddaljenost točke od koordinatnega izhodišča oziroma ustrežno dolžino pomika definiramo kot velikost vektorja, ki ji pravimo tudi **modul** ali **absolutna vrednost vektorja**. Podajamo jo s pozitivnim številom, torej s skalarjem, in ustreznimi enotami. V skrajnem primeru je lahko velikost vektorja tudi nič. Geometrijsko je velikost vektorja enaka dolžini diagonale pripadajočega kvadra, ki jo izračunamo s Pitagorovim izrekom v skladu z enačbo A2-1. Velikost vektorja je torej enaka pozitivnemu korenu vsote kvadratov njegovih komponent. Opozorimo naj, da enačba 2 velja samo za komponente v pravokotnem koordinatnem sistemu. Pri grafičnem prikazu vektorja je njegova velikost enaka dolžini vektorske puščice. Označimo jo na različne načine, kot je prikazano v enačbi 2, najpogosteje pa v tisku uporabljamo kar oznako, kjer zapišemo simbol za vektor v normalnem tisku – tako velikost vektorja  $\mathbf{a}$  označimo kar z normalno tiskanim  $a$ .

$$\text{abs}(\mathbf{a}) \equiv |\mathbf{a}| \equiv \text{modul}(\mathbf{a}) \equiv a = +\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (\text{A2-1})$$

S pomikom pa lahko pojasnimo koncept še drugega možnega zapisa vektorja – s pomočjo podane smeri in velikosti vektorja. **Smer vektorja** je podana z njegovimi **naklonskimi koti**, ki jih definiramo z odklonom vektorja od pozitivnih smeri koordinatnih osi za kote  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$ , slika 4. Natančneje povedano, posamezni naklonski kot dobimo tako, da vektor po najkrajši poti zasučemo tako, da se poravna s pozitivno koordinatno osjo. Lahko naredimo tudi obratno – pozitivno koordinatno os zasučemo v vektor. Vse te kote definiramo kot pozitivne in so torej zmeraj med vključno nič in +180 stopinjami. Kasneje bomo spoznali, da pa predznak kota sploh ni pomemben, ko računamo samo s kosinusno funkcijo.

Slika A2-4. Smerni vektor  $e$  in naklonski koti vektorja.

**Smerni vektor**, običajno označen z  $e$ , imenovan tudi **enotski vektor**, je vsak vektor, ki ima velikost 1,  $e=1$ ! Smerni vektor  $e$  na sliki 4 določa samo smer vektorja  $a$ . Če točka potuje iz koordinatnega izhodišča v smeri smernega vektorja  $e$  za dolžino poti, ki je enaka velikosti vektorja  $a$ , tedaj točka prispe na lokacijo  $T$ , ki jo določa vektor  $a$ . To zapišemo z enačbo 2a, ki jo lahko interpretiramo: če smerni vektor povečamo za velikost vektorja  $a$ , dobimo vektor  $a$ .

$$\mathbf{a} = a \cdot \mathbf{e} \quad (\text{A2-2a})$$

Gornja enačba predstavlja zapis vektorja  $a$  z njegovo velikostjo (modulom)  $a$  in njegovim smernim vektorjem  $e$ . Torej smerni vektor  $e$  določa samo smer vektorja  $a$ , o njegovi velikosti pa nič ne pove. Formalno je vektor  $a$  enak produktu vektorja  $e$  in skalarja  $a$ . Pomembni zaključek gornjih odstavkov je: vsak vektor lahko podamo na dva načina: (1.) s pomočjo komponent, enačba A1-1 in (2.) z njegovo velikostjo in njegovim smernim vektorjem, enačba A2-2a. Če imamo podan vektor  $a$ , pa iz te enačbe izračunamo njegov smerni vektor, enačba 2b.

$$\mathbf{e} = \mathbf{a}/a \quad (\text{A2-2b})$$

Pretvorba zapisa vektorja po komponentah v zapis s smernim vektorjem in velikostjo je enostavna. Iz slike 1 je razvidno, da so komponente vektorja enake pravokotnim projekcijam vektorja  $a$  na koordinatne osi, kar je posebej prikazano na sliki 5. Vsaka komponenta in vektor predstavljata dve stranici pravokotnega trikotnika. Na sliki 5 je osenčen trikotnik, ki pripada komponenti  $a_z$  in jo izračunamo v skladu z definicijo kosinusne funkcije iz velikosti vektorja in njegovega naklonskega kota proti  $z$  osi, enačba 3a.

$$a_z = a \cdot \cos(\gamma) \quad (\text{A2-3a})$$

Na analogni način izračunamo še ostali komponenti, enačbi 3 b in c.

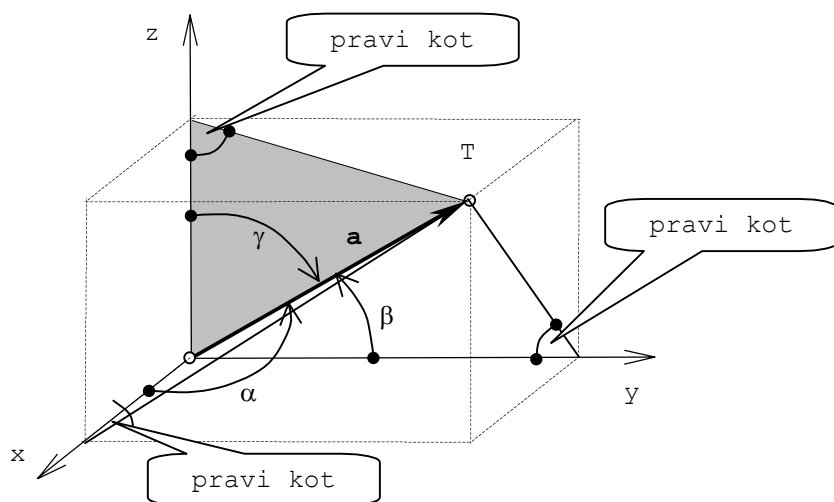
$$a_x = a \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{A2-3b})$$

$$a_y = a \cdot \cos(\beta) \quad (\text{A2-3c})$$

Smerni vektor  $e$ , ki ima po definiciji velikost  $e=1$ , ima komponente v skladu z enačbami 3 enake kosinusom naklonskih kotov, enačba 4.

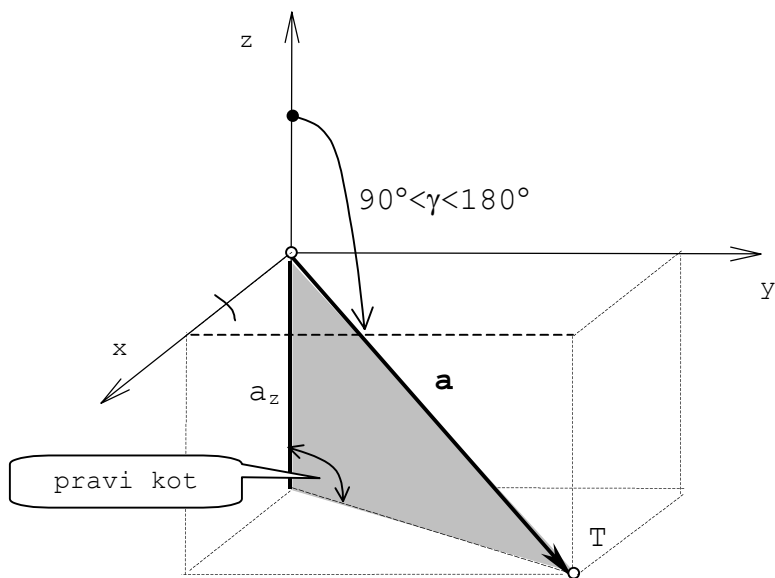
$$\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad (\text{A2-4})$$

Posebej še prikažimo problem negativne komponente, na primer komponente  $a_z$  na sliki 6, ko je naklonski kot vektorja večji od pravega kota. Tedaj je pravokotna projekcija vektorja (odsek) na negativni strani koordinatne osi  $z$ . Tudi v tem primeru enačbe 3 še vedno veljajo, ker je kosinusna funkcija kota med  $90^\circ$  in  $180^\circ$  negativna.



4

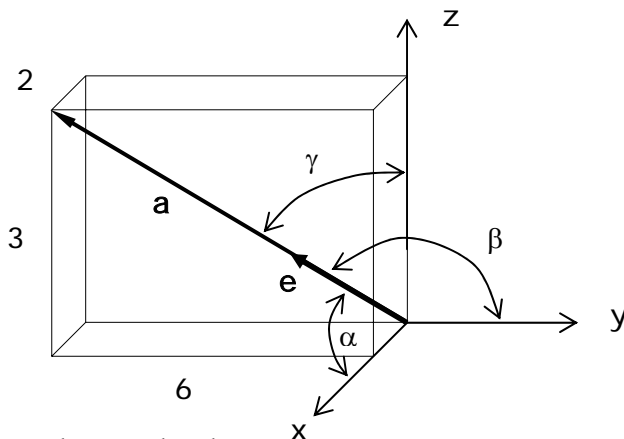
Slika A2-5. Vektor in njegove komponente tvorijo pravokotne trikotnike – osenčeni trikotnik velja za z komponento vektorja **a**.



Slika A2-6. Prikaz negativne komponente vektorja.

**Zgled A2Z-2.** Vektor **a** je podan z diagonalo pravokotnega kvadra

- Zapiši vektor **a** po komponentah
- Izračunaj velikost vektorja **a**
- Izračunaj smerni **e** vektor vektorja **a**
- Izračunaj naklonske kote vektorja **a**



Slika A2Z-2. Vektor **a** prikazan z diagonalo pravokotnega kvadra.

Rešitev.

$$\mathbf{a} = (2, -6, 3)$$

$$a = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = 7$$

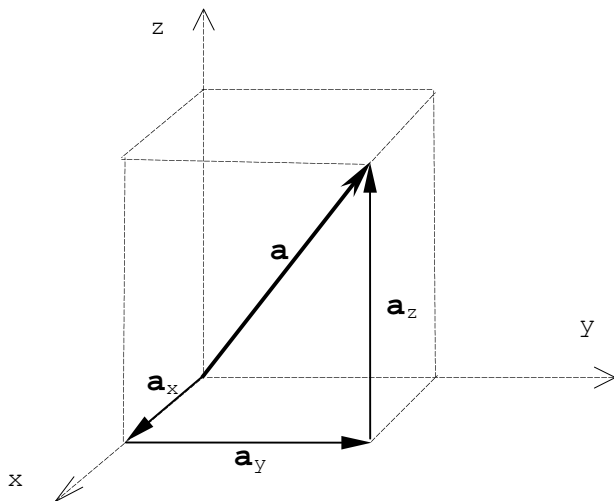
$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{a} = \frac{(2, -6, 3)}{7} = \left(\frac{2}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73,4^\circ \quad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{7}\right) = 149,0^\circ \quad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) = 64,4^\circ$$

**(A3) Baze vektorskega prostora.** V kartezijskem koordinatnem sistemu lahko vektor zapišemo kot vsoto vektorjev vzdolž koordinatnih osi, enačba A3-1, slika A3-1.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \quad (\text{A3-1})$$

kjer vektorje  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$  in  $\mathbf{a}_z$  imenujemo *vektorske komponente*.



Slika A3-1. Vektorske komponente.

Če v smeri koordinatnih osi postavimo smerne vektorje  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  in  $\mathbf{k}$ , slika 2, tedaj lahko vsak vektor enolično podamo z njihovo pomočjo tako, da vektorske komponente v enačbi 1 izrazimo s skalarnimi komponentami in smernimi vektorji, enačba 2a. Te smerne vektorje imenujemo **bazni vektorji**, vse tri vektorje skupaj pa kar **baza**. V našem primeru so bazni vektorji enotini (normirani) in med seboj pravokotni (ortogonalni). Tako bazo imenujemo *ortogonalno normirano* ali krajše **ortonormirano bazo**.

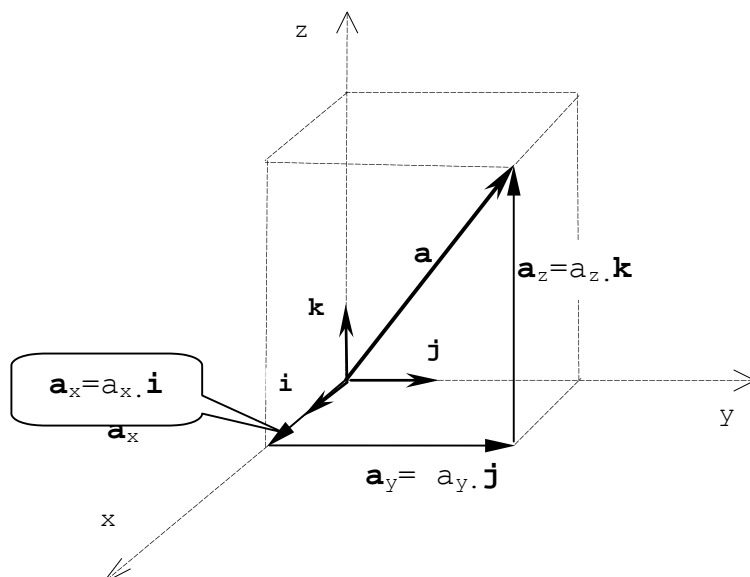
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k}, \quad (\text{A3-2a})$$

Zapis vsakega vektorja je formalno linearna kombinacija baznih vektorjev, koeficienti  $a_x$ ,  $a_y$  in  $a_z$  pa so že poznane skalarne komponente vektorja  $\mathbf{a}$ , katerega zapis z urejeno trojico smo že tudi spoznali:

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z). \quad (\text{A3-2b})$$

Lahko rečemo, da so skalarne komponente vektorja koeficienti baznih vektorjev v linearni kombinaciji, ki podaja dani vektor.



Slika A3-2. Vektorske in skalarne komponente vektorja  $\mathbf{a}$ .

Koordinatni sistem pa seveda ni nujno, da je pravokoten. Ko osi med seboj niso pravokotne, imamo **poševni koordinatni sistem** in pripadajočo **poševno bazo**, slika 3. Osi in bazne vektorje poševnega koordinatnega sistema označujemo običajno drugače kot za pravokotni koordinatni sistem, večinoma tako, kot je označeno na sliki 3, kjer je zaradi preglednosti prikazan samo ravninski problem. V vsakem koordinatnem sistemu je vektor vsota njegovih vektorskih komponent, enačba 3, zapis vektorja po komponentah pa je formalno enak kot za pravokotni koordinatni sistem.

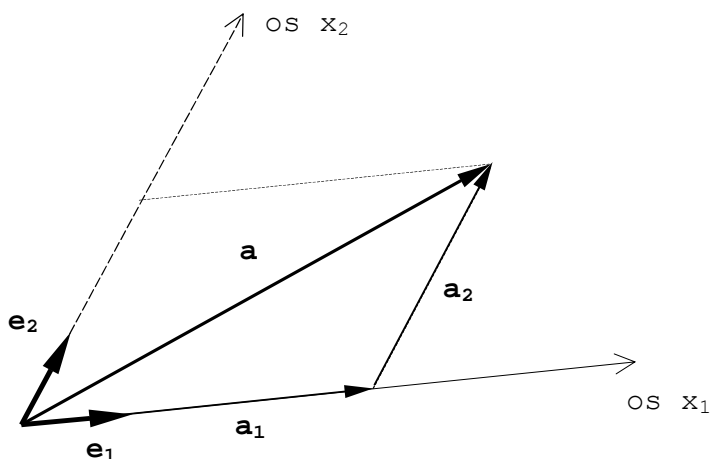
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3 = (a_1, a_2, a_3). \quad (\text{A3-3})$$

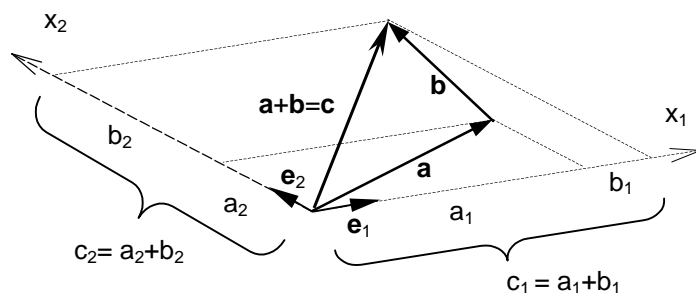
V pravokotnem koordinatnem sistemu dobimo komponente s pravokotno projekcijo vektorja na koordinatne osi, imenujemo jih *pravokotne komponente* ali na kratko kar komponente. V poševnem koordinatnem sistemu pa velikost komponent ni enaka pravokotni projekciji vektorja na koordinatne osi. Ker te komponente seveda niso med seboj pravokotne, jih imenujemo *poševne komponente*. Njihov izračun pa ni tako enostaven kot za pravokotne komponente, kjer veljajo enačbe A2-3.

Opozorimo še, da je v poševnih bazah seštevanje vektorjev podanih po komponentah (glej sliko 4) in množenje vektorja s skalarjem očitno formalno povsem enako kot v pravokotnih bazah, enačbi 4 in 5.

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \quad (\text{A3-4})$$

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3) \quad (\text{A3-5})$$

Slika A3-3. Komponente vektorja v poševni bazi za ravninski problem (kot med  $x_1$  in  $x_2$  osema ni pravi kot).



Slika A3-4. Ilustracija seštevanja vektorjev v poševni bazi  $e_1, e_2$  za ravninski problem (kot med  $x_1$  in  $x_2$  osema ni pravi kot). Komponente vsote so enake vsoti istoležnih komponent seštevancev.

Prav tako veljajo še vsa ostala pravila za seštevanje in množenje s skalarjem, ki smo jih zapisali v poglavju o vektorski algebri. Opozoriti pa velja, da velikost vektorja v poševni bazi ne moremo izračunati tako enostavno kot v ortonormirani bazi, to je s korenom vsote kvadratov njegovih komponent.

Za bazo lahko izberemo poljubne tri vektorje, da so le **linearno neodvisni**. Za linearno neodvisne vektorje velja, da njihova vsota nikoli ni nična, ne glede s katerimi skalarji jih posamično pomnožimo. Nič je samo v primeru, ko jih vse hkrati pomnožimo z ničnim skalarjem. Pravimo, da je **linearna kombinacija** baznih vektorjev enaka nič tedaj in samo tedaj, ko so vsi koeficienti nični:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \text{ samo za } \alpha, \beta, \gamma = 0 \quad (\text{A3-6})$$

Baza krajevnih vektorjev in vektorjev pomikov (v našem realnem tridimenzionalnem prostoru - evklidskem prostoru) sestoji iz natanko treh vektorjev. Vsak nadaljnji vektor pa je enak neki natančno določeni linearni kombinaciji baznih vektorjev, koeficienti baznih vektorjev pa so komponente vektorja  $\mathbf{a}$ , enačba A3-7. Taki bazi pravimo prostorska ali tridimenzionalna baza.

$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3 = (a_1, a_2, a_3) \quad (\text{A3-7})$$

Posebni primer prostorskih vektorjev so ravninski vektorji ali dvodimenzionalni vektorji, ki imajo istoležne komponente enake nič. Na primer vektorji

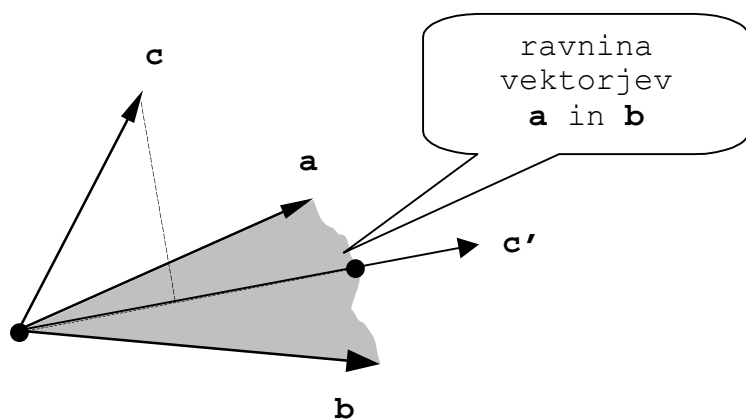
$$(a_1, 0, a_3), (b_1, 0, b_3), (c_1, 0, c_3).$$

Tedaj zaradi ekonomičnosti zapišemo te vektorje samo z dvema komponentama kot dvodimenzionalne vektorje in jih obravnavamo kot **ravninske** ali dvodimenzionalne vektorje:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_3), \quad \mathbf{c} = (c_1, c_3).$$

Baza takih vektorjev sestoji samo iz dveh vektorjev in vsak tak ravninski vektor natanko podamo že z dvema komponentama. V enakem smislu lahko govorimo tudi o enodimenzionalni bazi, ki podaja kolinearne vektorje.

Bazo praktično tvorimo tako, da najprej izberemo dva vektorja,  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  na sliki 4, ki ne smeta biti kolinearna. Ta dva določata ravnino, to pomeni, da skozi njiju lahko položimo natanko eno samo ravnino. Nato izberemo tretji vektor, vektor  $\mathbf{c}$  na sliki 5, ki pa ne sme ležati v omenjeni ravnini. Če bi tretji vektor  $\mathbf{c}'$  ležal v omenjeni ravnini, tedaj bi se očitno dal izraziti z vektorjema  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$ , torej  $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{c}'$  in linearna kombinacija bi bila enaka nič,  $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} - 1 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , čeprav skalarji  $\alpha, \beta$  in 1 niso hkrati vsi nični!



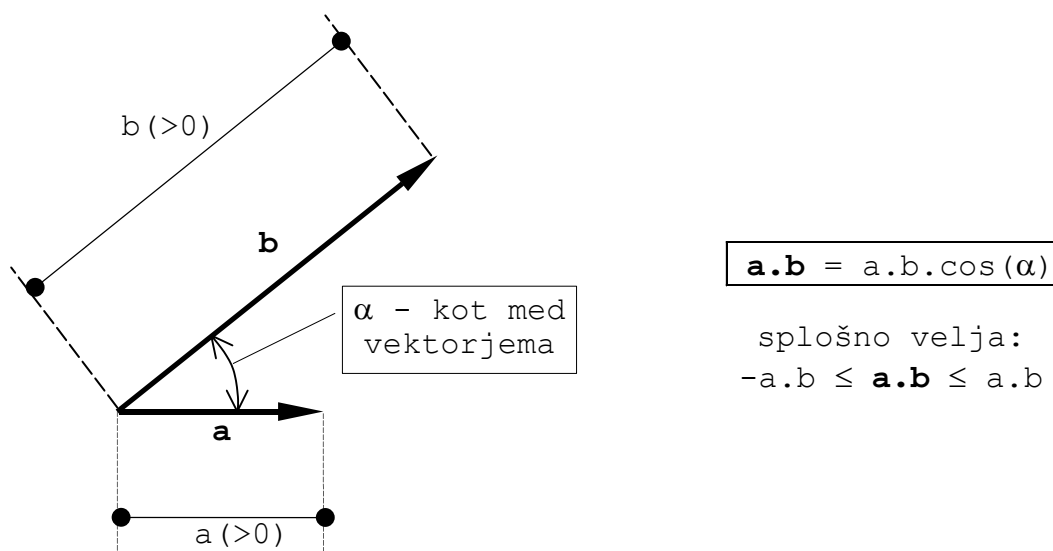
Slika A3-5. Tvorjenje linearno neodvisnih vektorjev – baze. Vektorji  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{c}$ , ki so linearno neodvisni, in  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{c}'$ , ki so linearno odvisni vektorji.

**(A4) Produkti med vektorji.** Za analizo v mehaniki in še marsikje pa ni zadosti samo vektorski prostor, kjer vektorje lahko samo seštevamo in množimo s skalarjem. Nepogrešljivi sta še dve operaciji, ki ju definiramo in dodamo vektorskemu prostoru. Z njima je opis nekaterih fizikalnih količin izredno učinkovit in pregleden, računske manipulacije pa se zelo poenostavijo. Ti dve operaciji sta skalarni in vektorski produkt.

**(A4.1) Skalarni produkt.** Znane so različne definicije skalarnega produkta, ki so postavljene glede na potrebe oziroma uporabnost. Za potrebe mehanike je najbolj uporaben skalarni produkt dveh vektorjev  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$ , ki je definiran kot produkt njunih modulov ter kosinusa kota  $\alpha$  med njima (slika 1). Ta skalarni produkt običajno označimo s piko med vektorjema.

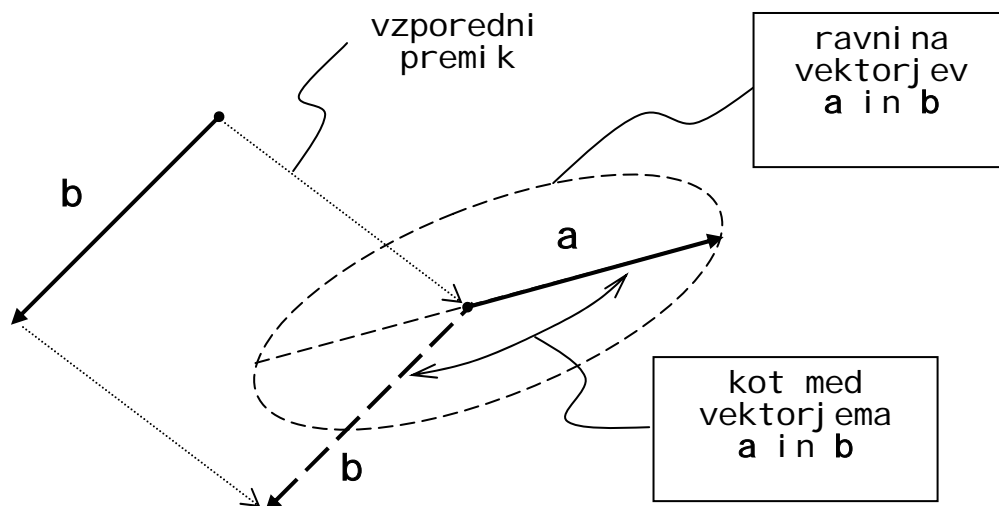
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha). \quad (\text{A4.1-1})$$

Na levi strani gornje enačbe pika označuje skalarno množenje med vektorjema, na desni strani enačbe pa navadno množenje med skalarnimi količinami. Nekateri avtorji označujejo skalarni produkt z oklepajem in vejico, torej  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Iz definicije je razvidno, da je skalarni produkt skalar, od koder tudi ime temu produktu.



Slika A4.1-1. Ilustracija k skalarnemu produktu.

**Razširitev definicije kota med vektorjema.** V skalarnem produktu ima kot med vektorjema bistveno vlogo. Zato si natančno pogledjmo, kaj je kot med vektorjema v najbolj splošnem primeru dveh vektorjev, ki ju grafično prikazemo s puščicama, ki nimata skupnega začetka, slika 2.



Slika A4.1-2. Ilustracija k definiciji kota med vektorjema.

Naprej poljubno izberemo enega izmed vektorjev in ga vzporedno premaknemo tako, da imata oba vektorja skupni začetek. Tedaj vektorja določata ravnino. Nato v tej ravnini enega izmed vektorjev zasučemo po krajši poti v drugega. Ta zasuk definiramo kot pozitivni kot med vektorjema. Opozorimo naj, da ta definicija kota ne razlikuje kateri vektor zasučemo v drugega in s tem tudi ni pomembno, kateri vektor označimo za prvi vektor. Rečemo lahko tudi, da kote podajamo z absolutnimi vrednostmi, podobno kot oddaljenost točke od koordinatnega izhodišča.

Ker je torej kot med vektorjema lahko samo med vključno nič in  $180^\circ$ , je kosinus kota med vektorjema med vključno minus ena in plus ena. Zato je skalarni produkt lahko pozitiven, nič ali negativen. Pomembno je opozoriti, da za izračun skalarnega produkta kot med vektorjema lahko merimo dokaj poljubno – tako da en vektor zavrtimo v drugega po krajši poti ali pa v nasprotni smeri po daljši poti. Pri tem še predznak kota ni pomemben, ker v vseh teh slučajih dobimo zmeraj enako vrednost za skalarni produkt (to pa ne velja za vektorski produkt). To je posledica lastnosti kosinusne funkcije, razvidne iz enačbe 2, kjer je z  $\alpha$  označen kot med vektorjema v skladu s strogo definicijo.

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha) = \cos(360^\circ + \alpha) \quad (\text{A4.1-2})$$

Eden izmed izrednih pomenov skalarnega produkta je, da lahko z njim izračunamo pravokotne komponente vektorja. Če poljubni vektor  $\mathbf{b}$  množimo s smernim vektorjem  $\mathbf{e}$  (ta ima po definiciji velikost  $e=1$ ), dobimo pravokotno skalarno komponento vektorja  $\mathbf{b}$  v smeri smernega vektorja  $\mathbf{e}$ , enačba 3, slika 3a.

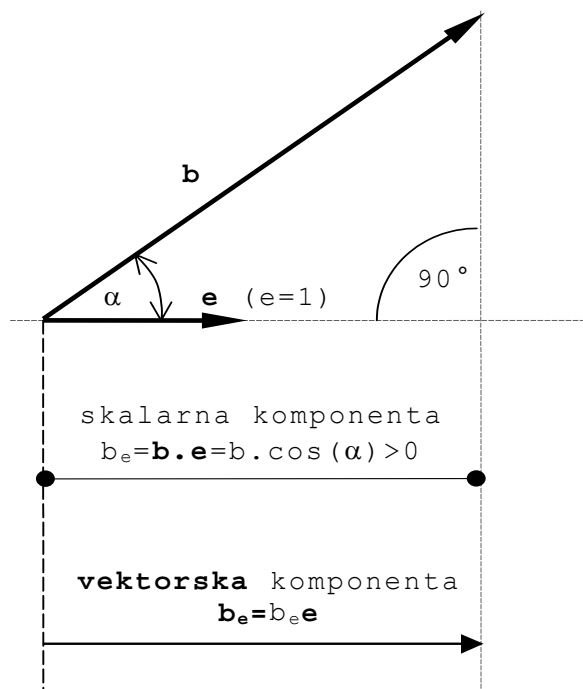
$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{e} = b \cdot e \cdot \cos(\alpha) = b \cdot \cos(\alpha) = b_e \quad (\text{A4.1-3})$$

Ta komponenta je za kot  $0 < \alpha < 90^\circ$  pozitivna. Iz skalarne komponente pa seveda dobimo vektorsko komponento z enačbo 4.

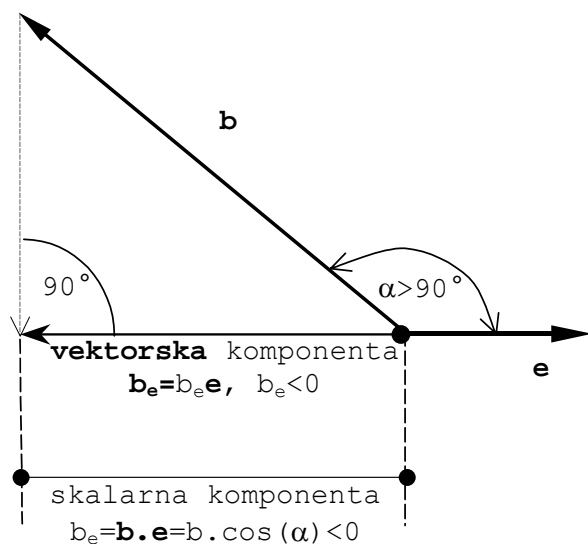
$$\mathbf{b}_e = b_e \mathbf{e} \quad (\text{A4.1-4})$$

V primeru, ko je kot med vektorjema  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{e}$  večji kot  $90^\circ$ , sta skalarna in vektorska komponenta prikazani na sliki 3b. V tem primeru je skalarna komponenta negativna. Za vektorske komponente pa ne moremo reči, da so pozitivne ali negativne, ker vektorje ne moremo opredeliti samo z eno pozitivno oziroma negativno številko. Zato za vektorske komponente pravimo, da so ali v smeri smernega vektorja  $\mathbf{e}$ , tedaj je skalarna komponenta pozitivna, ali pa v nasprotni smeri in skalarna komponenta je negativna. Samo v tem smislu lahko govorimo o predznaku vektorske komponente. Tak pomen opisa komponent je marsikje zelo pomemben, na primer pri izračunu reakcij konstrukcij za katere pravimo, da so pozitivne, če so v smeri izbranih smernih vektorjev, oziroma negativne, ko so v nasprotni smeri. Zavedati se moramo, da nam

vrednost pozitivne komponente prav nič ne pove, kadar ne vemo, kako so postavljeni smerni vektorji. Na splošno pa pojem pozitivnosti oziroma negativnosti reakcij nima nobene zveze z globalnim koordinatnim sistemom v katerem podajamo geometrijo konstrukcije.



Slika A4.1-3a. Skalarna in vektorska komponenta vektorja  $\mathbf{b}$  v smeri smernega vektorja  $\mathbf{e}$  za primer  $0 < \alpha < 90^\circ$ .



Slika A4.1-3b. Grafični prikaz komponent, ko je kot  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tedaj je skalarna komponenta vektorja  $\mathbf{b}$  negativna, pripadajoča vektorska komponenta pa je v nasprotni (negativni) smeri smernega vektorja  $\mathbf{e}$ .

Zapišimo še vsa pravila, ki veljajo za *skalarni produkt*. Torej, za poljubne vektorje  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{c}$  ter skalar  $\alpha$  veljajo pravila:

(S-1)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  komutativnost

(S-2)  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  distributivnost

(S-3)  $\mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  asociativnost

(S-2)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ ;  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$  implicira  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  pozitivna definitnost

Ta pravila so enostavna in ni težko ugotoviti, da definicija produkta po enačbi 1 izpolnjuje vsa spodaj navedena pravila. Za zgled si oglejmo samo dokaz, da »naša« definicija skalarnega produkta izpolnjuje pravilo za komutativnost:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha) = b \cdot a \cdot \cos(\alpha) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

Velja pa si posebej zapomniti sledeče. Iz definicije skalarnega produkta vidimo, da če sta vektorja kolinearna in istosmerna, je skalarni produkt enak kar produktu njunih dolžin.

Posebej si velja zapomniti nekatere praktično pomembne značilnosti in relacije povezane s skalarnim produktom.

Dolžino vektorja v kartezijskem koordinatnem sistemu lahko podamo s pomočjo skalarnega produkta, enačba 5.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad (\text{A4.1-5})$$

Če sta vektorja nasprotno usmerjena, je skalarni produkt enak negativni vrednosti produkta njunih velikosti. Ko sta vektorja med seboj pravokotna (ortogonalna), je njun skalarni produkt enak nič. Lahko rečemo, da prvi vektor nima nobene komponente v smeri drugega vektorja. Torej velja

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ali } b = 0 \text{ ali } a \perp b$$

Nazadnje še pokažimo, da je skalarni produkt vektorjev zapisanih po komponentah enak vsoti produktov istoležnih komponent. Ko upoštevamo, da je

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

in

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

dobimo obrazec za izračun skalarnega produkta za vektorje v komponentnem zapisu, ki ga bomo pogosto uporabljali, enačba 6.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &\equiv (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) \\ &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \quad (\text{A4.1-6})$$

S skalarnim produktom na enostaven način izračunamo kot med vektorjema s pomočjo enačbe 7, ki direktno sledi iz definicije skalarnega produkta.

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a \cdot b} \quad (\text{A4.1-7})$$

Učinkovitost te enačbe se posebno izkaže, ko so vektorji podani po komponentah.

Ne nazadnje si velja še zapomniti: komponente vektorja v kartezijskem koordinatnem sistemu so enake skalarnemu produktu vektorja z baznimi vektorji, glej na primer enačbo 8.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = a_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = a_y. \quad (\text{A4.1-8})$$

**Zgled A4.1-Z1.** Vektor  $\mathbf{a}$  in smerni vektor  $\mathbf{e}$  sta razvidna iz slike A4.1-Z1. Vektor  $\mathbf{e}$  leži na premici  $p$ , ki je v ravnini  $x,y$  in gre skozi koordinatni začetek in točko  $T$ .

- Izračunaj pravokotno skalarno komponento vektorja  $\mathbf{a}$  v smeri vektorja  $\mathbf{e}$
- Izračunaj kot  $\delta$
- Zapiši vektorsko komponento  $\mathbf{a}_e$  s pomočjo vektorja  $\mathbf{e}$
- Zapiši vektorsko komponento  $\mathbf{a}_e$  po komponentah v koordinatnem sistemu  $x,y,z$

Rešitev:

$\mathbf{a} = (2, -6, 3), a = 7$ , naklonska kota smernega vektorja sta  $\alpha = 135^\circ, \beta = 45^\circ$  in  $\mathbf{e} = (-0.707, 0.707, 0), e = 1$

a)  $a_e = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = (2, -6, 3) \cdot (-0.707, 0.707, 0) = -5.657$

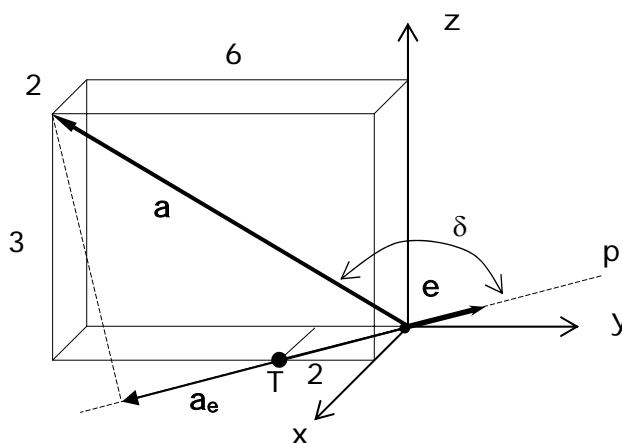
b)  $\cos \delta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} / a = -5.657 / 7 = -0.808, \delta = 143,9^\circ$

c)  $\mathbf{a}_e = a_e \mathbf{e} = -5.657 \mathbf{e}$

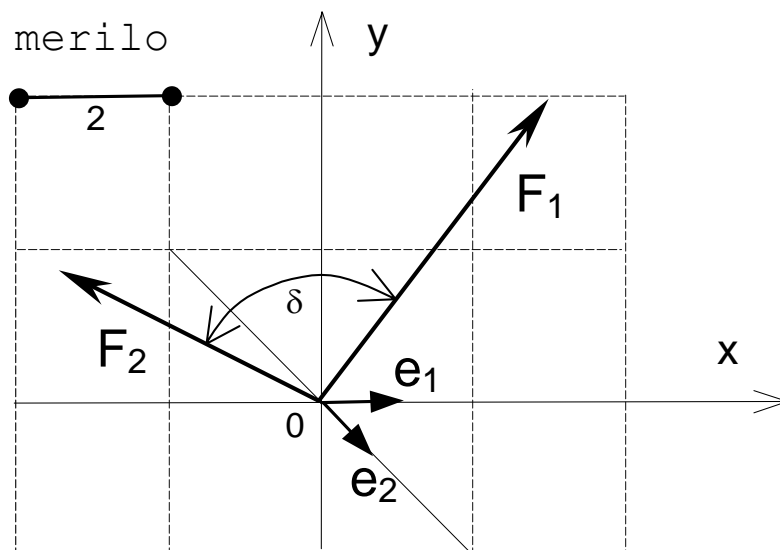
d)  $\mathbf{a}_e = a_e \mathbf{e} = -5.657(-0.707, 0.707, 0) = (4, -4, 0)$

**Zgled A4.1-Z2.** V koordinatnem sistemu  $x,y$  je podan vektor  $\mathbf{F}_1 = (3,4)$ , vektor  $\mathbf{F}_2$  pa z velikostjo  $F_2 = 4$  in kotom  $\delta = 100^\circ$  (glej sliko A4.1-Z2.1).

- Izračunaj njuno rezultanto  $\mathbf{R}$
- kot  $\delta$  med  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{F}_1$
- komponenti  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$  glede na smerna vektorja  $\mathbf{e}_1$  in  $\mathbf{e}_2$  prikazana na sliki
- kot  $\delta$  med  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{R}_2$
- komponenti  $\mathbf{R}$  v kartezijskem koordinatnem sistemu  $x',y'$  prikazanem na sliki A4.1-Z2.3



Slika A4.1-Z1. Vektor  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{e}$  prikazan s pomočjo pravokotnega kvadra.



Slika A4.1-Z2-1. Grafični prikaz podatkov.

a) Za izračun rezultante potrebujemo komponenti vektorja  $\mathbf{F}_2$ . Za to pa moramo najprej izračunati naklonska kota vektorja  $\mathbf{F}_2$  v koordinatnem sistemu  $x, y$  iz naklona vektorja  $\mathbf{F}_1$ .

$$F_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \cos\alpha_1 = F_{1x}/F_1 = 3/5, \quad \alpha_1 = 53,16^\circ$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \delta = 53,16^\circ + 100^\circ = 153,16^\circ; \quad \beta_2 = \alpha_2 - 90^\circ = 63,16^\circ$$

$$\mathbf{F}_2 = F_2 \cdot (\cos\alpha_2, \cos\beta_2) = 4 \cdot (\cos 153,16^\circ, \cos 63,16^\circ) = (-3,57, 1,81)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (3,4) + (-3,57, 1,81) = (-0,57, 5,81)$$

$$R = \sqrt{0,57^2 + 5,81^2} = 5,84$$

$$b) \cos \delta_{R,F_2} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}_2 / (R \cdot F_2) = (-0,57, 5,81) \cdot (-3,57, 1,81) / (5,84 \cdot 4) = 0,537$$

$$\delta_{R,F_2} = 57,5^\circ$$

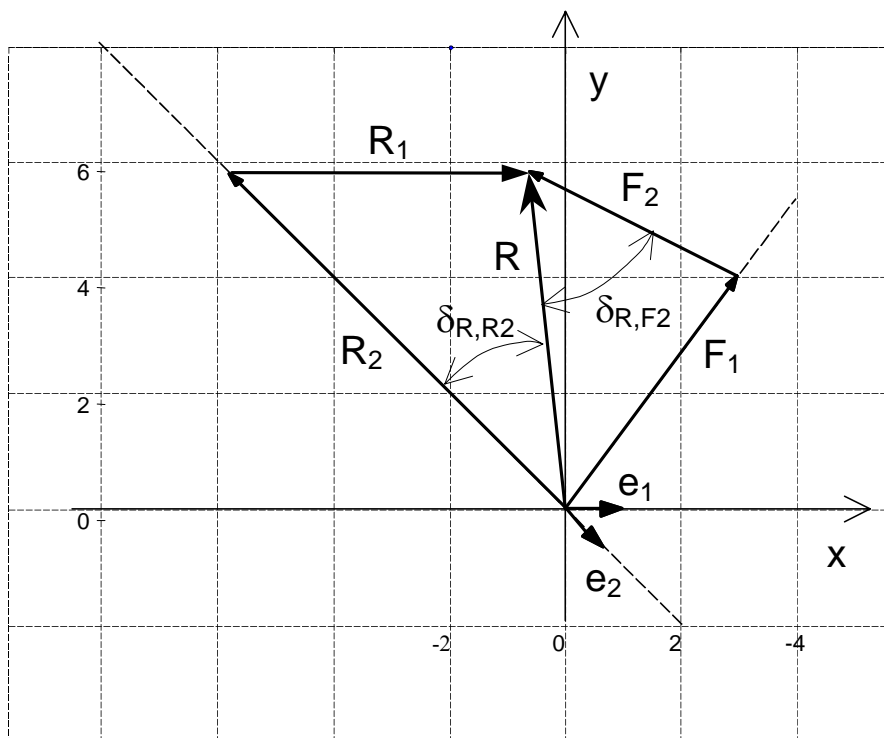
$$c) \mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = R_1 \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2$$

V enačbi sta neznanki  $F_1$  in  $F_2$ . Rešimo ju iz dveh skalarnih enačb, ki ju dobimo tako, da gornjo enačbo skalarno pomnožimo z vektorjema  $\mathbf{e}_1$  in  $\mathbf{e}_2$ :

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_1 = R_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_2 = R_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + R_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2$$





Slika A4.1-Z2-1. Grafična rešitev za točke a,b, c in d.

Upoštevajte, da je

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0.707, -0.707)$$

in na primer izračun skalarnega produkta

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_2 = (-0.57, 5.81) \cdot (0.707, -0.707) = -4.51$$

sta gornji enačbi

$$-0.57 = R_1 + R_2 \cdot 0.707$$

$$-4.51 = 0.707 \cdot R_1 + R_2$$

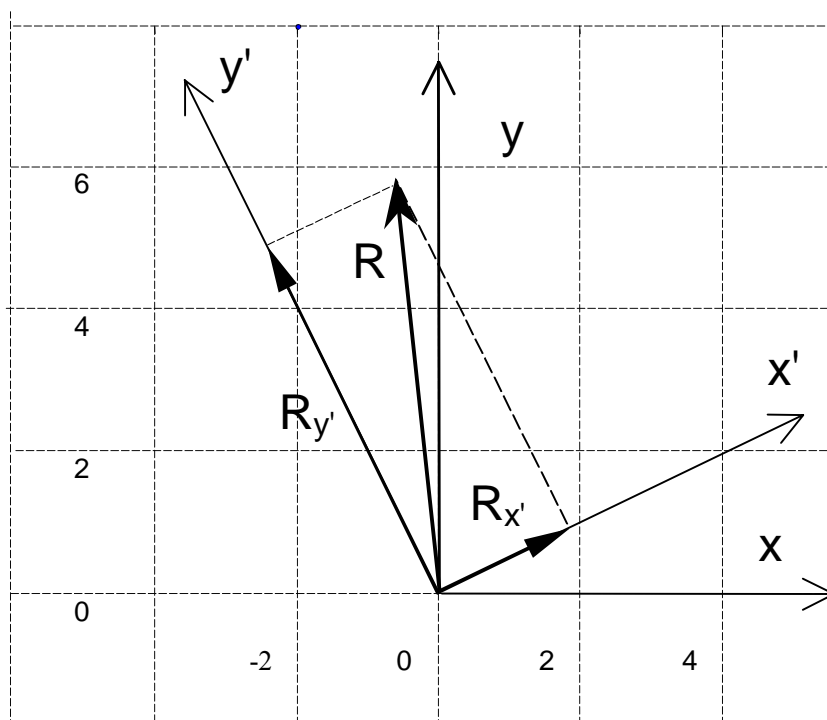
Rešitev je

$$R_1 = 5.24 \quad \text{in} \quad R_2 = -8.21$$

$$\text{d) } \mathbf{R}_2 = R_2 \mathbf{e}_2 = -8.21(0.707, -0.707) = (-5.80, 5.80)$$

$$\cos \delta_{R,R_2} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_2 / (R \cdot R_2) = (-0.57, 5.81) \cdot (-5.80, 5.80) / (5.84 \times 8.21) = 0.77$$

$$\delta_{R,R_2} = 39.5^\circ$$



Slika A4.1-Z2.3. Lega koordinatnega sistema  $x',y'$  in grafična rešitev za točko e.

e) Bazna vektorja v smeri koordinatnih osi  $x',y'$  izračunamo na podlagi slike A4.1-Z2.3 kjer vidimo, da gre os  $x'$  skozi točko (4,2), os  $y'$  pa skozi in (-2,4).

$$\mathbf{i}' = \frac{(4, 2)}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = (0.894 \quad 0.447)$$

$$\mathbf{j}' = \frac{(-2, 4)}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = (-0.447 \quad 0.894)$$

Komponenti pa sta

$$\mathbf{R}_{x'} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}' = (-0.57, 5.81) \cdot (0.894 \quad 0.447) = 2.10$$

$$\mathbf{R}_{y'} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{j}' = (-0.57, 5.81) \cdot (-0.447 \quad 0.894) = 5.44$$

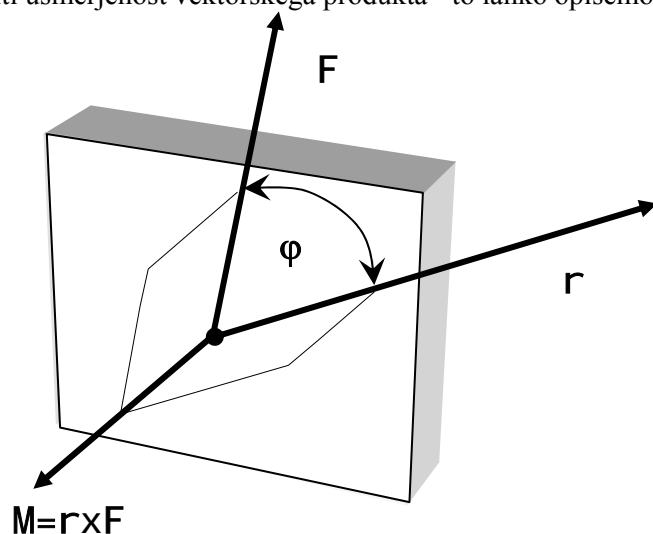
**(A4.2) Vektorski produkt** je za mehaniko pomemben, ker nam omogoča učinkovit in celoviti zapis navora sile. Vektorski produkt dveh poljubnih vektorjev definiramo (v mehaniki) kot vektor, ki ima velikost enako produktu velikosti obeh vektorjev in sinusu kota med njima. Operacijo vektorskega množenja običajno označimo z znakom » $\times$ «. Če označimo vektorja z  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{F}$  in njun vektorski produkt z  $\mathbf{M}$ , tedaj ga zapišemo z enačbo 1,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (\text{A4.2-1})$$

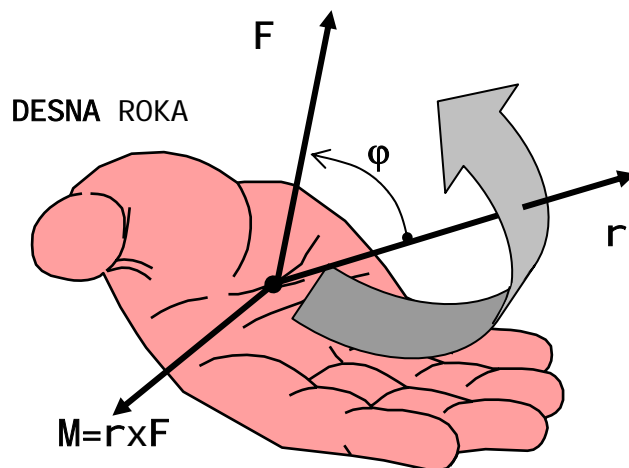
njegovo velikost pa z enačbo 2,

$$M = r \cdot F \cdot \sin \varphi, \quad (\text{A4.2-2})$$

kjer je s  $\varphi$  označen kot med vektorjema, glej sliko 1. Smer vektorskega produkta je natanko pravokotna na ravnino, ki jo določata vektorja  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{F}$ , ko ju prikazemo s puščicama, ki imata skupni začetek. Pri tem moramo še določiti usmerjenost vektorskega produkta - to lahko opišemo s pomočjo desne roke, slika 2.



Slika A4.2-1. Ilustracija za vektorski produkt. Vektorski produkt  $\mathbf{M}$  je pravokoten na vektorja  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{F}$ .



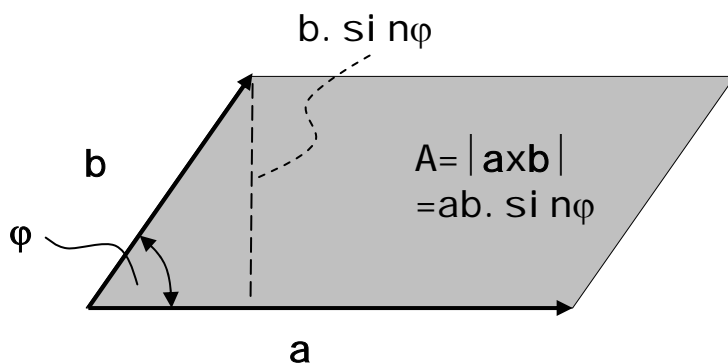
Slika A4.2-2. Določitev smeri vektorskega produkta s pomočjo desne roke.

Zamislimo si, da prvega izmed vektorjev v vektorskem produktu po najkrajši poti zasučemo v drugega v smeri kazalca **desne** roke – kot bi vse prste razen palca stisnili v pest, slika 2. Tedaj je vektorski produkt v smeri palca. Seveda moramo smatrati, da je palec postavljen pravokotno na oba vektorja v vektorskem produktu. Temu pravilu pravimo **pravilo desne roke** za vektorski produkt. V vektorskem produktu je torej pomembno, kateri vektor je prvi. Če zamenjamo vrstni red vektorjev, ni težko ugotoviti, da se v skladu s pravilom desne roke smer vektorskega produkta očitno obrne v nasprotno smer. Torej velja enačba 3, ki predstavlja anti-komutativnost vektorskega produkta.

$$-\mathbf{F} \times \mathbf{r} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

(A4.2-3)

Pomembna geometrijska interpretacija velikosti vektorskega produkta je površina paralelograma, kjer vektorja predstavljata stranici, slika 3.



Slika A4.2-3. Velikost vektorskega produkta kot površina paralelograma.

Na koncu si še pogledimo vsa pravila, ki veljajo za vektorski produkt.

Če z  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  označimo neke poljubne skalarje,

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R},$$

z  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{c}$  pa neke poljubne vektorje, veljajo naslednja pravila:

$$(V-0) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \text{ je spet vektor} \quad \text{preslikava elementov } \mathbf{V} \times \mathbf{V}$$

$$(V-1) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad \text{antikomutativnost}$$

$$(v-2) \quad \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} \quad \text{asociativnost pri množenju s skalarjem}$$

$$\text{oziroma } \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b})$$

$$(V-3) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad \text{distributivnost}$$

Naj posebej opozorimo, da **ne** velja asociativnost pri dvojnem vektorskem produktu, torej velja **neenakost**

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Zaradi poučnosti si pogledimo to natančneje na sliki 4. Produkt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  leži pravokotno na ravnino vektorjev  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , produkt  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  pa pravokotno na vektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , torej v ravnini vektorjev  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  in pravokotno na  $\mathbf{c}$ . Na podoben način ugotovimo, da  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  leži v ravnini vektorjev  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  in pravokotno na  $\mathbf{a}$ . Torej ležita dvojna vektorska produkta v različnih ravninah, vendar ne na presečišču teh ravnin, zato sta različna.

Glede na definicijo vektorskega produkta je očitno, da je produkt dveh vzporednih vektorjev ničen, produkt dveh pravokotnih vektorjev pa je enak kar produktu njunih velikosti. Za bazne vektorje kartezijske baze pa velja, da nam produkt dveh baznih vektorjev v ciklični postavitvi da tretji bazni vektor, torej

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

in

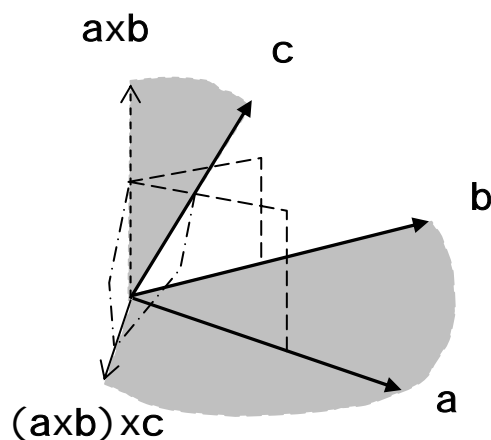
$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

**Vektorski produkt vektorjev v komponentnem zapisu.** Osnovne enačbe ter pravila za vektorsko množenje uporabimo za izračun vektorskega produkta vektorjev podanih po komponentah. Tedaj je

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j}(-a_x b_z + a_z b_x) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

Torej so komponente vektorskega produkta enake

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = -a_x b_z + a_z b_x, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$



Slika A4.2-4. Ilustracija lege dvojnega vektorskega produkta.

Enak rezultat dobimo z determinanto matrike, kjer v prvo vrstico zapišemo bazne vektorje, v drugo komponente prvega vektorja, v tretjo pa komponente drugega vektorja, enačba 4.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) - \mathbf{j}(a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) + \mathbf{k}(a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x). \quad (\text{A4.2-4a})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y, \quad -a_x \cdot b_z + a_z \cdot b_x, \quad a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \quad (\text{A4.2-4b})$$

Izračun vektorskega produkta s pomočjo gornjega obrazca bomo najpogosteje uporabljali.

**Zgled A4.2-Z1.** Izračunajmo vektorski produkt vektorjev  $\mathbf{r}=(1,-2,3)$  in  $\mathbf{F}=(4,1,2)$  z obrazcem A4.2-4b, njegovo velikost in smerni vektor ter preveri kot med njim in vektorjema  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{F}$ . Izračunaj kot med vektorjema ter nato velikost vektorskega produkta o obrazcu A4.2-2.

Izračun.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (1,-2,3) \times (4,1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) - \mathbf{j}(1 \cdot 2 - 3 \cdot 4) + \mathbf{k}(1 \cdot 1 - (-2) \cdot 4)$$

$$\mathbf{M} = (-7, 10, 9); \quad M = \sqrt{7^2 + 10^2 + 9^2} = 15,166;$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{M}/M = (-7, 10, 9)/15,166 = (-0.462, 0.659, 0.593)$$

Kota med  $\mathbf{M}$  in  $\mathbf{r}$  ter med  $\mathbf{M}$  in  $\mathbf{F}$  sta

$$\cos \delta_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{M} / (r \cdot M) = (1, -2, 3) \cdot (-7, 10, 9) / (3,741 \cdot 15,166) = 0, \quad \delta = 90^\circ$$

$$\cos \delta_2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M} / (r \cdot M) = (4, 1, 2) \cdot (-7, 10, 9) / (4,582 \cdot 15,166) = 0, \quad \delta = 90^\circ$$

Kot med  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{F}$  je

$$\cos\delta = \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} / (r \cdot F) = (1, -2, 3) \cdot (4, 1, 2) / (3, 741.4, 582) = 0.467, \delta = 62,179^\circ$$

$$M = r \cdot F \sin\delta = 3,741.4, 582 \sin 67,604^\circ = 15,166$$

**(M1) Enačba premice v prostoru.** Za snov v pričujočem tekstu sta pomembna predvsem parametrični zapis lege premice v koordinatnem sistemu in zapis s pomočjo vektorskega produkta. Na sliki 1 je narisana premica. Predpostavimo, da poznamo lego neke točke na premici, določeno s krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}_0$  ter smerni vektor  $\mathbf{e}$  na premici.

V skladu s sliko velja

$$\mathbf{r}_0 + \mathbf{a} = \mathbf{r}, \quad (\text{M1-1})$$

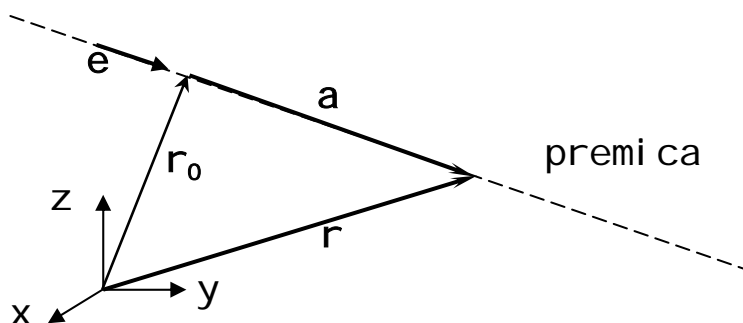
kjer vektor  $\mathbf{a}$  leži na premici. Če ga izrazimo s smernim vektorjem in njegovo velikostjo

$$\mathbf{a} = a \cdot \mathbf{e}, \quad (\text{M1-2})$$

dobimo enačbo premice

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + a\mathbf{e}, \quad (\text{M1-3})$$

kjer je  $a$  parameter, ki določa točko na premici. Ta predstavlja oddaljenost točke na premici od točke  $\mathbf{r}_0$ . Smerni vektor pa ni nujno, da je normiran; takšen slučaj bomo mi največkrat uporabljali. Enačba 3 je vektorska enačba, ki zapisana po komponentah razpade na tri skalarne enačbe, parameter  $a$  pa jih povezuje.



Slika M1-1. Ilustracija za enačbo premice v parametrični obliki.

**Enačba premice podana z vektorskim produktom;** to enačbo v mehaniki posebno pogosto uporabljamo, ko določamo lego rezultante. Vektorski produkt  $\mathbf{M}$  krajevnega vektorja  $\mathbf{r}$ , ki določa neko točko na premici ter vektorja  $\mathbf{F}$ , ki leži na premici, je očitno zmeraj enak, enačba 4, slika 2.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{M1-4})$$

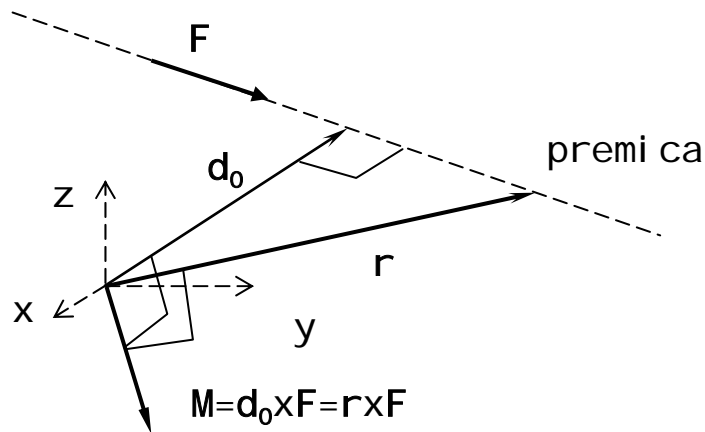
To je enačba premice. Če poznamo  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{M}$ , tedaj lahko izračunamo krajevne vektorje, ki določajo točke na premici, ker izpolnjujejo to enačbo. Z  $\mathbf{d}_0$  smo označili krajevni vektor, ki določa oddaljenost premice od koordinatnega izhodišča – je pravokoten na premico. Njegova velikost je enaka oddaljenosti premice od koordinatnega izhodišča. Torej je ta vektor značilen in enolično določljiv za dano premico. (Za razliko: v enačbi M1-1 smo z  $\mathbf{r}_0$  določili neko poljubno znano točko na premici)

Enačbo rešimo tako, da najprej izračunamo velikost in smer vektorja  $\mathbf{d}_0$ , nato pa s parametrično enačbo premice še poljubno točko na premici. Ker očitno velja enačba tudi za  $\mathbf{d}_0$ ,

$$\mathbf{M} = \mathbf{d}_0 \times \mathbf{F}, \quad (\text{M1-5})$$

In upoštevanje, da je  $\mathbf{d}_0$  pravokoten  $\mathbf{F}$ , je velikost

$$d_0 = M/F. \quad (\text{M1-6})$$



Slika M1-2. Ilustracija za enačbo premice podane z vektorskim produktom.

Iz slike 2 pa je razvidno, da je  $\mathbf{d}_0$  pravokoten na  $\mathbf{M}$  in na  $\mathbf{F}$ , tako da je njegov smerni vektor enak

$$\mathbf{e}_d = \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{F}}{|\mathbf{M} \times \mathbf{F}|} \quad (\text{M1-7})$$

**(F) NEWTONOVI ZAKONI GIBANJA**

**(1) Osnovna pojasnila.** Vsa mehanika v okviru te knjige temelji samo na Newtonovih zakonih, ki so tako edini naravni zakoni, ki so v tem tekstu uporabljeni pri izpeljavi in razlagi teorije ter pri računskih analizah konstrukcij in njihovih elementov. Ti zakoni so trije in neposredno govorijo samo o gibanju posameznega **točkastega telesa** ter odnosih med dvema telesoma. Točkasto telo ali masno točko smatramo kot telo, ki je neskončno majhno in ima maso  $m$ . Gibanje **teles končnih dimenzij**, to je teles, ki niso točkasta ali pa neskončna, obravnavamo kot gibanje sistema masnih točk in je izpeljano iz osnovnih zakonov veljavnih za posamezne masne točke.

Po obsežnem in temeljitim eksperimentiranju, študiju lastnih in tujih eksperimentov ter preverjanju računskih rezultatov z eksperimenti je Newton prišel do zaključka, da lahko gibanje točkovnih teles formulira s tremi zakoni - imenovanimi Newtonovi zakoni gibanja:

**Prvi Newtonov zakon** ali **zakon o inercialnih sistemih**. Vsako telo vztraja v stanju mirovanja ali pa enakomernega premočrtnega gibanja razen tedaj, ko je prisiljeno spremeniti to stanje zaradi sile, ki deluje nanj.

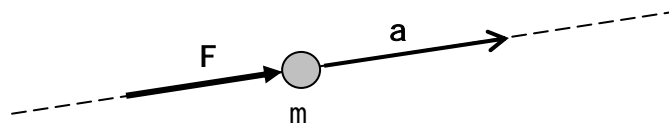
**Drugi Newtonov zakon** ali **zakon o pospešenem gibanju teles**. Ta zakon izvorno podaja gibanje z odvodom gibalne količine, ki je enaka produktu mase in hitrosti telesa. Zapišemo ga s tako imenovano fundamentalno enačbo,

$$F(t) = d(m \cdot v(t))/dt,$$

ki pravi, da je (v vsakem trenutku) odvod gibalne količine enak **rezultantni sili  $F$** , ki deluje na to telo. Pri konstantni masi je pa sila enaka produktu mase  $m$  in njenega pospeška  $a$ :

$$F = m \cdot a \quad (1-1)$$

Simbolični grafični prikaz tega zakona je na sliki 1-1.



Slika 1-1. Sila deluje na masno točko in povzroča pospešeno gibanje mase v smeri sile. Enaka je produktu mase  $m$  in njenega pospeška.

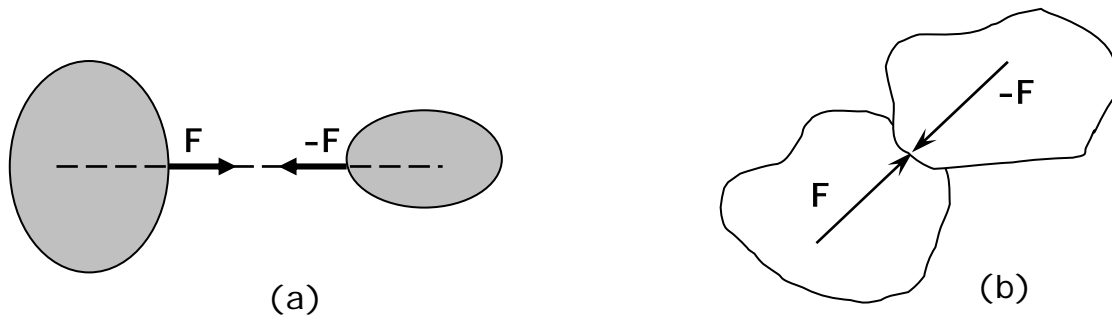
**Tretji Newtonov zakon** ali **zakon o akciji in reakciji**. Za vsako akcijsko silo zmeraj obstaja enako nasprotujoča reakcijska sila. Torej, ko deluje neko telo s silo  $F_1$  na drugo telo, deluje drugo telo na prvo z nasprotno silo, to je s silo  $F_1 = -F$  (slika 2). Pri tem pa ni nujno, da se ti dve telesi stikata. Ta zakon zapišemo z enačbo

$$F_1 = -F. \quad (1-2)$$

Obe sili sta rezultantni sili, s katerima delujeta telesi ena na drugo. Ti sili sta tudi na isti učinkovalnici.

Prvi Zakon pove, da za to, da se telo giblje enakomerno in premočrtno ali pa miruje, ni potrebna nobena sila. Hkrati pa ta Zakon pojasnjuje, da je smer in hitrost enakomernega in premočrtnega gibanja telesa ali pa mirovanja odvisna samo od inercialnega sistema, v katerem merimo to gibanje. Tako je vsako tako gibanje podano lahko samo relativno glede na neki izbrani inercialni sistem. Opisi takega gibanja so »enakovredni« v vseh takih sistemih in zato si zato lahko poljubno izberemo inercialni sistem za podajanje gibanja telesa.





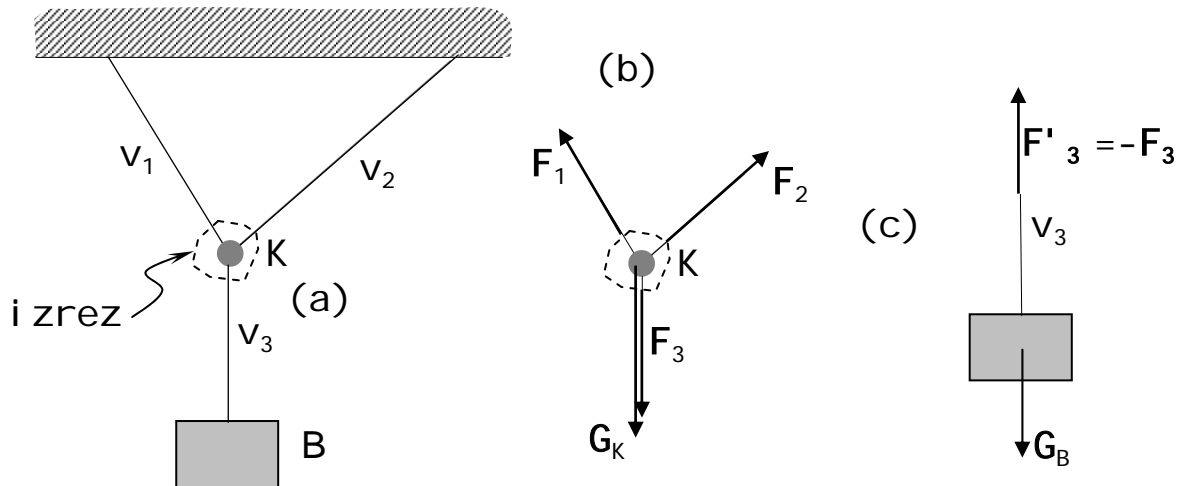
Slika 1-2. Simbolični prikaz akcije in reakcije dveh teles, (a) telesi brez stika in (b) telesi, ki se stikata. Sili sta si nasprotni in na isti premici.

Newtonovi zakoni so v osnovi definirani za točkasta telesa, pravimo jim tudi **masne točke**. V analizi gibanja (in statičnega ravnotežja) teles so ta točkasta telesa samo smiselna računski idealizacija majhnih teles. Za točkasto telo je lokacija prijemališča sil, ki delujejo nanj, zmeraj nedvoumna – za razliko od teles končnih dimenzij, kjer je treba točno določiti, na kateri del telesa delujejo sile.

Druga pomembna opomba v zvezi s formulacijo drugega Newtonovega zakona je, da pri točkah lahko opazujemo in seveda tudi izračunavamo samo **translatorno gibanje** – rotacije pri njih sploh ne moremo definirati. O rotaciji lahko govorimo samo pri telesih končnih dimenzij, ki jih smatramo kot množico točkastih teles. Gibanje takih teles opisujemo s translacijo in rotacijo, ki ju izračunamo tako, da upoštevamo Newtonove zakone za vsako masno točko, ki sestavlja obravnavano telo. V glavnem tekstu bomo izpeljali enačbe za gibanje **togih teles**, ki pa se posebno poenostavijo za telesa v mirovanju. Tedaj pravimo, da so telesa v **statičnem ravnotežju**.

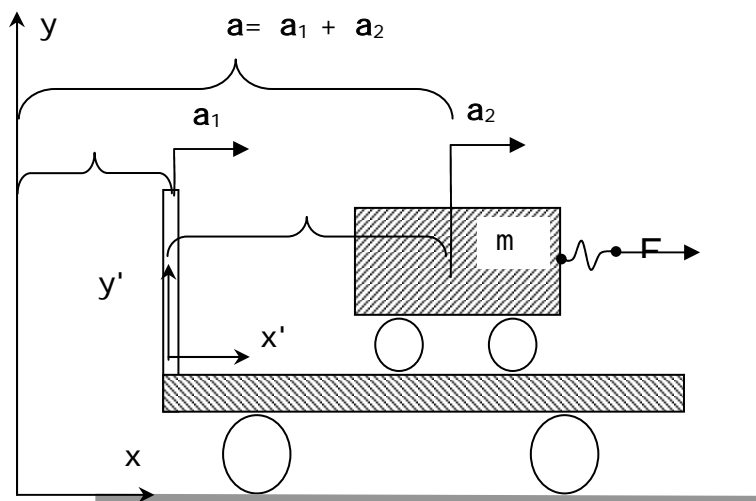
Sile, ki jih v smislu drugega zakona upoštevamo, delujejo na telo samo kot **zunanje sile** – rezultanta notranjih sil, s katerimi delujejo deli opazovanega telesa eden na drugega, je zmeraj nična. Zunanje sile so **gravitacijske sile** in **kontaktne sile**. Gravitacijske, ki delujejo na maso telesa, so razporejene po prostornini, ki jo zavzema opazovano telo, zato jim pravimo tudi **prostorninske sile**. Kontaktne sile so sile s katerimi druga telesa, ki so v neposrednem stiku z opazovanim telesom, delujejo na opazovano telo. Te sile so razporejene po stični površini in jih imenujemo **površinske sile**. Tako imenovane **točkovne ali koncentrirane sile** so samo smiselna računski poenostavitev prej omenjenih sil.

Ko analiziramo gibanje dela nekega telesa, tedaj upoštevamo, da ostali deli telesa delujejo nanj preko kontaktnih površin s površinsko razporejenimi silami. V analizi gibanja moramo obravnavati opazovani del telesa kot **prosto (ločeno) telo**, za katero si mislimo, da smo ga v celoti »izrezali«. Zaradi tega imenujemo vse sile, ki skupaj delujejo na tako »izrezano« telo, **sile prostega telesa**, pa čeprav je opazovani del telesa v resnici povezan z drugimi deli. Na sliki 1-3a je prikazano vrvje in breme. Pri analizi gibanja (mirovanja) vozlišča moramo le-tega obravnavati kot prosto telo, ki si ga mislimo izrezanega iz vrvja, slika 3b. Pri tem naj opozorimo, da je sila  $F_3$  sila s katero deluje vrv na vozlišče, sile  $G_k$  pa rezultatna sila teže vozlišča, ki deluje v težišču vozlišča in ki jo običajno zanemarimo. Grafični prikaz vseh sil, ki delujejo na vozlišče, imenujemo **diagram sil prostega telesa**. Če v diagramu izpustimo že samo eno izmed sil, na primer eno kontaktno silo, ne moremo več govoriti o silah prostega telesa, pa tudi drugi Newtonov zakon ne velja za takšen okrnjeni sistem sil. Pozorni moramo biti, da pravilno razlikujemo sile, ki jih obravnavata Drugi in Tretji Newtonov zakon. Na sliki 3c je prikazan diagram sil prostega telesa, ki ga predstavljata breme in vrv. Sili  $G_B$  in  $F_3'$  predstavljata vse sile tega »prostega telesa«. Sila  $F_3'$  je sila, s katero vozlišče deluje na vrv  $V_3$ . Hkrati pa je po Tretjem zakonu ta sila nasprotno enaka sili  $F_3$ , s katero deluje vrv  $V_3$  na vozlišče.



Slika 1-3. Vozlišče K s težo  $G_K$  in breme z vrvjo  $V_3$  ter njuna diagrama sil prostega telesa. V smislu tretjega Newtonovega zakona sila  $F'_3$  ni reakcija na silo teže  $G_B$ , je pa reakcija na  $F_3$ .

Drugi Newtonov zakon velja za pospeške merjene v **inercialnih sistemih**, to je v sistemih, ki se ne gibljejo pospešeno. Vsak sistem, kjer je sila enaka produktu mase in pospeška merjenega v tem sistemu je inercialni sistem, pravimo tudi da je to sistem v katerem veljajo Newtonovi zakoni. Koordinatni sistem pripet na Zemljo ni natančno enak inercialnemu sistemu, vendar je za praktične inženirske probleme pospešeno gibanje Zemlje tako majhno, da lahko Zemljo smatramo za inercialni sistem.

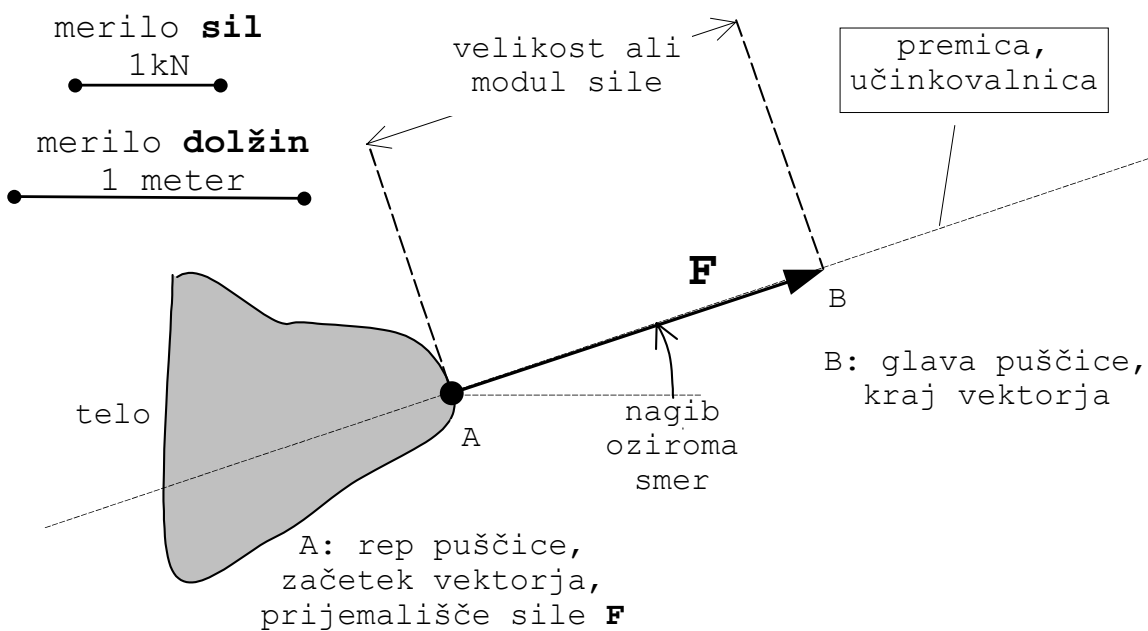


Slika 1-4. Inercialni sistem  $x,y$  pripet na tla in neinercialni sistem  $x'y'$  pripet na vagon.

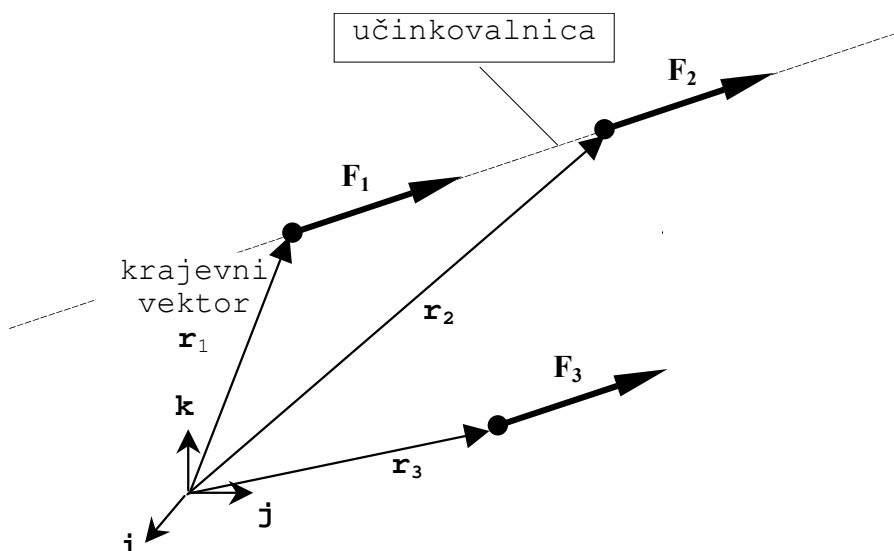
Na sliki 4 je prikazan vagon, ki se vozi s pospeškom  $a_1$  po tračnicah, položenih na tla. Pospešek  $a_1$  merimo v koordinatnem sistemu  $xy$ , ki je pripet na tla. Na vagonu je voziček, ki se zaradi sile  $F$  premika glede na vagon s pospeškom  $a_2$  merjenem v sistemu  $x'y'$  pripetem na vagon. Silo  $F$  merimo z raztezkom vzmeti in je enaka masi krat pospešek v inercialnem sistemu, torej  $F = m \cdot a = m(a_1 + a_2)$ .

Newton je napisal Prvi zakon, da bi poudaril, da za premočrtno gibanje ali mirovanje nebesnih teles ni potrebna nobena sila ali kaj drugega. To velja za gibanje merjeno v katerem koli inercialnem koordinatnem sistemu, ki miruje ali se enakomerno in premočrtno giblje. V skladu z Drugim zakonom so pospeški in s tem sile enake v vseh takih koordinatnih sistemih. Seveda pa imajo iste sile in pospeški drugačne komponente v zavrtih koordinatnih sistemih, ker komponente vektorjev zavisijo od koordinatnega sistema. Pri translaciji koordinatnega sistema pa komponente ostanejo enake.

(2) **Osnovni pojmi pri silah.** Vsaka sila učinkuje samo na povsem določeno masno točko telesa, ki je notranja točka pri sili teže in površinska točka pri kontaktnih silah. Točko telesa na katero deluje sila imenujemo **prijemališče sile** (slika 1). Seveda pa lahko več sil hkrati deluje na isto masno točko, tedaj govorimo o **silah s skupnim prijemališčem**. Zvezno razporejene sile obravnavamo v bistvu kot množico sil, ki delujejo vsaka na svojo masno točko, kjer računsko smatramo, da so masne točke zvezno razporejene. Pri grafični predstavitvi prijemališče rišemo praviloma tam, kjer je "rep" puščice vektorja sile. Namišljena premica v kateri leži sila se imenuje **učinkovalnica** sile. **Nagib ali smer sile** podajamo tako kot pri vektorju. Včasih govorimo še o **usmerjenosti** ali orientaciji sile na učinkovalnici. S tem mislimo, da je sila na učinkovalnici obrnjena v eno ali pa nasprotno smer. **Velikost sile** prikazujemo z velikostjo vektorja in je tako kot vektor **zmeraj pozitivna** (ali pa v skrajnem primeru nična). Imenujemo jo tudi **modul ali absolutna vrednost** (redkeje tudi intenzivnost) in jo označujemo kot pri vektorjih. Pri risanju sil moramo upoštevati merilo velikosti sil, kjer nam neka izbrana dejanska dolžina predstavlja izbrano enoto za silo, slika 2-1. Sile, ki nimajo skupnega prijemališča, grafično prikazujemo zmeraj z dvema meriloma, eno **merilo za velikosti teles** in za **lokacijo prijemališč sil** ter drugo **merilo za velikost sil**. V grafičnem prikazu koordinatnega sistema je lahko za posamezne koordinatne osi merilo različno.



Slika 2-1. Grafični prikaz sile.



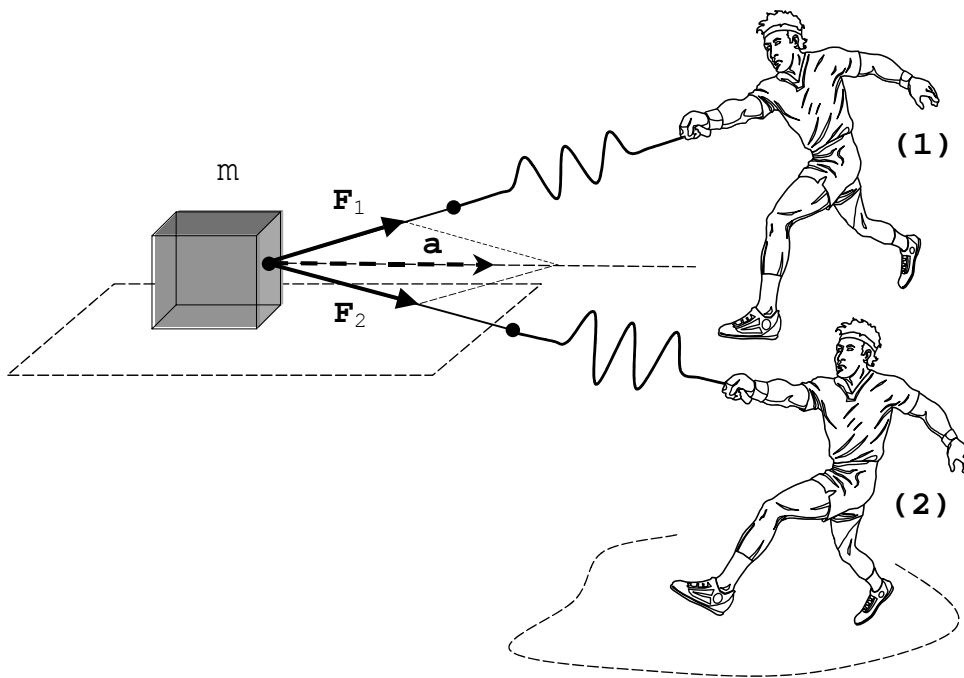
Slika 2-2. Grafični prikaz enakih sil s prijemašči na različnih lokacijah, določenih s krajevnimi vektorji.

Medtem ko matematika ne razlikuje med dvema vektorjema, ki sta enako velika in imata enako smer, pa je učinek dveh enako velikih sil z isto smerjo vendar na različnih mestih različen. Tako sile  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ , in  $\mathbf{F}_3$  na sliki 2-2, ki imajo enako velikost in smer, matematično predstavlja isti vektor. Torej velja enačba za vektorsko enakost sil, enačba 2.

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_3. \quad (2-1)$$

Vpliv lokacije sile upoštevamo s pomočjo krajevnih vektorjev, ki podajajo lego prijemašča sile. Torej sta za popolni opis učinka sile potrebna dva vektorja: vektor kraja z enotami dolžin in vektor sile z enotami za sile. Pri postopkih za analizo konstrukcij bomo natančno ugotavljali, kako se spremeni učinek sile, ko jo premaknemo po učinkovalnici in ko jo vzporedno premaknemo. Dokazali bomo, da se, na primer, pri nekaterih statično določenih konstrukcijah reakcije ne spremenijo, ko silo premaknemo po njeni učinkovalnici.

**(3) Sile in vektorji.** Tekom gornjih izvajanj smo kar mimogrede sile podajali z vektorji. Pri tem moramo biti nekoliko previdni in podajati sile z vektorji z ustreznim razumevanjem. Sile namreč niso že kar vektorji, ampak se samo pri operacijah seštevanja in množenja s skalarjem "obnašajo" natanko tako kot vektorji. Do spoznanja, da sile analiziramo z vektorsko algebro, so raziskovalci prišli šele na podlagi analiz dejanskih preizkusov. Pri tem pa se je treba zavedati, da sile neposredno ne moremo opazovati, lahko pa opazujemo in merimo njihove učinke (pospeševanje mase, raztezek elastične vzmeti itd ...).



Slika 3-1. Vlečenje kocke v dveh smereh.

V poglavju o vektorjih smo definirali vektorje z urejenimi trojicami in jih grafično predstavili s puščicami ter definirali analitično in grafično seštevanje in množenje s skalarjem. Ugotovili smo, da ti operaciji natanko izpolnjujeta vse zakonitosti, ki definirajo vektorje. Za pomike smo ugotovili, da če jih grafično podamo s puščicami ali pa analitično z urejenimi trojicami, tedaj ima seštevanje in množenje s skalarjem vključno z vsemi vektorskimi zakonitostmi fizikalni pomen in računski rezultati pravilno podajajo pomikanje teles.

Poglejmo si še na kratko sile kot vektorje. Oglejmo si enostavni eksperiment na sliki 3-1, ki bo razjasnil kar nekaj vektorskih značilnosti sil in pospeškov. Moža vlečeta preko vzmeti in vrvi kocko z maso  $m$ . Kocka je na idealno gladki podlagi (ni trenja). Velikost sile  $\mathbf{F}_1$ , s katero prvi možakar preko vrvi vleče kocko, lahko izmerimo z raztežkom vzmeti. Smer sile je enaka smeri vrvi. To silo narišemo z vektorsko puščico, njena velikost odgovarja velikosti sile, njena smer pa je v smeri sile (v smeri vrvi). Analogno velja za silo  $\mathbf{F}_2$ .  $\mathbf{a}$  je

pospešek kocke, ki ga prav tako lahko izmerimo, tako po velikosti kot po smeri, in je posledica delovanja obeh sil  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$ . Če pospešek  $\mathbf{a}$  pomnožimo z maso kocke, dobimo računsko silo  $\mathbf{R}$ , enačba 1.

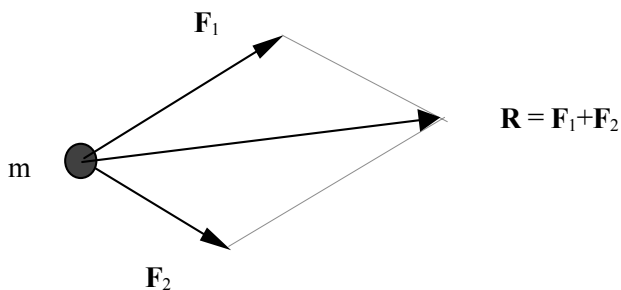
$$\mathbf{R} = m \cdot \mathbf{a}. \quad (3-1)$$

Tej sili pravimo rezultanta, njena velikost in smer pa je natanko enaka vektorski vsoti sil  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$ , enačba 2, slika 2.

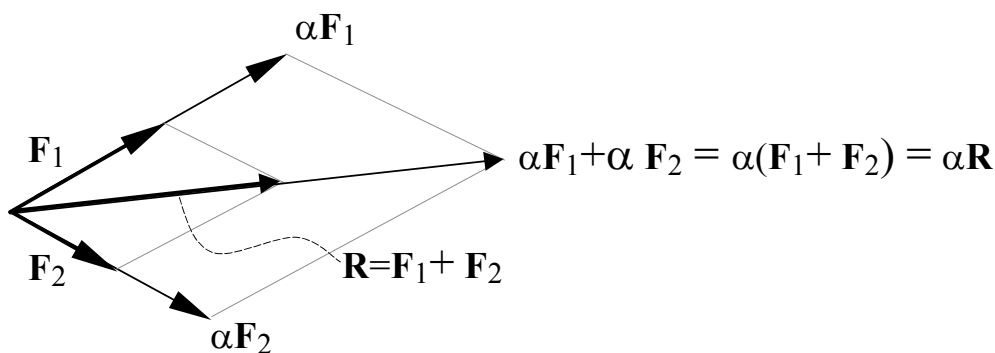
$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \quad (3-2)$$

Če ponovimo preizkus, vendar tako, da samo z omenjeno rezultatno silo delujemo na kocko, bo njen pospešek enak pospešku zaradi delovanja obeh sil  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$ . To velja za poljubni dve ali več sil in njihovo rezultanto. Tako zaključimo: rezultanta danega sistema sil, ki jo izračunamo kot vektorsko vsoto vektorjev sil, ima isti učinek kot sistem sil. V enačbi ima znak enakosti fizikalni pomen enakosti učinka dveh sil in njune rezultante – ta zaključek pa natančno velja samo za točkasta telesa. Na kratko pravimo temu seštevanje sil, ki se izvede kot seštevanje vektorjev. Za analizo gibanja in ravnotežja je torej prav vseeno, ali računamo s sistemom sil ali pa z njegovo rezultanto. Mi bomo večinoma računali z rezultanto, ker so računske manipulacije z njo lažje kot s sistemom sil. Vendar pa se moramo zavedati, da dejansko delujeta samo omenjeni sili  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$ , rezultanta pa je samo računaska sila primerna samo za nekatere analize. V katerih primerih te analize veljajo, bomo seveda natančno ugotovili. To dejstvo je posebno pomembno pri telesih končnih dimenzij, kjer lahko računaska rezultanta deluje celo v točkah, ki sploh niso del opazovanega telesa. Omenimo še, da sistem sil zmeraj povzroča drugačno razporeditev napetosti kot njihova rezultanta, pri statično nedoločenih konstrukcijah pa so tudi reakcije drugačne. Spoznali bomo tudi, da v nekaterih prostorskih problemih (problem dinamike) sploh ne obstaja rezultanta danega sistema sil, ki bi imela na gibanje togega ne-točkovnega telesa enak učinek kot dani sistem sil.

Na podoben način kot za rezultanto dveh sil so ugotovili, da za seštevanje sil veljajo še prav vsa pravila kot za seštevanje vektorjev, to je komutativnost, asociativnost, itd.



Slika 3-2. Vektorski seštevek sil (po paralelogramskem pravilu).



Slika 3.3. Za povečevanje sil za  $\alpha$  krat velja distributivnost v skalarnem faktorju  $\alpha$ .

Poglejmo si pomen množenja sile s skalarjem. Povsem očitno je, da če silo  $\mathbf{F}$  za  $\alpha$ -krat povečamo, dobimo spet silo, označimo jo tukaj z  $\mathbf{F}_1$ , ki je v isti smeri, samo velikost je  $\alpha$ -krat večja. Torej imajo sile glede tega

enake lastnosti kot vektorji: ko vektor pomnožimo s skalarjem dobimo spet vektor, ki ima isto smer, vendar  $\alpha$ -krat večjo velikost, enačba 3.

$$\mathbf{F}_1 = \alpha \mathbf{F}. \quad (3-3)$$

Pomen množenja sile s skalarjem  $\alpha$  je torej povečevanje ( $\alpha > 1$ ), oziroma zmanjševanje ( $0 < \alpha < 1$ ) in tudi obračanje sile ( $\alpha = -1$ ). Za množenje sile s skalarjem pa veljajo prav vsa pravila, kot za množenje vektorja s skalarjem, kar je seveda skladno z vsemi eksperimenti. Poglejmo si za zgled samo distributivnost in njen pomen, enačba 4.

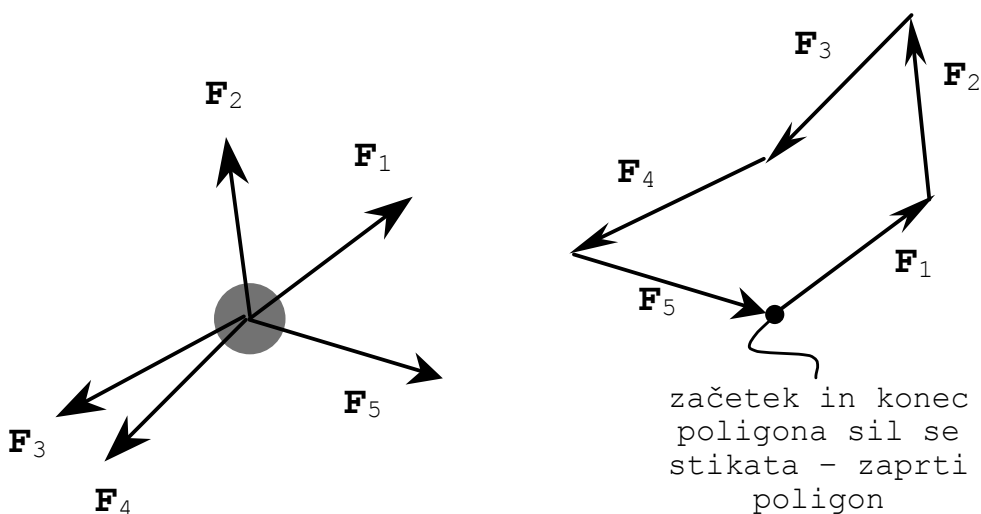
$$\mathbf{P} = \alpha \cdot \mathbf{F}_1 + \alpha \cdot \mathbf{F}_2 = \alpha \cdot (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \alpha \cdot \mathbf{R}. \quad (3-4)$$

Gornja enačba pove, da je vseeno, ali vse sile najprej povečamo za  $\alpha$ -krat in jih seštejemo, ali pa kar rezultanto povečamo  $\alpha$ -krat. V obeh primerih je rezultat enak - dobimo enako silo  $\mathbf{P}$ . Grafično je ta lastnost prikazana na sliki 3-3.

(4) **Enačbe statičnega ravnotežja za masno točko.** Če točkasto telo, na katero deluje sistem sil (slika 1), miruje v inercialnem sistemu, tedaj je seveda pospešek nič. Po Drugem Newtonovem zakonu je tedaj vsota sil oziroma rezultanta sil nična, enačba 4-1, in pravimo, da je masna točka ali pa da je **sistem sil v statičnem ravnotežju**.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (4-1)$$

Pri grafičnem prikazu sil je tedaj poligon sil zaključen, slika 4-1.



Slika 4.1. Statično ravnotežje sil – zaprti poligon sil.

Enačba 4-1 je **vektorska enačba statičnega ravnotežja**. Če te sile zapišemo po komponentah v nekem poševnem koordinatnem sistemu z osmi 1,2,3, tedaj enačba razpade na **tri skalarne enačbe statičnega ravnotežja**, enačbe 2.

$$\sum_{i=1}^n F_{1,i} = R_1 = 0 \quad (4-2a)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{2,i} = R_2 = 0 \quad (4-2b)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{3,i} = R_3 = 0 \quad (4-2c)$$

Najpogosteje bomo sile zapisali v kartezijskem koordinatnem sistemu  $x,y,z$ . Tedaj dobimo enačbe 4-3:

$$\sum_{i=1}^n F_{x,i} = R_x = 0 \quad (4-3a)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{y,i} = R_y = 0 \quad (4-3b)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{z,i} = R_z = 0 \quad (4-3c)$$

Torej lahko zapišemo statično ravnotežje z eno vektorsko enačbo ali pa s tremi skalarnimi enačbami, ki jih imenujemo enačbe statičnega ravnotežja. Kaj s temi enačbami računamo, zavisi od problema, ki ga analiziramo: lahko računamo neznane velikosti sil, ali neznane smeri ali pa oboje. Zavedati pa se moramo, da če je masna točka v mirovanju, so enačbe izpolnjene, vendar pa ni nujno, da velja tudi obratno. Ko so enačbe statičnega ravnotežja izpolnjene, tedaj se masna točka lahko še vedno giblje premočrtno in s konstantno hitrostjo. Da telo (konstrukcija) miruje, ko nanj deluje sistem sil, zagotovimo šele z robnimi pogoji, ki jih določajo podpore konstrukcije. To pa bomo obravnavali v posebnem poglavju.

Izredno pomembno pa je sledeče: ko dano silo razstavimo ali uravnotežimo s tremi silami v znanih smereh in neznanih velikosti, postane sistem ravnotežnih enačb 2 sistem navadnih linearnih enačb. Ta ima enolično rešitev, ko so smerni vektorji koordinatnih osi (baze) linearno neodvisni. S tem problemom se bomo kasneje natančno ukvarjali in ugotavljali, kaj pomeni, ko je smeri več ali pa manj kot tri.

Enačbe 2 oziroma 3 so zapisane za splošni prostorski problem. Ko imamo sile, ki so vse v isti ravnini, tedaj so komponente sil v smeri pravokotno na ravnino nične in ena izmed enačb je identično izpolnjena. Takim problemom pravimo **ravninski problemi** in jih obravnavamo samo z **dvema skalarnima enačbama**, kjer so komponente sil zapisane v koordinatnem sistemu, ki leži v ravnini sil.

## Literatura

---

---

### **Literatura k dodatkom iz matematike in fizike ter za prvo poglavje :**

- [1] B.Yavorsky, A.Detlaf: Handbook of Physics, Mir Publishers, Moscow 1974
- [2] C.Kittel, W.D.Knight, M.A.Ruderman: Mechanics, Berkeley Physics Course – Volume 1, McGraw-Hill, Inc, New York, 1973, USA
- [3] E.Kreyszig: *Advanced Engineering Mathematics*, John Willy & Sons, Inc., New York 1993.
- [4] *Encyclopaedia Britannica*, Delux Millennium Edition, Part ESS370, Focus Essential Multimedia Limited, UK
- [5] I.N.Bronštejn, K.A.Semendjaev: Matematični priročnik, Tehniška založba Slovenije, 1972
- [6] Korn & Korn: *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*; McGraw-Hill, Inc, New York, 1968, USA, Library of Congress Catalog Number 67-16304 35370 456789-MAMM-765.
- [7] R.Resnick, D.Halliday, K.Krane: *Physics*, Vol #1, John Willy & Sons, Inc., New York 1992, ISBN 0-471-55917-2.
- [8] R.W. Hamming, *Numerical Methods for Scientists and Engineers*; McGraw-Hill 1962 in Dover Publ. 1986, New York, ISBN 0-486-65241-6.

### **Literatura za ostala poglavja:**

- [9] D.Gross, W.Hauger, W.Schnell: *Technische Mechanik, Band 1, Statik*; Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New-York, Tokyo 1986, ISBN 3-540-11706-7.
- [10] E.Prelog: *Statika gradbenih konstrukcij #1, Statično določeni sistemi*, Ljubljana 1971, COBISS ID 7199489
- [11] E.Prelog: *Vaje iz mehanike – Statika*, DZS, Ljubljana 1955, COBISS ID 1737217  
J.T.Oden: *Mechanics of Elastic Structures*, McGraw-Hill, Inc, New York, 1967, ISBN 07-047599-7
- [12] S.P.Timoshenko & D.H.Young: *Theory of Structures*; International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, Inc, New York, 1965