# IRACIONALNOST KROŽNE KONSTANTE

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 11J99, 30E99

V prispevku bomo dokazali, da sta števili $\pi$ in $\pi^2$ iracionalni. Pri tem bomo uporabili nekaj preprostih resnic iz realne in kompleksne analize.

## THE IRRATIONALITY OF THE CIRCULAR CONSTANT

The irrationality of the circular constant is proven by using some simple facts of the real and complex calculus.

Racionalno število $r$ lahko zapišemo kot kvocient celih števil $a$ in $b$, pri čemer je $b \neq 0$: $r = a/b$. Starogrški matematiki so se veliko ukvarjali z razmerji dolžin daljic in kmalu so spoznali, da razmerje med diagonalo in stranico kvadrata, to je $\sqrt{2}$, ni racionalno število. Prav tako so vedeli, da razmerje med diagonalo in stranico pravilnega petkotnika, to je zlato razmerje $\tau = (1+\sqrt{5})/2$, ni racionalno število. Realna števila, ki niso racionalna, so iracionalna. Torej sta $\sqrt{2}$ in $\tau$ iracionalni števili.

Iracionalno število $\sqrt{2}$ je ničla polinoma $p(x) = x^2 - 2$, ki ima cela koeficienta, število $\tau$ pa je ničla polinoma $q(x) = x^2 - x - 1$, ki ima prav tako cele koeficiente. Ni pa vsako iracionalno število ničla nekega polinoma s celimi koeficienti. Zato je smiselno posebej poimenovati števila, ki so ničle polinomov s celimi koeficienti. Takim številom pravimo *algebraična števila*. Število, ki ni algebraično, je *transcendentno*. Števili $\sqrt{2}$ in $\tau$ sta torej algebraični. Očitno je vsako racionalno število algebraično. Samo po sebi se zastavlja vprašanje, kakšno je v tem pogledu število $\pi$. Šele leta 1761 je Johann Heinrich Lambert (1728–1777) dokazal, da je število $\pi$ iracionalno, leta 1882 pa je Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939) dokazal, da je $\pi$ transcendentno število.

Metode dokazovanja, da je neko število racionalno oziroma iracionalno, so različne. Navadno uporabljamo metodo protislovja. Včasih pa poiščemo tak polinom najnižje stopnje s celimi koeficienti, ki ima za ničlo dano število $s$. Če je to število racionalno, denimo $s = a/b$, potem mora $a$ deliti prosti člen tega polinoma, $b$ pa njegov vodilni koeficient. S preverjanjem nato ugotovimo, ali je kateri od možnih kandidatov res ničla polinoma. Če ni noben, potem je $s$ iracionalno število. Število $\sqrt{2}$ je pozitivna ničla polinoma $p(x) = x^2 - 2$. Edina kandidata za pozitivni racionalni ničli polinoma $p(x)$ sta števili 1 in 2, toda $p(1) = -1 \neq 0$ in $p(2) = 2 \neq 0$. Torej je $\sqrt{2}$ iracionalno število. Pozitivno število $\tau$ je ničla polinoma $q(x) = x^2 - x - 1$. Edini kandidat za njegovo pozitivno racionalno ničlo je 1. Toda $q(1) = -1 \neq 0$, in zato je tudi $\tau$ iracionalno število.

Seveda pa je opisana metoda preverjanja iracionalnosti uporabna le v primeru, ko je število $s$ algebraično, saj le tedaj polinom s celimi koeficienti, katerega ničla je $s$, sploh obstaja.

Že v najstarejših časih se je pojavil problem, kako izračunati obseg kroga z danim polmerom ali premerom. Prevedeno v sodobni jezik to pomeni, kolikšno je razmerje med obsegom in premerom kroga, to je število $\pi$, ki je, kot vemo, ena najpomembnejših matematičnih konstant: *krožna konstanta*. Našli so bolj ali manj točne racionalne in iracionalne približke, na primer $22/7$ in $\sqrt{10}$. Genialni Arhimed (3. stoletje pr. n. št.) je z metodo krogu včrtanih in očrtanih pravilnih mnogokotnikov ugotovil: $223/71 < \pi < 22/7$. Oba ulomka v tej relaciji sta približka števila $\pi$. Kasneje so našli še boljše približke za $\pi$, na primer $355/113$. S številom $\pi$ se izraža tudi ploščina kroga. Že v antiki so poskušali samo z ravnilom in šestilom pretvoriti krog v ploščinsko enakovreden kvadrat ali pravokotnik. Pravimo, da so reševali *problem kvadrature kroga*. Več o tem najdemo na primer v [3, 5]. To jim kljub velikim naporom ni uspelo, ker pač $\pi$ ni algebraično število, česar pa niso znali dokazati. Kljub temu pa so do današnjih dni kar tekmovali v računanju števila $\pi$ na čim več pravilnih decimalk. V ta namen so odkrili različne algoritme, tako preproste kot zelo zapletene.

Naslednja pomembna matematična konstanta je število

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Dokaz iracionalnosti števila $e$ je razmeroma preprost. Hitro se vidi, da velja relacija $2 < e < 3$. Predpostavimo, da je $e = a/b$, kjer sta $a$ in $b$ naravni števili. Najprej ugotovimo, da je $b > 1$, nato pa seštejemo začetne člene zgornje vrste do vključno člena $1/b!$ in vsoto imenujemo $s$, torej:

$$s = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{b!}\,.$$

Vsoto preostalih členov vrste pa ocenimo navzgor tako:

$$\frac{1}{(b+1)!}+\frac{1}{(b+2)!}+\cdots<\frac{1}{b!}\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\cdots\right)=\frac{1}{b!b}\,.$$

Ker velja relacija

$$s<e<s+\frac{1}{b!b}\,,$$

bi iz nje ob predpostavki $e=a/b$ dobili relacijo

$$b!bs<b!a<b!bs+1\,,$$

v kateri sta $b!bs$ in $b!a$ naravni števili. To pa je nemogoče, saj med zaporednima naravnima številoma ni nobenega naravnega števila.

Ni popolnoma znano, kdo je prvi dokazal, da je $e$ iracionalno število. Nekateri prvi dokaz pripisujejo Leonhardu Eulerju (1707–1783). Leta 1873 je Charles Hermite (1822–1901) dokazal, da je $e$ transcendentno število. Tudi število $e$ so računali na vedno več decimalk natančno.

Po Eulerju se imenuje tudi konstanta

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

Za Eulerjevo konstanto $\gamma$ pa sploh še ni znano, ali je iracionalno oziroma transcendentno število. Tudi napredek v računanju decimalk števila $\gamma$ je bil bolj počasen.

Matematiki pa ne iščejo le novih resnic, ampak tudi znane skušajo dokazati čim bolj razumljivo, čim bolj elegantno in čim krajše. Tako je na primer Ivan Niven leta 1947 (glej [4]) na eni sami strani dokazal iracionalnost števila $\pi$. Njegov dokaz je nekoliko obširneje obdelan v [1]. Pred tem pa je Issai Schur (1875–1941) iskal razvoj funkcije $\sin(\pi x)$ na intervalu $[0,1]$ po potencah kvadratne funkcije $x(1-x)$. Obe funkciji imata ničli pri $x=0$ in $x=1$, obe imata pri $x=1/2$ lokalni ekstrem in glede na premico $x=1/2$ simetrična grafa. Schur je dokazal, da so vsi koeficienti $a_n$ v razvoju

$$\sin(\pi x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}[x(1-x)]^n$$

pozitivni, ni pa jih izrazil eksplicitno. Uspeh je pri tem imel Leonard Carlitz (1907–1999), ki je leta 1966 zapisal:

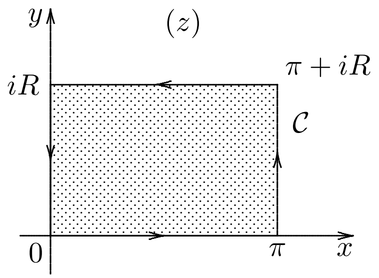
$$a_n=\frac{\pi}{2(n-1)!}\int_0^{\pi}[x(\pi-x)]^{n-1}\sin x\,dx\,.$$

S takimi integrali pa si je pomagal Ivan Niven v svojem dokazu iracionalnosti števila $\pi$.

V nadaljevanju si bomo najprej ogledali dokaz, da je število $\pi^2$ iracionalno, saj je očitno potem tudi število $\pi$ iracionalno. Dokaz je dokaj preprost, saj se naslanja na nekatere temeljne izreke matematične analize.

Vzemimo célo (to je holomorfno na $\mathbb{C}$) funkcijo $f(z) = z^{2n}(\pi - z)^{2n}e^{iz}$, kjer je $n$ poljubno nenegativno celo število, in jo integrirajmo v pozitivni smeri po obodu $\mathcal{C}$ pravokotnika z oglišči $0$, $\pi$, $\pi + iR$ in $iR$ v ravnini kompleksnih števil $(z)$, kot kaže slika. Pri tem je $R$ poljubno pozitivno število.

Na spodnji stranici pravokotnika je $z = x, dz = dx$ in realen $x$ teče od 0 do $\pi$; na desni stranici je $z = \pi + iy, dz = idy$ in realen $y$ teče od 0 do $R$; na zgornji stranici je $z = x + iR, dz = dx$ in realen $x$ teče od $\pi$ do 0; na levi stranici pa je $z = iy, dz = idy$ in realen $y$ teče od $R$ do 0.




Po Cauchyjevem izreku, ki je obrazložen na primer v [6], in z razbitjem integrala na štiri dele dobimo:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} x^{2n}(\pi - x)^{2n}e^{ix}\,dx + i\int_0^{R}(\pi + iy)^{2n}(-iy)^{2n}e^{i(\pi+iy)}\,dy +$$

$$+\int_{\pi}^{0}(x + iR)^{2n}(\pi - x - iR)^{2n}e^{i(x+iR)}\,dx + i\int_{R}^{0}(iy)^{2n}(\pi - iy)^{2n}e^{i(iy)}\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi} x^{2n}(\pi - x)^{2n}e^{ix}\,dx + ie^{\pi i}\int_0^{R}(-i\pi + y)^{2n}y^{2n}e^{-y}\,dy -$$

$$- e^{-R}\int_0^{\pi}(x + iR)^{2n}(\pi - x - iR)^{2n}e^{ix}\,dx - i\int_0^{R} y^{2n}(\pi i + y)^{2n}e^{-y}\,dy = 0\,.$$

Sedaj naredimo limitni proces $R \to \infty$. Integral s faktorjem $e^{-R}$ gre pri tem proti 0, preostalo pa zapišemo v obliki:

$$\int_0^\pi x^{2n}(\pi - x)^{2n} e^{ix}\, dx = i\int_0^\infty (y - i\pi)^{2n} y^{2n} e^{-y}\, dy + i\int_0^\infty y^{2n}(\pi i + y)^{2n} e^{-y}\, dy =$$

$$= i\int_0^\infty y^{2n}[(y + \pi i)^{2n} + (y - \pi i)^{2n}] e^{-y}\, dy\,.$$

Vpeljimo polinom

$$P_n(x, a) = (x + ai)^{2n} + (x - ai)^{2n} \tag{1}$$

realne spremenljivke $x$, kjer je $n$ poljubno nenegativno celo število in $a$ realna konstanta. Potem lahko izrazimo:

$$\int_0^\pi x^{2n}(\pi - x)^{2n} e^{ix}\, dx = i\int_0^\infty y^{2n} P_n(y, \pi) e^{-y}\, dy\,.$$

Po primerjavi imaginarnih delov obeh strani dobimo enakost

$$\int_0^\pi x^{2n}(\pi - x)^{2n} \sin x\, dx = \int_0^\infty y^{2n} P_n(y, \pi) e^{-y}\, dy\,. \tag{2}$$

Polinom $P_n(x, a)$ ima stopnjo $2n$ in realne cele koeficiente, kar spoznamo po uporabi binomske formule:

$$P_n(x, a) = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} a^j i^j x^{2n-j} + \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j} a^j i^j x^{2n-j}. \tag{3}$$

Vsoto na desni strani v enakosti (3) poenostavimo in dobimo:

$$P_n(x, a) = 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} a^{2k} x^{2n-2k}. \tag{4}$$

Denimo, da bi bilo število $\pi^2$ vsemu navkljub racionalno število, recimo $\pi^2 = a/b$, kjer sta $a$ in $b$ nenegativni tuji si celi števili. Očitno je $b > 1$, ker $\pi^2$ ni celo število. Zato bi zaradi enakosti (4) imeli

$$P_n(y, \pi) = 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \left(\frac{a}{b}\right)^k y^{2n-2k} = \frac{2}{b^n}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} a^k b^{n-k} y^{2n-2k},$$

in iz (2) bi dobili:

$$I_n = \frac{b^n}{(2n)!}\int_0^\pi x^{2n}(\pi - x)^{2n}\sin x\, dx = \frac{b^n}{(2n)!}\int_0^\infty y^{2n}P_n(y,\pi)e^{-y}\, dy =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{(2n)!}\binom{2n}{2k}a^k b^{n-k}\int_0^\infty y^{4n-2k}e^{-y}\, dy\,.$$

Za $0 \leq k \leq n$ dobimo z večkratno uporabo metode integracije per partes najprej

$$\int_0^\infty y^{4n-2k}e^{-y}\, dy = (4n-2k)!\,,$$

nato pa

$$I_n = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(4n-2k)!}{(2n)!}\binom{2n}{2k}a^k b^{n-k}.$$

Ker pa je kvocient $(4n-2k)!/(2n)! = (2n+(2n-2k))!/(2n)!$ za $0 \leq k \leq n$ celo število, binomski koeficient $\binom{2n}{2k}$ pa tudi, bi bil integral $I_n$ pozitivno celo število za vsak $n$.

Uporabimo relacijo med geometrijsko in aritmetično sredino dveh nenegativnih realnih števil in dobimo neenakost

$$\sqrt{x(\pi - x)} \leq \frac{x + (\pi - x)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

za $0 \leq x \leq \pi$, kjer velja tudi

$$x^{2n}(\pi - x)^{2n} \leq \frac{\pi^{4n}}{2^{4n}}\,,$$

tako da imamo na koncu:

$$I_n = \frac{b^n}{(2n)!}\int_0^\pi x^{2n}(\pi - x)^{2n}\sin x\, dx < \frac{b^n \pi^{4n+1}}{2^{4n}(2n)!} = \frac{\pi\alpha^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad \alpha = \frac{\pi^2\sqrt{b}}{4}\,.$$

Ni težko ugotoviti, da za vsako realno število $\alpha$ velja:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} = 0\,.$$

Potemtakem je za vse dovolj velike $n$ izpolnjena relacija:

$$0 < I_n < 1\,,$$

kar pa je v protislovju z ugotovitvijo, da je $I_n$ celo število za vsak $n$. To pa pomeni, da $\pi^2$ in $\pi$ ne moreta biti racionalni števili.

*Števili $\pi^2$ in $\pi$ sta torej iracionalni števili.*

Ideja za pričujoči članek je v delu [2], v katerem avtorja uporabita staro metodo Ivana Nivena (glej [4]) iz leta 1947, metodo protislovja, ki je v tem, da nas predpostavka o racionalnosti števila $\pi^2$ pripelje do obstoja naravnega števila med 0 in 1. Ivan Niven v dokazu izrazi polinom, ki ima podobno vlogo kot naš polinom $P_n(y,a)$, z odvodi, tu pa smo ga našli v kompleksnem integralu. Ključna enakost, ki nas v dokazu vodi v to, je (2).

Dokaza za transcendentnost števil $\pi$ in $e$ sta bolj zapletena, najdemo ju pa prav tako v [2].

LITERATURA

[1] F. Avsec, *Iracionalnost števila $\pi$*, Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 4, str. 117–118.

[2] P. Eymard in J.-P. Lafon, *Autour du nombre $\pi$*, Hermann, Pariz 1999.

[3] F. Križanič, *Kvadratura kroga*, Obzornik mat. fiz. **2** (1952) 3, str. 97–107.

[4] I. Niven, *A simple proof that $\pi$ is irrational*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947) 6, str. 509.

[5] P. Petek, *Kako se je godilo številu $\pi$, 1. del*, Presek **4** (1976/1977) 3, str. 139–143, *2. del*, Presek **4** (1976/1977) 4, str. 193–196.

[6] D. G. Zill in P. D. Shanahan, *A First Course in Complex Analysis*, Jones and Bartlett Publ., Boston et al. 2003.

# VESTI

## OBVESTILO

V Obzorniku za matematiko in fiziko, letnik **49**, številka 2, str. 62–63, in na domači strani DMFA `http://www.dmfa.si/` je objavljen Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.

Vabimo vas, da pisne predloge (z utemeljitvami) za letošnja priznanja pošljete **do 30. septembra 2009** na naslov: **DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana**.

Predsednik DMFA Slovenije:
*prof. dr. Janez Seliger*