PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **1** (1973/1974)
Številka 1
Strani 4–9

Franci Oblak:

ZAČETNI POJMI GEOMETRIJE

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/1/1-1-Oblak.pdf

ZAČETNI POJMI GEOMETRIJE *

Franci Oblak

1. UVOD

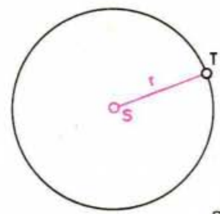
1. Kaj je geometrijski lik

Daljice, premice, krogi, krožnice, trikotniki - vse to so geometrijski liki. Kaj pa je splošno "geometrijski lik"? Kako opredeliti ta pojem?

Začnimo s posameznimi primeri! Opazujmo krožnico s središčem v točki S in polmerom (radijem) r. (Slika 1.) Krožnica je sestavljena iz vseh točk T ravnine, za katere je razdalja od točke S enaka r. Dogovorimo se, da razdaljo med točkama A in B označimo $\overline{AB}$. Tedaj je za poljubno točko T krožnice $\overline{ST} = r$. (Beri: razdalja ST je enaka r!)

Opredelitev krožnice

1. *Množica vseh točk v ravnini, za katere je razdalja od dane točke S te ravnine enaka r, se imenuje krožnica. Točka S se imenuje središče krožnice, razdalja r pa polmer (radij) krožnice.*



Sl. 1

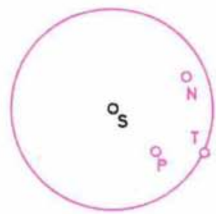
Zamislimo si tako množico točk v ravnini, da je vsaka točka iz te množice od točke S oddaljena največ za r (to pomeni: enako r ali manj kot r!). Brez posebnega napora ugotovimo, da je ta množica točk sestavljena iz vseh točk krožnice s središčem S in polmerom r ter iz vseh točk, ki leže v notranjosti krožnice. Drugače povedano: to je krog s polmerom r in središčem S.

* Prirejeno po A.N. Kolmogorov: Geometrija 6.

Definicija kroga

2. Množico vseh točk v ravnini, za katere je razdalja od dane točke S te ravnine največ r, imenujemo krog.

Krožnico in krog smo opredelili kot množici točk z določenimi lastnostmi. Tako bomo delali tudi naprej, ko bomo definirali druge vrste geometrijskih likov. Poljuben geometrijski lik bomo imeli za sestavljen iz točk - torej množica točk.



Sl. 2

Opredelitev geometrijskega lika

3. Geometrijski lik imenujemo poljubno množico točk.

Tak način učenja geometrije se je uveljavil šele razmeroma pozno. Večina geometrov 19.stoletja ne bi bila zadovoljna z našo definicijo geometrijskega lika. Menili so namreč, da n.pr. premica obstaja sama po sebi, točke pa ležijo na njej. Če si zamislimo vse točke, ki leže na premici, dobimo po njihovem mišljenju "množico vseh točk, ki leže na premici" in ne prav te premice. Mi bomo menili, da izjava "točka A leži na premici p" pomeni, da "je točka A element množice p". O jeziku teorije množic v geometriji bomo govorili podrobneje v poglavju 11.

Vprašanja in naloge

1. Ali pripada krogu njegovo središče? Ali pripada krožnici njeno središče?
2. Narišite na ravnini (risalnem papirju) po tri točke, katerih razdalja od dane točke B te ravnine je:
   a) manjša kot 2 cm
   b) enaka 2 cm
   c) večja kot 2 cm.
3. Koliko točk na dani premici je takih, da je njihova razdalja od točke S na tej premici:
   a) manjša kot 2 cm
   b) enaka 2 cm
   c) večja kot 2 cm.
4. Na premici p je dana točka P. Kakšen geometrijski lik tvori množica točk te premice, ki so oddaljene od točke P največ za 2 cm? Kaj bo za ta lik točka P?
5. Dani sta krožnici s skupnim središčem S in polmeroma r_1 in r_2 ($r_1 < r_2$). Narišite sliko in prikažite, kje leže take točke X, za katere je:
   a) $\overline{SX} < r_2$
   b) $\overline{SX} \leq r_2$
   c) $\overline{SX} > r_2$
   d) $r_1 < \overline{SX} < r_2$
   e) $\overline{SX} = r_2$

6. Narišite krog s središčem v točki S in s polmerom enakim 2 cm.

   A) Izberite točko M tako, da bo izpolnjen pogoj:

   a) $\overline{SM} = 4$ cm

   b) $\overline{SM} = 2$ cm

   c) $\overline{SM} = 0,5$ cm.

   Kakšne množice tvorijo vse take točke M v posamenih primerih?

   B) Določite taki točki M in N, ki pripadata narisanemu krogu, da bo:

   a) $\overline{MN} = 3$ cm

   b) $\overline{MN} = 4$ cm

   c) ali je mogoče dobiti v tem krogu točki z razdaljo $MN = 5$ cm?

2. Opredelitve (definicije). Osnovni pojmi, ki jih sprejmemo brez definicij

V prejšnjem poglavju smo definirali krožnico, krog in geometrijski lik. Poglejmo, kako tvorimo opredelitve! Zato, da bi definirali pojem "krožnica", smo uporabili druge pojme - "množica", "točka", "ravnina", "razdalja". Pri opredelitvi novega pojma uporabljamo druge že znane pojme. Vendar vseh pojmov ne moremo opredeliti. Nekatere privzamemo za osnovne in jih ne definiramo, vse druge pa definiramo. V našem delu geometrije so štirje osnovni geometrijski pojmi: 1. točka, 2. premica, 3. ravnina, 4. razdalja od ene točke do druge. Vse ostale geometrijske pojme bomo definirali. (N.pr. v poglavju 5 bo definiran "poltrak", v poglavju 7 pojem "daljica", "lomljenka", itd. Uporabljali pa bomo še nekatere splošne matematične pojme, ki niso posebej iz geometrije. N. pr. v poglavju 1 smo že uporabili pojem "množica", ki spada med osnovne pojme matematike.)

Vprašanja in naloge

1. Naštejte geometrijske pojme, ki smo jih uporabili pri definiciji:
   a) geometrijskega lika
   b) krožnice
   c) kroga!
2. Poskusite definirati kroglo, površje krogle (sfero). Katere geometrijske pojme uporabljamo v teh definicijah?
3. Naštejte nekaj predmetov, ki imajo obliko:
   a) krogle
   b) kroga
   c) krožnice.
4. Spomnite se definicije sokotov in sovršnih kotov. Katere geometrijske pojme uporabljamo pri teh definicijah?
5. Sestavite definiciji:
   a) središča krožnice
   b) polmera krožnice!

3. Količine in števila

Poznate že naravna števila, cela števila in ulomke. Srečali ste se že s takimi količinami kot so: dolžina, ploščina, prostornina. Količine so raznovrstne. Poglejmo dva primera:

1. Razdaljo med točkama, dolžino daljice, dolžino lomljenke in dolžino krivih črt izražamo v centimetrih, metrih ali kilometrih.
2. Čas izražamo v sekundah, v minutah ali urah.

Istovrstne količine moremo med seboj primerjati (po velikosti) in seštevati:

1 m > 90 cm, 350 m + 650 m = 1 km

3000 s < 1 ure, 2 uri + 3 ure = 5 ur

500 g + 500 g = 1 kg.

Nesmiselno pa je spraševati, kaj je več: 1 meter ali 1 ura in nemogoče je sešteti 1 meter s 30 sekundami.

Količine moremo množiti s števili. Če pomnožimo količino a s številom x, dobimo istovrstno količino $b = xa$ (številski faktor pri količini navadno pišemo spredaj!). N.pr.: če pomnožimo 20 cm s številom 5, dobimo 5.20 cm = 100 cm = 1 m.

Če izberemo poljubno količino e dane vrste za enoto merjenja, moremo z njo izmeriti poljubno drugo istovrstno količino a. Kot rezultat merjenja dobimo, da je $a = xe$, kjer je x število. To število x imenujemo mersko število količine a pri izbrani merski enoti e. N.pr. razdalja 3 m ima mersko število 3, če je merska enota meter in mersko število 300, če je merska enota cm. Če je $a = xb$ in $b \neq 0$, imenujemo število x razmerje količin a in b in pišemo $x = a : b$ ali $x = a/b$

Vprašanja in naloge:

1. Navedite nekaj primerov primerjanja in seštevanja količin.
2. Kako se spremeni mersko število količine, če njeno mersko enoto zmanjšamo 10 krat? Povečamo 100 krat?
3. Poiščite mersko število količine a = 3 cm, če je merska enota kilometer!
4. Angleška milja je 1.609344 km. Koliko kilometrov je m milj? Koliko milj je kilometer?
5. Poiščite razmerja naslednjih količin:
   a) 2 km, 40 m
   b) 3 tone, 50 kg
   c) 4 ha, 100 m^2!

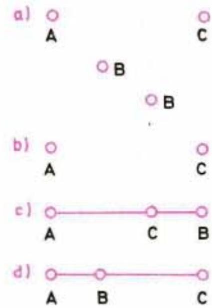
4. Osnovne lastnosti razdalje

S poskušanjem ugotovimo, da najbrž vsakima točkama pripada popolnoma določena nenegativna količina, ki jo imenujemo razdaljo od ene izmed njih do druge. N.pr.: razdalja od točke A do točke B na sliki 3 je ..cm. Kolikšna pa je razdalja od točke B do točke A na tej sliki? Vsekakor tudi ... cm. To lastnost razdalje poznamo. Navadno vzamemo, da je razdalja od poljubne točke do nje same enaka nič. (Pravimo: če točki sovpadata, je razdalja med njima enaka nič.)

Sl. 3

Narišite tri točke A, B in C. Izmerite razdalje: AB, BC in AC. Kaj morete povedati o razdalji AC, če jo primerjate z vsoto razdalj AB in BC? Kakorkoli bi že narisali točke A, B in C (slika 4), razdalja AC ni večja od vsote razdalj AB in BC. V primeru a), b) in c) je $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$, v primeru d) pa je $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

Sl. 4



Pogljemo ugotovljene lastnosti razdalje!

1. *Rzadalja od točke A do točke B je pozitivna, če sta točki različni in enaka nič, če točki sovpadata:*

$$\overline{AB} > 0, \text{ če } A \neq B \text{ in } \overline{AB} = 0, \text{ če je } A = B$$

2. *Razdalja od točke A do točke B je enaka razdalji od točke B do točke A:*

$$\overline{AB} = \overline{BA}$$

3. *Za poljubne tri točke A, B in C razdalja od A do C ni večja* (je manjša ali enaka) *od vsote razdalj od A do B in od B do C:*

$$\overline{AC} \leqslant \overline{AB} + \overline{BC}$$

Naštete lastnosti sprejmimo brez dokaza! Sedaj pa pokažimo, da moremo z njihovo pomočjo logično dokazovati druge izjave, ki jih imenujemo *izreke*.

1. izrek: Za poljubne tri točke A, B, C razdalja $\overline{AB}$ ni manjša od razlike razdalj $\overline{AC}$ in $\overline{BC}$.

Dokaz: Zaradi lastnosti 3 je: $\overline{AB} + \overline{BC} \geqslant \overline{AC}$, če zmanjšamo obe strani te neenačbe za $\overline{BC}$, dobimo neenačbo: $\overline{AB} \geqslant \overline{AC} - \overline{BC}$, ki izraža ugotovitev izreka 1.

Tretjo lastnost in pravkar dokazani izrek moremo povedati takole: Vsaka od treh razdalj med tremi točkami (vzetih paroma), ni večja od vsote in ni manjša od razlike ostalih dveh razdalj.

Vprašanja in naloge

1. Tri različne točke K, L in M leže na eni premici. $\overline{KL} = 6$ cm, $\overline{LM} = 10$ cm. Kolikšna je lahko razdalja $\overline{KM}$? Za vsakega od možnih primerov izdelajte ustrezno sliko!
2. O treh različnih točkah A, B in C vemo, da je $\overline{AB} = 8$ cm in $\overline{BC} = 4$ cm. Ali more biti pri teh pogojih razdalja AC enaka: a) 20 cm; b) 4,5 cm; c) 12 cm; d) 4 cm; e) 3 cm, f) 6 cm?
3. Vemo, da je razdalja od kraja A do kraja B enaka 2 km, o od kraja B do kraja C pa 5 km. Ali more biti razdalja od kraja B do kraja C enaka: a) 2 km; b) 3 km; c) 5 km; d) 7 km; e) 8 km?