Rešene naloge iz Liejevih grup

J. Kališnik

zapiski vaj na FMF UL
2015/2016

NASLOV: Rešene naloge iz Liejevih grup
AVTOR: Jure Kališnik
IZDAJA: 1. izdaja
ZALOŽNIK: samozaložba Jure Kališnik, Ljubljana
LETO IZIDA: 2019

CENA: publikacija je brezplačna
NATIS: elektronsko gradivo, dostopno na naslovu:
http://www.fmf.uni-lj.si/~kalisnik/lg_vaje.pdf

Katložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID=298834688

ISBN 978-961-290-042-7 (pdf)

Uvod

To so zapiski vaj pri predmetu Liejeve grupe za študente magistrskega študija matematike iz študijskega leta 2015/2016. Vsebina se navezuje na zapiske predavanj profesorja Mrčuna.

Ljubljana 2019
Jure Kališnik

Kazalo

1 Mnogoterosti in grupe

Gladke mnogoterosti so geometrični prostori, ki posplošujejo pojma krivulj in ploskev na višje dimenzije. Gladka struktura nam omogoča, da lahko na njih definiramo gladke funkcije, vektorska polja ter podobne objekte in jih tudi smiselno odvajamo in integriramo.

Najprej se spomnimo na osnovne pojme, ki jih potrebujemo za definicijo mnogoterosti. Naj bo M topološki prostor. *Karta* dimenzije m na M je homeomorfizem

$$\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$$

z neke odprte podmnožice $U \subset M$ na neko odprto podmnožico $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$. Karto ponavadi krajše označimo s (ϕ, U).

Karta nam omogoča, da točke množice $U \subset M$ opišemo s koordinatami. Če lahko celo množico M pokrijemo s kompatibilnimi kartami, rečemo, da je M gladka mnogoterost.

Kompatibilnost kart formalno definiramo na naslednji način. Recimo, da sta (ϕ_α, U_α) in (ϕ_β, U_β) karti na M, za kateri je $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Torej lahko točke v $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ opišemo z dvema naboroma koordinat, zato je smiselno zahtevati, da sta ta dva nabora gladko odvisna eden od drugega. Eksplicitno to pomeni, da morata biti $\phi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ in $\phi_\beta(U_{\alpha\beta})$ odprti množici v $\mathbb{R}^m$ in da je preslikava

$$\phi_\beta|_{U_{\alpha\beta}} \circ \left(\phi_\alpha|_{U_{\alpha\beta}}\right)^{-1} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to \phi_\beta(U_{\alpha\beta})$$

gladek difeomorfizem med njima. Tej preslikavi rečemo prehodna preslikava, v bistvu pa nam pove, kako en nabor koordinat izrazimo z drugim. Tipičen primer, ki ga lahko imamo pred očmi, je izražava kartezičnih koordinat s polarnimi v evklidski ravnini.

Karta na M nam med drugim omogoča odvajati funkcije. Če dve karti nista kompatibilni, se lahko zgodi, da je na primer neka funkcija v enih koordinatah odvedljiva, v drugih pa ne. Ker želimo, da je pojem odvedljivosti funkcije neodvisen od izbire koordinat, se omejimo samo na nabore kart, ki so paroma kompatibilne. Družini paroma kompatibilnih kart na M, ki pokrivajo celo množico M, rečemo *gladek atlas* na M.

Gladke mnogoterosti se pojavljajo večinoma v naslednjih dveh oblikah:

· kot podmnogoterosti v evklidskem prostoru,

· kot množice, ki so opremljene z gladkim atlasom.

V nadaljevanju tega poglavja bomo spoznali nekaj primerov mnogoterosti, ki so podane bodisi abstraktno bodisi kot podmnogoterosti kakšnega evklidskega prostora.

(1) Pokaži, da je množica $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ gladka podmnogoterost $\mathbb{R}^2$ in konstruiraj gladek atlas na S^1.

Rešitev: Podmnogoterosti evklidskih prostorov $\mathbb{R}^n$ lahko pogosto opišemo kot nivojnice gladkih preslikav, katerih odvod ima maksimalen rang. V ravninskem primeru se tako lahko skličemo na naslednjo verzijo izreka o implicitni funkciji:

Izrek o implicitni funkciji: Naj bo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gladka funkcija in naj bo M množica rešitev enačbe $F(x, y) = 0$. Če je

$$DF(x, y) = [F_x(x, y), F_y(x, y)] \neq (0, 0)$$

za vsak $(x, y) \in M$, je M gladka podmnogoterost $\mathbb{R}^2$.

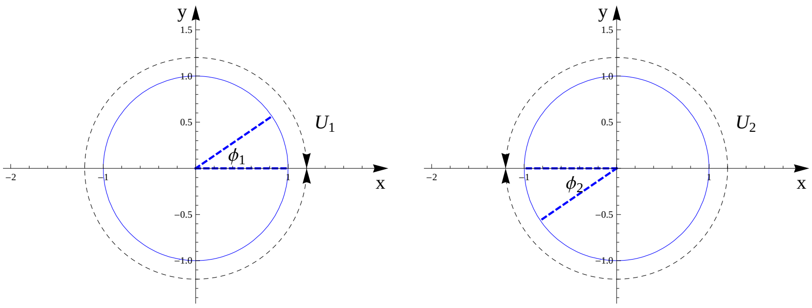
Krožnico S^1 lahko opišemo kot množico ničel funkcije $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Odvod funkcije F je enak

$$DF(x, y) = [2x, 2y],$$

od koder sledi, da je $DF(x,y) = (0,0)$ natanko takrat, ko je $(x,y) = (0,0)$. V točkah iz S^1 je odvod neničeln, kar pomeni, da je S^1 gladka podmnogoterost $\mathbb{R}^2$.

V nadaljevanju bomo opisali nekaj znanih atlasov na krožnici.

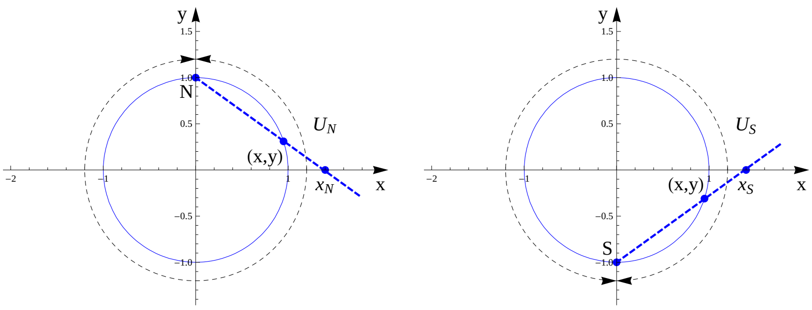
(1) Polarni kot: Skoraj celo krožnico lahko opišemo s polarnim kotom $\phi_1 \in (0, 2\pi)$, ki ga merimo v pozitivni smeri. Da dobimo pokritje, vzamemo še eno karto, kjer kot $\phi_2 \in (0, 2\pi)$ merimo v pozitivni smeri od negativnega poltraka x-osi.



Prehodna preslikava je v tem primeru

$$\phi_2 = \begin{cases} \phi_1 + \pi & ; \phi_1 \in (0, \pi), \\ \phi_1 - \pi & ; \phi_1 \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

(2) Stereografska projekcija: Krožnico lahko pokrijemo tudi s stereografskima projekcijama iz točk $N = (0,1)$ in $S = (0,-1)$.



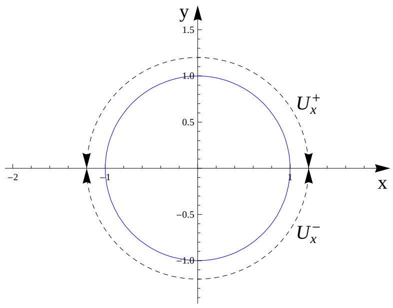
Koordinati $x_N : U_N \to \mathbb{R}$ in $x_S : U_S \to \mathbb{R}$ sta dani s predpisoma:

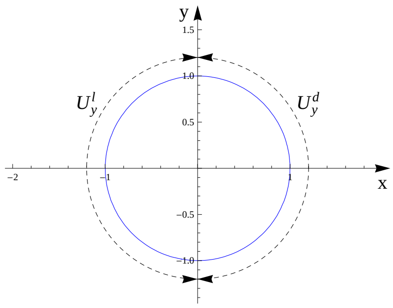
$$x_N(x,y) = \frac{x}{1-y},$$
$$x_S(x,y) = \frac{x}{1+y},$$

med njima pa velja zveza

$$x_N = \frac{1}{x_S}.$$

(3) Projekcije na koordinatne osi: Na gladkih podmnogoterostih evklidskih prostorov lahko za koordinate vzamemo kar ustrezen nabor koordinat iz evklidskega prostora. Po izreku o implicitni funkciji lahko namreč v točkah, kjer je $F_x(x,y) \neq 0$ mnogoterost S^1 lokalno opišemo kot graf funkcije $x = x(y)$, kar pomeni, da lahko za koordinato vzamemo kar y. Podobno velja tudi v točkah, kjer je $F_y(x,y) \neq 0$.





Definirajmo odprte podmnožice U_x^+, U_x^-, U_y^l in U_y^d kot zgoraj. Množici U_x^+ in U_x^- sta grafa funkcij $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, zato ju lahko parametriziramo s parametrom x. Podobno lahko množici U_y^l in U_y^d parametriziramo z y. Dobljene lokalne koordinate so inverzi teh parametrizacij, kar pomeni, da je:

$$\begin{aligned}
\phi_x^+(x,y) &= x, \\
\phi_x^-(x,y) &= x, \\
\phi_y^l(x,y) &= y, \\
\phi_y^d(x,y) &= y.
\end{aligned}$$

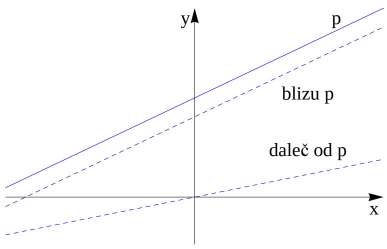
Prehodne preslikave med temi kartami ustrezajo eksplicitnim lokalnim izražavam krožnice z grafi funkcij. Na preseku kart U_y^d in U_x^+ na primer velja

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

Podobne oblike so tudi ostale prehodne preslikave. $\square$

(2) Konstruiraj strukturo gladke mnogoterosti na množici vseh premic v ravnini $\mathbb{R}^2$.

Rešitev: Označimo z M množico vseh premic v $\mathbb{R}^2$. Tokrat množica M ni podmnožica kakšnega evklidskega prostora, zato bomo morali najprej nanjo uvesti primerno topologijo. Intuitivno bi radi, da bosta dve premici blizu skupaj, če bosta imeli podobno smer in bosta podobno oddaljeni od izhodišča.



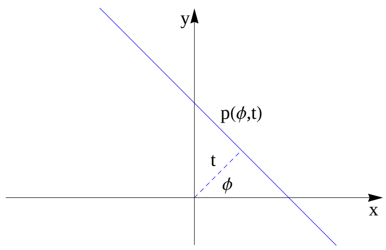
Da bi to topologijo definirali še formalno, si najprej poglejmo preslikavo

$$p : S^1 \times \mathbb{R} \to M,$$

za katero velja

$$p(\phi, t) \text{ je premica z enačbo } \cos\phi\, x + \sin\phi\, y = t.$$

Vidimo, da je preslikava p surjektivna, ni pa injektivna, saj je $p(\phi,t) = p(\phi+\pi, -t)$.



Sedaj lahko na M definiramo kvocientno topologijo glede na ekvivalenčno relacijo, ki jo na $S^1 \times \mathbb{R}$ določa preslikava p, kar pomeni, da je

$$M = S^1 \times \mathbb{R}/_{(\phi,t)\sim(\phi+\pi,-t)}.$$

Zožitvi $p|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times\mathbb{R}}$ in $p|_{(0,\pi)\times\mathbb{R}}$ sta injektivni in zato homeomorfizma na sliko. Njuna inverza lahko uporabimo za lokalni karti na M. Označimo najprej

$$U_\alpha = p((-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})\times\mathbb{R}) = \{\text{premice pod koti, ki ustrezajo parametrom } \phi \in (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})\}.$$

Množica U_α vsebuje vse premice, ki niso vodoravne. Koordinate na U_α definiramo s predpisom:

$$\begin{aligned} \phi_\alpha : &U_\alpha \to (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})\times\mathbb{R}, \\ &p : \cos\phi\, x + \sin\phi\, y = t \mapsto (\phi,t). \end{aligned}$$

Analogno naj množica

$$U_\beta = p((0,\pi)\times\mathbb{R}) = \{\text{premice pod koti, ki ustrezajo parametrom } \phi \in (0,\pi)\}$$

vsebuje vse premice, ki niso navpične. Koordinate so definirane podobno kot prej:

$$\begin{aligned} \phi_\alpha : &U_\alpha \to (0,\pi)\times\mathbb{R}, \\ &p : \cos\phi\, x + \sin\phi\, y = t \mapsto (\phi,t), \end{aligned}$$

le da sedaj koti ležijo na drugem intervalu. Presek obeh kart je množica

$$U_{\alpha\beta} = \{\text{premice, ki niso niti vodoravne niti navpične}\},$$

prehodna preslikava

$$\phi_{\beta\alpha} : \big((-\tfrac{\pi}{2},0)\cup(0,\tfrac{\pi}{2})\big)\times\mathbb{R} \to \big((0,\tfrac{\pi}{2})\cup(\tfrac{\pi}{2},\pi)\big)\times\mathbb{R},$$

pa je definirana s predpisom

$$\phi_{\beta\alpha}(\phi,t) = \begin{cases} (\phi,t) & ;\ \phi\in(0,\frac{\pi}{2}), \\ (\phi+\pi,-t) & ;\ \phi\in(-\frac{\pi}{2},0). \end{cases}$$

Vidimo, da je ta preslikava gladka, kar pomeni, da smo na množici vseh premic konstruirali gladko strukturo. $\square$

(3) Konstruiraj atlas na projektivni ravnini $\mathbb{R}P^2$.

Rešitev: Realna projektivna ravnina $\mathbb{R}P^2$ je množica vseh premic v $\mathbb{R}^3$, ki potekajo skozi izhodišče

$$\mathbb{R}P^2 = \{\text{premice skozi izhodišče v } \mathbb{R}^3\}.$$

Točke v projektivni ravnini ponavadi označujemo s homogenimi koordinatami. Za vsako trojico $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ s simbolom $[x : y : z]$ označimo premico, ki poteka skozi izhodišče in skozi točko $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ker več točk določa isto premico, se moramo zavedati, da pri računanju s homogenimi koordinatami veljajo enakosti

$$[x : y : z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$$

za poljuben $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ in poljuben neničeln $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sedaj bi radi na $\mathbb{R}P^2$ konstruirali gladek atlas. V ta namen najprej definirajmo naslednje podmnožice projektivne ravnine:

$$\begin{aligned} U_x &= \{\text{premice, ki niso pravokotne na } x\text{-os}\},\\ U_y &= \{\text{premice, ki niso pravokotne na } y\text{-os}\},\\ U_z &= \{\text{premice, ki niso pravokotne na } z\text{-os}\}. \end{aligned}$$

Te tri množice pokrivajo celo projektivno ravnino, karta U_x pa na primer vsebuje vse premice, razen tistih, ki ležijo v yz-ravnini.

Homogene koordinate premic, ki ležijo v množici U_x, imajo neničelno prvo koordinato, zato lahko definiramo bijekcijo $\phi_x : U_x \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\phi_x([x : y : z]) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Definicija je dobra zaradi multiplikativne lastnosti homogenih koordinat. Analogno lahko definiramo bijekcijo $\phi_y : U_y \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\phi_y([x : y : z]) = \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$$

ter bijekcijo $\phi_z : U_z \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\phi_z([x : y : z]) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Preslikava ϕ_x na primer dano premico preslika v točko oblike (y, z), kjer je $(1, y, z)$ presečišče premice z ravnino $x = 1$.

Sedaj bi morali preveriti, da je vsak par kart kompatibilen. Ker je dokaz v vseh treh primerih podoben, bomo pokazali samo, da sta karti (ϕ_x, U_x) in (ϕ_y, U_y) kompatibilni. Presek $U_x \cap U_y$ se s preslikavama ϕ_x in ϕ_y preslika na odprto podmnožico $(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Če malce preračunamo, vidimo, da ima prehodna preslikava

$$\phi_y \circ (\phi_x|_{U_y \cap U_y})^{-1} : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$$

predpis

$$(\phi_y \circ (\phi_x|_{U_y \cap U_y})^{-1})(r_1, r_2) = \left(\frac{1}{r_1}, \frac{r_2}{r_1}\right).$$

Ta preslikava je gladka z gladkim inverzom, zato sta karti kompatibilni. Podobno velja tudi za ostala para kart. Projektivna ravnina je sklenjena neorientabilna ploskev. $\square$

(4) Na množico $G = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ vpeljemo operacijo

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 + y_1 x_2, y_1 y_2).$$

Pokaži, da je G grupa in izračunaj njen center. Nato konstruiraj zvesto upodobitev $\rho : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Rešitev: Da dokažemo, da je G grupa, moramo preveriti, da je operacija asociativna, da obstaja enota in da je vsak element obrnljiv.

Asociativnost operacije sledi iz naslednjih enakosti:

$$\begin{aligned}\big((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)\big) \cdot (x_3, y_3) &= (x_1 + y_1 x_2, y_1 y_2) \cdot (x_3, y_3) = (x_1 + y_1 x_2 + y_1 y_2 x_3, y_1 y_2 y_3),\\ (x_1, y_1) \cdot \big((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)\big) &= (x_1, y_1) \cdot (x_2 + y_2 x_3, y_2 y_3) = (x_1 + y_1 x_2 + y_1 y_2 x_3, y_1 y_2 y_3).\end{aligned}$$

Enota v grupi G je element

$$e = (0, 1),$$

inverz elementa (x, y) pa je element

$$(x, y)^{-1} = (-\tfrac{x}{y}, \tfrac{1}{y}).$$

Vidimo, da sta množenje in invertiranje gladki preslikavi, kar pomeni, da je G Liejeva grupa.

Center Liejeve grupe G je zaprta Liejeva podgrupa edinka grupe G, ki je določena s pogojem

$$\mathrm{Z}(G) = \{a \in G \,|\, ag = ga, \, \forall g \in G\}.$$

Center ponavadi izračunamo tako, da zapišemo enačbo $ag = ga$ za nekaj primerno izbranih elementov $g \in G$ in tako dobimo pogoje, ki jim morajo ustrezati elementi centra. Recimo torej, da je $(x, y) \in \mathrm{Z}(G)$. Potem mora (x, y) komutirati z vsakim elementom grupe G, torej tudi z elementoma $(0, 2)$ in $(1, 1)$. Iz enakosti:

$$\begin{aligned}(x, y) \cdot (0, 2) &= (x, 2y),\\ (0, 2) \cdot (x, y) &= (2x, 2y)\end{aligned}$$

najprej sklepamo, da je $x = 0$, iz enakosti:

$$\begin{aligned}(x, y) \cdot (1, 1) &= (x + y, y),\\ (1, 1) \cdot (x, y) &= (1 + x, y)\end{aligned}$$

pa nato še, da je $y = 1$. Torej je $(x, y) = (0, 1) = e$, kar pomeni, da je $\mathrm{Z}(G) = \{e\}$.

Zaenkrat imamo grupo G predstavljeno kot podmnožico ravnine, lahko pa jo predstavimo tudi kot podmnožico matrične grupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. V splošnem definiramo zvesto upodobitev Liejeve grupe G kot zvezen, injektiven homomorfizem iz grupe G v grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ali pa $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ za nek $n \in \mathbb{N}$.

V našem primeru definirajmo preslikavo

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

s predpisom

$$\rho(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Preslikava ρ je zvezna, da je tudi homomorfizem grup, pa sledi iz enakosti

$$\rho(x_1,y_1)\rho(x_2,y_2) = \begin{bmatrix} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 & x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 y_2 & x_1 + y_1 x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho\big((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)\big).$$

Grupam, ki jih lahko vložimo v grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ ali $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, rečemo matrične grupe. Prednost matričnih grup je v tem, da si nam ni treba posebej zapomniti grupne operacije, saj je inducirana z matričnim množenjem. V našem primeru imamo torej izomorfizem

$$G \cong \left\{ \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\Big|\, x \in \mathbb{R},\, y > 0 \right\}.$$

Grupo G lahko opišemo tudi na tretji način. Izomorfna je grupi afinih transformacij afine premice $\mathbb{R}$, ki ohranjajo orientacijo

$$G \cong \mathrm{Aff}^+(\mathbb{R}) = \{\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \tau(x) = kx + n,\ k > 0,\ n \in \mathbb{R}\}.$$

Za konec naštejmo še nekaj lastnosti grupe G:

· je enostavno povezana, rešljiva Liejeva grupa,

· je edina nekomutativna, povezana Liejeva grupa dimenzije 2,

· levo-invariantna metrika na G določa geometrijo hiperbolične ravnine.

$\square$

(5) Heisenbergova grupa je množica $H = \mathbb{R}^3$, ki jo opremimo z operacijo

$$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2+x_1y_2).$$

Konstruiraj zvesto upodobitev $\rho : H \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$. Nato izračunaj njen center in opiši grupo $H/\mathrm{Z}(H)$.

Rešitev: Preverimo lahko, da je enota grupe H element

$$e = (0,0,0),$$

inverz elementa (x,y,z) pa je element

$$(x,y,z)^{-1} = (-x,-y,-z+xy).$$

Tokrat sta grupni operaciji polinomski preslikavi, kar pomeni, da je H Liejeva grupa.

Zvesta upodobitev Heisenbergove grupe je dana s homomorfizmom

$$\rho : H \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$$

s predpisom

$$\rho(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Preslikava ρ je afina in velja

$$\rho(x_1,y_1,z_1)\rho(x_2,y_2,z_2) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1+x_2 & z_1+z_2+x_1y_2 \\ 0 & 1 & y_1+y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$= \rho\big((x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2)\big),$$

kar pomeni, da je ρ homomorfizem grup.

Za izračun centra Heisenbergove grupe bomo najprej izračunali komutatorja elementa (x, y, z) z elementoma $(1, 0, 0)$ in $(0, 1, 0)$. Iz enakosti:

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = (x + 1, y, z),$$
$$(1, 0, 0) \cdot (x, y, z) = (x + 1, y, z + y)$$

sklepamo, da je $y = 0$. Podobno lahko iz enakosti:

$$(x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = (x, y + 1, z + x),$$
$$(0, 1, 0) \cdot (x, y, z) = (x, y + 1, z)$$

sklepamo še, da je tudi $x = 0$. Če bi računali še komutatorje z drugimi elementi grupe H, ne bi dobili nobenih novih pogojev. Zato lahko iz enakosti:

$$(x, y, z) \cdot (0, 0, t) = (x, y, z + t),$$
$$(0, 0, t) \cdot (x, y, z) = (x, y, z + t),$$

ki velja za vsak $t \in \mathbb{R}$, sklepamo, da je

$$\mathrm{Z}(H) = \{(0, 0, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Center Heisenbergove grupe je torej enodimenzionalna grupa, ki je izomorfna grupi $\mathbb{R}$.

V nadaljevanju bomo opisali kvocientno grupo $H/\,\mathrm{Z}(H)$.

Za poljubno podgrupo $K < H$ in poljuben element $h \in H$ definiramo levi in desni odsek s predpisoma:

$$hK = \{hk \,|\, k \in K\},$$
$$Kh = \{kh \,|\, k \in K\}.$$

Če je K podgrupa edinka grupe H, množici levih in desnih odsekov podgrupe K sovpadata, zato lahko govorimo kar o množici odsekov, ki jo označimo s H/K. V tem primeru lahko na H/K definiramo grupno strukturo s predpisom

$$(h_1K) \cdot (h_2K) = h_1h_2K.$$

V našem primeru so levi odseki podgrupe $\mathrm{Z}(H)$ enaki

$$(x, y, z)\,\mathrm{Z}(H) = \{(x, y, z) \cdot (0, 0, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z + t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = (x, y, 0)\,\mathrm{Z}(H),$$

kar pomeni, da jih lahko parametriziramo z $\mathbb{R}^2$. Da bi dokazali, da se grupna struktura na $H/\,\mathrm{Z}(H)$ ujema s seštevanjem vektorjev v $\mathbb{R}^2$, najprej definirajmo preslikavo $\alpha : H \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\alpha(x, y, z) = (x, y).$$

Preverimo lahko, da je preslikava α gladek, surjektiven homomorfizem grup z jedrom $\mathrm{Z}(H)$. Od tod pa sledi, da inducira izomorfizem

$$\overline{\alpha} : H/\,\mathrm{Z}(H) \to \mathbb{R}^2.$$

Heisenbergova grupa je enostavno povezana in nilpotentna. Levo-invariantna metrika na H določa tako imenovano Nil geometrijo, ki je ena izmed osmih Thurstonovih geometrij v treh dimenzijah. Če označimo

$$\Gamma = \{(0, 0, k) \,|\, k \in \mathbb{Z}\},$$

je H/Γ primer grupe, ki ne dopušča zveste upodobitve v $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, kar pomeni, da ni matrična grupa. $\square$

(6) Dokaži, da je Liejeva grupa rotacij $\mathrm{SO}(3)$ gladka podmnogoterost prostora matrik $\mathbb{R}^{3\times 3}$ in nato opiši tangentni prostor $T_Q\,\mathrm{SO}(3)$ za poljubno $Q \in \mathrm{SO}(3)$.

Rešitev: Grupo rotacij evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$, ki je definirana s predpisom

$$\mathrm{SO}(3) = \{Q \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,|\, Q^T Q = I,\, \det(Q) = 1\}$$

lahko smatramo kot podmnožico evklidskega prostora $\mathbb{R}^{3\times 3} \cong \mathbb{R}^9$. Grupa $\mathrm{SO}(3)$ je ena izmed dveh povezanih komponent ortogonalne grupe

$$\mathrm{O}(3) = \{Q \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,|\, Q^T Q = I\},$$

zato je dovolj pokazati, da je $\mathrm{O}(3)$ gladka podmnogoterost $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

V ta namen bomo poljubno matriko $Q \in \mathrm{O}(3)$ zapisali v obliki

$$Q = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

Pogoj $Q^T Q = I$ nam pove, da so stolpci matrike Q paroma pravokotni enotski vektorji. To lahko zapišemo z naslednjim sistemom vezi:

$$\begin{aligned} x_{11}^2 + x_{21}^2 + x_{31}^2 &= 1, \\ x_{12}^2 + x_{22}^2 + x_{32}^2 &= 1, \\ x_{13}^2 + x_{23}^2 + x_{33}^2 &= 1, \\ x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} + x_{31}x_{32} &= 0, \\ x_{11}x_{13} + x_{21}x_{23} + x_{31}x_{33} &= 0, \\ x_{12}x_{13} + x_{22}x_{23} + x_{32}x_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Označimo zaporedoma z $f_1, f_2, \ldots, f_6$ zgornje vezi. Če nam uspe pokazati, da so gradienti teh vezi linearno neodvisni vzdolž podmnožice $\mathrm{O}(3) \subset \mathbb{R}^{3\times}$, bo od tod sledilo, da je $\mathrm{O}(3)$ gladka podmnogoterost $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Gradienti teh vezi so:

$$\nabla f_1 = 2\begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \nabla f_2 = 2\begin{bmatrix} 0 & x_{12} & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 \end{bmatrix}, \nabla f_3 = 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{bmatrix},$$

$$\nabla f_4 = \begin{bmatrix} x_{12} & x_{11} & 0 \\ x_{22} & x_{21} & 0 \\ x_{32} & x_{31} & 0 \end{bmatrix}, \nabla f_5 = \begin{bmatrix} x_{13} & 0 & x_{11} \\ x_{23} & 0 & x_{21} \\ x_{33} & 0 & x_{31} \end{bmatrix}, \nabla f_6 = \begin{bmatrix} 0 & x_{13} & x_{12} \\ 0 & x_{23} & x_{22} \\ 0 & x_{33} & x_{32} \end{bmatrix}.$$

Če bi bila neka linearna kombinacija teh gradientov enaka nič, bi od tod sledilo, da je neka linearna kombinacija vrstic matrike Q enaka nič. To pa se ne more zgoditi na matrikah iz $\mathrm{O}(3)$. Ker je $\dim \mathbb{R}^{3\times 3} = 9$ in imamo 6 vezi, je $\mathrm{SO}(3)$ tridimenzionalna mnogoterost.

V nadaljevanju bomo izračunali tangentne prostore mnogoterosti $\mathrm{SO}(3)$.

Za začetek bomo posebej izračunali tangentni prostor $T_{\mathrm{I}}\,\mathrm{SO}(3)$ v enoti grupe $\mathrm{SO}(3)$. Dobili bi ga lahko kot ortogonalni komplement prostora, ki ga napenjajo gradienti vezi, vendar se bomo naloge raje lotili drugače. Tangentni prostor namreč sestoji iz hitrosti vseh poti skozi točko I. Denimo torej, da je

$$Q(t) : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{SO}(3)$$

gladka pot, za katero je $Q(0) = \mathrm{I}$. Potem je $\dot{Q}(0) \in T_{\mathrm{I}}\,\mathrm{SO}(3)$. Ker je $Q(t)$ pot v $\mathrm{SO}(3)$, mora za vsak $|t| < \epsilon$ veljati $Q(t)^T Q(t) = \mathrm{I}$. Če to enakost odvajamo in vstavimo $t = 0$, dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(0)^T Q(0) + Q(0)^T \dot{Q}(0) &= 0, \\ \dot{Q}(0)^T + \dot{Q}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Vidimo, da je hitrost poljubne poti skozi enoto grupe $\mathrm{SO}(3)$ neka antisimetrična matrika. Če je po drugi strani W neka poljubna antisimetrična matrika, pa lahko dokažemo, da za pot $Q(t) = e^{tW}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja $Q(t) \in \mathrm{SO}(3)$ in $\dot{Q}(0) = W$. Tangentni prostor $T_{\mathrm{I}}\,\mathrm{SO}(3)$ torej sestoji iz vseh antisimetričnih matrik. Pogosto ga označimo z

$$\mathfrak{so}(3) = T_{\mathrm{I}}\,\mathrm{SO}(3) = \{W \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid W^T + W = 0\}.$$

Kasneje bomo videli, da je $\mathfrak{so}(3)$ Liejeva algebra, ki je izomorfna znani Liejevi algebri $\mathbb{R}^3$ z operacijo vektorskega produkta. Ekspliciten izomorfizem

$$W : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)$$

je podan s predpisom

$$W(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0. \end{bmatrix}$$

Tangentni prostor $T_Q\,\mathrm{SO}(3)$ za poljubno $Q \in \mathrm{SO}(3)$ bomo sedaj izrazili s prostorom $\mathfrak{so}(3)$. Denimo, da je $Q(t) : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{SO}(3)$ gladka pot, za katero je $Q(0) = Q$. Z odvajanjem identitete $Q(t)^T Q(t) = \mathrm{I}$ pri $t = 0$ potem dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(0)^T Q(0) + Q(0)^T \dot{Q}(0) &= 0, \\ \dot{Q}(0)^T Q + Q^T \dot{Q}(0) &= 0, \end{aligned}$$

Sedaj je matrika $Q^T \dot{Q}(0)$ antisimetrična, kar pa pomeni, da je $\dot{Q}(0) \in Q \cdot \mathfrak{so}(3)$. Tangentni prostor $T_Q\,\mathrm{SO}(3)$ lahko torej opišemo v obliki

$$T_Q\,\mathrm{SO}(3) = Q \cdot \mathfrak{so}(3).$$

Če bi namesto identitete $Q(t)^T Q(t) = \mathrm{I}$ odvajali identiteto $Q(t)Q(t)^T = \mathrm{I}$, bi s podobnim računom prišli do enakosti

$$T_Q\,\mathrm{SO}(3) = \mathfrak{so}(3) \cdot Q.$$

Vidimo, da imamo dve naravni identifikaciji tangentnega prostora $T_Q\,\mathrm{SO}(3)$ s prostorom $\mathfrak{so}(3)$, ki sta podani z levim oziroma desnim množenjem:

$$\begin{aligned} Q \cdot - : \mathfrak{so}(3) &\to T_Q\,\mathrm{SO}(3), \\ - \cdot Q : \mathfrak{so}(3) &\to T_Q\,\mathrm{SO}(3). \end{aligned}$$

Opomba: Liejeva algebra $\mathfrak{so}(3)$ in Liejeva grupa $\mathrm{SO}(3)$ sta pomembni pri matematični formulaciji dinamike togega telesa. Elementi grupe $\mathrm{SO}(3)$ ustrezajo orientacijam togega telesa v prostoru, elementi Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$ pa kotnim hitrostim vrtenja togega telesa.

Vrtenje togega telesa lahko opišemo z gladko potjo

$$Q : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3).$$

Odvod te preslikave $\dot{Q}(t)$ je potem neka matrika, ki leži v tangentnem prostoru $T_{Q(t)}\,\mathrm{SO}(3)$. Ker se tangentni prostori grupe SO(3) od točke do točke razlikujejo med sabo, tangentnih vektorjev v različnih točkah ne moremo neposredno primerjati med sabo. Lahko pa jih primerjamo posredno, tako da jih prenesemo v tangentni prostor $T_{\mathrm{I}}\,\mathrm{SO}(3) = \mathfrak{so}(3)$ z levo ali pa desno translacijo. Eksplicitno tako dobimo elementa

$$Q(t)^T\dot{Q}(t),\ \dot{Q}(t)Q(t)^T \in \mathfrak{so}(3).$$

Ta primerjava nam omogoča, da hitrost vrtenja enačimo z neko antisimetrično matriko. Če nadalje uporabimo še izomorfizem W, pa lahko hitrost vrtenja enačimo kar z vektorji v $\mathbb{R}^3$. Izkaže se, da se ta identifikacija ujema z geometrično definicijo vektorja kotne hitrosti. Vektorja

$$\vec{\omega}_s(t) = W^{-1}\left(\dot{Q}(t)Q(t)^T\right),$$
$$\vec{\omega}_b(t) = W^{-1}\left(Q(t)^T\dot{Q}(t)\right)$$

sta namreč ravno vektorja kotne hitrosti vrtenja v prostorski in v telesni bazi. □

(7) Opiši osno kotne koordinate na Liejevi grupi SO(3).

Rešitev: Po izreku o implicitni funkciji lahko v okolici vsake matrike $Q \in \mathrm{SO}(3)$ izberemo trojico koordinat v $\mathbb{R}^{3\times 3}$, ki tvorijo tudi koordinate na SO(3). Tako dobljene koordinate pa večinoma niso najbolj primerne za računanje, zato v praksi raje uporabljamo druge koordinatne sisteme na SO(3). Med najbolj uporabljanimi koordinatami na SO(3) so:

· osno-kotne koordinate,

· kvaternionske koordinate,

· Eulerjevi koti.

V povezavi s teorijo Liejevih grup so še posebej zanimive osno-kotne koordinate na SO(3), ker so to v bistvu koordinate, ki nam jih da eksponentna preslikava na Liejevi grupi SO(3).

Osno-kotne koordinate na SO(3):

Kadar imamo opravka s krivuljo, ploskvijo ali podmnogoterostjo evklidskega prostora, jo pogosto namesto s kartami opišemo s parametrizacijo. Gre v bistvu za isto stvar, le v obratni smeri. Naše osno-kotne koordinate bomo zato najprej implicitno definirali s pomočjo lokalne parametrizacije grupe SO(3) v okolici identične matrike.

Najprej izračunajmo eksponentno preslikavo $\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{SO}(3)$. Pri tem bomo uporabili identifikacijo prostora $\mathfrak{so}(3)$ s prostorom $\mathbb{R}^3$. Poljuben vektor $\vec{\omega} = (x, y, z)$ lahko zapišemo v obliki

$$\vec{\omega} = |\vec{\omega}|\vec{e} = \phi\vec{e},$$

kjer je ϕ dolžina vektorja $\vec{\omega}$, vektor $\vec{e}$ pa enotski vektor v njegovi smeri. Potem označimo

$$W(\vec{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrike $W(\vec{\omega})$ je potem enak

$$\det(W(\vec{\omega}) - \lambda\,\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -z & y \\ z & -\lambda & -x \\ -y & x & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda(x^2+y^2+z^2) = -\lambda^3 - \lambda\phi^2.$$

Po Cayley-Hamiltonovem izreku od tod dobimo

$$W(\vec{\omega})^3 = -\phi^2 W(\vec{\omega}).$$

Če označimo $W = W(\vec{\omega})$, je torej:

$$\begin{aligned} e^W &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{W^k}{k!} = \mathrm{I} + W + \tfrac{W^2}{2} - \tfrac{\phi^2 W^3}{3!} - \tfrac{\phi^2 W^2}{4!} + \tfrac{\phi^4 W}{5!} + \tfrac{\phi^4 W^2}{6!} + \dots, \\ &= \mathrm{I} + W(\phi - \tfrac{\phi^3}{3!} + \tfrac{\phi^5}{5!} - \tfrac{\phi^7}{7!} + \dots) + W^2(\tfrac{\phi^2}{2} - \tfrac{\phi^4}{4!} + \tfrac{\phi^6}{6!} - \tfrac{\phi^8}{8!} + \dots), \\ &= \mathrm{I} + \frac{\sin\phi}{\phi} W + \frac{1-\cos\phi}{\phi^2} W^2. \end{aligned}$$

Ko upoštevamo, da je $W(\vec{\omega}) = \phi W(\vec{e})$, dobimo še

$$e^{W(\vec{\omega})} = \mathrm{I} + \tfrac{\sin\phi}{\phi}\, W(\vec{w}) + \tfrac{1-\cos\phi}{\phi^2}\, W(\vec{\omega})^2 = \mathrm{I} + \sin\phi\, W(\vec{e}) + (1-\cos\phi)\, W(\vec{e})^2.$$

Eksplicitno je matrika $e^{W(\vec{\omega})}$ podana s predpisom:

$$e^{W(\vec{\omega})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin\phi}{\phi} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} + \frac{1-\cos\phi}{\phi^2} \begin{bmatrix} -y^2-z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2-z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2-y^2 \end{bmatrix}.$$

V nadaljevanju bomo pokazali, da je $e^{W(\vec{\omega})}$ rotacija za kot ϕ okoli osi $\vec{e}$.

$e^{W(\vec{\omega})}$ je rotacijska matrika:

Najprej velja

$$e^{W(\vec{\omega})}\left(e^{W(\vec{\omega})}\right)^T = e^{W(\vec{\omega})} e^{W(\vec{\omega})^T} = e^{W(\vec{\omega})} e^{-W(\vec{\omega})} = e^0 = \mathrm{I},$$

kar pomeni, da je $e^{W(\vec{\omega})}$ ortogonalna matrika. Pri tem smo upoštevali, da je $e^A e^B = e^{A+B}$, če matriki A in B komutirata. Da pokažemo, da je matrika rotacijska, pa bomo uporabili formulo $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$. Tako dobimo

$$\det(e^{W(\vec{\omega})}) = e^{\mathrm{tr}(W(\vec{\omega}))} = e^0 = 1.$$

$e^{W(\vec{\omega})}$ je rotacija za kot ϕ okoli vektorja $\vec{e}$:

Hitro lahko preverimo, da velja

$$e^{W(\vec{\omega})} \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega},$$

od koder sledi, da je $e^{W(\vec{\omega})}$ rotacija okoli vektorja $\vec{e}$. Če imamo dano rotacijsko matriko Q, lahko kot rotacije ϕ izračunamo iz zveze

$$\mathrm{tr}(Q) = 2\cos\phi + 1.$$

V našem primeru je

$$\mathrm{tr}(e^{W(\vec{\omega})}) = 3 - 2(1-\cos\phi) = 2\cos\phi + 1,$$

Da je $e^{W(\vec{\omega})}$ dejansko rotacija za kot ϕ in ne $-\phi$, bi lahko preverili, če bi eksplicitno izračunali, kako se zavrti nek konkreten vektor.

Matrika

$$e^{W(\vec{\omega})} = \mathrm{I} + \sin\phi\, W(\vec{e}) + (1-\cos\phi)\, W(\vec{e})^2.$$

torej določa rotacijo $R(\vec{e},\phi)$ za kot ϕ okoli osi $\vec{e}$. Če upoštevamo, da je

$$W(\vec{e}) \cdot \vec{x} = \vec{e} \times \vec{x},$$

lahko od tod izpeljemo Rodriguesovo formulo

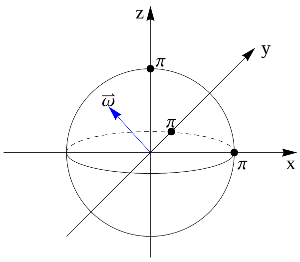
$$R(\vec{e},\phi)\cdot\vec{x} = \cos\phi\,\vec{x} + (\vec{e}\cdot\vec{x})(1-\cos\phi)\vec{e} + \sin\phi\,\vec{e}\times\vec{x}.$$

Zdaj torej vemo, da je eksponentna preslikava

$$\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{SO}(3)$$

gladka surjekcija. Poleg tega znamo eksplicitno opisati, kam se preslika dana antisimetrična matrika. Zožitev eksponentne preslikave na odprto kroglo $B(0,\pi) \subset \mathfrak{so}(3)$ je injektivna, medtem ko dve antipodni točki s sfere $S(0,\pi)$ eksponentna preslikava preslika v isto rotacijo.

Domena osno-kotne parametrizacije bo odprta krogla $B(0,\pi) \subset \mathbb{R}^3$ (ki jo enačimo z odprto kroglo v prostoru antisimetričnih matrik), vektorju $\vec{\omega} \in B(0,\pi)$ pa bo priredila rotacijo okoli vektorja $\vec{\omega}$ za kot $|\vec{\omega}|$.



Pri parametrizaciji gladkih podmnogoterosti evklidskih prostorov ponavadi zahtevamo še, da je parametrizacija regularna, kar pomeni, da je njen odvod injektiven v vsaki točki. V našem primeru bomo pobliže pogledali odvod osno-kotne parametrizacije v točki $(0,0,0)$.

Pri interpretaciji odvoda preslikave je poučno pogledati, kako preslikava preslika majhne koščke poti. Vzemimo na primer pot skozi točko $(0,0,0) \in B(0,\pi)$ oblike

$$\vec{\omega}(t) = (0,0,t)$$

za $|t| < \pi$. Potem nam pot $e^{W(\vec{\omega}(t))}$ predstavlja neko pot v grupi rotacij, ki je podana s predpisom

$$e^{W(\vec{\omega}(t))} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + \frac{\sin|t|}{|t|}\begin{bmatrix}0&-t&0\\t&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \frac{1-\cos|t|}{|t|^2}\begin{bmatrix}-t^2&0&0\\0&-t^2&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos t&-\sin t&0\\\sin t&\cos t&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Geometrično lahko to pot prepoznamo kot vrtenje okoli z-osi. Če to pot odvajamo po t pri $t=0$, smo v resnici izračunali parcialni eksponentne preslikave po z v točki $(0,0,0)$. Eksplicitno dobimo

$$\frac{\partial\exp}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Matrika na desni ni rotacijska matrika, ampak leži v Liejevi algebri $\mathfrak{so}(3)$. Interpretiramo jo lahko kot infinitezimalni generator rotacij okoli z-osi. Podobno dobimo infinitezimalna generatorja rotacij okoli drugih dveh smeri, ki sta enaka:

$$\frac{\partial\exp}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial\exp}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

Ker so ti trije infinitezimalni generatorji linearno neodvisni, je eksponentna preslikava imerzija v točki $(0,0,0)$. Lahko bi šli eksplicitno izračunati še njen odvod v drugih točkah in pokazali, da je imerzija povsod na $B(0,\pi)$. Zaradi enostavnosti pa bomo dokaz raje za nekaj časa odložili, da spoznamo bolj splošen izrek, ki nam pove, v katerih točkah je eksponentna preslikava Liejeve grupe imerzija.

Karta, ki jo dobimo kot inverz osno-kotne parametrizacije, ustreza v teoriji Liejevih grup logaritemski karti. Definirana je na odprti gosti podmnožici $U \subset \mathrm{SO}(3)$, ki sestoji iz vseh rotacij za kot $\phi < \pi$. Dobljena preslikava $\psi : U \to B(0,\pi)$ je eksplicitno dana s predpisom:

$$
\begin{aligned}
\phi &= \arccos\left(\frac{\mathrm{tr}(Q)-1}{2}\right), \\
\vec{e} &= \frac{1}{2\sin\phi}\begin{bmatrix} x_{32}-x_{23} \\ x_{13}-x_{31} \\ x_{21}-x_{12} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Identično matriko preslikava ψ preslika v koordinatno izhodišče.

Ker je množica rotacij $\mathrm{SO}(3)$ grupa, lahko dobimo atlas na $\mathrm{SO}(3)$ z uporabo translacij dane karte. Najprej označimo z

$$
R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ R_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ R_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

rotacije okoli koordinatnih osi za kot π ter z

$$
U_x = L_{R_x}(U),\ U_y = L_{R_y}(U),\ U_z = L_{R_z}(U)
$$

odprte podmnožice $\mathrm{SO}(3)$, ki jih dobimo s translacijami množice U. Na teh množicah lahko definiramo karte s predpisi

$$
\begin{aligned}
\psi_x &= \psi \circ L_{R_x}, \\
\psi_y &= \psi \circ L_{R_y}, \\
\psi_z &= \psi \circ L_{R_z}.
\end{aligned}
$$

Kot bomo videli kasneje, so translacije na Liejevi grupi gladke preslikave, zato so te karte avtomatično gladke in paroma kompatibilne, preveriti pa moramo še, da pokrivajo celo grupo $\mathrm{SO}(3)$. Izven množice U ležijo natanko rotacije za kot π. Za vsako takšno rotacijo Q torej velja

$$
\mathrm{tr}(Q) = -1
$$

oziroma

$$
x_{11} + x_{22} + x_{33} = -1.
$$

Če bi Q ležala tudi izven množic U_x, U_y in U_z, bi morale biti tudi R_xQ, R_yQ in R_zQ rotacije za kot π, kar bi pomenilo, da velja:

$$
\begin{aligned}
x_{11} - x_{22} - x_{33} &= -1, \\
-x_{11} + x_{22} - x_{33} &= -1, \\
-x_{11} - x_{22} + x_{33} &= -1.
\end{aligned}
$$

Ker dobljeni sistem enačb nima rešitev, dane štiri množice pokrivajo celo grupo $\mathrm{SO}(3)$ in zatorej tvorijo gladek atlas na $\mathrm{SO}(3)$.

Geometrijsko lahko to dokažemo takole. Kompozitum rotacij $R(\vec{e}_1, \pi)$ in $R(\vec{e}_2, \pi)$ je rotacija v ravnini, ki jo napenjata osi $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_2$ za dvakratnik kota med tema dvema osema. Ta kompozitum je rotacija za kot π natanko takrat, ko sta osi pravokotni. Ker nobena os ni hkrati pravokotna na vse tri koordinatne osi, je zmeraj torej vsaj ena izmed rotacij $R_x Q$, $R_y Q$ in $R_z Q$ rotacija za kot $\phi < \pi$.

Opomba 1: Zožitev eksponentne preslikave na zaprto kroglo $\overline{B(0, \pi)}$ je surjekcija na SO(3), ki dve antipodni točki na robu krogle preslika v isto točko. Od tod sledi, da je Liejeva grupa SO(3) difeomorfna projektivnemu prostoru $\mathbb{R}P^3$.

Opomba 2: Kasneje bomo pokazali, da je odvod eksponentne preslikave injektiven na odprti krogli $B(0, 2\pi)$. □

(8) Konstruiraj zvezen homomorfizem $R : S^3 \to \mathrm{SO}(3)$.

Rešitev: Elemente obsega kvaternionov lahko opišemo na naslednji način

$$\mathbb{H} = \{t + xi + yj + zk \,|\, t, x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(t, \vec{r}) \,|\, t \in \mathbb{R}, \vec{r} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Množenje kvaternionov v tej obliki izrazimo s formulo

$$(t_1, \vec{r}_1)(t_2, \vec{r}_2) = (t_1 t_2 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2, t_1 \vec{r}_2 + t_2 \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2),$$

konjugiranje pa je definirano s predpisom

$$(t, \vec{r})^* = (t, -\vec{r}).$$

Za nas bo zanimiva grupa enotskih kvaternionov

$$S^3 = \{(t, \vec{r}) \,|\, t^2 + |\vec{r}|^2 = 1\}.$$

Za poljuben $q \in S^3$ lahko namreč definiramo rotacijo $R_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki je definirana s predpisom

$$R_q(\vec{x}) = q \cdot \vec{x} \cdot q^*.$$

Vektor $\vec{x}$ v zgornjem izrazu identificiramo s kvaternionom $(0, \vec{x})$. Izkazalo se bo, da je realna komponenta izraza na desni potem enaka nič, zato lahko ta izraz spet interpretiramo kot vektor iz $\mathbb{R}^3$.

R_q je rotacija:

Če pišemo $q = (t, \vec{r})$, velja:

$$\begin{aligned} R_q(\vec{x}) &= (t, \vec{r}) \cdot (0, \vec{x}) \cdot (t, -\vec{r}) = (-\vec{r} \cdot \vec{x}, t\vec{x} + \vec{r} \times \vec{x})(t, -\vec{r}), \\ &= (-t\vec{r} \cdot \vec{x} + t\vec{r} \cdot \vec{x}, t^2 \vec{x} + 2t\vec{r} \times \vec{x} + (\vec{r} \cdot \vec{x})\vec{r} - (\vec{r} \times \vec{x}) \times \vec{r}), \\ &= (0, (t^2 - |\vec{r}|^2)\vec{x} + 2t\vec{r} \times \vec{x} + 2(\vec{r} \cdot \vec{x})\vec{r}). \end{aligned}$$

Sedaj bomo upoštevali, da je q enotski kvaternion, kar pomeni, da je

$$t^2 + |\vec{r}|^2 = 1.$$

Med drugim od tod sledi, da je $t \in [-1, 1]$, kar pomeni, da obstaja enolično določen kot $\phi \in [0, \pi]$, da je $t = \cos \phi$. Nadalje velja $|\vec{r}| = \sin \phi$, zato lahko pišemo $\vec{r} = \sin \phi \, \vec{e}$ za nek enotski vektor $\vec{e}$. Ta vektor je natanko določen, če je $\phi \in (0, \pi)$. Ko to vstavimo v zgornji izraz, dobimo:

$$\begin{aligned} R_q(\vec{x}) &= (0, (t^2 - |\vec{r}|^2)\vec{x} + 2t\vec{r} \times \vec{x} + 2(\vec{r} \cdot \vec{x})\vec{r}), \\ &= (0, (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)\vec{x} + 2 \cos \phi \sin \phi \vec{e} \times \vec{x} + 2 \sin^2 \phi (\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e}), \\ &= (0, \cos(2\phi)\vec{x} + \sin(2\phi)\vec{e} \times \vec{x} + (1 - \cos(2\phi))(\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e}). \end{aligned}$$

Z uporabo Rodriguesove formule lahko sklepamo, da je R_q rotacija okoli osi $\vec{e}$ za kot 2ϕ.

$R : S^3 \to \mathrm{SO}(3)$ je zvezen surjektiven homomorfizem Liejevih grup:

Komponente preslikave R dobimo tako, da izračunamo R_q na baznih vektorjih prostora $\mathbb{R}^3$. Iz predpisa je razvidno, da so komponente zvezne preslikave, od koder pa sledi, da je R zvezna preslikava. Da je R homomorfizem grup, sledi iz enakosti

$$R_{q_1 q_2}(\vec{x}) = q_1 q_2 \vec{x}(q_1 q_2)^* = q_1 q_2 \vec{x} q_2^* q_1^* = R_{q_1}(q_2 \vec{x} q_2^*) = R_{q_1}(R_{q_2}(\vec{x}))$$

Ker je vsaka rotacija iz $\mathrm{SO}(3)$ rotacija za nek kot okoli neke osi, je preslikava R surjektivna. V jedru R pa so natanko elementi $q \in S^3$, ki se preslikajo v rotacije za kot 0 ali 2π. Takšna elementa sta kvaterniona 1 in -1.

Opomba: Grupa S^3 je univerzalni dvolistni krov grupe $\mathrm{SO}(3)$. Posplošitev te konstrukcije na višje dimenzije so spinske grupe, ki so podgrupe Cliffordovih algeber. $\square$

(9) Naj bo $a \in \mathbb{R}^n$ poljubna točka in $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(a) Dokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}^n$ velja

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a))\, dt.$$

(b) Pokaži, da za vsako derivacijo $v \in T_a\mathbb{R}^n$ in vsako konstantno funkcijo c velja $v(c) = 0$.

(c) Pokaži, da tvori množica $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_a, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_a\}$ bazo tangentnega prostora $T_a\mathbb{R}^n$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali definicijo tangentnih vektorjev, ki ima smisel na poljubnih mnogoterostih. Abstraktno lahko tangentne vektorje na mnogoterost definiramo s pomočjo derivacij. Naj bo M gladka mnogoterost in $p \in M$. Tangentni prostor T_pM mnogoterosti M v točki p je potem vektorski prostor

$$T_pM = \{\text{derivacije algebre } \mathcal{C}^\infty(M) \text{ v točki } p\}.$$

Derivacija algebre $\mathcal{C}^\infty(M)$ v točki $p \in M$ je linearna preslikava $v : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$, ki zadošča Leibnizevemu pravilu

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

za poljubni $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. To je abstraktna definicija tangentnega vektorja, ki pa nam pride prav pri dokazovanju in brezkoordinatnem računanju.

Tangentne vektorje si seveda lahko predstavljamo tudi bolj geometrično kot hitrosti poti v M. Denimo, da je $\gamma : \mathbb{R} \to M$ gladka pot v M, za katero je $\gamma(0) = p$. V lokalnih koordinatah $\phi = (x_1, \ldots, x_m)$ na M lahko pot γ izrazimo v obliki $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$. Hitrost poti nam pove, kako hitro se spreminjajo koordinate točke, ki potuje po tej poti, opišemo pa jo lahko z m-terico

$$\dot\gamma(0) = (\dot x_1(t), \ldots, \dot x_m(t)) = \left(\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} x_1(\gamma(t)), \ldots, \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} x_m(\gamma(t))\right).$$

Koordinate na M so posebni primeri funkcij na M. Če hočemo imeti brezkoordinatno definicijo tangentnega vektorja oziroma hitrosti dane poti, pa namesto odvodov koordinat hkrati pogledamo kar odvode vseh funkcij. Formalno tako poti γ priredimo tangentni vektor $v = \dot\gamma(0) \in T_pM$, ki je definiran s predpisom

$$v(f) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\gamma(t))$$

za $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Ker za odvod po času velja Leibnizevo pravilo, je tako definirana preslikava derivacija algebre $\mathcal{C}^\infty(M)$ v točki p. Izkaže se, da lahko vsako derivacijo predstavimo kot hitrost neke poti, ni pa ta korespondenca enolična, saj ima veliko poti isto hitrost.

(a) Naj bo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Če zožimo funkcijo f na daljico od točke a do točke x, dobimo z uporabo Newton-Leibnizeve formule enakost

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{df}{dt}(a + t(x-a))\,dt = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a))\,dt.$$

Od tod sledi, da je

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a))\,dt.$$

Ta formula spominja na Taylorjev razvoj. Razlika je v tem, da v tem primeru namesto aproksimacije z linearno funkcijo dobimo enakost, če smo pripravljeni parcialne odvode v dani točki nadomestiti s funkcijami. To pomeni, da lahko vsako gladko funkcijo zapišemo v obliki

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) g_i(x),$$

kjer so $g_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ funkcije, za katere velja $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

(b) Naj bo sedaj $a \in \mathbb{R}^n$ in $v \in T_a\mathbb{R}^n$. Pokazali bomo, da potem za vsako konstantno funkcijo c velja $v(c) = 0$. Za poljubno $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ iz Leibnizeve formule sledi

$$v(cf) = v(c)f(a) + cv(f).$$

Zaradi $\mathbb{R}$-linearnosti derivacije je $v(cf) = cv(f)$, zato mora biti

$$v(c)f(a) = 0.$$

Če izberemo funkcijo f tako, da bo $f(a) \neq 0$, bo od tod sledilo $v(c) = 0$.

(c) Za vsako koordinatno smer definirajmo derivacijo $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_a \in T_a\mathbb{R}^n$ s predpisom

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_a(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

V nadaljevanju bomo pokazali, da tvori množica $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_a, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_a\}$ bazo prostora $T_a\mathbb{R}^n$. Pri tem bomo upoštevali, da lahko vsako funkcijo f zapišemo v obliki

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) g_i(x),$$

kjer je $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Če na zgornji enakosti uporabimo derivacijo v, dobimo

$$v(f) = v(f(a)) + \sum_{i=1}^n \left(v(x_i - a_i) g_i(a) + (x_i - a_i)(a) v(g_i) \right).$$

Funkcije $x_i - a_i$ so v točki a enake 0. Če upoštevamo še $v(a_i) = 0$ in $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, tako dobimo

$$v(f) = \sum_{i=1}^n v(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

To pomeni, da lahko derivacijo v izrazimo kot linearno kombinacijo

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_a,$$

od koder sledi, da je množica $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_a, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_a\}$ ogrodje tangentnega prostora $T_a\mathbb{R}^n$. Pokazati moramo še, da je ta množica linearno neodvisna. Pa denimo, da je

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_a + \ldots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_a = 0$$

za neke $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Če to derivacijo uporabimo na funkciji x_i, dobimo, da mora biti $\lambda_i = 0$, kar smo želeli pokazati.

Rezultat te naloge lahko strnemo v opazko, da imamo izomorfizem

$$\{\text{derivacije algebre } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ v točki } a\} \cong \mathbb{R}^n,$$

ki i-ti derivaciji $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_a$ priredi i-ti bazni vektor $e_i \in \mathbb{R}^n$. V primeru evklidskega prostora torej lahko derivacije enačimo z urejenimi n-tericami števil. Na splošni mnogoterosti je definicija z n-tericami odvisna od koordinat, medtem ko je definicija z derivacijami koordinatno neodvisna. $\square$

(10) Izračunaj odvod gladke preslikave $g : M \times N \to Q$. Nato izpelji formulo za odvod množenja in invertiranja v Liejevi grupi.

Rešitev: Naj bosta M in N gladki mnogoterosti in $g : M \to N$ gladka preslikava. Odvod preslikave g v točki $p \in M$ je linearna preslikava $dg_p : T_pM \to T_{g(p)}N$, ki je definirana s predpisom

$$dg_p(v)(f) = v(f \circ g)$$

za poljuben $v \in T_pM$ in poljubno $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$. Če tangentni vektor $v \in T_pM$ predstavimo z neko gladko potjo $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, ki zadošča pogoju $v = \dot{\gamma}(0)$, bo odvod dg hitrost poti γ preslikal v hitrost poti $g \circ \gamma$ oziroma

$$dg_p(v) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} g(\gamma(t)).$$

V nadaljevanju bomo spoznali abstraktno verzijo Leibnizeve formule za odvod produkta, ki nam pogosto pride prav pri študiju Liejevih grup ter njihovih delovanj in reprezentacij.

Začeli bomo s strukturo tangentnega prostora produkta mnogoterosti. Naj bosta M in N gladki mnogoterosti ter $p \in M$ in $q \in N$. Potem obstaja naravni izomorfizem

$$T_pM \times T_qN \cong T_{(p,q)}(M \times N).$$

Eksplicitno ga lahko podamo na naslednji način. Označimo z $\iota_{M,q} : M \to M \times N$ in $\iota_{N,p} : N \to M \times N$ vložitvi, ki M in N vložita v produkt $M \times N$ na rezini skozi točko (p, q). Eksplicitno to pomeni, da je:

$$\iota_{M,q}(x) = (x, q),$$
$$\iota_{N,p}(x) = (p, x).$$

Zgornji izomorfizem je potem podan s korespondenco

$$(v, w) \longleftrightarrow (d\iota_{M,q})_p(v) + (d\iota_{N,p})_q(w),$$

kjer je $v \in T_pM$ in $w \in T_qN$. Lažje kot s formulo si lahko ta izomorfizem zapomnimo geometrično. Pove namreč, da nam par gladkih poti v M in N predstavlja pot v produktu $M \times N$ in obratno. Za hitrosti poti torej velja

$$\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}(\gamma(t), \zeta(t)) = \left(\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\gamma(t), \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\zeta(t)\right).$$

Naj bo sedaj $g : M \times N \to Q$ gladka preslikava. Z uporabo zgornje identifikacije dobimo naslednjo enakost

$$dg_{(p,q)}(v, w) = dg_{(p,q)}((d\iota_{M,q})_p(v) + (d\iota_{N,p})_q(w)) = d(g \circ \iota_{M,q})_p(v) + d(g \circ \iota_{N,p})_q(w).$$

Denimo sedaj, da $v \in T_pM$ ustreza poti γ, $w \in T_qN$ pa poti ζ. V jeziku poti lahko to enakost potem zapišemo v obliki

$$\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}g(\gamma(t), \zeta(t)) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}g(\gamma(t), q) + \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}g(p, \zeta(t)).$$

Ta formula je v resnici le abstraktna verzija Leibnizevega pravila za odvod produkta. Poglejmo si nekaj znanih primerov:

(1) Če je $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ množenje, dobimo znano formulo $(fh)^{\cdot} = \dot{f}h + f\dot{h}$.

(2) Če je $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skalarni produkt, dobimo formulo $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^{\cdot} = \dot{\vec{r}}_1 \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2$.

(3) Če je $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorski produkt, dobimo $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)^{\cdot} = \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_2$.

S pomočjo te formule bomo sedaj izračunali odvod množenja in inverza v Liejevi grupi.

Odvod množenja $\mu : G \times G \to G$:

Zanima nas odvod množenja μ v točki (e, e). Izberimo tangentna vektorja $X, Y \in T_eG$ in ju predstavimo s potema γ in ζ. Ker je e enota, je $\mu(\gamma(t), e) = \gamma(t)$ in $\mu(e, \zeta(t)) = \zeta(t)$. Od tod sledi:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\mu(\gamma(t), \zeta(t)) &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\mu(\gamma(t), e) + \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\mu(e, \zeta(t)),\\ &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\gamma(t) + \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\zeta(t),\\ &= X + Y,\end{aligned}$$

kar pomeni, da je

$$d\mu_{(e,e)}(X, Y) = X + Y.$$

Odvod inverza $\iota : G \to G$:

Za izračun odvoda inverza v Liejevi grupi ne moremo direktno uporabiti zgornje formule. Zato si bomo najprej pogledali kompozitum $\mu \circ (\mathrm{id}, \iota) : G \to G$ preslikav $(\mathrm{id}, \iota) : G \to G \times G$ in $\mu : G \times G \to G$. Iz definicije inverza in množenja v Liejevi grupi sledi, da je ta preslikava konstantna, zato je njen odvod enak nič. To pomeni, da za vsak $X \in T_eG$ velja

$$d(\mu \circ (\mathrm{id}, \iota))_e(X) = 0.$$

Če uporabimo verižno pravilo za odvod, od tod sledi

$$d\mu_{(e,e)}(d(\mathrm{id}, \iota)_e(X)) = 0.$$

Sedaj upoštevamo dejstvo, da je odvod para preslikav v bistvu par odvodov

$$d(\mathrm{id}, \iota)_e(X) = (d\mathrm{id}_e(X), d\iota_e(X)) = (X, d\iota_e(X)).$$

Pri tem smo uporabili identifikacijo tangentnega prostora produkta s produktom tangentnih prostorov. Za konec uporabimo že izračunan odvod preslikave μ, da dobimo enakost

$$d\mu_{(e,e)}(X, d\iota_e(X)) = X + d\iota_e(X) = 0.$$

To pomeni, da je

$$d\iota_e(X) = -X.$$

Geometrično ta rezultat pomeni, da invertiranje poti v grupi obrne smer poti. Najlažje si to predstavljamo na poteh v evklidskem prostoru ali pa v grupi rotacij SO(3), kjer invertiranje obrne smer rotacije.

Opomba: V zgornji izpeljavi smo uporabili dejstvo, da je odvod para preslikav par odvodov. To lahko eksplicitno pokažemo, če delamo v lokalnih koordinatah, geometrična ideja dokaza pa je naslednja.

Denimo, da imamo preslikavo $h = (h_1, h_2) : P \to M \times N$ in naj bo $x \in P$ ter $h(x) = (p, q)$. Izberimo še tangentni vektor $v \in T_xP$ in ga predstavimo s potjo $\gamma : \mathbb{R} \to P$, za katero je $v = \dot{\gamma}(0)$. Po definiciji odvoda gladke preslikave je potem

$$dh_x(v) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} h(\gamma(t)).$$

Pot $h(\gamma(t))$ je pot v produktu $M \times N$ skozi točko (p, q), ki jo lahko zapišemo tudi v obliki

$$h(\gamma(t)) = (h_1(\gamma(t)), h_2(\gamma(t))).$$

Če uporabimo identifikacijo $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \times T_qN$, potem od tod sledi

$$\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} h(\gamma(t)) = \left(\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} h_1(\gamma(t)), \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} h_2(\gamma(t))\right).$$

Ker je:

$$\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} h_1(\gamma(t)) = (dh_1)_x(v),$$
$$\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} h_2(\gamma(t)) = (dh_2)_x(v),$$

je torej

$$dh_x(v) = ((dh_1)_x(v), (dh_2)_x(v)).$$

$\square$

(11) Pokaži, da sta dani preslikavi gladki surjektivni submerziji in nato opiši njuna vlakna:

(a) preslikava $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}P^2$ s predpisom $\pi(x, y, z) = [x : y : z]$,

(b) preslikava $\pi : \mathrm{SO}(3) \to S^2$ s predpisom $\pi(Q) = Q\vec{k}$.

Rešitev: Naj bosta M in N gladki mnogoterosti. Gladka preslikava $f : M \to N$ je submerzija, če je odvod $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ surjektiven za vsak $x \in M$. Če je f submerzija, je avtomatično $\dim(M) \geq \dim(N)$, po izreku o implicitni funkciji pa so vlakna submerzije gladke zaprte podmnogoterosti M dimenzije $\dim(M) - \dim(N)$.

(a) Začeli bomo s projekcijo $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}P^2$ s predpisom

$$\pi(x, y, z) = [x : y : z].$$

To je preslikava, ki točki (x, y, z) priredi premico skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$ s smernim vektorjem $\vec{s} = (x, y, z)$. Ker ima vsaka premica smerni vektor, je π surjektivna. Da bi pokazali, da je π gladka submerzija, jo bomo izrazili v lokalnih koordinatah. Na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ že imamo naravno definirane koordinate, na $\mathbb{R}P^2$ pa bomo vzeli lokalno karto $\phi_x : U_x \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\phi_x([x : y : z]) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

kjer je

$$U_x = \{[x : y : z] \mid x \neq 0\}.$$

V lokalnih koordinatah lahko potem π predstavimo kot preslikavo

$$\phi_x \circ \pi : \pi^{-1}(U_x) \to \mathbb{R}^2$$

med odprtima podmnožicama evklidskih prostorov s predpisom

$$(\phi_x \circ \pi)(x, y, z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Vidimo, da je ta preslikava gladka in dobro definirana, ker je $x \neq 0$. Njen odvod lahko predstavimo z matriko

$$d(\phi_x \circ \pi)_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{z}{x^2} & 0 & \frac{1}{x} \end{bmatrix},$$

katere rang je enak 2 povsod na $\pi^{-1}(U_x)$. Od tod sledi, da je preslikava π submerzija na množici $\pi^{-1}(U_x)$. Če izberemo karto ϕ_y ali ϕ_z, lahko s podobnim računom pokažemo tudi, da je π submerzija na preostalem delu prostora $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Praslika premice $[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2$ je množica vseh njenih smernih vektorjev

$$\pi^{-1}([x : y : z]) = \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

Vidimo, da so vsa vlakna difeomorfna $\mathbb{R}^*$, vendar pa ne na kanoničen način. V jeziku delovanj Liejevih grup rečemo, da grupa $\mathbb{R}^*$ deluje na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ prosto in tranzitivno vzdolž vlaken preslikave π, od koder sledi, da je $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ glavni $\mathbb{R}^*$-sveženj nad $\mathbb{R}P^2$. Dejstvo, da ne moremo gladko v vsakem vlaknu izbrati smernega vektorja, ki bi ustrezal enoti $1 \in \mathbb{R}^*$, je ekvivalentno temu, da ta sveženj ni trivialen. Če bi namreč veljalo $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \cong \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}^*$, bi na levi imeli povezan prostor, na desni pa nepovezan.

(b) Sedaj bomo obravnavali preslikavo $\pi : \mathrm{SO}(3) \to S^2$ s predpisom $\pi(Q) = Q\vec{k}$. Če zapišemo matriko Q v obliki

$$Q = [u_1\, u_2\, u_3],$$

je preslikava π kar projekcija na tretji stolpec. Namesto študija preslikave π v lokalnih koordinatah jo bomo tokrat raje pogledali na bolj abstraktnem nivoju. Najprej lahko opazimo, da je π zožitev projekcije

$$\mathrm{pr}_3 : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^3,$$

ki zaprto podmnogoterost $\mathrm{SO}(3) \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ preslika v zaprto podmnogoterost $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Ker je projekcija linearna preslikava, je gladka, zato je tudi njena zožitev π gladka preslikava.

Ker za poljubno točko $u \in S^2$ lahko najdemo rotacijsko matriko oblike

$$Q = [u_1\, u_2\, u],$$

je preslikava π surjektivna.

Naj bo sedaj $Q \in \mathrm{SO}(3)$ poljubna matrika. Radi bi pokazali, da je potem odvod

$$d\pi_Q : T_Q \,\mathrm{SO}(3) \to T_{\pi(Q)}S^2$$

surjektiven. V ta namen izberimo poljuben tangentni vektor $v \in T_{\pi(Q)}S^2$ in naj bo $\gamma(t) : (-\epsilon, \epsilon) \to S^2$ gladka pot, za katero je $v = \dot{\gamma}(0)$. Potem je dovolj, da najdemo gladko pot $Q(t) : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{SO}(3)$ skozi točko Q, za katero je $\pi \circ Q = \gamma$. V tem primeru bo namreč veljalo, da je

$$d\pi_Q(\dot{Q}(0)) = v,$$

kar želimo pokazati. Če je $Q = [u_1\, u_2\, u_3]$, lahko izberemo kar pot

$$Q(t) = \left[\frac{u_1 - (u_1 \cdot \gamma(t))\gamma(t)}{|u_1 - (u_1 \cdot \gamma(t))\gamma(t)|}, \frac{\gamma(t) \times u_1}{|u_1 - (u_1 \cdot \gamma(t))\gamma(t)|}, \gamma(t) \right].$$

Za konec poskusimo opisati še vlakna preslikave π. Za poljuben $u \in S^2$ so v $\pi^{-1}(u)$ vse rotacijske matrike, ki imajo tretji stolpec enak u. Od tod pa sledi, da sta prva dva stolpca pravokotna na u, zato ju lahko smatramo kot tangentna vektorja v $T_u S^2$. Ker sta pravokotna tudi med sabo, tvorita ortonormirano bazo $T_u S^2$. Tako pridemo do opisa

$$\pi^{-1}(u) = \{[u_1\, u_2\, u] \in \mathrm{SO}(3) \,|\, \{u_1, u_2\} \text{ je orientirana ortonormirana baza } T_u S^2\}.$$

Označimo sedaj z $SO(2)$ podgrupo grupe $\mathrm{SO}(3)$, ki sestoji iz matrik oblike

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Ta podgrupa deluje z desne na grupi $\mathrm{SO}(3)$ z desnimi translacijami, tako da je to delovanje prosto in tranzitivno vzdolž vlaken preslikave π. Od tod sledi, da je $\mathrm{SO}(3)$ glavni $SO(2)$-sveženj nad S^2, ki pa spet ni trivialen. Dokaz netrivialnosti je tokrat malce težji, sledi pa iz dejstva, da na sferi S^2 ne obstaja vektorsko polje, ki bi bilo povsod neničelno. $\square$

(12) Naj bodo M, N in P gladke mnogoterosti, $\pi : M \to N$ gladka surjektivna submerzija in $f : N \to P$ zvezna preslikava. Pokaži, da je preslikava f gladka natanko takrat, ko je gladka preslikava $f \circ \pi$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo študirali lastnost surjektivnih submerzij, ki spominja na lastnost kvocientne preslikave.

Če je preslikava f gladka, mora biti gladka tudi preslikava $f \circ \pi$, saj je kompozicija dveh gladkih preslikav. Zato nas bo zanimala predvsem trditev v nasprotno smer.

$f \circ \pi$ je gladka $\Rightarrow$ f je gladka:

Da dokažemo, da je preslikava $f : N \to P$ gladka, je dovolj, da najdemo za poljubno točko $q \in N$ neko njeno okolico U, tako da bo $f|_U$ gladka preslikava. Za dani $q \in N$ lahko zaradi surjektivnosti preslikave π najprej najdemo točko $p \in M$, da velja $\pi(p) = q$. Iz lokalne oblike submerzije sledi, da lahko najdemo okolico U za q v N in okolico $V \approx U \times \mathbb{R}^k$ za p v M, tako da se $\pi|_V$ ujema s projekcijo na prvi faktor. Ker je π lokalno projekcija, lahko lokalno najdemo njen prerez $s : U \to V$ s predpisom $s(x) = (x, 0)$. Za ta prerez potem velja $(\pi \circ s)(x) = x$ za vsak $x \in U$. Če ta prerez komponiramo z gladko preslikavo $f \circ \pi$, dobimo gladko preslikavo $(f \circ \pi) \circ s : U \to P$, ki zadošča pogoju

$$((f \circ \pi) \circ s)(x) = f(\pi(s(x))) = f(x)$$

za vsak $x \in U$. Od tod sledi, da je $f|_U$ gladka, kar smo želeli pokazati.

Opomba 1: Če je π gladka surjekcija, ki ni submerzija, trditev v splošnem ne velja več. Kot protiprimer lahko vzamemo preslikavi $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $\pi(x) = x^3$ in $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Njuna kompozicija $f \circ \pi = \mathrm{id}$ je potem gladka, čeprav preslikava f ni odvedljiva v točki $x = 0$.

Opomba 2: Glavni primeri submerzij so vektorski in glavni svežnji, katerih vlakna so med sabo difeomorfna. V splošnem pa se lahko vlakna submerzije od točke do točke razlikujejo. V takšno situacijo na primer pridemo, če submerzijo zožimo na neko odprto podmnožico. $\square$

(13) Pokaži, da je preslikava $i : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$, ki je dana s predpisom

$$i([x : y : z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \left(xy, xz, y^2 - z^2, 2yz\right)$$

gladka injektivna imerzija.

Rešitev: Če preslikavo $i : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ komponiramo s projekcijo $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}P^2$, dobimo gladko preslikavo $i \circ \pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^4$. Ker je π surjektivna submerzija, od tod sledi, da je i gladka preslikava.

Preslikava i je imerzija:

Gladka preslikava je imerzija, če je njen odvod v vsaki točki injektiven. Če izberemo na $\mathbb{R}P^2$ lokalno karto $\phi_x : U_x \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\phi_x([x : y : z]) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

ima preslikava $i \circ \phi_x^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ predpis

$$(i \circ \phi_x^{-1})(y, z) = \frac{1}{1 + y^2 + z^2} \left(y, z, y^2 - z^2, 2yz\right).$$

Odvod te preslikave je enak

$$d(i \circ \phi_x^{-1})_{(y,z)} = \frac{1}{(1 + y^2 + z^2)^2} \begin{bmatrix} 1 + z^2 - y^2 & -2yz \\ -2yz & 1 + y^2 - z^2 \\ 2y(1 + 2z^2) & -2z(1 + 2y^2) \\ 2z(1 + z^2 - y^2) & 2y(1 + y^2 - z^2) \end{bmatrix}.$$

Radi bi pokazali, da ima ta matrika rang 2 za vsak par $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. Pogosto je dovolj, če najdemo kakšno 2×2 podmatriko, ki je povsod nesingularna, a v našem primeru to ni mogoče, zato se bomo morali malce bolj potruditi.

Najprej poglejmo determinanto podmatrike, ki jo tvorita prvi dve vrstici

$$\begin{vmatrix} 1 + z^2 - y^2 & -2yz \\ -2yz & 1 + y^2 - z^2 \end{vmatrix} = (1 + z^2 - y^2)(1 + y^2 - z^2) - 4y^2z^2 = 1 - (y^2 + z^2)^2.$$

Vidimo, da je ta determinanta neničelna povsod razen na enotski krožnici $y^2 + z^2 = 1$. Sedaj moramo pokazati še, da je na tej krožnici vsaj ena izmed ostalih 2×2 podmatrik nesingularna. Determinanta podmatrike, ki jo tvorita prva in četrta vrstica, je na tej krožnici enaka

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 + z^2 - y^2 & -2yz \\ 2z(1 + z^2 - y^2) & 2y(1 + y^2 - z^2) \end{vmatrix} &= 2y(1 + z^2 - y^2)(1 + y^2 - z^2) + 4yz^2(1 + z^2 - y^2), \\ &= 2y(1 + z^2 - y^2)(1 + y^2 + z^2) = 8yz^2. \end{aligned}$$

Obe do zdaj obravnavani podmatriki sta torej hkrati singularni v točkah $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ in $(0,1)$. Preverimo pa lahko, da je v teh štirih točkah nesingularna podmatrika, ki jo tvorita tretja in četrta vrstica. Od tod sledi, da je zožitev preslikave i na odprto podmnožico U_x imerzija. Podobno lahko pokažemo, da sta tudi zožitvi i na U_y in U_z imerziji, od koder sledi, da je i imerzija.

Preslikava i je injektivna:

Recimo, da velja $i([x_1 : y_1 : z_1]) = i([x_2 : y_2 : z_2])$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1$, da pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &= x_2 y_2, \\ x_1 z_1 &= x_2 z_2, \\ y_1^2 - z_1^2 &= y_2^2 - z_2^2, \\ 2y_1 z_1 &= 2y_2 z_2. \end{aligned}$$

Če so vsa števila neničelna, od tod sledi

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}, \ \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_2}{z_1}, \ \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_1}{z_2},$$

zato mora veljati $(x_1, y_1, z_1) = \pm(x_2, y_2, z_2)$ oziroma $[x_1 : y_1 : z_1] = [x_2 : y_2 : z_2]$.

Pokažimo sedaj, da je $x_1 = 0$ natanko tedaj, ko je $x_2 = 0$. Če bi denimo veljalo $x_1 = 0$ in $x_2 \neq 0$, bi lahko od tod iz prvih dveh enačb sklepali, da mora biti $y_2 = z_2 = 0$, nato pa še iz zadnjih dveh, da mora biti tudi $y_1 = z_1 = 0$. Od tod bi sledilo, da je $(x_1, y_1, z_1) = (0,0,0)$, kar pa ne gre. Na podoben način lahko dokažemo tudi, da je $y_1 = 0$ natanko tedaj, ko je $y_2 = 0$ in $z_1 = 0$ natanko tedaj, ko je $z_2 = 0$.

Denimo sedaj na primer, da je $z_1 = z_2 = 0$. Iz prve in tretje enačbe lahko potem izpeljemo, da je $(x_1, y_1, 0) = \pm(x_2, y_2, 0)$ oziroma $[x_1 : y_1 : 0] = [x_2 : y_2 : 0]$. Podoben sklep deluje tudi v primerih, ko je $x_1 = x_2 = 0$ ali $y_1 = y_2 = 0$.

V vsakem primeru torej iz enakosti $i([x_1 : y_1 : z_1]) = i([x_2 : y_2 : z_2])$ sledi, da mora biti $[x_1 : y_1 : z_1] = [x_2 : y_2 : z_2]$, kar pa pomeni, da je preslikava i injektivna.

Opomba: Pri tej nalogi smo spoznali vložitev projektivne ravnine $\mathbb{R}P^2$ v $\mathbb{R}^4$. Nekoliko težje pa je pokazati, da projektivne ravnine ne moremo vložiti v $\mathbb{R}^3$. □

(14) Naj bosta M in N gladki mnogoterosti, $L \subset M$ in $Q \subset N$ imerzirani podmnogoterosti ter $g : N \to M$ gladka preslikava, za katero je $g(Q) \subset L$. Dokaži, da je preslikava $g|_Q : Q \to L$ gladka, če je zvezna.

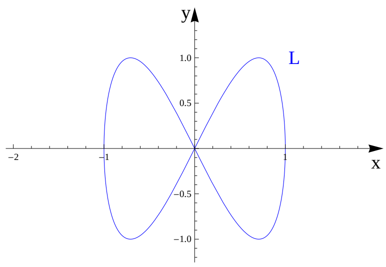
Rešitev: Namen te naloge je, da podrobneje spoznamo pojem imerzirane podmnogoterosti, ki je malce šibkejši od običajnega pojma vložene podmnogoterosti.

Naj bo M gladka mnogoterost dimenzije $\dim(M) = m$ in L podmnožica M. Potem rečemo, da je L *vložena podmnogoterost* M dimenzije l, če za vsak $x \in L$ obstaja odprta okolica U za x v M in difeomorfizem $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, ki množico $U \cap L$ preslika na podmnožico $\mathbb{R}^l \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$. Zožitev tega difeomorfizma potem določa lokalno karto na $U \cap L$. Če je L vložena podmnogoterost in hkrati zaprt podprostor M, ji rečemo *zaprta podmnogoterost*.

Tipični primeri zaprtih podmnogoterosti so vlakna submerzij, kot sta na primer $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ in $\mathrm{SO}(3) \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$. Primeri vloženih podmnogoterosti, ki niso nujno zaprte, pa so odprte podmnožice zaprtih podmnogoterosti.

V obeh omenjenih primerih na množici L vzamemo topologijo in gladko strukturo, ki sta inducirani z M. V teoriji Liejevih grup in v teoriji foliacij pa imamo včasih opravka s slikami injektivnih imerzij, ki niso vložitve. Da lahko obravnavamo tudi takšne primere, definiramo, da je L *imerzirana podmnogoterost* M, če obstaja gladka mnogoterost L' in injektivna imerzija $i_L : L' \to M$, da velja $i(L') = L$. Na L v takem primeru definiramo topologijo in gladko strukturo preko preslikave i_L. V splošnem se ta topologija ne ujema z inducirano topologijo z M.

Kot primer si poglejmo podmnožico $L \subset \mathbb{R}^2$ kot na spodnji sliki.

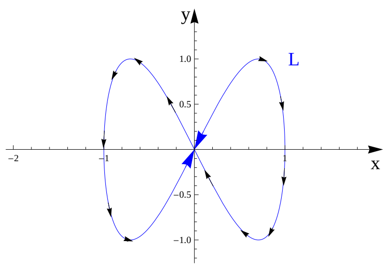


Na L lahko potem definiramo naslednji dve strukturi imerzirane podmnogoterosti.

(1) Definirajmo injektivno imerzijo $\vec{r} : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\vec{r}(t) = (\sin t, \sin 2t).$$

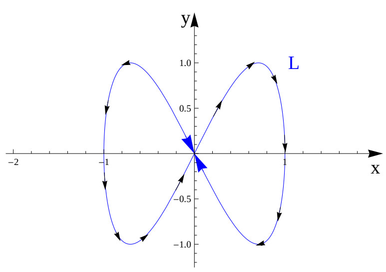
Slika te imerzije je L, vendar pa se topologija, ki jo na L porodi ta imerzija, ne ujema z inducirano topologijo z $\mathbb{R}^2$. Blizu izhodišča so v tej topologiji namreč samo točke, ki ležijo na loku v smeri sodih kvadrantov, točke na loku v smeri lihih kvadrantov pa ne.



(2) Na L lahko definiramo strukturo imerzirane podmnogoterosti tudi preko injektivne imerzije $\vec{r} : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$\vec{r}(t) = (-\sin t, \sin 2t).$$

Sedaj je situacija obratna kot prej, saj so blizu izhodišča točke na loku v smeri lihih kvadrantov.



Če definiramo preslikavo $g : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ s predpisom

$$g(t) = (\sin t, \sin 2t),$$

bo njena slika ležala v L. Zvezna in gladka kot preslikava $g : (-\epsilon, \epsilon) \to L$ pa je samo, če na L vzamemo strukturo imerzirane podmnogoterosti iz drugega primera, v prvem primeru pa ne. V nadaljevanju bomo pokazali, da je gladka preslikava v imerzirano podmnogoterost avtomatično gladka, če je zvezna.

Denimo torej, da sta $Q \subset N$ in $L \subset M$ imerzirani podmnogoterosti, ki sta sliki injektivnih imerzij $i_Q : Q' \to N$ in $i_L : L' \to M$. Predpostavili bomo, da je preslikava $g|_Q : Q \to L$, ki jo interpretiramo kot preslikavo $g|_Q = i_L^{-1} \circ g \circ i_Q$, zvezna, radi pa bi pokazali, da od tod sledi, da je gladka.

Vzemimo poljuben $x \in Q'$. Uporabili bomo lastnost imerzije, da je vsaj lokalno njena slika vedno vložena podmnogoterost, čeprav to ni nujno res globalno. Ker je preslikava i_L imerzija, lahko torej najdemo okolico V' za $i_L^{-1}(g(i_Q(x)))$ v L' in okolico $V \approx V' \times \mathbb{R}^{m-l}$ za $g(i_Q(x))$ v M, da ima $i_L|_{V'} : V' \to V$ obliko

$$i_L|_{V'}(y) = (y, 0).$$

V nasprotno smer pa imamo lokalno gladko projekcijo $p : V \to V'$ s predpisom $p(y, v) = y$. Ker je $g|_Q$ zvezna, lahko najdemo okolico U' za x v Q', da je $g|_Q(U') \subset V'$. Lokalno lahko sedaj izrazimo

$$g|_{U'} = p \circ g \circ i_Q|_{U'},$$

od koder pa sledi, da je zožitev g na U' gladka, zato je $g|_Q$ gladka.

Opomba: Če je L vložena podmnogoterost M, je zožitev zmeraj zvezna in posledično zmeraj gladka. $\square$

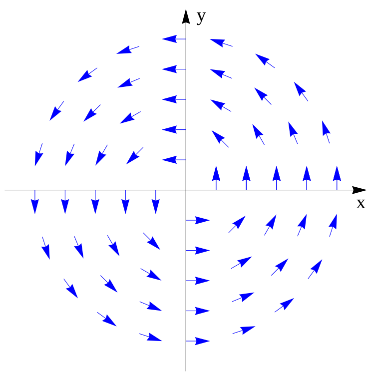
(15) Izračunaj tokove in komutatorje danih vektorskih polj na $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{\partial}{\partial x}, \\ Y &= \tfrac{\partial}{\partial y} + x\tfrac{\partial}{\partial z}, \\ Z &= \tfrac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Rešitev: Vektorska polja lahko interpretiramo na več načinov, odvisno od problema, ki ga študiramo. Najpogostejše so naslednje interpretacije:

(1) Geometrični opis:

Vektorsko polje si pogosto predstavljamo kot polje silnic neke sile, kot sta na primer električno ali pa gravitacijsko polje. Ta polja so večinoma definirana v $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{R}^3$, podamo pa jih po komponentah v obliki $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.



Na splošnih gladkih mnogoterostih se stvari malce zakomplicirajo pri definiciji pojma tangentnega prostora in tangentnega vektorja. V splošnem je vektorsko polje na gladki mnogoterosti M definirano kot prerez tangentnega svežnja TM. Vsako tako vektorsko polje $X \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ lahko v lokalnih koordinatah $(x_1, \ldots, x_m)$ na M zapišemo v obliki

$$X = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_m \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

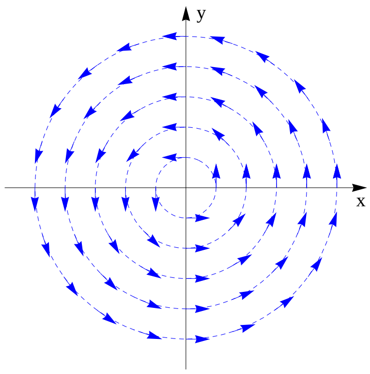
Mislimo si lahko, da tak X ustreza polju $\vec{F} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

(2) Dinamični opis:

Vektorsko polje si lahko predstavljamo tudi kot hitrostno polje neke tekočine, oziroma kot sistem navadnih diferencialnih enačb prvega reda. Če lahko v lokalnih koordinatah vektorsko polje X zapišemo v obliki $X = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_m \frac{\partial}{\partial x_m}$, mu priredimo sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\
\dot{x}_2 &= a_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\
\vdots &= \qquad \vdots \\
\dot{x}_m &= a_m(x_1, x_2, \ldots, x_m).
\end{aligned}$$

Toku tekočine ustreza tok vektorskega polja, ki je družina difeomorfizmov $\Phi_t^X : M \to M$, parametrizirana s $t \in \mathbb{R}$. Če fiksiramo točko $p \in M$, nam preslikava $t \mapsto \Phi_t^X(p)$ definira tokovnico skozi točko p, ki je povsod tangentna na vektorsko polje X.



(3) Algebraični opis:

Na vektorsko polje lahko gledamo tudi kot na linearni parcialni diferencialni operator reda ena oziroma derivacijo. To pomeni, da je vektorsko polje X na mnogoterosti M linearna preslikava $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, ki zadošča pogoju

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

za poljubni funkciji $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Če lahko v lokalnih koordinatah polje X izrazimo v obliki $X = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_m \frac{\partial}{\partial x_m}$, je ta derivacija definirana lokalno s predpisom

$$X(f) = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_m \frac{\partial f}{\partial x_m}.$$

Poglejmo sedaj konkretne primere. Dana tri vektorska polja lahko interpretiramo kot levo invariantna vektorska polja na Heisenbergovi Liejevi grupi, ki je kot mnogoterost enaka $H = \mathbb{R}^3$, množenje pa je definirano s predpisom

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy').$$

Enota za to operacijo je element $e = (0, 0, 0)$. Vektorsko polje $W \in \mathcal{C}^\infty(TH)$ je potem *levo invariantno*, če za poljuben $h \in H$ velja

$$W_h = (dL_h)_e(W_e),$$

kjer je $L_h : H \to H$ leva translacija z elementom h. To pomeni, da je vrednost takšnega polja v poljubni točki natanko določena z vrednostjo v enoti.

V našem primeru so vektorska polja X, Y in Z levo invariantna vektorska polja na H, ki jih določajo tangentni vektorji $\{\frac{\partial}{\partial x}\big|_e, \frac{\partial}{\partial y}\big|_e, \frac{\partial}{\partial z}\big|_e\} \in T_eH$.

Dokažimo na primer, da je vektorsko polje $Y = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$ levo invariantno. Tangentni vektor $\frac{\partial}{\partial y}\big|_e$ lahko predstavimo z gladko potjo $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to H$ s predpisom $\gamma(t) = (0, t, 0)$. Da dobimo vrednost polja Y v točki $h = (x, y, z)$, moramo to pot prestaviti s h in nato izračunati odvod. Tako dobimo

$$(dL_h)_e(\tfrac{\partial}{\partial y}\big|_e) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} h\gamma(t) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}(x, y, z)(0, t, 0) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}(x, y + t, z + xt) = (0, 1, x).$$

Vektor na desni lahko identificiramo z vektorjem $\frac{\partial}{\partial y}\big|_h + x\frac{\partial}{\partial z}\big|_h$, kar pa pomeni, da velja

$$Y_h = (dL_h)_e(\tfrac{\partial}{\partial y}\big|_e).$$

Podobno lahko pokažemo tudi, da sta polji X in Z levo invariantni.

Izračunajmo sedaj tokove danih vektorskih polj. Najprej si poglejmo vektorsko polje $Z = \frac{\partial}{\partial z}$ in pripadajoči sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= 0, \\ \dot{z} &= 1. \end{aligned}$$

To polje predstavlja homogeni tok vzdolž z-osi, ki je definiran s predpisom

$$\Phi_t^Z(x, y, z) = (x, y, z + t).$$

Tokovnice so premice, ki so vzporedne z-osi.

Podobno dobimo, da je tok polja X podan s predpisom

$$\Phi_t^X(x, y, z) = (x + t, y, z),$$

tokovnice pa so premice, ki so vzporedne x-osi.

Za konec poglejmo še tok polja Y. Določa ga sistem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= 1, \\ \dot{z} &= x, \end{aligned}$$

dan pa je s predpisom

$$\Phi_t^Y(x,y,z) = (x, y+t, z+xt).$$

Tokovnice so premice, ki so vzporedne ravnini $y=0$, njihov naklon pa se spreminja vzdolž x-koordinate.

Posebej pomembne so tokovnice skozi enoto. Denimo, da je W levo invariantno vektorsko polje na H. Potem je preslikava $\alpha_W : \mathbb{R} \to H$ s predpisom

$$\alpha_W(t) = \Phi_t^W(e)$$

gladek homomorfizem Liejevih grup, ki mu rečemo tudi enoparametrična podgrupa. Za tokovnico skozi poljubno točko h pa velja

$$\Phi_t^W(h) = h\alpha_W(t),$$

kar pomeni, da lahko dobimo poljubno tokovnico s translacijo tokovnice skozi enoto. V primeru polja Y je tako

$$\alpha_Y(t) = (0,t,0)$$

in

$$\Phi_t^Y(x,y,z) = (x,y+t,z+xt) = (x,y,z)(0,t,0).$$

Komutator vektorskih polj:

Na prostoru vektorskih polj $\mathcal{C}^\infty(TM)$ na gladki mnogoterosti M imamo operacijo, ki na $\mathcal{C}^\infty(TM)$ porodi strukturo Liejeve algebre. Če lahko vektorski polji X in Y lokalno zapišemo v obliki $X = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ in $Y = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, je njun komutator lokalno definiran s predpisom

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^{m} (X(b_i) - Y(a_i)) \tfrac{\partial}{\partial x_i}.$$

Komutator vektorskih polj je spet vektorsko polje.

Komutatorji levo invariantnih vektorskih polj X, Y in Z so:

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \tfrac{\partial}{\partial z} = Z, \\ [X,Z] &= 0, \\ [Y,Z] &= 0. \end{aligned}$$

Tudi komutator lahko interpretiramo na več načinov.

(1) Algebraična interpretacija:

Če na vektorska polja gledamo kot na parcialne diferencialne operatorje reda ena na M, ustreza komutator vektorskih polj ravno algebraičnemu komutatorju operatorjev. To pomeni, da za vsak $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ velja

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Ta pristop se uporablja v nekomutativni geometriji in pa v kvantni mehaniki.

(2) Dinamična interpretacija:

Dinamično lahko komutator vektorskih polj interpretiramo kot približek najnižjega reda za komutator njunih tokov. Poglejmo si to eksplicitno na primeru polj X in Y. Po eni strani je

$$(\Phi_t^Y \circ \Phi_t^X)(x,y,z) = \Phi_t^Y(x+t,y,z) = (x+t, y+t, z+tx+t^2),$$

po drugi pa

$$(\Phi_t^X \circ \Phi_t^Y)(x,y,z) = \Phi_t^X(x,y+t,z+xt) = (x+t, y+t, z+tx).$$

Od tod sledi

$$(\Phi_t^Y \circ \Phi_t^X - \Phi_t^X \circ \Phi_t^Y)(x,y,z) = (0,0,t^2) = t^2[X,Y]_{(x,y,z)}.$$

Komutator tokov nam torej približno pove, kakšna je razlika med kompozicijama tokov v obeh vrstnih redih.

V splošnem imamo za vektorski polji X in Y na M ter $p \in M$ za majhne t aproksimacijo

$$(\Phi_t^Y \circ \Phi_t^X - \Phi_t^X \circ \Phi_t^Y)(p) \approx t^2[X,Y]_p.$$

Če je komutator dveh vektorskih polj na nekem območju enak nič, potem tokova teh vektorskih polj komutirata. Tipični primeri polj, ki komutirajo, so koordinatna vektorska polja v nekih lokalnih koordinatah. $\square$

(16) Na prostoru $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ definirajmo vektorska polja:

$$\begin{aligned} X &= -z\tfrac{\partial}{\partial y} + y\tfrac{\partial}{\partial z}, \\ Y &= -x\tfrac{\partial}{\partial z} + z\tfrac{\partial}{\partial x}, \\ Z &= -y\tfrac{\partial}{\partial x} + x\tfrac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

(a) Izračunaj tokove in komutatorje vektorskih polj X, Y in Z.

(b) Za vsak $p \in M$ naj bo $F_p = \mathrm{Lin}\{X_p, Y_p, Z_p\} \subset T_pM$. Pokaži, da je

$$F = \bigcup_{p\in M} F_p$$

involutiven podsveženj TM ranga 2 in nato opiši liste foliacije na M, ki jo določa F.

Rešitev: (a) Vektorskemu polju $X = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$ pripada sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= -z, \\ \dot{z} &= y. \end{aligned}$$

To je linearen sistem diferencialnih enačb, ki ga lahko zapišemo tudi v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Matriko

$$W_x = W(1,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

smo že spoznali, saj predstavlja infinitezimalni generator vrtenja okoli x-osi. Tok, ki ga določa to vektorsko polje, lahko predstavimo z matriko e^{tW_x}, kar se eksplicitno izrazi v obliki:

$$\Phi_t^X(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Tokovnice tega vektorskega polja so krožnice s središči na x-osi in ki ležijo v normalnih ravninah na x-os. Točke na x-osi so stacionarne točke.

Podobno lahko izračunamo tudi tokova polj Y in Z:

$$\Phi_t^Y(x,y,z) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$\Phi_t^Z(x,y,z) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

ki predstavljata vrtenje okoli y oziroma z-osi.

Komutatorji vektorskih polj X, Y in Z so:

$$\begin{aligned} [X,Y] &= y\tfrac{\partial}{\partial x} - x\tfrac{\partial}{\partial y} = -Z, \\ [Y,Z] &= z\tfrac{\partial}{\partial y} - y\tfrac{\partial}{\partial z} = -X, \\ [Z,X] &= x\tfrac{\partial}{\partial z} - z\tfrac{\partial}{\partial x} = -Y. \end{aligned}$$

Liejeva algebra, ki jo generirajo vektorska polja X, Y in Z, je izomorfna Liejevi algebri grupe SO(3).

Poglejmo še zvezo med komutatorjem polj X in Y ter komutatorjem njunih tokov. Tok polja X lahko linearno v t aproksimiramo v obliki

$$\Phi_t^X(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \approx \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Podobno dobimo aproksimacijo

$$\Phi_t^Y(x,y,z) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Aproksimaciji kompozitumov teh dveh tokov sta:

$$\begin{aligned} (\Phi_t^Y \circ \Phi_t^X)(x,y,z) &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t^2 & t \\ 0 & 1 & -t \\ -t & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \\ (\Phi_t^X \circ \Phi_t^Y)(x,y,z) &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ t^2 & 1 & -t \\ -t & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Opazimo lahko, da je njuna razlika enaka

$$(\Phi_t^Y \circ \Phi_t^X - \Phi_t^X \circ \Phi_t^Y)(x,y,z) \approx t^2 \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} = t^2 [X,Y]_{(x,y,z)}.$$

(b) Definirajmo sedaj za vsak $p \in M$ linearni podprostor

$$F_p = \mathrm{Lin}\{X_p, Y_p, Z_p\} \subset T_pM.$$

Radi bi pokazali, da je $\dim(F_p) = 2$ za vsak $p \in M$. Najprej opomnimo, da je $F_p = \mathrm{im}(A)$, kjer smo označili

$$A = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika A je antisimetrična, preverimo pa lahko, da je:

$$\ker(A) = \mathrm{Lin}\{(x, y, z)\},$$
$$\mathrm{im}(A) = \ker(A)^{\perp}.$$

Za vsak $p \in M$ je F_p torej ravnina, ki ima vektor p za normalo. Unija vseh teh ravnin tvori gladko polje ravnin, ki mu rečemo tudi *distribucija* ranga 2 na M.

Sedaj bomo pokazali, da je F *involutiven* podsveženj tangentnega svežnja TM. To pomeni, da je za vsaki vektorski polji $W_1, W_2 \in \mathcal{C}^\infty(TF)$ tudi polje $[W_1, W_2] \in \mathcal{C}^\infty(TF)$, oziroma, da je komutator dveh tangentnih polj na F spet polje, ki je tangentno na F. V primeru, ko je podsveženj F določen z vektorskimi polji $W_1, W_2, \ldots, W_k$, je dovolj, da preverimo, da lahko vsak komutator $[W_i, W_j]$ zapišemo kot linearno kombinacijo

$$[W_i, W_j] = a_1W_1 + a_2W_2 + \ldots + a_kW_k,$$

za neke gladke funkcije $a_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$. V našem primeru je $[X, Y] = -Z$, $[Y, Z] = -X$ in $[Z, X] = -Y$, kar pomeni, da je F involutiven podsveženj TM. Po Frobeniusovem izreku od tod sledi, da lahko mnogoterost M zapišemo kot unijo povezanih imerziranih podmnogoterosti M, ki so tangentne na F. Rečemo jim *listi* foliacije na M, ki jo porodi podsveženj F.

Listi foliacije so lokalno vedno vlakna neke submerzije, včasih pa je to res tudi globalno. Preverimo torej, če obstaja gladka submerzija $f : M \to \mathbb{R}$, katere vlakna so tangentna na F. Z drugimi besedami to pomeni, da mora biti

$$\ker(df_p) = F_p$$

za vsak $p \in M$. Iščemo torej funkcijo f, katere gradient v točki p kaže v smeri vektorja p. Takšna je na primer funkcija

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nivojnice te funkcije oziroma listi iskane foliacije so potem sfere

$$L_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ R > 0\}.$$

□

(17) Naj bosta M in N gladki mnogoterosti, $g : M \to N$ gladka preslikava in $X, Y \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ ter $X', Y' \in \mathcal{C}^\infty(TN)$ gladka vektorska polja. Pokaži, da sta polji $[X, Y]$ in $[X', Y']$ v g-relaciji, če so v g-relaciji X in X' ter Y in Y'.

Rešitev: Vektorski polji $X \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ in $X' \in \mathcal{C}^\infty(TN)$ sta v *g-relaciji*, če za vsak $x \in M$ velja

$$dg_x(X_x) = X'_{g(x)}.$$

Preden dokažemo trditev naloge, si poglejmo dva pomembna posebna primera.

(1) Denimo, da je $i : M \to N$ injektivna imerzija. Vektorsko polje $X \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ je potem v i-relaciji s poljem $X' \in \mathcal{C}^\infty(TN)$ natanko takrat, ko je X zožitev polja X' na M. Trditev naloge potem pravi, da je vseeno, ali najprej izračunamo komutator dveh polj in ga zožimo, ali pa izračunamo komutator zožitev.

(2) Naj bo sedaj $\pi : M \to N$ surjektivna submerzija. Če je vektorsko polje $X \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ v π-relaciji s poljem $X' \in \mathcal{C}^\infty(TN)$, rečemo, da je vektorsko polje X projektabilno, polje X' pa lahko smatramo kot njegovo projekcijo. Iz trditve naloge sledi, da je komutator projektabilnih vektorskih polj projektabilno vektorsko polje, ki se projicira na komutator projekcij.

Za dokaz trditve najprej opomnimo, da je pogoj $dg_x(X_x) = X'_{g(x)}$ ekvivalenten pogoju, da za vsako $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ velja

$$X(f \circ g) = X'(f) \circ g.$$

Trditev naloge potem sledi iz enakosti:

$$\begin{aligned}
[X,Y](f \circ g) &= X(Y(f \circ g)) - Y(X(f \circ g)), \\
&= X(Y'(f) \circ g) - Y(X'(f) \circ g), \\
&= X'(Y'(f)) \circ g - Y'(X'(f)) \circ g, \\
&= \big(X'(Y'(f)) - Y'(X'(f))\big) \circ g, \\
&= [X',Y'](f) \circ g.
\end{aligned}$$

$\square$

2 Liejeve grupe

(1) Ortogonalna in specialna ortogonalna grupa sta definirani s pogojema:

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(n) &= \{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid Q^T Q = \mathrm{I}\},\\ \mathrm{SO}(n) &= \{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid Q^T Q = \mathrm{I},\, \det(Q) = 1\}.\end{aligned}$$

(a) Poišči izomorfizem Liejevih grup $\mathrm{O}(3)$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(3)$.

(b) Pokaži, da grupi $\mathrm{O}(2)$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2)$ nista izomorfni.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo študirali razcep Liejevih grup na grupo komponent in pa na komponento enote.

Spomnimo se, da je gladka mnogoterost M *povezana*, če za poljubna $p, q \in M$ lahko najdemo pot $\gamma : [0,1] \to M$, za katero je $\gamma(0) = p$ in $\gamma(1) = q$. Če M ni povezana, označimo s $\pi_0(M)$ množico povezanih komponent M.

Liejevo grupo lahko razcepimo na povezan in pa na diskreten del. Komponenta enote grupe G je zmeraj edinka v G, ki jo označimo z G_0. Grupo komponent $\pi_0(G)$ Liejeve grupe G nato dobimo kot faktorsko grupo G/G_0. Poleg izomorfnostnih tipov teh dveh grup je pomemben tudi podatek, kako iz njiju konstruiramo celo grupo G. V večini zanimivih primerov je Liejeva grupa direktni ali pa semidirektni produkt komponente enote in pa grupe komponent.

Liejeva grupa ortogonalnih matrik $\mathrm{O}(n)$ ima dve komponenti. Od tod sledi, da je grupa komponent $\pi_0(\mathrm{O}(n))$ izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2$. Komponenta enote je grupa $\mathrm{SO}(n)$, ki vsebuje matrike z determinanto 1, medtem ko so v drugi komponenti matrike z determinanto -1.

(a) Elemente grupe $\mathrm{O}(3)$ lahko geometrijsko interpretiramo na naslednja dva načina:

1. Če je $\det(Q) = 1$, predstavlja matrika Q rotacijo za nek kot okoli neke osi v prostoru.

- Lastne vrednosti matrike Q so $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = e^{\pm i\phi}$ za nek $\phi \in [0, 2\pi)$.
- Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju Q, ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = 1$.
- Kot vrtenja je $\pm\phi$, odvisno od orientacije osi.

2. Če je $\det(Q) = -1$, predstavlja matrika Q kompozicijo rotacije za nek kot okoli neke osi v prostoru in pa zrcaljenja preko ravnine, ki ima to os za normalo.

- Lastne vrednosti matrike Q so $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = e^{\pm i\phi}$ za nek $\phi \in [0, 2\pi)$.
- Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju Q, ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = -1$.
- Kot vrtenja je $\pm\phi$, odvisno od orientacije osi.
- Normala ravnine zrcaljenja kaže v smeri osi vrtenja.

Sedaj bomo eksplicitno konstruirali izomorfizem Liejevih grup

$$\alpha : \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{O}(3),$$

ki bo elemente oblike $(0, R)$ preslikal v rotacije, elemente oblike $(1, R)$ pa v zrcaljenja. Eksplicitno je definiran s predpisom

$$\alpha(k, R) = (-\mathrm{I})^k R.$$

Pokažimo najprej, da je tako definirana preslikava α homomorfizem grup. To sledi iz enakosti:

$$\begin{aligned}\alpha((k_1, R_1)(k_2, R_2)) &= \alpha(k_1 + k_2, R_1 R_2) = (-\mathrm{I})^{k_1+k_2} R_1 R_2,\\ \alpha(k_1, R_1)\alpha(k_2, R_2) &= (-\mathrm{I})^{k_1} R_1 (-\mathrm{I})^{k_2} R_2 = (-\mathrm{I})^{k_1+k_2} R_1 R_2.\end{aligned}$$

Jedro homomorfizma α je trivialno, zato moramo pokazati samo še, da je surjektiven. Izberimo poljuben $Q \in \mathrm{O}(3)$. Če je $\det(Q) = 1$, je $Q \in \mathrm{SO}(3)$ in velja $Q = \alpha(0, Q)$. Če pa je $\det(Q) = -1$, pa je $-Q \in \mathrm{SO}(3)$ in velja $Q = \alpha(1, -Q)$.

To pomeni, da je grupa $\mathrm{O}(3)$ izomorfna direktnemu produktu komponente enote in pa grupe komponent

$$\mathrm{O}(3) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(3).$$

(b) Sedaj bomo pokazali, da analogen izomorfizem ne obstaja v dveh dimenzijah.

Grupa $\mathrm{O}(2)$ ima dve komponenti. V komponenti enote $\mathrm{SO}(2)$ so rotacije, v preostali komponenti pa zrcaljenja.

Rotacijo za kot $\phi \in [0, 2\pi]$ v pozitivni smeri lahko predstavimo z rotacijsko matriko

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Rotacijske matrike imajo determinanto enako 1.

Zrcaljenje čez premico skozi izhodišče, ki seka abscisno os pod kotom ϕ, pa lahko po drugi strani predstavimo z matriko

$$Z_\phi = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}.$$

Te matrike imajo determinanto enako -1.

Da grupi $\mathrm{O}(2)$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2)$ nista izomorfni, sledi iz dejstva, da je $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2)$ komutativna, $\mathrm{O}(2)$ pa nekomutativna grupa. Rotacije sicer komutirajo med sabo, medtem ko za zrcaljenja velja zveza

$$Z_{\phi_2} \circ Z_{\phi_1} = R_{2(\phi_2 - \phi_1)}.$$

Dve različni zrcaljenji torej nikoli ne komutirata.

Čeprav grupi $\mathrm{O}(2)$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2)$ nista izomorfni, pa sta med sabo difeomorfni. Eksplicitni difeomorfizem je na primer preslikava $\alpha : \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{O}(2)$, ki je definirana s predpisom

$$\alpha(k, R) = (Z_{\pi/4})^k R.$$

Matrika

$$Z_{\pi/4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zamenja med sabo vlogo x in y koordinate, kar pomeni, da je $(Z_{\pi/4})^2 = \mathrm{I}$. Označimo z $\mathbb{Z}_2$ podgrupo $\mathrm{O}(2)$, ki vsebuje matriki I in $Z_{\pi/4}$. Potem imata podgrupi $\mathbb{Z}_2$ in $\mathrm{SO}(2)$ grupe $\mathrm{O}(2)$ naslednje lastnosti:

· $\mathrm{SO}(2)$ je edinka, $\mathbb{Z}_2$ pa podgrupa,

· $\mathrm{SO}(2) \cap \mathbb{Z}_2 = \{\mathrm{I}\}$,

· $\mathbb{Z}_2 \cdot \mathrm{SO}(2) = \mathrm{O}(2)$.

Kadar v splošnem dve podgrupi dane grupe zadoščata tem lastnostim, rečemo, da je grupa semidirektni produkt teh dveh podgrup in to označimo

$$\mathrm{O}(2) = \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathrm{SO}(2).$$

Opomba: Za $n > 3$ lahko na analogen način pokažemo, da velja:

· če je n sod, je $\mathrm{O}(n) \cong \mathbb{Z}_n \ltimes \mathrm{SO}(n)$,

· če je n lih, je $\mathrm{O}(n) \cong \mathbb{Z}_n \times \mathrm{SO}(n)$.

Za splošno Liejevo grupo G pa imamo zmeraj kratko eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow G \longrightarrow \pi_0(G) \longrightarrow 0,$$

kjer je G_0 povezana komponenta enote, $\pi_0(G)$ pa diskretna grupa komponent grupe G. Liejeva grupa G je izomorfna semidirektnemu produktu komponente enote in pa grupe komponent natanko takrat, ko je zgornje eksaktno zaporedje razcepno. To pomeni, da lahko v grupi G najdemo izomorfno kopijo grupe $\pi_0(G)$, ki vsebuje natanko en element iz vsake komponente grupe G. Če je ta kopija grupe komponent hkrati edinka v G, dobimo direktni produkt. $\square$

(2) Opiši strukturo Lorentzove grupe $\mathrm{O}(1,1)$.

Rešitev: V Lorentzovi grupi $\mathrm{O}(1,1)$ so matrike oblike

$$\mathrm{O}(1,1) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^T\, \mathrm{I}_{1,1}\, A = \mathrm{I}_{1,1}\},$$

kjer je

$$\mathrm{I}_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrika, ki na $\mathbb{R}^2$ porodi Lorentzovo metriko. Če koordinate na $\mathbb{R}^2$ označimo s (t,x), so v grupi $\mathrm{O}(1,1)$ ravno matrike A, za katere velja

$$(t')^2 - (x')^2 = t^2 - x^2.$$

Pri tem smo označili $\vec{r}\,' = A\vec{r}$.

Zapišimo sedaj poljubno matriko $A \in \mathrm{O}(1,1)$ v obliki

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}.$$

Pogoj $A^T\, \mathrm{I}_{1,1}\, A = \mathrm{I}_{1,1}$ se potem prevede v sistem enačb:

$$\begin{aligned} x_{11}^2 - x_{21}^2 &= 1, \\ x_{11}x_{12} - x_{21}x_{22} &= 0, \\ x_{22}^2 - x_{12}^2 &= 1. \end{aligned}$$

Prva in tretja enačba nam povesta, da velja $|x_{11}| \geq 1$ in $|x_{22}| \geq 1$. Če to upoštevamo, lahko dani sistem prepišemo v obliko:

$$\begin{aligned} x_{11}^2 &= 1 + x_{21}^2, \\ \tfrac{x_{12}}{x_{22}} &= \tfrac{x_{21}}{x_{11}}, \\ x_{22}^2 &= 1 + x_{12}^2. \end{aligned}$$

Poleg tega iz pogoja $A^T\, \mathrm{I}_{1,1}\, A = \mathrm{I}_{1,1}$ avtomatično sledi, da je $\det(A) = \pm 1$. V nadaljevanju bomo opisali komponento enote Lorenztove grupe, ki jo označimo z $\mathrm{SO}^+(1,1)$, nato pa še grupo komponent.

Komponenta enote:

V komponenti enote $\mathrm{SO}^+(1,1)$ Lorentzove grupe so matrike, ki jih lahko povežemo s potjo v Lorentzovi grupi do identične matrike. Po eni strani to pomeni, da imajo vse matrike v komponenti enote determinanto enako 1, ker pa velja $|x_{11}| \geq 1$ in $|x_{22}| \geq 1$, pa mora za vse te matrike veljati še $x_{11} \geq 1$ in $x_{22} \geq 1$.

Izkaže se, da je Lorentzove matrike pametno parametrizirati s hiperboličnimi funkcijami. Ker hiperbolični sinus predstavlja difeomorfizem $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, lahko definiramo:

$$\begin{aligned} x_{21} &= \operatorname{sh} \alpha, \\ x_{12} &= \operatorname{sh} \alpha' \end{aligned}$$

za neka enolično določena $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Iz enačb $x_{11}^2 = 1 + x_{21}^2$ in $x_{22}^2 = 1 + x_{12}^2$ potem z upoštevanjem neenakosti $x_{11} \geq 1$ in $x_{22} \geq 1$ sledi:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \operatorname{ch} \alpha, \\ x_{22} &= \operatorname{ch} \alpha'. \end{aligned}$$

Enakost $\frac{x_{12}}{x_{22}} = \frac{x_{21}}{x_{11}}$ se potem prepiše v obliko $\operatorname{th} \alpha' = \operatorname{th} \alpha$. Ker je hiperbolični tangens bijektivna funkcija, od tod sledi $\alpha' = \alpha$. To pomeni, da je vsaka matrika $A \in \mathrm{SO}^+(1,1)$ oblike

$$A = H_\alpha = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \alpha & \operatorname{sh} \alpha \\ \operatorname{sh} \alpha & \operatorname{ch} \alpha \end{bmatrix}$$

za nek enolično določen $\alpha \in \mathbb{R}$. Po analogiji z rotacijami Evklidske ravnine rečemo matriki H_α hiperbolična rotacija. Kotu α včasih v povezavi s specialno teorijo relativnosti rečemo rapidnost. Če namreč koordinatna sistema (t', x') in (t, x) predstavljata dva opazovalca, ki se gibljeta z relativno hitrostjo v, potem v enotah, v katerih je $c = 1$, velja:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \alpha &= \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ \operatorname{ch} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ \operatorname{th} \alpha &= v. \end{aligned}$$

Preverimo lahko, da velja $H_{\alpha_1} \circ H_{\alpha_2} = H_{\alpha_1 + \alpha_2}$, od koder sledi, da imamo izomorfizem

$$\mathrm{SO}^+(1,1) \cong \mathbb{R}.$$

Matrikam v $\mathrm{SO}^+(1,1)$ rečemo prave, ortohrone Lorentzove transformacije.

Grupa komponent:

Parametra, ki določata, v kateri komponenti leži Lorentzova matrika, sta predznaka členov x_{11} in x_{22}. Označimo matrike

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{PT} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poljubno Lorentzovo matriko lahko s potjo povežemo do tiste izmed teh štirih matrik, ki ima isto predznačena diagonalna člena. Zaradi pogojev na diagonalna člena je tudi jasno, da nobenih dveh izmed teh matrik ne moremo povezati s potjo. Od tod sledi, da ima Lorentzova grupa štiri komponente, katerih predstavniki so zgornje štiri matrike.

Kot smo že omenili, so v komponenti enote prave, ortohrone Lorentzove transformacije. V komponenti matrike P so matrike, ki obrnejo orientacijo prostora, v komponenti T so matrike, ki obrnejo smer časa, medtem ko so v komponenti matrike PT tiste matrike, ki obrnejo orientacijo prostora in smer časa.

Te štiri matrike tvorijo podgrupo Lorentzove grupe, ki je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Podobno kot pri grupi $\mathrm{O}(2)$ lahko pokažemo, da velja

$$\mathrm{O}(1,1) \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \ltimes \mathrm{SO}^+(1,1).$$

□

(3) Naj bo $\mathrm{O}(n, \mathrm{B}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, A^T \mathrm{B} A = \mathrm{B}\}$, kjer je $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva simetrična ali pa antisimetrična matrika. Pokaži, da je $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ Liejeva grupa.

Rešitev: Grupa $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ je grupa matrik, ki ohranjajo strukturo, ki jo na prostoru $\mathbb{R}^n$ določa matrika B. Do izomorfizma natančno dobimo na ta način naslednje grupe:

(1) V primeru, ko je $B = \mathrm{I}_n$, dobimo grupo

$$\mathrm{O}(n) = \{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, Q^T Q = \mathrm{I}\}$$

ortogonalnih matrik. To so linearne izometrije Evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$. Kot smo že videli, ima grupa $\mathrm{O}(n)$ dve komponenti, komponenta enote pa je grupa $\mathrm{SO}(n)$. Dimenzija grupe $\mathrm{O}(n)$ je enaka $\frac{n(n-1)}{2}$.

(2) V primeru, ko je $B = \mathrm{I}_{p,q}$, kjer je $n = p + q$, dobimo posplošeno Lorentzovo grupo

$$\mathrm{O}(p, q) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, A^T \,\mathrm{I}_{p,q}\, A = \mathrm{I}_{p,q}\}.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $I_{p,q}$ matrika, ki jo lahko zapišemo v bločni obliki

$$\mathrm{I}_{p,q} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_q \end{bmatrix}.$$

Te matrike ohranjajo Lorentzovo psevdometriko na prostoru $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, ki ima p časovnih in q prostorskih dimenzij. Grupa $\mathrm{O}(p, q)$ ima štiri komponente, komponenta enote $\mathrm{SO}^+(p, q)$ pa sestoji iz matrik, ki ohranjajo tako orientacijo časa kot orientacijo prostora. Dimenzija grupe $\mathrm{O}(p, q)$ je enaka $\frac{n(n-1)}{2}$.

(3) Naj bo sedaj Ω standardna simplektična matrika, ki jo zapišemo v obliki

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Simplektična grupa

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \,|\, A^T \Omega A = \Omega\}$$

potem sestoji iz matrik, ki ohranjajo simplektično formo na prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. To so ravno matrike, ki ohranjajo strukturo hamiltonskih enačb. Simplektična grupa je povezana, njena dimenzija pa je $2n^2 + n$.

Da je poljubna grupa $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ izomorfna eni izmed teh, sledi iz naslednje opazke:

· Če je $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična, obrnljiva matrika, je po Sylvestrovem izreku o inerciji kongruentna diagonalni matriki oblike $\mathrm{I}_{p,q}$. To pomeni, da obstaja matrika P, da velja

$$\mathrm{B} = P^T \,\mathrm{I}_{p,q}\, P.$$

· Če je $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ antisimetrična, obrnljiva matrika, je kongruentna matriki Ω. Torej obstaja matrika P, da velja
$$\mathrm{B} = P^T \Omega P.$$
Opomnimo še, da je v lihih dimenzijah vsaka antisimetrična matrika izrojena, zato so za nas zanimive samo sode dimenzije.

Dokaza, da je $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ Liejeva grupa, sta v primerih, ko je B simetrična ali pa antisimetrična, analogna. Zato denimo, da je $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ antisimetrična, obrnljiva matrika in naj velja $\mathrm{B} = P^T \Omega P$. Vzemimo poljuben $A \in \mathrm{O}(n, \mathrm{B})$. Po definiciji je potem $A^T \mathrm{B} A = \mathrm{B}$. Če upoštevamo zvezo $\mathrm{B} = P^T \Omega P$, od tod sledi:

$$\begin{aligned} A^T (P^T \Omega P) A &= P^T \Omega P, \\ P^{-T} A^T P^T \Omega P A P^{-1} &= \Omega, \\ (PAP^{-1})^T \Omega P A P^{-1} &= \Omega. \end{aligned}$$

Vidimo, da je torej $PAP^{-1} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Konjugiranje z obrnljivo matriko P je torej gladek izomorfizem Liejeve grupe $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$, ki grupo $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ preslika na simplektično grupo $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Ker je simplektična grupa Liejeva grupa, je torej tudi $\mathrm{O}(n, \mathrm{B})$ Liejeva grupa. Eksplicitno pa velja

$$\mathrm{O}(n, \mathrm{B}) = P^{-1} \cdot \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cdot P.$$

Analogen sklep deluje tudi v primeru, ko je matrika B simetrična. □

(4) (a) Dokaži, da je eksponentna preslikava na Heisenbergovi grupi difeomorfizem.
(b) Dokaži, da je eksponentna preslikava na grupi $\mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$ difeomorfizem.
(c) Dokaži, da je eksponentna preslikava na grupi $\mathrm{U}(n)$ surjektivna, ni pa injektivna.

Rešitev: Naj bo G Liejeva grupa in $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Liejevo algebro lahko opišemo na naslednje ekvivalentne načine

$$\mathfrak{g} = T_e G \longleftrightarrow \{\text{levo invariantna vektorska polja na } G\} \longleftrightarrow \{\text{gladki homomorfizmi } \mathbb{R} \to G\}.$$

Tangentnemu vektorju $W \in T_e G$ pri tej korespondenci pripada levo invariantno vektorsko polje W^L na G, ki jo določeno s predpisom

$$W^L_g = (dL_g)_e(W),$$

tokovnica polja W^L skozi enoto e pa nato definira gladek homomorfizem $\alpha_W : \mathbb{R} \to G$, ki je dan s predpisom
$$\alpha_W(t) = \Phi_t^{W^L}(e).$$
Eksponentna preslikava $\exp : \mathfrak{g} \to G$ je sedaj definirana s predpisom

$$\exp(W) = \alpha_W(1)$$

za poljuben $W \in \mathfrak{g}$. Da se pokazati, da je eksponentna preslikava gladka in da neko okolico $0 \in \mathfrak{g}$ preslika difeomorfno na neko okolico $e \in G$. Pri tej nalogi pa bomo videli, da je pogosto celo difeomorfizem ali pa vsaj surjekcija.

Eksponentna preslikava na Heisenbergovi grupi:

Spomnimo se, da je Heisenbergova grupa H difeomorfna $\mathbb{R}^3$ z grupno operacijo

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy')$$

in enoto $e = (0,0,0)$. Eksponentno preslikavo na H bomo izračunali na dva načina. Najprej jo bomo za vajo izračunali po definiciji, nato pa še s pomočjo vložitve v matrično grupo.

Vzemimo poljuben $W \in \mathfrak{h}$. Zapišemo ga lahko v obliki

$$W = a\frac{\partial}{\partial x}\Big|_e + b\frac{\partial}{\partial y}\Big|_e + c\frac{\partial}{\partial z}\Big|_e = (a,b,c)$$

za neke enolično določene $a,b,c \in \mathbb{R}$. Tangentni vektor W bomo sedaj najprej razširili do levo invariantnega polja W^L na G. Naj bo $h = (x,y,z)$. Ker je $W = \dot{\gamma}(0)$ za gladko pot $\gamma(t) = (at, bt, ct)$, je potem

$$W_h^L = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} h\gamma(t) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}(x,y,z)(at,bt,ct) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}(x+at, y+bt, z+ct+bxt) = (a,b,c+bx).$$

Tok polja W^L je potem določen s sistemom diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a, \\ \dot{y} &= b, \\ \dot{z} &= c + bx. \end{aligned}$$

Izračunamo lahko, da velja

$$\Phi_t^{W^L}(x,y,z) = (x+at, y+bt, z+ct+bxt+\tfrac{1}{2}abt^2).$$

Tokovnica skozi enoto $e = (0,0,0)$ je homomorfizem grup $\alpha_W : \mathbb{R} \to H$, ki je določen s predpisom

$$\alpha_W(t) = \Phi_t^{W^L}(0,0,0) = (at, bt, ct + \tfrac{1}{2}abt^2).$$

Od tod dobimo predpis za eksponentno preslikavo

$$\exp(a,b,c) = (a,b,c+\tfrac{1}{2}ab).$$

Preverimo lahko, da je $\exp : \mathfrak{h} \to H$ difeomorfizem z inverzom $\log : H \to \mathfrak{h}$, ki je dan s predpisom

$$\log(x,y,z) = (x,y,z-\tfrac{1}{2}xy).$$

Sedaj bomo eksponentno preslikavo izračunali še s pomočjo vložitve

$$\rho : H \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$$

s predpisom

$$\rho(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

To pomeni, da lahko Heisenbergovo grupo in algebro ekvivalentno definiramo s predpisom:

$$\begin{aligned} H &= \left\{ A = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \;\middle|\; x,y,z \in \mathbb{R}^3 \right\}, \\ \mathfrak{h} &= \left\{ W = \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R}^3 \right\}. \end{aligned}$$

V matričnih Liejevih grupah je eksponentna preslikava definirana z eksponentno vrsto

$$\exp(W) = e^W = \mathrm{I} + W + \frac{W^2}{2!} + \frac{W^3}{3!} + \dots$$

V našem primeru je matrika W nilpotentna in velja $W^3 = 0$. Od tod sledi

$$e^W = \mathrm{I} + W + \frac{W^2}{2!} = \begin{bmatrix} 1 & a & c + \frac{1}{2}ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da smo dobili isti rezultat kot pri izračunu eksponentne preslikave po definiciji.

Eksponentna preslikava na grupi $\mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$:

Grupa $\mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$ je grupa vseh zgornje trikotnih matrik z enicami po diagonali. Za vsak $n \geq 2$ je grupa $\mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$ enostavno povezana in nilpotentna. Kot pri Heisenbergovi grupi tudi v primeru grupe $\mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$ eksponentna preslikava definira difeomorfizem

$$\exp : \mathfrak{ut}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$$

s predpisom

$$\exp(W) = \mathrm{I} + W + \frac{W^2}{2!} + \frac{W^3}{3!} + \ldots + \frac{W^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Inverz eksponentne preslikave pa je logaritemska preslikava

$$\log : \mathrm{UT}(n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{ut}(n, \mathbb{R})$$

s predpisom

$$\log(A) = (A - \mathrm{I}) - \frac{(A - \mathrm{I})^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{(A - \mathrm{I})^{n-1}}{n-1}.$$

Eksponentna preslikava na unitarni grupi $\mathrm{U}(n)$:

Unitarna grupa

$$\mathrm{U}(n) = \{Q \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid Q^* Q = \mathrm{I}\}$$

je grupa vseh kompleksnih unitarnih matrik. Njena Liejeva algebra je algebra

$$\mathfrak{u}(n) = \{W \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid W^* + W = 0\}$$

vseh antihermitskih matrik. Vsaka matrika $W \in \mathfrak{u}(n)$ ima imaginarne lastne vrednosti. Če so vse lastne vrednosti matrike W oblike $2k\pi i$, je $e^W = \mathrm{I}$, od koder sledi, da eksponentna preslikava ni injektivna.

Pokažimo sedaj, da je eksponentna preslikava na grupi $\mathrm{U}(n)$ surjektivna. Poljubno matriko $Q \in \mathrm{U}(n)$ lahko diagonaliziramo v obliki

$$Q = PDP^*,$$

kjer je P unitarna matrika, matrika D pa je diagonalna, na diagonali pa ima lastne vrednosti matrike Q. Ker je Q unitarna, so njene lastne vrednosti oblike $e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, \ldots, e^{i\lambda_n}$ za neka realna števila λ_k. Če sedaj definiramo diagonalno matriko D', ki ima po diagonali vrednosti $i\lambda_1, i\lambda_2, \ldots, i\lambda_n$, bo $W = PD'P^* \in \mathfrak{u}(n)$ in $\exp(W) = Q$.

Opomba: Nekoliko težje je pokazati, da je eksponentna preslikava difeomorfizem natanko tedaj, ko je G enostavno povezana rešljiva Liejeva grupa. Če je grupa G povezana in rešljiva, pa je eksponentna preslikava krovna projekcija. Če je grupa G kompaktna in povezana, je eksponentna preslikava zmeraj surjektivna, nikoli pa injektivna. $\square$

(5) Opiši adjungirani reprezentaciji na Liejevi algebri $\mathfrak{so}(3)$.

Rešitev: Naj bo G Liejeva grupa in $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Adjungirana reprezentacija Liejeve grupe G na Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ je homomorfizem Liejevih grup

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),$$

ki je definiran s predpisom

$$\mathrm{Ad}_g(X) = \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\, g e^{tX} g^{-1}.$$

Če je G matrična Liejeva grupa, se ta predpis poenostavi v

$$\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}.$$

Pri tem smo z $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ označili grupo avtomorfizmov Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Če adjungirano reprezentacijo Liejeve grupe odvajamo, dobimo adjungirano reprezentacijo Liejeve algebre

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g}),$$

ki je definirana s predpisom

$$\mathrm{ad}_Y(X) = [Y, X].$$

Liejeva algebra grupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ je Liejeva algebra derivacij algebre $\mathfrak{g}$, ki jo označimo z $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Derivacijam, ki so v sliki preslikave ad, rečemo notranje derivacije.

Adjungirana reprezentacija Liejeve grupe SO(3) na $\mathfrak{so}(3)$:

Pri računu bomo uporabili izomorfizem Liejevih algeber $(\mathbb{R}^3, \times) \cong \mathfrak{so}(3)$, ki vektorju $\vec{\omega} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ priredi antisimetrično matriko

$$W(\vec{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(3).$$

Ker je SO(3) matrična Liejeva grupa, za vsak $Q \in \mathrm{SO}(3)$ velja

$$\mathrm{Ad}_Q(W(\vec{\omega})) = QW(\vec{\omega})Q^T.$$

Če desno stran uporabimo na vektorju $\vec{r}$ in upoštevamo, da je $W(\vec{\omega})$ matrika, ki pripada vektorskemu množenju z vektorjem $\vec{\omega}$, dobimo

$$\mathrm{Ad}_Q(W(\vec{\omega}))\vec{r} = QW(\vec{\omega})Q^T\vec{r} = Q(\omega \times Q^T\vec{r}).$$

Matrika Q je ortogonalna, zato velja $Q(\vec{a} \times \vec{b}) = Q\vec{a} \times Q\vec{b}$ za poljubna vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. V našem primeru tako dobimo

$$\mathrm{Ad}_Q(W(\vec{\omega}))\vec{r} = Q(\vec{\omega} \times Q^T\vec{r}) = Q\vec{\omega} \times \vec{r} = W(Q\vec{\omega})\vec{r}$$

oziroma

$$\mathrm{Ad}_Q(W(\vec{\omega})) = W(Q\vec{\omega}).$$

Vidimo, da adjungirana reprezentacija SO(3) na $\mathfrak{so}(3)$ ustreza standardnemu delovanju SO(3) na $\mathbb{R}^3$ z rotacijami.

Adjungirana reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$ na $\mathfrak{so}(3)$:

Preko izomorfizma $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{so}(3)$ ustreza standardni bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$ baza

$$W_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$. Če je $W(\vec{\omega}) = xW_x + yW_y + zW_z$, ustreza operatorju $\mathrm{ad}_{W(\vec{\omega})}$ glede na to bazo matrika

$$\mathrm{ad}_{W(\vec{\omega})} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Adjungirana reprezentacija $\mathfrak{so}(3)$ na $\mathfrak{so}(3)$ torej ustreza standardnemu delovanju $\mathfrak{so}(3)$ na $\mathbb{R}^3$. V tem primeru lahko eksplicitno preverimo, da obe adjungirani reprezentaciji in eksponentno preslikavo veže relacija

$$e^{\mathrm{ad}_{W(\vec{\omega})}} = \mathrm{Ad}_{e^{W(\vec{\omega})}}.$$

$\square$

(6) Naj bo G Liejeva grupa in $\exp : \mathfrak{g} \to G$ eksponentna preslikava. Dokaži, da potem velja

$$d\exp_X(Y) = e^X \cdot \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}(Y).$$

Rešitev: Najprej se dogovorimo glede oznak. Za vsak $g \in G$ in vsak $X \in \mathfrak{g}$ naj bo:

$$\begin{aligned} g \cdot X &= (dL_g)_e(X), \\ X \cdot g &= (dR_g)_e(X), \\ e^X &= \exp(X). \end{aligned}$$

Funkcija

$$f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z} = 1 - \tfrac{z}{2} + \tfrac{z^2}{3!} - \tfrac{z^3}{4!} + \dots$$

je cela holomorfna funkcija, zato lahko za vsak $X \in \mathfrak{g}$ definiramo linearno preslikavo

$$f(\mathrm{ad}_X) = \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X} \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}).$$

Trditev naloge pravi, da lahko odvod eksponentne preslikave zapišemo kot kompozicijo preslikave $f(\mathrm{ad}_X)$ in odvoda leve translacije.

Pri izračunu odvoda eksponentne preslikave bomo uporabili formulo za odvod tokov enoparametrične družine vektorskih polj po parametru. Denimo, da je $\{v_\epsilon\}$ gladka družina kompletnih vektorskih polj na G in naj bodo Φ_t^ϵ tokovi teh polj. Potem velja

$$\tfrac{\partial}{\partial \epsilon}\big|_{\epsilon=0} \Phi_t^\epsilon(x) = \int_0^t d\Phi_{t-s}^0 \left(\tfrac{\partial}{\partial \epsilon}\big|_{\epsilon=0} v_\epsilon(\Phi_s^0(x)) \right) ds.$$

Dokaz te formule je precej tehničen, zato ga bomo izpustili.

Vzemimo sedaj poljubna $X, Y \in \mathfrak{g}$ in naj bo

$$v_\epsilon(g) = (X + \epsilon Y) \cdot g$$

desno invariantno vektorsko polje na G, ki je pridruženo vektorju $X+\epsilon Y \in \mathfrak{g}$. Tok polja v_ϵ je potem dan s predpisom

$$\Phi_t^\epsilon(g) = e^{t(X+\epsilon Y)}g.$$

Sedaj velja:

$$\begin{aligned}
d\exp_X(Y) &= \tfrac{\partial}{\partial\epsilon}\big|_{\epsilon=0} e^{X+\epsilon Y} = \tfrac{\partial}{\partial\epsilon}\big|_{\epsilon=0} \Phi_1^\epsilon(e) = \int_0^1 d\Phi_{1-s}^0\left(\tfrac{\partial}{\partial\epsilon}\big|_{\epsilon=0} v_\epsilon(\Phi_s^0(e))\right) ds,\\
&= \int_0^1 d\Phi_{1-s}^0\left(\tfrac{\partial}{\partial\epsilon}\big|_{\epsilon=0} (X+\epsilon Y)\cdot e^{sX}\right) ds = \int_0^1 d\Phi_{1-s}^0\left(Y\cdot e^{sX}\right) ds,\\
&= \int_0^1 e^{(1-s)X}\cdot Y\cdot e^{sX}\, ds = e^X\cdot\int_0^1 e^{-sX}\cdot Y\cdot e^{sX}\, ds,\\
&= e^X\cdot\int_0^1 \mathrm{Ad}_{e^{-sX}}(Y)\, ds = e^X\cdot\int_0^1 e^{-\mathrm{ad}_{sX}}(Y)\, ds.
\end{aligned}$$

Z razvojem v eksponentno vrsto lahko izračunamo integral na desni:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-\mathrm{ad}_{sX}}(Y)\, ds &= \int_0^1 \left(\mathrm{I} - s\,\mathrm{ad}_X + \tfrac{s^2}{2}\mathrm{ad}_X^2 - \tfrac{s^3}{3!}\mathrm{ad}_X^3 + \ldots\right)(Y)\, ds,\\
&= \left(\mathrm{I} - \tfrac{\mathrm{ad}_X}{2} + \tfrac{\mathrm{ad}_X^2}{3!} - \tfrac{\mathrm{ad}_X^3}{4!} + \ldots\right)(Y),\\
&= \frac{1-e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}(Y).
\end{aligned}$$

Tako dobimo formulo za odvod eksponentne preslikave v poljubni točki

$$d\exp_X(Y) = e^X\cdot\frac{1-e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}(Y).$$

□

(7) (a) Dokaži, da je odvod eksponentne preslikave $d\exp_X$ neizrojen natanko takrat, ko ad_X nima lastnih vrednosti oblike $\lambda = 2\pi i k$ za $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

(b) Ugotovi, v katerih točkah je eksponentna preslikava $\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{SO}(3)$ lokalni difeomorfizem.

Rešitev: (a) Pri prejšnji nalogi smo dokazali, da velja

$$d\exp_X(Y) = e^X\cdot\frac{1-e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}(Y),$$

kar pomeni, da lahko zapišemo

$$d\exp_X = (dL_{e^X})_e \circ f(\mathrm{ad}_X),$$

kjer je $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$. Odvod leve translacije je zmeraj neizrojen, zato nas zanima, kdaj je operator $f(\mathrm{ad}_X)$ neizrojen. Če hočemo, da bo $f(\mathrm{ad}_X)$ obrnljiv operator, število 0 ne sme biti njegova lastna vrednost. Po izreku o preslikavi spektra pa od tod sledi, da lastne vrednosti operatorja ad_X ne smejo biti ničle funkcije f. Ker so ničle funkcije f ravno števila oblike $\lambda = 2\pi i k$ za $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, od tod sledi trditev naloge.

(b) Karakterizacijo točk, kjer eksponentna preslikava ni lokalni difeomorfizem, bomo sedaj uporabili na primeru grupe SO(3). Spomnimo se, da v ustrezni bazi operatorju $\mathrm{ad}_{W(\vec{\omega})}$ ustreza matrika

$$\mathrm{ad}_{W(\vec{\omega})} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo lahko, da so lastne vrednosti operatorja $\mathrm{ad}_{W(\vec{\omega})}$ števila:

$$\lambda_1 = 0,$$
$$\lambda_{2,3} = \pm i|\vec{\omega}|.$$

Eksponentna preslikava $\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{SO}(3)$ je torej lokalni difeomorfizem povsod, razen na sferah s polmeri $2k\pi$ za $k \in \mathbb{N}$. Med drugim od tod sledi, da je osno-kotna parametrizacija Liejeve grupe SO(3) regularna. $\square$

(8) (Baker-Campbell-Hausdorffova formula) Naj bo G Liejeva grupa in $\mathfrak{g}$ njej pridružena Liejeva algebra. Potem obstaja okolica U elementa $0 \in \mathfrak{g}$, da za vsaka $X, Y \in U$ velja

$$\log(e^X e^Y) = X + \int_0^1 g(e^{\mathrm{ad}_X} \circ e^{\mathrm{ad}_{sY}})(Y)\, ds,$$

kjer je $g(z) = \frac{z \log z}{z-1}$.

Rešitev: Baker-Campbell-Hausdorffova formula pove, da lahko v okolici enote Liejeve grupe množenje izrazimo z operacijami v Liejevi algebri. V logaritemskih koordinatah lahko namreč produkt izrazimo z neskončno vrsto oblike

$$X * Y = X + Y + \tfrac{1}{2}[X, Y] + \dots,$$

ki jo dobimo z razvojem izraza $\int_0^1 g(e^{\mathrm{ad}_X} \circ e^{\mathrm{ad}_{sY}})(Y)\, ds$. Najprej bomo BCH formulo dokazali, nato pa še izračunali njen razvoj do členov drugega reda.

Izberimo okolico $0 \in V \subset \mathfrak{g}$, da bo $\exp|_V : V \to \exp(V)$ difeomorfizem. Ker je množenje v Liejevi grupi zvezno, lahko najdemo malce manjšo okolico $0 \in U \subset V$, da bo za vsak $t \in [0,1]$ in vsaka $X, Y \in U$ veljalo $e^X e^{tY} \in \exp(V)$. Sedaj definirajmo $Z = Z(t) \in V$ implicitno s predpisom

$$e^{Z(t)} = e^X e^{tY}.$$

Če to enakost odvajamo po času, dobimo:

$$\begin{aligned} d\exp_{Z(t)}(\dot{Z}(t)) &= e^X e^{tY} \cdot Y, \\ e^{Z(t)} \cdot f(\mathrm{ad}_{Z(t)})(\dot{Z}(t)) &= e^X e^{tY} \cdot Y, \\ f(\mathrm{ad}_{Z(t)})(\dot{Z}(t)) &= Y, \\ \dot{Z}(t) &= f(\mathrm{ad}_{Z(t)})^{-1}(Y). \end{aligned}$$

Sedaj bomo poskusili izračunati operator $f(\mathrm{ad}_{Z(t)})^{-1}$. Ker je $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z} = \frac{e^z - 1}{ze^z}$, je

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{ze^z}{e^z - 1}.$$

Od tod dobimo

$$f(\mathrm{ad}_{Z(t)})^{-1} = \frac{\mathrm{ad}_{Z(t)}\, e^{\mathrm{ad}_{Z(t)}}}{e^{\mathrm{ad}_{Z(t)}} - 1} = g(e^{\mathrm{ad}_{Z(t)}}),$$

kjer smo označili

$$g(z) = \frac{z \log z}{z-1}.$$

Z uporabo relacije med adjungiranima reprezentacijama Liejeve grupe in Liejeve algebre lahko izrazimo

$$e^{\mathrm{ad}_{Z(t)}} = \mathrm{Ad}_{e^{Z(t)}} = \mathrm{Ad}_{e^X} \circ \mathrm{Ad}_{e^{tY}} = e^{\mathrm{ad}_X} \circ e^{\mathrm{ad}_{tY}}.$$

Z integracijo enačbe $\dot{Z}(t) = f(\mathrm{ad}_{Z(t)})^{-1}(Y)$ tako pridemo do rezultata

$$Z(t) = X + \int_0^t g(e^{\mathrm{ad}_X} \circ e^{\mathrm{ad}_{sY}})(Y)\, ds,$$

ko vstavimo $t = 1$, pa dobimo Baker-Campbell-Hausdorffovo formulo

$$\log(e^X e^Y) = X + \int_0^1 g(e^{\mathrm{ad}_X} \circ e^{\mathrm{ad}_{sY}})(Y)\, ds.$$

V nadaljevanju bomo razvili formulo v vrsto do kvadratnih členov. Za X in Y blizu $0 \in \mathfrak{g}$ je operator $e^{\mathrm{ad}_X} \circ e^{\mathrm{ad}_{sY}}$ blizu identitete, zato bomo funkcijo g razvili okoli točke $a = 1$. Tako dobimo

$$g(z) = \frac{z \log z}{z-1} = 1 + \frac{z-1}{2} - \frac{(z-1)^2}{6} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n(n+1)}.$$

Z razvojem v eksponentno vrsto dobimo še:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{ad}_X} \circ e^{\mathrm{ad}_{sY}} - \mathrm{I} &= (\mathrm{I} + \mathrm{ad}_X + \tfrac{\mathrm{ad}_X^2}{2} + \ldots)(\mathrm{I} + s\,\mathrm{ad}_Y + \tfrac{s^2\,\mathrm{ad}_Y^2}{2} + \ldots) - \mathrm{I}, \\ &= (\mathrm{ad}_X + s\,\mathrm{ad}_Y) + (\tfrac{\mathrm{ad}_X^2}{2} + s\,\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y + \tfrac{s^2\,\mathrm{ad}_Y^2}{2}) + \ldots \end{aligned}$$

Oba razvoja skupaj nam dasta:

$$\begin{aligned} g(e^{\mathrm{ad}_X} \circ e^{\mathrm{ad}_{sY}}) &= \mathrm{I} + \tfrac{1}{2}(\mathrm{ad}_X + s\,\mathrm{ad}_Y + \tfrac{1}{2}\mathrm{ad}_X^2 + s\,\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y + \tfrac{s^2}{2}\mathrm{ad}_Y^2) - \\ &- \tfrac{1}{6}(\mathrm{ad}_X^2 + s\,\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y + s\,\mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X + s^2\,\mathrm{ad}_Y^2) + \ldots \end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $\mathrm{ad}_Y(Y) = [Y, Y] = 0$, dobimo

$$g(e^{\mathrm{ad}_X} \circ e^{\mathrm{ad}_{sY}})(Y) = Y + \tfrac{1}{2}[X, Y] + \tfrac{1}{4}[X, [X, Y]] - \tfrac{1}{6}[X, [X, Y]] - \tfrac{s}{6}[Y, [X, Y]] + \ldots,$$

z integracijo po s na intervalu $[0, 1]$ pa še

$$\log(e^X e^Y) = X + Y + \tfrac{1}{2}[X, Y] + \tfrac{1}{12}[X, [X, Y]] + \tfrac{1}{12}[Y, [Y, X]] + \ldots$$

V posebnem primeru, ko je G komutativna grupa, dobimo znano formulo

$$e^X e^Y = e^{X+Y}.$$

Malce bolj splošno pa se v primeru nilpotentnih grup zgornja vrsta zreducira v končno vsoto. V primeru Heisenbergove grupe tako na primer dobimo, da za poljubna $W_1, W_2 \in \mathfrak{h}$ velja

$$e^{W_1} e^{W_2} = e^{W_1 + W_2 + \frac{1}{2}[W_1, W_2]}.$$

$\square$

(9) Poišči vse povezane Liejeve podgrupe Liejevih grup $\mathbb{R}^2$, SO(3) in SL$(2, \mathbb{R})$.

Rešitev: Naj bo G Liejeva grupa in $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Spomnimo se, da je vektorski podprostor $L \subset \mathfrak{g}$:

· *Liejeva podalgebra* $\mathfrak{g}$, če velja $[L, L] \subset L$,

· *ideal* $\mathfrak{g}$, če velja $[L, \mathfrak{g}] \subset L$.

V vsaki Liejevi grupi G imamo bijektivno korespondenco

$$\{\text{povezane Liejeve podgrupe } G\} \longleftrightarrow \{\text{Liejeve podalgebre } \mathfrak{g}\},$$

kjer podgrupam edinkam Liejeve grupe G ustrezajo ideali Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Opomnimo še, da je iz desne v levo preslikava definirana s pomočjo eksponentne preslikave. Če torej želimo klasificirati vse povezane podgrupe grupe G, je dovolj najti vse podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ in nato izračunati njihove slike pri eksponentni preslikavi.

Povezane podgrupe grupe $G = \mathbb{R}^2$:

Liejeva grupa $G = \mathbb{R}^2$ je hkrati vektorski prostor, zato jo lahko identificiramo z njeno Liejevo algebro $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$. Ker je grupa komutativna, je tudi njena algebra komutativna, kar pomeni, da je komutator poljubnih dveh elementov enak nič. Med drugim to pomeni, da je vsak vektorski podprostor $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$ avtomatično podalgebra in hkrati ideal.

Ker je $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, so zanimivi samo podprostori $L \subset \mathbb{R}^2$ dimenzije $\dim(L) = 1$. Vsak tak je oblike $L = \mathrm{Lin}\{v\}$ za nek $v \neq 0$. Pridružena eksponentna preslikava $\exp : L \to \mathbb{R}^2$ je potem zelo preproste oblike

$$\exp(tv) = tv.$$

Slika $\exp(L)$ je povezana enodimenzionalna Liejeva podgrupa $\mathbb{R}^2$, ki jo lahko enačimo z L. Vse te podgrupe so zaradi komutativnosti $\mathbb{R}^2$ avtomatično edinke in so izomorfne $\mathbb{R}$.

Povezane podgrupe grupe $G = \mathrm{SO}(3)$:

Spomnimo se, da je vsaka matrika $W \in \mathfrak{so}(3) = \{W \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,|\, W^T + W = 0\}$ oblike

$$W = W(\vec{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

za nek enolično določen vektor $\vec{\omega} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ker je $\dim(\mathrm{SO}(3)) = 3$, moramo klasificirati eno in dvodimenzionalne Liejeve podalgebre Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$.

$\dim(L) = 1$:

Vsak enodimenzionalen vektorski podprostor $L \subset \mathfrak{so}(3)$ je avtomatično komutativna Liejeva podalgebra $\mathfrak{so}(3)$. Zapišemo ga lahko v obliki $L = \mathrm{Lin}\{W(\vec{\omega})\}$ za nek neničeln $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Izračunali smo že, da je eksponentna preslikava $\exp : L \to \mathrm{SO}(3)$ definirana s predpisom

$$\exp(tW(\vec{\omega})) = e^{tW(\vec{\omega})} = R(\vec{e}, t|\vec{\omega}|),$$

kjer je $\vec{e} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$. Slika $\exp(L)$ je komutativna povezana podgrupa grupe SO(3), ki sestoji iz vseh rotacij okoli osi $\vec{e}$ in je izomorfna grupi S^1.

Če vzamemo poljuben $W(\vec{\omega}')$, ki ni večkratnik $W(\vec{\omega})$, iz enakosti

$$[W(\vec{\omega}), W(\vec{\omega}')] = W(\vec{\omega} \times \vec{\omega}') \notin L$$

sledi, da L ni ideal $\mathfrak{so}(3)$. To pomeni, da grupa $\mathrm{SO}(3)$ nima povezanih enodimenzionalnih podgrup edink.

$\underline{\dim(L) = 2}$:

Denimo, da je $L = \mathrm{Lin}\{W(\vec{\omega}_1), W(\vec{\omega}_2)\}$ dvodimenzionalna Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$. Potem iz enakosti

$$[W(\vec{\omega}_1), W(\vec{\omega}_2)] = W(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$$

sledi, da je $L = \mathfrak{so}(3)$, kar pa je v protislovju s predpostavko o dimenziji L. Torej grupa $\mathrm{SO}(3)$ nima povezanih dvodimenzionalnih Liejevih podgrup.

Pokazali smo, da $\mathrm{SO}(3)$ nima netrivialnih povezanih podgrup edink. Takšnim grupam rečemo enostavne grupe.

Povezane podgrupe grupe $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$:

Liejeva algebra grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sestoji iz vseh matrik z ničelno sledjo

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,|\, \mathrm{sl}(A) = 0\}.$$

Vsaka taka matrika je oblike

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

za neka realna števila a, b in c. Za bazo Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ pogosto vzamemo matrike

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\; F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ki zadoščajo komutacijskim relacijam:

$$\begin{aligned} [E, F] &= H, \\ [H, E] &= 2E, \\ [H, F] &= -2F. \end{aligned}$$

Karakteristični polinom matrike A je

$$\det(A - \lambda \,\mathrm{Izom}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & -a - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \det(A).$$

Po Cayley-Hamiltonovem izreku je $A^2 = -\det(A)\,\mathrm{I}$, od koder lahko izpeljemo formulo

$$e^A = \mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{Izom} + \tfrac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\alpha} A.$$

Pri tem smo uporabili oznako $\alpha = \sqrt{a^2 + bc} = \sqrt{-\det(A)}$.

$\underline{\dim(L) = 1}$:

Linearna ogrinjača matrike $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ je enodimenzionalna Liejeva podalgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Izkaže pa se, da pridružene povezane Liejeve podgrupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ niso vse izomorfne, kot je bilo to v primerih grup $\mathbb{R}^2$ in $\mathrm{SO}(3)$. Zato nas bodo zanimali konjugiranostni razredi enodimenzionalnih podgrup. Poljubna matrika $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ima bodisi dve neničelni realni lastni vrednosti, dvojno ničelno lastno vrednost ali pa dve konjugirani imaginarni lastni vrednosti. Po pretvorbi v Jordanovo ali pa realno Schurovo formo lahko za bazo enodimenzionalne Liejeve algebre L vzamemo eno izmed matrik

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Če je $L = \{tA \mid t \in \mathbb{R}\}$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, je $e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. To pomeni, da je pridružena povezana enodimenzionalna podgrupa

$$\exp(L) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

izomorfna grupi $\mathbb{R}$.

(b) Če je $L = \{tA \mid t \in \mathbb{R}\}$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, je $e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$. Pridružena povezana podgrupa

$$\exp(L) = \left\{ \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

je spet izomorfna $\mathbb{R}$. Je pa v določenem smislu različna od prejšnje grupe, saj so slike njenih elementov v adjungirani reprezentaciji diagonalizabilne.

(c) Če je $L = \{tA \mid t \in \mathbb{R}\}$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, je $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$. Pridružena povezana podgrupa

$$\exp(L) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

je tokrat kompaktna in izomorfna S^1. Sovpada s podgrupo $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Podobno kot pri grupi SO(3) lahko tudi tu pokažemo, da nobena izmed enodimenzionalnih podalgeber ni ideal, kar pomeni, da grupa $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ nima povezanih enodimenzionalnih podgrup edink.

$\underline{\dim(L) = 2}$:

Z nekaj računanja lahko izpeljemo, da je vsaka dvodimenzionalna Liejeva podalgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ konjugirana podalgebri

$$L = \mathrm{Lin}\{E, H\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eksponent matrike $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ je $e^A = \begin{bmatrix} e^a & b\frac{\operatorname{sh} a}{a} \\ 0 & e^{-a} \end{bmatrix}$, od koder sledi, da je

$$\exp(L) = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \,\middle|\, \lambda > 0,\, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tudi ta podgrupa ni edinka, kar pomeni, da je $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ enostavna grupa. □

(10) Naj bo G enostavno povezana Liejeva grupa.

(a) Naj bosta Γ_1 in Γ_2 zaprti diskretni podgrupi edinki grupe G. Pokaži, da sta potem grupi G/Γ_1 in G/Γ_2 izomorfni natanko takrat, ko obstaja avtomorfizem $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, da je $\alpha(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

(b) Poišči vse povezane Liejeve grupe, ki imajo Liejevo algebro izomorfno Heisenbergovi Liejevi algebri.

Rešitev: Vsaki Liejevi grupi G pripada enolično določena Liejeva algebra $\mathfrak{g}$. Obratno pa ta trditev ne velja, saj imajo lahko neizomorfne Liejeve grupe izomorfne Liejeve algebre. Osnovna primera sta para grup $\mathbb{R}$ in S^1 ter $\mathrm{SU}(2)$ in $\mathrm{SO}(3)$. Izkaže pa se, da imamo korespondenco

$$\{\text{enostavno povezane Liejeve grupe}\} \longleftrightarrow \{\text{Liejeve algebre}\},$$

ki pove, da za vsako Liejevo algebro obstaja do izomorfizma natanko določena enostavno povezana Liejeva grupa, katere Liejeva algebra je izomorfna dani Liejevi algebri. Če je G enostavno povezana Liejeva grupa z Liejevo algebro $\mathfrak{g}$, je vsaka povezana Liejeva grupa, ki ima Liejevo algebro izomorfno Liejevi algebri $\mathfrak{g}$, oblike G/Γ za neko zaprto diskretno podgrupo $\Gamma \subset Z(G)$. Klasifikacija povezanih Liejevih grup z izomorfno Liejevo algebro se torej prevede na iskanje diskretnih podgrup centra enostavno povezane Liejeve grupe, ki pripada dani Liejevi algebri.

(a) Če sta dve zaprti diskretni podgrupi $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset Z(G)$ izomorfni, od tod še ne sledi nujno, da sta tudi kvocienta G/Γ_1 in G/Γ_2 izomorfna. Obstajati mora namreč takšen izomorfizem med njima, ki ga lahko razširimo do avtomorfizma grupe G.

Denimo najprej, da obstaja avtomorfizem $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, da je $\alpha(\Gamma_1) = \Gamma_2$ in označimo s $\pi_1 : G \to G/\Gamma_1$ ter $\pi_2 : G \to G/\Gamma_2$ kvocientni projekciji. Ker je $\pi_2 \circ \alpha$ surjekcija z jedrom Γ_1, nam inducira izomorfizem $\overline{\alpha} : G/\Gamma_1 \to G/\Gamma_2$, da komutira diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & G \\ {\scriptstyle \pi_1}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ G/\Gamma_1 & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & G/\Gamma_2 \end{array}$$

V kolikor pa imamo dan izomorfizem $\overline{\alpha} : G/\Gamma_1 \to G/\Gamma_2$, lahko definiramo avtomorfizem $d\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ s predpisom

$$d\alpha = (d\pi_2)^{-1} \circ d\overline{\alpha} \circ d\pi_1.$$

Ker je Liejeva grupa G enostavno povezana, nato obstaja natanko določen avtomorfizem α grupe G, katerega odvod je $d\alpha$ in za katerega komutira zgornji diagram. Ta avtomorfizem preslika podgrupo Γ_1 v podgrupo Γ_2.

(b) Spomnimo se, da je center Heisenbergove grupe H podgrupa edinka

$$Z(H) = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}.$$

Vsaka netrivialna diskretna podgrupa centra je oblike

$$\Gamma_\lambda = \{(0,0,\lambda k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

za nek $\lambda > 0$. Kvocienti H/Γ_λ bi načeloma lahko bili neizomorfne povezane Liejeve grupe, izkaže pa se, da so med sabo vsi izomorfni. To lahko pokažemo na naslednji način. Najprej označimo $\Gamma = \Gamma_1$ in definirajmo preslikavo $\alpha_\lambda : H \to H$ s predpisom

$$\alpha_\lambda(x,y,z) = (\sqrt{\lambda}x, \sqrt{\lambda}y, \lambda z).$$

Preverimo lahko, da je α_λ avtomorfizem Heisenbergove grupe, ki podgrupo Γ preslika v Γ_λ. Do izomorfizma natančno obstajata torej samo dve povezani Liejevi grupi, katerih Liejeva algebra je izomorfna Heisenbergovi Liejevi algebri. Grupa H/Γ je zanimiva s teoretičnega stališča, ker je preprost primer Liejeve grupe, ki ni matrična Liejeva grupa. $\square$

(11) Poišči centre grup $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ in $\mathrm{SU}(n)$.

Rešitev: Centre danih grup bomo izračunali v dveh korakih. Najprej bomo pokazali, da je vsaka matrika v centru kar večkratnik identitete, nato pa preverili, kateri večkratniki identitete pridejo v poštev v vsaki izmed grup.

Zaradi enostavnosti se bomo najprej omejili na primer, ko je $n \geq 3$, ker lahko tako hkrati obravnavamo vse dane grupe.

1. korak: vsaka matrika $A \in \mathrm{Z}(G)$ je oblike $A = a\,\mathrm{Iz}$om za nek $a \in \mathbb{F}$:

Vzemimo poljubno matriko A iz centra in naj bo oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Naš cilj bo najti primerne matrike R_i, tako da bomo iz pogoja $AR_i = R_iA$ dobili čimveč enačb za koeficiente matrike A. Vzemimo za začetek matriko R_1, ki je oblike

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \mathrm{I}_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Ta matrika predstavlja rotacijo v ravnini prvih dveh koordinatnih smeri. Sledi

$$AR_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \mathrm{I}_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,2} & -a_{1,1} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & -a_{2,1} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & -a_{3,1} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & -a_{n,1} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Množenje z matriko R_1 z desne zamenja prva dva stolpca (in zamenja predznak), vse ostale stolpce pa pusti pri miru. Podobno dobimo

$$R_1A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \mathrm{I}_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & \cdots & -a_{2,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Tokrat se zamenjata prvi dve vrstici, ostale vrstice pa ostanejo pri miru.

Iz pogoja $AR_1 = R_1A$ sedaj dobimo, da velja $a_{1,1} = a_{2,2}$ in $a_{2,1} = -a_{1,2}$. Poleg tega pa za vsak $3 \leq k \leq n$ velja še

$$a_{k,2} = a_{k,1}, \quad a_{k,2} = -a_{k,1}, \quad a_{1,k} = -a_{2,k}, \quad a_{2,k} = a_{1,k}.$$

Torej so vsi ti členi enaki nič, matrika A pa je oblike

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{1,2} & a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathrm{A'} & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix},$$

kjer je A' spodnji desni kot matrike A. V naslednjem koraku bomo vzeli matriko

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \mathrm{I}_{n-3} \end{bmatrix}.$$

Če zapišemo pogoj $AR_2 = R_2A$ s sistemom enačb, vidimo, da morajo biti elementi matrike A v tretji vrstici in tretjem stolpcu ničelni. Izjema je diagonalni člen, ki zadošča pogoju $a_{3,3} = a_{2,2}$. Poleg tega dobimo še, da velja $a_{1,2} = a_{2,1} = 0$.

Sedaj postopek ponovimo z matrikami $R_3, \ldots, R_{n-1}$, ki so definirane na analogen način. Kot rezultat dobimo, da je matrika A diagonalna in da so vsi elementi diagonale enaki. Torej je $A = a\,\mathrm{Izom}$ za neko število a. Zaenkrat še ni bilo pomembno, katero grupo študiramo, saj matrike R_i ležijo v vseh naših grupah.

2. korak: izračun centrov:

Dokazali smo že, da so v centru danih grup le matrike oblike $A = a\,\mathrm{Izom}$. Možne vrednosti števila a so odvisne od grupe.

Ker je za poljuben $a \in \mathbb{R}^\times$ matrika $a\,\mathrm{Izom} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, je

$$\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) = \{a\,\mathrm{Izom} \mid a \in \mathbb{R}^\times\} \cong \mathbb{R}^\times.$$

Če hočemo, da bo $\det(a\,\mathrm{Izom}) = 1$, mora biti $a^n = 1$. V realnem tako dobimo le dve možnosti

$$\mathrm{Z}(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})) = \begin{cases} \{\mathrm{I}\} & ;\, n \text{ lih}, \\ \{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\} & ;\, n \text{ sod}. \end{cases}$$

Podobno dobimo:

$$\mathrm{Z}(\mathrm{O}(n)) = \{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\},$$
$$\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(n)) = \begin{cases} \{\mathrm{I}\} & ;\, n \text{ lih}, \\ \{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\} & ;\, n \text{ sod}. \end{cases}$$

Matrika $a\,\mathrm{Izom}$ je unitarna matrika, če je $|a| = 1$ oziroma $a \in S^1$. Sledi

$$\mathrm{Z}(\mathrm{U}(n)) = \{a\,\mathrm{Izom} \mid |a| = 1\} \cong S^1.$$

Če hočemo, da ima takšna unitarna matrika determinanto enako ena, mora veljati še $a^n = 1$. Tej enačbi zadoščajo n-ti koreni enote

$$\mathrm{Z}(\mathrm{SU}(n)) = \{a\,\mathrm{Izom} \mid a^n = 1\} \cong \mathbb{Z}_n.$$

Posebej moramo preveriti še primer $n = 2$. V tem primeru lahko izvedemo samo en korak zgornjega postopka, da dobimo pogoj, da je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

za neki števili a in b. Izkaže se, da je rezultat enak kot v primerih $n \geq 3$, razen pri grupi $\mathrm{SO}(2)$, ki je komutativna, kar pomeni, da je

$$\mathrm{Z}(\mathrm{SO}(2)) = \mathrm{SO}(2).$$

V preostalih primerih lahko pokažemo, da mora biti $b = 0$, če izračunamo komutatorje z matrikami :

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ za grupi $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$,
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ za grupi $\mathrm{O}(2)$ in $\mathrm{U}(2)$,
- $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ za grupo $\mathrm{SU}(2)$.

□

(12) Opiši prostore adjungiranih in koadjungiranih orbit grupe $\mathrm{SO}(3)$ in Heisenbergove grupe.

Rešitev: Levo delovanje Liejeve grupe G na mnogoterosti M je gladka preslikava

$$\mu : G \times M \to M,$$

ki zadošča pogojema:

(1) $g_1 \cdot (g_2 \cdot m) = (g_1 g_2) \cdot m$ za vsaka $g_1, g_2 \in G$ in vsak $m \in M$,

(2) $e \cdot m = m$ za vsak $m \in M$.

Pri tem smo označili $g \cdot m = \mu(g, m)$. *Orbita* delovanja skozi točko $m \in M$ je imerzirana podmnogoterost

$$\mathcal{O}_m = \{g \cdot m \mid g \in G\} \subset M,$$

grupa izotropije točke $m \in M$ pa zaprta Liejeva podgrupa

$$G_m = \{g \in G \mid g \cdot m = m\} \subset G.$$

Orbite delovanja so homogeni G-prostori, ki jih lahko opišemo v obliki

$$\mathcal{O}_m \cong G/G_m$$

za vsak $m \in M$.

Za vsako Liejevo grupo G lahko na kanoničen način definiramo adjungirano delovanje na Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ s predpisom

$$g \cdot X = \mathrm{Ad}_g(X)$$

za poljuben $g \in G$ in poljuben $X \in \mathfrak{g}$. To delovanje je v bistvu adjungirana reprezentacija grupe G, zato lahko definiramo dualno reprezentacijo grupe G na prostoru $\mathfrak{g}^*$ s predpisom

$$(g \cdot f)(X) = f(g^{-1} \cdot X)$$

za $g \in G$, $f \in \mathfrak{g}^*$ in $X \in \mathfrak{g}$. Orbitam dualne reprezentacije rečemo koadjungirane orbite.

Adjungirane in koadjungirane orbite grupe $\mathrm{SO}(3)$:

V eni izmed prejšnjih nalog smo že pokazali, da je adjungirano delovanje grupe $\mathrm{SO}(3)$ na Liejevi algebri $\mathfrak{so}(3)$ izomorfno standardnemu delovanju $\mathrm{SO}(3)$ na $\mathbb{R}^3$, zato bomo v nadaljevanju opisali orbite tega delovanja. Če vzamemo poljuben vektor $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$, lahko ta vektor zavrtimo v poljuben vektor, ki ima enako dolžino. To pomeni, da so adjungirane orbite difeomorfne sferam

$$\mathcal{O}_{\vec{\omega}} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{\omega}| = |\vec{r}|\} \approx S^2.$$

Izjema je le orbita vektorja $\vec{\omega} = 0$, ki sestoji iz ene same točke. Opomnimo še, da grupa izotropije $\mathrm{SO}(3)_{\vec{\omega}}$ sestoji iz vseh rotacij, ki pustijo vektor $\vec{\omega}$ pri miru. To pa so ravno rotacije okoli osi, ki jo določa $\vec{\omega}$, zato je $\mathrm{SO}(3)_{\vec{\omega}} \cong S^1$. Od tod dobimo znano predstavitev

$$S^2 \cong \mathrm{SO}(3)/S^1.$$

Orbite adjungiranega delovanja definirajo na $\mathfrak{so}(3)$ ekvivalenčno relacijo. Dobljenemu kvocientnemu prostoru rečemo prostor adjungiranih orbit in ga označimo z $\mathrm{SO}(3)\backslash\mathfrak{so}(3)$. V našem primeru lahko orbite parametriziramo z normo vektorjev, zato je

$$\mathrm{SO}(3)\backslash\mathfrak{so}(3) \approx [0, \infty).$$

V primeru kompaktne Liejeve grupe sta adjungirano in koadjungirano delovanje zmeraj izomorfni delovanji, zato sta tudi prostora orbit homeomorfna. Konkretno lahko to v primeru grupe $\mathrm{SO}(3)$ pokažemo takole. Če izberemo primerno bazo $\mathfrak{so}(3)$, bo matrika, ki pripada operatorju Ad_Q, kar Q. Glede na dualno bazo $\mathfrak{so}(3)^*$ bo imel potem operator $\mathrm{Ad}^*_{Q^{-1}}$ matriko

$$(Q^{-1})^T = Q.$$

Adjungirane in koadjungirane orbite Heisenbergove grupe H:

V primeru Heisenbergove grupe prostora adjungiranih in koadjungiranih orbit ne bosta več homeomorfna. Za izračun adjungiranih orbit bomo uporabili matrično reprezentacijo Heisenbergove grupe in algebre:

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Če označimo

$$h = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

je

$$\mathrm{Ad}_h(W) = hWh^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x & xy - z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & c + bx - ay \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

To pomeni, da lahko adjungirano delovanje opišemo s formulo

$$(x, y, z) \cdot (a, b, c) = (a, b, c + bx - ay).$$

V primeru, ko je $a = b = 0$, je orbita skozi točko (a, b, c) kar točka sama, sicer pa je orbita skozi točko (a, b, c) vertikalna premica skozi točko $(a, b, 0)$

$$\mathcal{O}_{(a,b,c)} = \begin{cases} \{(a, b, c)\} & ;\ a = b = 0, \\ \{(a, b, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} & ;\ \text{sicer}. \end{cases}$$

Prostor adjungiranih orbit grupe H lahko zapišemo kot unijo ravnine in vertikalne premice skozi izhodišče. Izkaže se, da ni Hausdorffov, saj točk na vertikalni premici ne moremo separirati.

Za izračun koadjungiranih orbit bomo na $\mathfrak{h}^*$ izbrali dualno bazo standardne baze $\mathfrak{h}$. Če označimo $f = (a^*, b^*, c^*) \in \mathfrak{h}^*$, je

$$(h \cdot f)(a,b,c) = f(h^{-1} \cdot (a,b,c)) = f(a,b,c-bx+ay) = a^*a + b^*b + c^*(c-bx+ay).$$

Ta izraz lahko preoblikujemo v obliko

$$(h \cdot f)(a,b,c) = (a^* + c^*y)a + (b^* - c^*x)b + c^*c,$$

od koder dobimo predpis za koadjungirano delovanje

$$(x,y,z) \cdot (a^*, b^*, c^*) = (a^* + c^*y, b^* - c^*x, c^*).$$

Vidimo, da so koadjungirane orbite vsebovane v vodoravnih ravninah. Če je $c^* \neq 0$, so orbite kar cele ravnine, v primeru $c^* = 0$ pa točke

$$\mathcal{O}_{(a^*,b^*,c^*)} = \begin{cases} \{(a^*, b^*, 0)\} & ;\ c^* = 0, \\ \{(t,u,c^*) \,|\, t,u \in \mathbb{R}\} & ;\ c^* \neq 0. \end{cases}$$

Prostor orbit lahko tudi tokrat zapišemo kot unijo vodoravne ravnine in vertikalne premice, vendar pa se topologija ne ujema s topologijo prostora adjungiranih orbit. Tokrat namreč ne moremo separirati točk v ravnini. □

(13) Pokaži, da je grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ univerzalni krov Lorentzove grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$.

Rešitev: Spomnimo se, da je Lorentzova grupa $\mathrm{O}(1,3)$ definirana s predpisom

$$\mathrm{O}(1,3) = \{A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}) \,|\, A^T \, \mathrm{I}_{1,3} \, A = \mathrm{I}_{1,3}\},$$

kjer je

$$\mathrm{I}_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Če elemente prostora $\mathbb{R}^4$ označimo z $\vec{r} = (t,x,y,z)$ in pišemo $\vec{r}\,' = A\vec{r}$, velja

$$A \in \mathrm{O}(1,3) \iff (t')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

V grupi $\mathrm{O}(1,3)$ so torej natanko tiste matrike, ki ohranjajo Lorentzovo metriko. Z $\mathrm{SO}^+(1,3)$ označimo komponento enote grupe $\mathrm{O}(1,3)$.

Grupa $\mathrm{SO}^+(1,3)$ je 6-dimenzionalna Liejeva grupa. Grupa rotacij prostorskega dela $\mathbb{R}^4$ je njena 3-dimenzionalna podgrupa, preostale 3 dimenzije pa lahko parametriziramo s hiperboličnimi rotacijami oziroma 'boosti'.

Najlepše lahko ta razcep opišemo na nivoju Liejeve algebre Lorentzove grupe. V njej so matrike

$$\mathfrak{so}^+(1,3) = \{A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}) \,|\, A^T \, \mathrm{I}_{1,3} + \mathrm{I}_{1,3} \, A = 0\}.$$

Lorentzovo Liejevo algebro $\mathfrak{so}^+(1,3)$ lahko zapišemo kot direktno vsoto dveh vektorskih podprostorov $\mathfrak{so}^+(1,3) = W \oplus H$ na naslednji način. Matrike

$$W_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tvorijo bazo Liejeve podalgebre W Lorentzove Liejeve algebre, ki se integrira v podgrupo rotacij prostorskega dela $\mathbb{R}^4$. Vektorski podprostor H pa ima po drugi strani bazo

$$H_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Enoparametrične podgrupe Lorentzove grupe, ki pripadajo elementom H, ustrezajo parom koordinatnih sistemov, ki se medsebojno premikajo z neko konstantno hitrostjo. Vektorski prostor H ni Liejeva podalgebra Lorentzove algebre, kar pomeni, da hiperbolične rotacije ne tvorijo Liejeve podgrupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$, ampak samo neko podmnožico.

S pomočjo tega razcepa Lorentzove algebre bi lahko definirali izomorfizem Liejevih algeber

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}^+(1,3),$$

ki Liejevo podalgebro $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ antihermitskih matrik preslika na $W \subset \mathfrak{so}^+(1,3)$, podprostor $i\,\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ hermitskih matrik s sledjo 0 pa na $H \subset \mathfrak{so}^+(1,3)$. Ker je Liejeva grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ enostavno povezana, Lorentzova grupa $\mathrm{SO}^+(1,3)$ pa ne, od tod avtomatično sledi da je $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ univerzalni krov grupe $\mathrm{SO}^+(1,3)$.

V nadaljevanju si bomo pogledali eksplicitno konstrukcijo te krovne projekcije. Najprej bomo prostor $\mathbb{R}^4$ identificirali s prostorom $\mathrm{Herm}(2\times 2,\mathbb{C})$ hermitskih matrik velikosti 2×2. Za bazo tega prostora lahko vzamemo matrike

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrike $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ so ravno Paulijeve spinske matrike. Glede na to bazo lahko definiramo izomorfizem

$$\vec{r} = (t,x,y,z) \longleftrightarrow H = \begin{bmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{bmatrix}.$$

Ker velja

$$\|\vec{r}\| = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \det(H),$$

imamo naslednjo korespondenco

$$\{\text{reprezentacije Liejeve grupe } G \text{ na } \mathbb{R}^4\text{, ki ohranjajo Lorentzovo normo}\}$$

$$\updownarrow$$

$$\{\text{Reprezentacije Liejeve grupe } G \text{ na } \mathrm{Herm}(2\times 2,\mathbb{C})\text{, ki ohranjajo determinanto}\}.$$

Naš cilj bo poiskati reprezentacijo grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ na prostoru $\mathrm{Herm}(2\times 2,\mathbb{C})$, ki ohranja determinanto. V ta namen definirajmo preslikavo $\rho : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(\mathrm{Herm}(2\times 2,\mathbb{C}))$ s predpisom

$$\rho(A)(H) = AHA^*,$$

kjer je $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ in $H \in \mathrm{Herm}(2\times 2,\mathbb{C})$. Zaradi enostavnosti se dogovorimo, da bomo pisali

$$\rho(A)(H) = A\cdot H.$$

Ker je $(AHA^*)^* = AHA^*$, je res $A\cdot H \in \mathrm{Herm}(2\times 2,\mathbb{C})$. Nadalje iz enakosti

$$A\cdot(B\cdot H) = A\cdot(BHB^*) = ABHB^*A^* = (AB)H(AB)^* = (AB)\cdot H$$

sledi, da je $\rho(A)\rho(B) = \rho(AB)$, kar pomeni, da je ρ reprezentacija. Iz multiplikativnosti determinante avtomatično sledi, da ρ ohranja determinanto.

Izračunajmo sedaj jedro reprezentacije ρ. Denimo, da je matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

v jedru ρ. Potem za vsak $H \in \mathrm{Herm}(2 \times 2, \mathbb{C})$ velja $A \cdot H = H$. Primerne izbire matrik H nam bodo dale pogoje na koeficiente matrike A.

Če vzamemo $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dobimo pogoj

$$AHA^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 & a\overline{c} \\ \overline{a}c & |c|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ki pove, da je $|a| = 1$ in $c = 0$. Podobno dobimo pri izbiri $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pogoj

$$AHA^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |b|^2 & b\overline{d} \\ \overline{b}d & |d|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ki pove, da je $|d| = 1$ in $b = 0$. Za izračun povezave med a in d pa si poglejmo še matriko $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ in upoštevajmo, da je $b = c = 0$. Sledi

$$AHA^* = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a\overline{d} \\ \overline{a}d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

kar pomeni, da je $a\overline{d} = 1$. Ker je $\det(A) = 1$, je poleg tega še $ad = 1$, vsi pogoji skupaj pa povedo, da je $a = d = \pm 1$. V jedru sta torej samo matriki $A = \pm \mathrm{Izom}$.

Imamo torej reprezentacijo $\rho : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(1, 3)$ z diskretnim jedrom, katere slika je povezana Liejeva podgrupa Lorentzove grupe. Ker je $\mathrm{SO}^+(1, 3)$ povezana grupa in imata obe grupi isto dimenzijo, je ρ surjektivna preslikava, kar pa pomeni, da je krovna projekcija. Polarni razcep nam grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ predstavi v obliki produkta

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \approx \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SH}_+$$

Liejeve podgrupe $\mathrm{SU}(2)$ specialnih unitarnih matrik in podmnožice SH_+ pozitivno definitnih matrik z determinanto 1. Preslikava ρ podgrupo $\mathrm{SU}(2)$ preslika na podgrupo rotacij Lorenztove grupe in ustreza znani krovni projekciji $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$. Podmnožica SH_+ pa se preslika na množico hiperboličnih rotacij. Iz tega razcepa med drugim sledi tudi, da je grupa $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ enostavno povezana in je torej univerzalni krov grupe $\mathrm{SO}^+(1, 3)$. $\square$

3 Reprezentacije Liejevih grup

V tem poglavju bomo študirali reprezentacije Liejevih grup in Liejevih algeber. Naj bo G Liejeva grupa in $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra.

- Kompleksna oziroma realna reprezentacija Liejeve grupe G je homomorfizem Liejevih grup $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, kjer je V kompleksen oziroma realen vektorski prostor.
- Kompleksna oziroma realna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je homomorfizem realnih Liejevih algeber $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, kjer je V kompleksen oziroma realen vektorski prostor.

Študirali bomo predvsem kompleksne končno dimenzionalne reprezentacije Liejevih grup in Liejevih algeber. Ker je obseg $\mathbb{C}$ algebraično zaprt, je po eni strani klasifikacija nerazcepnih kompleksnih reprezentacij dane Liejeve grupe lažja kot pa v realnem primeru. Po drugi strani pa lahko iz klasifikacije kompleksnih reprezentacij z nekaj dela izpeljemo klasifikacijo realnih reprezentacij.

Klasifikacija nerazcepnih kompleksnih reprezentacij G je tesno povezana s kompleksifikacijo $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$, ki jo bomo podrobneje opisali kasneje. Na tem mestu omenimo samo, da je $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ kompleksna Liejeva algebra in da homomorfizmom $\rho : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{gl}(V)$ kompleksnih Liejevih algeber, kjer je V kompleksen vektorski prostor, rečemo kompleksno linearne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Če je grupa G enostavno povezana, imamo korespondenco:

$$\begin{gathered}\{\text{kompleksne reprezentacije Liejeve grupe } G\} \\ \updownarrow \\ \{\text{kompleksne reprezentacije Liejeve algebre } \mathfrak{g}\} \\ \updownarrow \\ \{\text{kompleksno linearne reprezentacije Liejeve algebre } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\}.\end{gathered}$$

Če grupa G ni enostavno povezana, jo lahko zapišemo v obliki $G = \tilde{G}/\Gamma$, kjer je $\tilde{G}$ univerzalni krov G in $\Gamma \subset \tilde{G}$ diskretna podgrupa edinka. Reprezentacije grupe G potem ustrezajo tistim reprezentacijam grupe $\tilde{G}$, ki imajo podgrupo Γ vsebovano v jedru reprezentacije. Izomorfnostni razredi reprezentacij G torej tvorijo podmnožico izomorfnostnih razredov reprezentacij $\tilde{G}$.

(1) Poišči kompleksifikacije Liejevih algeber $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$ in $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$.

Rešitev: Pri klasifikaciji nerazcepnih kompleksnih reprezentacij dane Liejeve grupe igra pomembno vlogo kompleksifikacija njene Liejeve algebre. Kompleksifikacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, ki je definirana s predpisom

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}.$$

Če je $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ baza $\mathfrak{g}$, lahko isto množico vzamemo tudi za bazo $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, le da pri $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ vzamemo vse kompleksne linearne kombinacije teh elementov namesto realnih. Vsak element $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ lahko enolično zapišemo v obliki $X + iY$, kjer sta $X, Y \in \mathfrak{g}$. Komutator dveh takšnih elementov je potem

$$[X + iY, X' + iY'] = ([X, X'] - [Y, Y']) + i([X, Y'] + [Y, X']).$$

Glede na ta razcep lahko na $\mathfrak{g}$ gledamo kot na realno Liejevo podalgebro $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Pogosto pa je zanimivo vprašanje, kdaj je neka kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ kompleksifikacija neke svoje realne podalgebre $\mathfrak{g}$. To je res natanko takrat, ko imamo razcep $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ v smislu realnih vektorskih prostorov.

Kompleksifikacija realne Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ je kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Imamo namreč razcep:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) &= \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) \oplus i\,\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}), \\ A &= \mathrm{Re}(A) + i\mathrm{Im}(A). \end{aligned}$$

Malce bolj presenetljivo je dejstvo, da je Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ tudi kompleksifikacija Liejeve algebre $\mathfrak{su}(n)$. V Liejevi algebri $\mathfrak{su}(n)$ so vse antihermitske $n \times n$ matrike s sledjo 0, v vektorskem prostoru $i\,\mathfrak{su}(n)$ pa vse hermitske matrike s sledjo 0. Od tod sledi, da je:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) &= \mathfrak{su}(n) \oplus i\,\mathfrak{su}(n), \\ A &= \frac{A - A^*}{2} + \frac{A + A^*}{2}. \end{aligned}$$

Če izpustimo pogoj, da mora biti sled matrik enaka 0, na enak način vidimo, da je kompleksifikacija Liejeve algebre $\mathfrak{u}(n)$ kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) &= \mathfrak{u}(n) \oplus i\,\mathfrak{u}(n), \\ A &= \frac{A - A^*}{2} + \frac{A + A^*}{2}. \end{aligned}$$

Liejeva algebra $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ vsebuje realne antisimetrične matrike, njena kompleksifikacija pa je kompleksna Liejeva algebra $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ kompleksnih antisimetričnih matrik:

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) &= \mathfrak{so}(n,\mathbb{R}) \oplus i\,\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}), \\ A &= \mathrm{Re}(A) + i\mathrm{Im}(A). \end{aligned}$$

□

(2) Za bazo kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ vzemimo matrike

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Na vektorskem prostoru $V_n = \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ definirajmo linearne preslikave E, F in H s predpisi:

$$\begin{aligned} Ev_k &= (n+1-k)v_{k-1}, \text{ za } 1 \leq k \leq n, \; Ev_0 = 0, \\ Fv_k &= (k+1)v_{k+1}, \text{ za } 0 \leq k \leq n-1, \; Fv_n = 0, \\ Hv_k &= (n-2k)v_k, \text{ za } 0 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Pokaži, da na ta način V_n postane nerazcepna kompleksno linearna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

(b) Pokaži, da je vsaka nerazcepna kompleksno linearna reprezentacija $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ izomorfna eni izmed V_n.

Rešitev: (a) Matrike E, F in H tvorijo bazo kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, zadoščajo pa komutacijskim relacijam:

$$\begin{aligned} [E,F] &= H, \\ [H,E] &= 2E, \\ [H,F] &= -2F. \end{aligned}$$

Dani pogoji:

$$\begin{aligned}
Ev_k &= (n+1-k)v_{k-1}, \text{ za } 1 \leq k \leq n,\ Ev_0 = 0,\\
Fv_k &= (k+1)v_{k+1}, \text{ za } 0 \leq k \leq n-1,\ Fv_n = 0,\\
Hv_k &= (n-2k)v_k, \text{ za } 0 \leq k \leq n
\end{aligned}$$

enolično definirajo neko kompleksno linearno preslikavo $\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V_n)$, radi pa bi pokazali, da na ta način v bistvu dobimo homomorfizem Liejevih algeber. Če bi bili natančni, bi morali povsod pisati $\rho(E)$, $\rho(F)$ in $\rho(H)$, a bomo zaradi enostavnosti raje uporabljali isto oznako za elemente Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ in pa njihove slike v dani reprezentaciji. Zavedati pa se moramo, da imamo opravka z dvema različnima vlogama elementov $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Da je ρ reprezentacija, sledi iz računov:

$$\begin{aligned}
(EF-FE)v_k &= E(k+1)v_{k+1} - F(n+1-k)v_{k-1} = (k+1)(n-k)v_k - (n+1-k)kv_k,\\
&= (n-2k)v_k = Hv_k,\\
(HE-EH)v_k &= H(n+1-k)v_{k-1} - E(n-2k)v_k,\\
&= (n+1-k)(n-2k+2)v_{k-1} - (n-2k)(n+1-k)v_{k-1},\\
&= 2(n+1-k)v_{k-1} = 2Ev_k,\\
(HF-FH)v_k &= H(k+1)v_{k+1} - F(n-2k)v_k = (k+1)(n-2k-2)v_{k+1} - (n-2k)(k+1)v_{k+1},\\
&= -2(k+1)v_{k+1} = -2Fv_k,
\end{aligned}$$

ki veljajo za $1 \leq k \leq n-1$. Za v_0 in v_n pa lahko preverimo posebej.

Dokažimo sedaj še, da je reprezentacija V_n nerazcepna. Denimo, da je $W \subset V_n$ netrivialen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-invarianten podprostor in naj bo

$$v = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \in W.$$

Pri tem smo predpostavili, da je $\lambda_k \neq 0$ zadnji neničelni koeficient v razvoju vektorja v po bazi $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ prostora V_n. Zaradi $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-invariantnosti je potem

$$E^k v = \lambda_k E^k v_k = \alpha v_0 \in W,$$

kar pa pomeni, da je $v_0 \in W$. Ker je $v_k || F^k v_0$, je torej $W = V_n$.

(b) Denimo sedaj, da je V nerazcepna kompleksno linearna reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ dimenzije $\dim(V) = n+1$. Pokazali bomo, da je potem $V \cong V_{n+1}$.

Preslikava $H : V \to V$ je kompleksno linearna, zato obstaja lastni vektor $w \in V$ za H, tako da velja

$$Hw = \lambda w$$

za nek $\lambda \in \mathbb{C}$. Iz komutacijskih relacij med E, F in H potem sledi $HE = EH + 2E$ in $HF = FH - 2F$, kar nam da:

$$\begin{aligned}
H(Ew) &= (EH+2E)w = EHw + 2Ew = \lambda Ew + 2Ew = (\lambda+2)Ew,\\
H(Fw) &= (FH-2F)w = FHw - 2Fw = \lambda Fw - 2Fw = (\lambda-2)Fw.
\end{aligned}$$

Vidimo, da je torej Ew lastni vektor H pri lastni vrednosti $\lambda+2$, Fw pa lastni vektor H pri lastni vrednosti $\lambda-2$. Induktivno lahko na podoben način pokažemo, da je $E^k w$ lastni vektor pri lastni vrednosti $\lambda+2k$, $F^k w$ pa lastni vektor pri lastni vrednosti $\lambda-2k$. Ker so vse te lastne vrednosti različne, so tudi lastni vektorji linearno neodvisni, v kolikor so neničelni.

Naj bo k največje število, za katero je $E^k w \neq 0$. To seveda pomeni, da je $E^{k+1}w = 0$. Definirajmo $v_0 = E^k w \in V$. Vektor v_0 je potem lastni vektor H za neko lastno vrednost, ki jo zaenkrat imenujmo μ. Velja torej $Hv_0 = \mu v_0$. Če definiramo še

$$v_k = \frac{1}{k!}F^k v_0,$$

dobimo bazo $\{v_0, v_1, \ldots, v_l\}$ nekega podprostora $W \subset V$, ki sestoji iz lastnih vektorjev preslikave H. Iz definicije in zgornjega razmisleka takoj sledi, da velja:

$$\begin{aligned} Hv_k &= (\mu - 2k)v_k, \\ Fv_k &= (k+1)v_{k+1}. \end{aligned}$$

Nadalje velja tudi $Ev_0 = 0$ in:

$$\begin{aligned} Ev_1 &= EFv_0 = (H + FE)v_0 = \mu v_0, \\ Ev_2 &= \frac{1}{2}EFv_1 = \frac{1}{2}(H + FE)v_1 = \frac{1}{2}(\mu - 2 + \mu)v_1 = (\mu - 1)v_1. \end{aligned}$$

Induktivno lahko sedaj pokažemo, da je

$$Ev_k = (\mu + 1 - k)v_{k-1}$$

za $1 \leq k \leq l$. Od tod sledi, da je W invarianten podprostor V. Ker je po predpostavki V nerazcepna reprezentacija, mora torej veljati $W = V$ in $l = n$.

Pokazali bi radi še, da je $\mu = n$. V ta namen si poglejmo enakosti

$$Hv_n = (EF - FE)v_n = -F(\mu + 1 - n)v_{n-1} = -n(\mu + 1 - n)v_n.$$

Ker je po drugi strani $Hv_n = (\mu - 2n)v_n$, od tod sledi:

$$\begin{aligned} \mu - 2n &= -n(\mu + 1 - n), \\ \mu - 2n &= n^2 - n\mu - n, \\ \mu(n+1) &= n(n+1), \\ \mu &= n. \end{aligned}$$

Torej je

$$Ev_k = (n + 1 - k)v_{k-1},$$

kar pa pomeni, da smo konstruirali ekspliciten izomorfizem $V \cong V_n$.

Za konec si poglejmo nekaj konkretnih primerov reprezentacij iz te naloge. Reprezentaciji V_n rečemo spin-$\frac{n}{2}$ reprezentacija. To ime je dobila po svoji aplikaciji v kvantni mehaniki, kjer preslikave E, F in H interpretiramo na naslednji način:

$S_z = \frac{\hbar}{2}H$	operator spina v z-smeri,
$S_+ = \hbar E$	kreacijski operator,
$S_- = \hbar F$	anihilacijski operator.

Vektorji $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ so potem lastni vektorji operatorja spina in ustrezajo stanjem, v katerih ima spin točno določeno vrednost. Glede na to bazo ustrezajo v reprezentaciji V_n elementom E, F in H Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ matrike

$$E = \begin{bmatrix} 0 & n & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & 2 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & n & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -n+2 & \\ & & & & -n \end{bmatrix}.$$

V primeru $n = 0$ imamo opravka s trivialno reprezentacijo, za katero je

$$E = F = H = [0].$$

V primeru $n = 1$ ustrezajo elementom E, F in H matrike

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

kar pomeni, da je reprezentacija V_1 izomorfna standardni reprezentaciji $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ na $\mathbb{C}^2$.

V primeru $n = 2$ dobimo matrike

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Reprezentacija V_2 je izomorfna adjungirani reprezentaciji $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Ekspliciten izomorfizem je podan s predpisom, ki bazo $\{v_0, v_1, v_2\}$ prostora V_2 preslika v bazo $\{E, -H, -F\}$ Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. □

(3) Na prostoru $\mathcal{V}_n = \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\{z_1^n, z_1^{n-1} z_2, \ldots, z_1 z_2^{n-1}, z_2^n\}$ homogenih kompleksnih polinomov stopnje n v dveh spremenljivkah z_1 in z_2 definirajmo reprezentacijo grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ s predpisom

$$(A \cdot p)(z_1, z_2) = p([z_1, z_2]\, A),$$

kjer je $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Izračunaj odvod te reprezentacije.

Rešitev: Če pišemo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

lahko dano reprezentacijo definiramo s predpisom

$$(A \cdot p)(z_1, z_2) = p(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2)$$

za poljuben $p \in \mathcal{V}_n$. Reprezentacija $\mathcal{V}_0$ je izomorfna trivialni reprezentaciji, reprezentacija $\mathcal{V}_1$ pa standardni reprezentaciji grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ na $\mathbb{C}^2$. To lahko eksplicitno vidimo na naslednji način. Za bazo $\mathcal{V}_1$ izberimo linearna polinoma $\{z_1, z_2\}$. Matrika A potem na teh dveh polinomih deluje kot:

$$\begin{aligned} (A \cdot z_1) &= az_1 + cz_2, \\ (A \cdot z_2) &= bz_1 + dz_2. \end{aligned}$$

Vidimo torej, da se matrika, ki ustreza A pri reprezentaciji $\mathcal{V}_1$ v bazi $\{z_1, z_2\}$ kar ujema z matriko A. Na podoben način bi lahko zapisali matrike, ki ustrezajo A pri reprezentaciji $\mathcal{V}_n$ glede na dano bazo. Dobili bi matrike velikosti $(n+1) \times (n+1)$, katere koeficienti so polinomi stopnje n v spremenljivkah a, b, c in d.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je odvod reprezentacije $\mathcal{V}_n$ izomorfen reprezentaciji V_n, ki smo jo spoznali v prejšnji nalogi. Če imamo dano reprezentacijo Liejeve grupe G na vektorskem prostoru V, je njen odvod reprezentacija $\mathfrak{g}$ na V, ki je definirana s predpisom

$$Xv = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} v$$

za $X \in \mathfrak{g}$ in $v \in V$.

V našem primeru nas zanima, kako na polinomih delujejo elementi $E, F, H \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Zanje velja:

$$
\begin{aligned}
E &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow e^{tE} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
F &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow e^{tF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \\
H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow e^{tH} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Od tod dobimo:

$$
\begin{aligned}
(Ep)(z_1, z_2) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e^{tE} \cdot p)(z_1, z_2) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p(z_1, tz_1 + z_2) = z_1 \tfrac{\partial p}{\partial z_2}, \\
(Fp)(z_1, z_2) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e^{tF} \cdot p)(z_1, z_2) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p(z_1 + tz_2, z_2) = z_2 \tfrac{\partial p}{\partial z_1}, \\
(Hp)(z_1, z_2) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e^{tH} \cdot p)(z_1, z_2) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p(e^{t} z_1, e^{-t} z_2) = z_1 \tfrac{\partial p}{\partial z_1} - z_2 \tfrac{\partial p}{\partial z_2}.
\end{aligned}
$$

Strnjeno lahko to zapišemo v obliki:

$$
\begin{aligned}
E &= z_1 \tfrac{\partial}{\partial z_2}, \\
F &= z_2 \tfrac{\partial}{\partial z_1}, \\
H &= z_1 \tfrac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \tfrac{\partial}{\partial z_2},
\end{aligned}
$$

kar pomeni, da delujejo elementi Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ na prostoru polinomov $\mathcal{V}_n$ kot linearni diferencialni operatorji reda ena.

Izomorfizem reprezentacij $\mathcal{V}_n$ in V_n:

Definirajmo bazo $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ prostora $\mathcal{V}_n$ s predpisi

$$
v_k = \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^{k}
$$

za $0 \leq k \leq n$. Potem velja:

$$
\begin{aligned}
Ev_k &= \binom{n}{k} z_1^{n-k+1} k z_2^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} z_1^{n-k+1} z_2^{k-1} = (n-k+1) v_{k-1}, \\
Fv_k &= \binom{n}{k} (n-k) z_1^{n-k-1} z_2^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} z_1^{n-k-1} z_2^{k+1} = (k+1) v_{k+1}, \\
Hv_k &= \binom{n}{k} \left((n-k) z_1^{n-k} z_2^{k} - k z_1^{n-k} z_2^{k} \right) = (n-2k) v_k,
\end{aligned}
$$

kar pa se ujema s predpisi pri reprezentaciji V_n. Torej smo našli kompleksne reprezentacije Liejeve grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, ki integrirajo nerazcepne kompleksno linearne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. $\square$

(4) Klasificiraj nerazcepne kompleksne reprezentacije grup SU(2), SO(3), O(3) in $SL(2, \mathbb{R})$.

Rešitev: Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe SU(2):

Liejeva grupa SU(2) je enostavno povezana, zato imamo bijektivno korespondenco med kompleksnimi reprezentacijami Liejeve grupe $SU(2)$ in kompleksnimi reprezentacijami njene Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$. Kompleksne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{su}(2)$ pa po drugi strani ustrezajo kompleksno linearnim reprezentacijam kompleksne Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Od tod sledi, da lahko nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe SU(2) parametriziramo z nenegativnimi celimi števili, eksplicitno pa so to reprezentacije

$$\{\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots\}$$

na homogenih polinomih stopnje n v dveh kompleksnih spremenljivkah. Poljubno matriko $Q \in$ SU(2) lahko zapišemo v obliki

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix},$$

kjer sta a in b kompleksni števili, ki zadoščata enakosti $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Matrika Q potem deluje na polinomu $p \in \mathcal{V}_n$ s predpisom

$$(Q \cdot p)(z_1, z_2) = p(az_1 - \bar{b}z_2, bz_1 + \bar{a}z_2).$$

Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe SO(3):

Liejevo grupo SO(3) lahko zapišemo kot kvocient grupe SU(2) v obliki

$$\mathrm{SO}(3) = \frac{\mathrm{SU}(2)}{\{-\mathrm{I}, Id\}}.$$

Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe SO(3) torej ustrezajo tistim reprezentacijam $\mathcal{V}_n$ grupe SU(2), pri katerih element $-\mathrm{I}$ deluje kot identiteta. Vzemimo torej poljuben polinom $p \in \mathcal{V}_n$ in ga zapišimo v obliki

$$p(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_1^k z_2^{n-k}.$$

Potem velja

$$(-\mathrm{I} \cdot p)(z_1, z_2) = p(-z_1, -z_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-z_1)^k (-z_2)^{n-k} = (-1)^n p(z_1, z_2).$$

Na prostoru $\mathcal{V}_n$ dobimo nerazcepno reprezentacijo grupe SO(3) natanko takrat, ko je n sod. Grupa SO(3) torej nima 'polspinskih' reprezentacij pač pa samo reprezentacije

$$\{\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_4, \ldots\},$$

ki ustrezajo celoštevilskim spinom.

Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe O(3):

Grupo O(3) lahko zapišemo v obliki produkta $\mathrm{O}(3) = \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{Z}_2$, kjer je $\mathbb{Z}_2 = \{-\mathrm{I}, \mathrm{I}\}$. Nerazcepne reprezentacije produkta dveh grup ustrezajo tenzorskim produktom nerazcepnih reprezentacij obeh faktorjev. Za grupo SO(3) smo ravnokar klasificirali vse nerazcepne reprezentacije, medtem ko ima grupa $\mathbb{Z}_2$ dve nerazcepni enodimenzionalni reprezentaciji na $\mathbb{C}$. Ena izmed njiju je trivialna reprezentacija, druga pa determinantna reprezentacija. Ker imamo naravno identifikacijo

$$\mathcal{V}_n \cong \mathcal{V}_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C},$$

lahko vse nerazcepne reprezentacije grupe O(3) realiziramo na prostorih polinomov $\mathcal{V}_n$ na naslednji način. Označimo z $\rho_n : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}_n)$ nerazcepne reprezentacije grupe SO(3) in definirajmo homomorfizma grup

$$\rho_n^{\pm} : \mathrm{O}(3) \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}_n)$$

s predpisoma:

$$\rho_n^{+}(R, \pm \mathrm{Izom}) = \rho_n(R),$$
$$\rho_n^{-}(R, \pm \mathrm{Izom}) = \pm\rho_n(R),$$

kjer je $R \in \mathrm{SO}(3)$. Na ta način dobimo vse nerazcepne reprezentacije grupe O(3). Če označimo z $\mathcal{V}_n^{\pm}$ vektorski prostor $\mathcal{V}_n$, opremljen z reprezentacijo $\rho_n^{\pm}$, so nerazcepne reprezentacije grupe O(3)

$$\{\mathcal{V}_0^{\pm}, \mathcal{V}_2^{\pm}, \mathcal{V}_4^{\pm}, \ldots\}.$$

Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$:

Ker je $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ so nerazcepne kompleksne reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ravno zožitve reprezentacij $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ na $\mathcal{V}_n$. Ker grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ni enostavno povezana, je nerazcepnih reprezentacij $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ kvečjemu manj. Kot smo videli pri prejšnji nalogi, pa lahko vsako reprezentacijo $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ na $\mathcal{V}_n$ razširimo do reprezentacije grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, kjer matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

deluje s predpisom

$$(A \cdot p)(z_1, z_2) = p(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2)$$

za poljuben $p \in \mathcal{V}_n$. Nerazcepne kompleksne reprezentacije grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ so torej

$$\{\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots\}.$$

Ravno ti prostori pa so po drugi strani tudi vse nerazcepne kompleksne reprezentacije univerzalnega krova $\widetilde{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})}$ Liejeve grupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Od tod se da izpeljati, da grupa $\widetilde{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})}$ ni matrična Liejeva grupa. $\square$