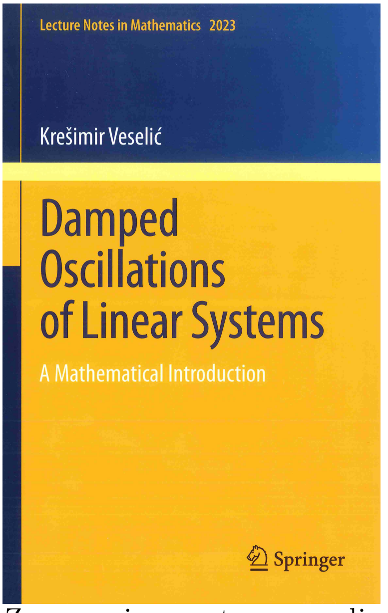
Krešimir Veselić, Damped Oscillations of Linear Systems, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011, 212 strani.



Knjiga je posvečena obravnavi dinamičnih sistemov, ki jih lahko opišemo s sistemom navadnih diferencialnih enačb

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t). \tag{1}$$

Z $x = x(t)$ je označena vektorska funkcija časa oziroma pot $t \mapsto x(t)$ v $\mathbb{R}^n$. Vse tri matrike M, C in K so *konstantne*, realne in simetrične, $f(t)$ pa je vektor nehomogenosti. Matriki M in K sta največkrat pozitivno definitni, C pa ne. Z zgornjo enačbo lahko opisujemo majhna nihanja mnogih zanimivih sistemov, ki jih najdemo v naravi, predvsem pa v teoriji kontrole, strukturni mehaniki in mnogih drugih vejah inženirstva. Znana primera sta zaporedje poveznih mas, vzmeti ter dušilcev in zaporedje skupaj postavljenih krogotokov, ki vsebujejo po dve tuljavi, kondenzator in upor. Sosednji krogotoki so sklopljeni z medsebojno indukcijo. V prvem primeru je dušenje podano z dušilci, v drugem pa z upori.

S stališča teoretičnega matematika je enačba (1) enostavna. Je linearna in koeficienti so konstantni. Torej jo znamo analitično rešiti. Kot že rečeno, pa se za tako enačbo zanimajo zlasti inženirji in aplikativni znanstveniki. Ti pa potrebujejo konkretne, numerične rešitve in ne le simbolično zapisanih analitičnih. Poleg tega hočejo delovanje sistema tudi razumeti. Strukturnega mehanika lahko na primer zanima, kam v sistem bi moral vstaviti dušilec, da bi čim bolj učinkovito odpravil neželene vibracije sistema. Če rešimo sistem (1) v prvotnih koordinatah, bomo verjetno dobili zelo zapleteno krivuljo v $\mathbb{R}^{2n}$, iz katere bomo težko kaj pametnega razbrali. Ljudje so od nekdaj poskušali razumeti zapletena gibanja v naravi tako, da so si predstavljali, da so na neki način sestavljena iz enostavnih gibanj. Zelo star primer takega gledanja so antični poskusi razložiti gibanje planetov s cikli, epicikli, epiepicikli ... Zelo velik korak je v teh naporih napravil Joseph Fourier, ko je časovni razvoj porazdelitve toplote v telesu opisal kot vsoto (superpozicijo) harmoničnih nihanj. Na mnoga gibanja v naravi in tehniki je dejansko smiselno gledati kot na superpozicije enostavnih nihanj. Če so opazovana gibanja sistema majhna, torej, če se sistem le malo oddaljuje od kake svoje ravnovesne lege, lahko ta gibanja dovolj verodostojno opisujemo z linearnimi diferencialnimi enačbami oziroma s sistemi linearnih diferencialnih enačb.

Cilj Veseličeve knjige je priprava teoretičnih orodij, s pomočjo katerih bo lahko numerični matematik sistem (1) učinkovito in predvsem *zanesljivo* predstavil kot superpozicijo razklopljenih enostavnih sistemov in nato sistem rešil. Na ta način bo dobil zanesljive in verodostojne rešitve in tudi razumevanje sestave sistema. V knjigi ni numeričnih algoritmov, so pa teoretična orodja, ki konstrukcijo kvalitetnih numeričnih algoritmov omogočajo. S pomočjo teh orodij lahko numerični matematik identificira tiste konfiguracije parametrov, ki lahko vodijo do nesmiselnih numeričnih rešitev. Z dodatno pazljivostjo se bo torej lahko nesmiselnim rešitvam izognil.

Knjiga je napisana zelo jasno in natančno. Kljub temu, da prinaša zahtevno in aktualno snov, je zelo berljiva, saj ne zahteva posebnega predznanja. Vse potrebno je razloženo sproti. Knjigo lahko bere vsak študent matematike ali fizike, ki ima za seboj tretji letnik bolonjskega študija. Vendar je za razumevanje pomembnosti in dejanskega pomena rezultatov potrebna solidna mera »matematične kulture«. Med matematiki, ki se jim avtor zahvaljuje za koristne komentarje in popravke rokopisa knjige, najdemo tudi našega profesorja Antona Suhadolca. Profesor Suhadolc je s svojimi odličnimi predavanji o diferencialnih enačbah navduševal mnoge generacije matematikov, med njimi tudi pisca teh vrstic.

Knjigo priporočamo v branje vsem, ki jih zanimajo numerični problemi reševanja diferencialnih enačb in vloga, ki ju imata linearna algebra in linearna geometrija na tem področju.

Za tiste, ki jih zanima, opišimo tematiko knjige nekoliko podrobneje.

Matrike M, C in K so konstantne, torej znamo sistem (1) analitično rešiti. Sistem (1) n enačb drugega reda prevedemo na sistem $2n$ enačb prvega reda po običajnem postopku. Vpeljemo novo neodvisno vektorsko spremenljivko $y(t) = (x_1(t), x_2(t))$, kjer je

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}.$$

Tedaj je $x(t)$ rešitev (1) natanko takrat, ko je $y(t)$ rešitev homogenega sistema

$$\dot{y} = By + g(t), \tag{2}$$

kjer je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}f(t) \end{pmatrix}.$$

Ker je B konstantna matrika, dobimo splošno rešitev enačbe (2) z eksponenciacijo tB in nato z variacijo konstante. Torej

$$y(t) = \operatorname{Exp}(tB)\cdot c + \int_0^t \operatorname{Exp}((t-\tau)B)\cdot g(\tau)d\tau, \quad c \in \mathbb{R}^{2n} \text{ poljubna konstanta.} \tag{3}$$

V tej uvedbi novih spremenljivk zamenjamo opazovanje rešitvenih krivulj $x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ v konfiguracijskem prostoru $\mathbb{R}^n$, ki parametrizira lege sistema, z opazovanjem rešitvenih krivulj $(x(t), \dot{x}(t))\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ v faznem prostoru $\mathbb{R}^{2n}$, ki parametrizira »prava« stanja sistema. Ta uvedba novih spremenljivk je srž Hamiltonovega formalizma. Pri dovolj splošnih izbirah matrik M, C in K in pri večini izbir začetnih pogojev $c = (x(0), \dot{x}(0))$ so rešitve $y(t)$, podane s (3), zelo zapletene krivulje v $\mathbb{R}^{2n}$. Neposredno opazovanje teh krivulj nam običajno ne da dobrega vpogleda v način delovanja sistema (1). Zato poskušamo poiskati take koordinate prostora $\mathbb{R}^{2n}$, da bodo v teh koordinatah naše rešitve enostavnejše, laže razumljive krivulje. Natančneje, zapleteno gibanje $y(t)$ poskušamo prikazati kot razumljivo superpozicijo več enostavnih, razklopljenih gibanj. V primeru, ko so vse tri matrike M, K in C hkrati diagonalizabilne glede na relacijo kongruentnosti, lahko sistem razklopimo kar v konfiguracijskem prostoru. Naj bo P prehodna matrika, za katero so $P^T\,M\,P$, $P^T\,K\,P$ in $P^T\,C\,P$ diagonalne, in naj bo $P \cdot \xi = x$. Tedaj je sistem (1) ekvivalenten sistemu n med seboj neodvisnih skalarnih enačb

$$\mu_j\,\ddot{\xi}_j + \gamma_j\,\dot{\xi}_j + \kappa_j\,\xi_j = g_j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Pri tem je $(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))^T = P^T \cdot f(t)$ in

$$P^T\, M\, P = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n), \quad P^T\, K\, P = \operatorname{diag}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n),$$
$$P^T\, C\, P = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Sistem se torej razklopi v n neodvisnih dušenih harmoničnih nihanj s spodbujanji g_j v eni prostorski dimenziji. Čeprav sta dve realni simetrični matriki vedno hkrati diagonalizabilni v smislu kongruentnosti, pa generična izbrana trojica takih matrik ni diagonalizabilna v tem smislu z eno samo prehodno matriko. Razklopitev zgornje oblike dobimo torej le izjemoma. V splošnem je zato bolj smiselno sistem poenostavljati v faznem prostoru.

Predpostavimo, da je matrika B diagonalizabilna v običajnem smislu. V faznem prostoru sistem (2) razklopimo tako, da diagonaliziramo matriko B. Sistem (2) razpade na $2n$ neodvisnih linearnih diferencialnih enačb prvega reda

$$\dot{\eta}_i = \alpha_i \eta_i + \phi_i(t), \quad i = 1, \ldots 2n,$$

pri čemer so α_i lastne vrednosti matrike B.

Na prvi pogled torej izgleda, da nam naš problem ne bo povzročal prevelikih preglavic. Vendar ni tako. Če hočemo zgornjo razklopitev za neki konkreten sistem poiskati numerično, lahko zaidemo v težave. Reševanje lastnega problema (zlasti velikih) matrik je s stališča numerične matematike zelo težak problem. Seveda pa so različne vrste matrik v tem pogledu različno »neprijetne«. Spomnimo se, da je kvadratna matrika N normalna, če zanjo velja $N^T N = N N^T$. Znano je, da je reševanje lastnega problema za nenormalne matrike bolj zahtevno kot za normalne. Odstopanje matrike od normalnosti lahko na enostaven način kvantitativno merimo. In bolj ko matrika odstopa od normalnosti, težji je numerični lastni problem za to matriko.

Sistem (1) lahko prevedemo na sistem prvega reda na veliko načinov. Naj bosta W_1 in W_2 poljubni realni obrnljivi $n \times n$ matriki. Nove koordinate $z = (z_1, z_2)$ lahko vpeljemo s predpisom

$$z_1 = W_1\, x, \quad z_2 = W_2\, \dot{x}. \tag{4}$$

Matrika koeficientov sistema se v teh koordinatah glasi

$$F = \begin{pmatrix} 0 & W_1 W_2^{-1} \\ -W_2 M^{-1} K W_1^{-1} & -W_2 M^{-1} C W_2^{-1} \end{pmatrix}.$$