

# NELINEARNA ANALIZA RAZPOKANE ARMIRANOBETONSKE NATEZNE PALICE – PRIMERJAVA NUMERIČNIH METOD

## NONLINEAR ANALYSIS OF CRACKED TENSILE REINFORCED CONCRETE BAR – COMPARISON OF NUMERICAL METHODS

**Urška Bajc, univ. dipl. inž. vod. in kom. inž.**

urska.bajc@fgg.uni-lj.si

**doc. dr. Sebastjan Bratina, univ. dipl. inž. grad.**

sebastjan.bratina@fgg.uni-lj.si

**prof. dr. Miran Saje, univ. dipl. inž. grad.**

miran.saje@fgg.uni-lj.si

**prof. dr. Igor Planinc, univ. dipl. inž. grad.**

igor.planinc@fgg.uni-lj.si

Univerza v Ljubljani, FGG, Jamova 2, Ljubljana

**Znanstveni članek**

UDK 519.61/.64:624.071.3

**Povzetek** | V članku so predstavljeni trije enodimenzionalni numerični modeli za nelinearno analizo razpokane armiranobetonske natezne palice. Prva dva modela sta zasnovana na osnovi diskretne razpoke. Prvi med njima na t. i. modelu idealne razpoke, drugi pa na modelu t. i. povezane razpoke. Zanj je značilno, da sta nerazpokana betonska ovoja palice ob razpoki povezana z armaturno palico in tudi z agregatnimi zrni. Tretji numerični model za analizo razpokane armiranobetonske natezne palice je model razmazane razpoke. Z vsemi tremi numeričnimi modeli so v članku analizirani širina in število razpok ter togost in nosilnost razpokane armiranobetonske natezne palice. Rezultati analize so primerjani z eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati podobnih metod iz znanstvene literature. Primerjave rezultatov so pokazale, da je najnatančnejši numerični model s povezano razpoko. Diskretni model z idealno razpoko je praktično enako natančen kot model s povezano razpoko, manj natančen je le za določitev širine razpoke. Najmanj natančen je model razmazane razpoke. Glede na zasnovo modela se z njim dobro določita le togost in nosilnost razpokane armiranobetonske natezne palice. V zaključku je prikazana tudi ocena ustreznosti poenostavljenega računskega postopka za analizo razpok armiranobetonskih konstrukcij skladno z evropskim standardom EC2. Primerjava je pokazala, da se s poenostavljenim postopkom relativno dobro oceni širina razpoke.

Ključne besede: armiranobetonska palica, razpoke, povezana razpoka, zdrs na stiku, natezna togost, MKE

**Summary** | This paper presents three numerical models for nonlinear analysis of cracked tensile reinforced concrete bar. The first two models are based on the discrete crack method. In the first model, which is mostly reported in literature, the ideal crack is considered, while in the second discrete model the phenomenon of aggregate bridging is included. The third numerical model is based on the smeared crack concept. This model is used to analyse the softening of reinforced concrete bar. Additionally, the crack width and their locations for all presented models are analysed. Furthermore, we analysed tension stiffness and bearing capacity of cracked reinforced concrete bar. The results are compared with other numerical models, based both on the discrete and smeared

crack concepts. It is found out that the presented numerical model for the analysis of the behaviour of cracked tensile reinforced concrete elements accounting for aggregate bridging is well appropriate for the determination of the element tension stiffness, the crack width and also their locations. The discrete model with ideal cracks is rather good in the same way, with the exception of the crack width. Because of the design of the model, the smeared crack model is less accurate in determining the cracks width and their locations, yet it is sufficient for the determination of the element tension stiffness. The results have also been compared with the values obtained by the related procedure for evaluating the width and the distance between two cracks, as given in European standard Eurocode 2. We may thus conclude that the proposed method is convenient for the evaluation of the crack width and the crack spacing in practical structural design, too.

Keywords: reinforced concrete bar, cracks, aggregate bridging, slip in contact, tension stiffness, FEM

## 1 • UVOD

Razpokanost betona in interakcija med ojačitvijo in betonom sta značilni lastnosti vseh vrst ojačanih betonskih konstrukcij. Ker ti pojavi bistveno vplivajo na togost, duktilnost in nosilnost ojačanih betonskih konstrukcij, jih moramo v analizi tovrstnih konstrukcij zagotovo upoštevati. Najbolj preprost gradbeni element, kjer so prepleteni vsi omenjeni pojavi, je natezna armiranobetonska palica. Ta je sestavljena iz betonskega ovoja in armaturne palice, ki je v enem krajišču nepomično osno podprta, na drugem pa obtežena z natezno osno silo. Zaradi kompozitnega delovanja med betonskim ovojem in armaturno palico ta sila povzroči natezne napetosti in osne deformacije v armaturni palici in betonskem ovojju. Zaradi relativno majhne natezne nosilnosti betona betonski ovoj razpoka že pri relativno majhni obremenitvi. Ko nastopi v armiranobetonski palici oziroma betonskem ovojju prva razpoka, napetosti v betonskem ovojju ob idealni razpoki padejo na nič. S povečevanjem obtežbe se na preostalih nerazpokanih delih betonskega ovoja palice pojavijo nove razpoke, ki so medsebojno povezane z armaturno palico, lahko pa tudi z agregatnimi zrni. Razpoke se v betonskem ovojju palice pojavljajo vse do stabiliziranega stanja oziroma do porušitve armaturne palice. Pojav povečane natezne togosti armiranobetonske palice zaradi kompozitnega delovanja armaturne palice in betonskega ovoja imenujemo ojačana natezna togost (angl. *tension stiffening*).

V literaturi so na voljo številni matematični modeli, ki bolj ali manj natančno opisujejo omenjene pojave. Najpreprostejši med njimi so tisti, pri katerih pojave modeliramo z modi-

ficiranim konstitucijskim diagramom betona v nategu (Bergan, 1979). Za bolj natančno modeliranje razpokane armiranobetonske natezne palice in tudi kompleksnejših armiranobetonskih konstrukcij sta se med raziskovalci uveljavili dve skupini modelov. Prvo sestavljajo modeli z diskretnimi razpokami. S temi modeli razpoke obravnavamo kot diskontinuiteto v geometriji palice oziroma konstrukcije, njihove velikosti in lege pa določimo kar na osnovi dosežene natezne trdnosti betona ((Abrishami, 1996), (Manfredi, 1998), (Yang, 2005), (Yang, 2008), (Yankelevsky, 1997), (Yankelevsky, 2008), (Dias da Costa, 2009), (Kuutti, 2012)). V drugo skupino metod uvrščamo tiste, kjer razpokanost betona in posledično mehčanje betona modeliramo s t. i. razmazanimi razpokami (angl. *crack band model*). S temi modeli predpostavimo, da so razpoke – in s tem njihov vpliv – razmazane na omejenem delu palice oziroma konstrukcije, kar le grobo ustreza dejanskemu stanju ((Bažant, 1989), (Bažant, 1997), (Kim, 1992), (Kwak, 2002), (Bratina, 2004), (Yang, 2008)).

V članku bomo predstavili tri enodimenzionalne numerične modele za nelinearno analizo razpokane armiranobetonske natezne palice. Prva dva modela uvrščamo v skupino modelov z diskretnimi razpokami. Prvi med njimi upošteva model idealne razpoke, pri drugem pa upoštevamo, da betonska ovoja palice ob razpoki nista popolnoma ločena, temveč sta povezana z armaturno palico in tudi z agregatnimi zrni. Ta pojav v literaturi imenujemo premostitev razpok z agregatnimi zrni (angl. *aggregate bridging*). Ta model bomo v članku imenovali model povezane

razpoke. Za oba matematična modela je značilno, da ločeno z enodimenzionalnimi modeli modeliramo armaturno palico in betonski ovoj. Kot dokazujejo eksperimenti, je povezava med njima podajna. Čeprav je obnašanje betona v nategu do porušitve in armaturne palice do meje plastičnosti linear- no, moramo razpokano armiranobetonsko natezno palico modelirati numerično, saj je obnašanje povezave med armaturno palico in betonskim ovojem nelinearno. V pričujočem članku predstavimo numerična modela z idealno in povezano razpoko, kjer obnašanje razpokane armiranobetonske natezne palice modeliramo z deformacijsko metodo končnih elementov. Pri modelu s povezano razpoko pa vpliv agregatnih zrn na povezanost betonskih ovojev ob razpoki modeliramo z nelinearno vzmetjo. Detajlno sta oba numerična modela predstavljena v članku Bajčeve in sodelavcev (Bajc, 2013). Tretji predstavljeni matematični model za analizo razpokane armiranobetonske natezne palice uvrščamo v skupino modelov z razmazano razpoko. Tudi pri teh metodah pogosto, ne pa vedno, armaturno palico in betonski ovoj modeliramo ločeno, sloja pa sta, podobno kot pri modelih z diskretnimi razpokami, povezana s podajnim stikom. Kot smo že povedali, s temi modeli razpoke betona razmažemo na končnem območju betonskega ovoja palice. Obnašanje tega območja opišemo s konstitucijskim zakonom med natezno napetostjo in specifično spremembo dolžine tega območja. Značilnost tega območja je, da se mehča. Detajli tega numeričnega modela so opisani v članku Markovičeve in sodelavcev (Markovič, 2013). Poleg predstavitve numeričnih modelov bomo v članku analizirali predvsem njihovo natančnost za določitev širine in števila razpok ter togosti in nosilnosti razpokane armiranobetonske natezne palice. S tem namenom

bomo rezultate analize primerjali med seboj in tudi z eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati podobnih metod, ki so dostopni v znanstveni literaturi. Na koncu bomo s primerjavo rezultatov numerične analize in eksperimentov ocenili ustreznost poenostavljenega računskega postopka za račun širine razpok armiranobetonskih konstrukcij skladno z EC2 (SIST, 2005).

Članek ima poleg uvodnega poglavja še pet poglavij. V drugem poglavju predstavimo numerična modela z idealno in povezano razpoko za nelinearno analizo razpokane armiranobetonske natezne palice. V tretjem poglavju na kratko predstavimo numerični model z razmazano razpoko. Poenostavljen postopek za račun širine razpok armiranobetonskih konstrukcij po EC2 predstavimo v

četrtem poglavju. V petem poglavju s primerjavo med rezultati analize predstavljenih numeričnih metod ter eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati podobnih matematičnih modelov, ki so dostopni v literaturi, ocenimo natančnost vseh predstavljenih numeričnih modelov za analizo togosti in nosilnosti razpokane armiranobetonske natezne palice. V šestem poglavju podajamo zaključke.

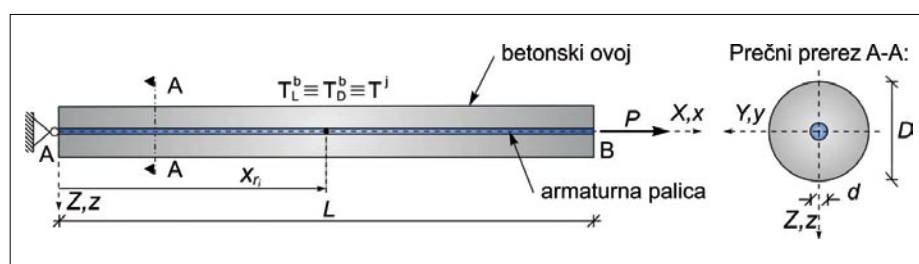
## 2 • NUMERIČNA MODELA Z IDEALNO IN POVEZANO RAZPOKO

### 2.1 Osnovne enačbe

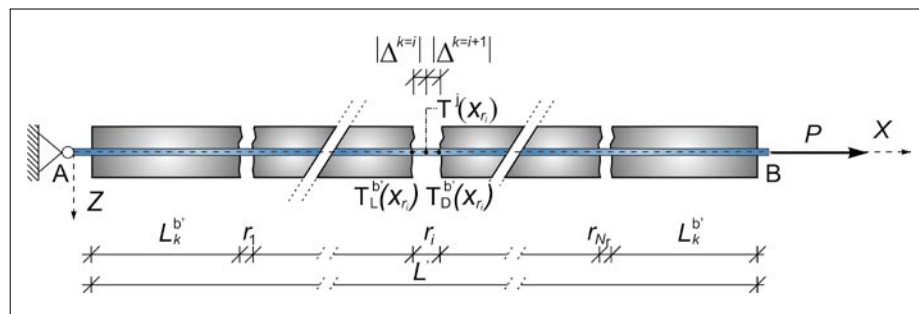
Opazujemo armiranobetonsko natezno palico z začetno dolžino  $L$ . Prečni prerez palice sestavljata betonski ovoj s ploščino  $A^b$  in premerom  $D$  (ali  $b/h$ ) ter armaturna palica s ploščino  $A^i$  in premerom  $d$  (slika 1).

Armaturna palica je v točki A nepomično osno podprta, v točki B pa je obtežena z natezno silo  $P$  (slika 1). Prva razpoka v betonskem ovoju palice nastopi takrat, ko beton doseže natezno trdnost  $f_{ct}$  (Yang, 2005). Ker smo predpostavili, da sta armaturna palica in betonski ovoj homogena v vzdolžni smeri, se prva razpoka pojavi na sredini palice. S povečevanjem obtežbe nastane na sredini obeh nerazpokanih delov betonskega ovoja palice naslednji dve razpoki. Proces nastajanja novih razpok se nadaljuje do stabiliziranega stanja razpok. Razpokano armiranobetonsko palico z značilnimi geometrijskimi veličinami prikazujemo na sliki 2. Število razpok označimo z  $N_r$ , število nerazpokanih betonskih odsekov palice pa z  $N_k$ , kjer je  $N_k = N_r + 1$ . Ker je palica v vzdolžni smeri homogena, število oziroma nastajanje razpok ni poljubno. Spreminja se po pravilu  $N_r = 1, 3, 7, 15 \dots$ . Dodatno smo na sliki 2 z  $r_i$  označili velikost  $i$ -te razpoke.

Pri izpeljavi osnovnih enačb matematičnega modela razpokane armiranobetonske natezne palice z diskretnimi razpokami poleg že omenjenih predpostavk dodatno upoštevamo naslednje osnovne predpostavke: (i) oblika in velikost prečnega prereza betonskega ovoja oziroma armaturne palice se med deformiranjem ne spreminjata; (ii) prečni prerezi betonskega ovoja in armaturne palice, ki so pred deformiranjem ravni in pravokotni na nedeformirano referenčno os palice, ostanejo ravni in pravokotni na deformirano referenčno os palice; (iii) prečni prerez armaturne palice je veliko manjši od velikosti prečnega prereza betonskega ovoja; (iv) vpliv radialnih



Slika 1 • Nerazpokana armiranobetonska natezna palica (nedeformirana lega)



Slika 2 • Razpokana armiranobetonska natezna palica (deformirana lega)

nepetosti je zanemarljiv; (v) povezava med betonskim ovojem in armaturno palico je podajna; (vi) obnašanje betonskega ovoja je linearno, armaturne palice in stika med njima pa nelinearno.

Deformiranje razpokane armiranobetonske natezne palice opišemo v prostorskem kartezičnem koordinatnem sistemu  $(X, Y, Z)$ . Da z matematičnim modelom ustrezno opišemo podajnost stika oziroma zamike med betonskim ovojem in armaturno palico, ju modeliramo ločeno z ustrezno prirejenim Reissnerjevimi modelom nosilca (Reissner, 1972). Pri tem delce betonskega ovoja identificiramo z materialnimi koordinatami  $x^b, y^b$  in  $z^b$ , delce armaturne palice pa z materialnimi koordinatami  $x^i, y^i$  in  $z^i$ . Ne izgubimo pri splošnosti, če predpostavimo, da materialna

koordinatna sistema in prostorski koordinatni sistem v nedeformirani legi palice sovpadajo. Zato lahko materialne koordinate označimo  $x = x^b = x^i, y = y^b = y^i$  in  $z = z^b = z^i$ . Kot referenčno os pa izberemo težiščno os armiranobetonske palice, ki sovпада z materialno koordinato  $x$  in prostorsko koordinato  $X$  (slika 1).

V nadaljevanju veličine, ki pripadajo betonskemu ovoju označimo z zgornjim indeksom  $(\bullet)^b$ , veličine, ki pripadajo armaturni palici pa z indeksom  $(\bullet)^i$ . Napetostno in deformacijsko stanje razpokane armiranobetonske natezne palice določajo kinematične, konstitucijske, ravnotežne in vezne enačbe ( $i = b, j$ ):

$$u'' - \varepsilon^i = 0, \quad (1)$$

$$N'' + p_x^i = 0, \quad (2)$$

$$N^i = N_c^i(\varepsilon^i) = \int_{A_i} \sigma^i(\varepsilon^i) dA, \quad (3)$$

$$\Delta = u^j - u^b, \quad (4)$$

$$p_x^b = -p_x^j, \quad (5)$$

$$p_x^b = p_{x,c}^b(\Delta) = \pi d \tau(\Delta). \quad (6)$$

Oznaka  $(\bullet)^i$  v enačbah (1) in (2) pomeni odvod veličine po materialni koordinati  $x$ . Vz dolžna pomika referenčne osi betonskega ovoja in armaturne palice smo v zgornjih enačbah označili z  $u^i$ , z  $\varepsilon^i$  smo označili osni deformaciji, z  $N^i$  pa osni sili ( $i=b, j$ ). V enačbi (4) smo z  $\Delta$  označili zamik na stiku med betonskim ovojem in armaturno palico. Velikost tega zamika je odvisna od fizikalnih lastnosti stika. Določimo ga z eksperimenti in ga v splošnem opišemo s konstitucijsko enačbo stika  $p_{x,c}^b(\Delta)$  (6), ki predstavlja zvezo med kontaktno linijsko obtežbo in zamikom. S  $\tau$  smo v enačbi označili strižno napetost na stiku. V enačbi (3) smo konstitucijska zakona betonskega ovoja in armaturne palice označili z  $N_c^b(\varepsilon^b)$  in  $N_c^j(\varepsilon^j)$ , kjer smo s  $\sigma^b$  in  $\sigma^j$  označili normalni napetosti v prečnem prerezu betonskega ovoja in armaturne palice. Tudi ta dva konstitucijska zakona določimo z eksperimenti. Konstitucijske zakone betonskega ovoja v nategu, armaturne palice in stika med slojema s pripadajočimi materialnimi parametri prikazujemo na sliki 3.

V nadaljevanju predstavimo enačbo, s katero določimo širine razpok. Širine označimo z  $r_i$ . Širino razpoke predstavlja razdalja med deformiranimi legama točk  $T_c^b$  in  $T_b^b$ , ki sta bili v nedeformirani legi identični  $T_b^b \equiv T_c^b$  (sliki 1 in 2). Izračunamo jih z izrazom za določitev razlike zdrsov na mestu razpoke ali pa izrazom za določitev razlike vzdolžnih pomikov obeh delov betonskega ovoja palice ob razpoki:

$$r_i = \Delta^{k=i} - \Delta^{k=i+1} = u^{b,k=i+1}(L_k^{b^i}) - u^{b,k=i}(0). \quad (7)$$

Na sliki 2 smo prikazali t. i. idealne razpoke. Eksperimentalni rezultati pa kažejo, da idealne razpoke praviloma ne nastopijo v začetni fazi nastajanja razpoke. V tej fazi sta z nastajajočo razpoko ločena nerazpokana dela betonskega ovoja palice, povezana z armaturno palico in tudi z agregatnimi zrni ((Yang, 2005), (Cerioni, 2009)) (slika 4). Ta pojav se v literaturi imenuje povezanost razpok z agregatnimi zrni (angl. *aggregate bridging*). Ko je velikost razpoke relativno majhna, ima lahko ta pojav velik vpliv na širino razpoke in tudi na napetostno in deformacijsko stanje razpokane armiranobetonske natezne palice. Najpreprosteje ta fizikalni pojav v enodimenzionalnem matematičnem modelu z diskretnimi razpokami upoštevamo z vpeljavo vzmeti, ki povezuje z razpoko ločena nerazpokana dela betonskega ovoja palice. Fizikalne lastnosti vzmeti pa določimo z eksperimenti. V predstavljenem numeričnem modelu konstitucijski

zakon vzmeti povzamemo po literaturi ((Yang, 2005), (Cerioni, 2009), (Rabczuk, 2005)). Prikazujemo ga na sliki 4.

Sistem osnovnih enačb razpokane armiranobetonske natezne palice (1)–(6) sestavlja devet diferencialnih in algebrskih enačb za določitev prav toliko neznanih funkcij:  $\varepsilon^b(x)$ ,  $\varepsilon^j(x)$ ,  $N^b(x)$ ,  $N^j(x)$ ,  $u^b(x)$ ,  $u^j(x)$ ,  $p_x^b(x)$ ,  $p_x^j(x)$  in  $\Delta(x)$ . Enačbe rešimo z upoštevanjem ustreznih kinematičnih in statičnih robnih pogojev. Robna pogoja za armaturno palico sta:

$$u^j(0) = 0, \quad (8)$$

$$N^j(L) = P. \quad (9)$$

Statični robni pogoji za betonski ovoj sestavljajo osnovni robni pogoji na začetku in koncu betonskega ovoja palice:

$$N^b(0) = 0, \quad (10)$$

$$N^b(L) = 0, \quad (11)$$

ter statični robni pogoji zaradi nastanka razpok v betonskem ovoju palice. Ti so za idealne razpoke ( $i=1, 2 \dots N$ ):

$$N^{b,k=i}(L_k^{b^i}) = 0, \quad (12)$$

$$N^{b,k=i+1}(0) = 0, \quad (13)$$

ter za povezane razpoke:

$$N^{b,k=i}(L_k^{b^i}) = N_r^b(r) = \sigma_r^b(r) A^b, \quad (14)$$

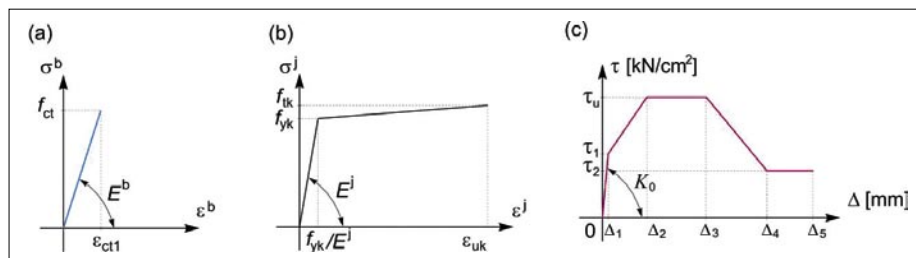
$$N^{b,k=i+1}(0) = N_r^b(r) = \sigma_r^b(r) A^b, \quad (15)$$

kjer smo z  $N_r(r)$  označili osno silo v nelinearni vzmeti.

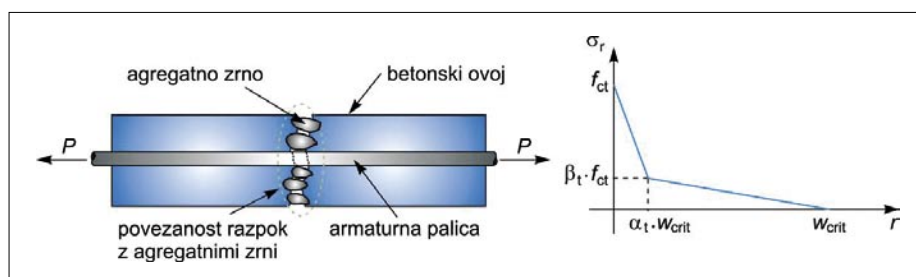
Opomba: Pogosto je med eksperimentom na prostem robu z natezno osno silo obtežen betonski ovoj in ne armaturna palica. V takih primerih se statični robni pogoj (9) spremeni v  $N^j(L) = 0$  in robni pogoj (11) v  $N^b(L) = P$ .

## 2.2 Metoda končnih elementov

Osnovne enačbe (1)–(6) razpokane armiranobetonske natezne palice so nelinearne, zato točne rešitve teh enačb ne poznamo. Poznamo jih le za linearne konstitucijske modele betonskega ovoja, armaturne palice in stika med njima, torej za linearni sistem osnovnih enačb. V tem članku osnovne enačbe (1)–(6)



Slika 3 • Konstitucijski zakon: (a) betonskega ovoja v nategu, (b) armaturne palice in (c) stika



Slika 4 • Pojav povezanosti razpoke z agregatnimi zrni (*aggregate bridging*) in pripadajoči bilinearni konstitucijski zakon modela povezane razpoke ((Yang, 2005), (Cerioni, 2009))

rešimo z deformacijsko metodo končnih elementov. Novo družino končnih elementov izpeljemo z modificiranim izrekom o virtualnem delu (Bajc, 2013). Predstavimo ga zgolj za nerazpokani del betonskega ovoja med dvema sosednjima razpokama in pripadajoči del armaturne palice. Tako je modificirani izrek za ta del razpokane armiranobetonske palice naslednji:

$$\begin{aligned} \delta W^* = \delta W^{b^*} + \delta W^{j^*} = & \int_0^{L_k^b} (N_c^b - N^b) \delta \varepsilon^b dx + \left( u^b(L_k^b) - u^b(0) - \int_0^{L_k^b} \varepsilon^b dx \right) \delta N^b(0) + \\ & + (-S_1^b - N^b(0)) \delta u^b(0) + (-S_4^b + N^b(L_k^b)) \delta u^b(L_k^b) + \\ & + \int_0^{L_k^j} (N_c^j - N^j) \delta \varepsilon^j dx + \left( u^j(L_k^j) - u^j(0) - \int_0^{L_k^j} \varepsilon^j dx \right) \delta N^j(0) + \\ & + (-S_1^j - N^j(0)) \delta u^j(0) + (-S_4^j + N^j(L_k^j)) \delta u^j(L_k^j) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

V enačbi (16) smo s  $S_1^b$ ,  $S_4^b$ ,  $S_1^j$  in  $S_4^j$  označili vrednosti točkovnih sil v betonskem ovoju in armaturni palici na obeh koncih obravnavanega dela armiranobetonske palice.

V nadaljevanju skladno z metodo končnih elementov razdelimo obravnavani del palice na  $N_b$  končnih elementov oziroma  $N_k \cdot N_b$  za celotno palico. Posebnost tega postopka je v tem, da moramo razdeliti na končne elemente ločeno betonski ovoj in armaturno palico. Število in velikost končnih elementov je v obeh primerih enako, vendar pa delitev ni poljubna. Ujemati se mora z legami razpok v betonskem ovoju palice. Nato vsak končni element razdelimo na  $N$  ekvidistančnih točk in osni deformaciji betonskega ovoja in armaturne palice interpoliramo z Lagrangevimi interpolacijskimi polinomi stopnje  $N$  ( $i = b, j$ ):

$$\begin{aligned} \varepsilon^i(x) = P_1(x) \varepsilon_1^i + P_2(x) \varepsilon_2^i + \dots + \\ + P_N(x) \varepsilon_N^i = \sum_{n=1}^N P_n(x) \varepsilon_n^i. \end{aligned} \quad (17)$$

V enačbi (17) predstavljajo  $\varepsilon_n^i$  vrednosti osnih deformacij v ekvidistančnih točkah,  $P_n$  pa Lagrangeve interpolacijske polinome. Podobno interpoliramo tudi variacije osnih deformacij:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon^i(x) = P_1(x) \delta \varepsilon_1^i + P_2(x) \delta \varepsilon_2^i + \dots + \\ + P_N(x) \delta \varepsilon_N^i = \sum_{n=1}^N P_n(x) \delta \varepsilon_n^i. \end{aligned} \quad (18)$$

Interpolacijske nastavke (17) in (18) zdaj vstavimo v modificirani izrek o virtualnem

delu (16). Euler-Lagrangeove enačbe tega funkcionala so ( $i = b, j$ ):

$$\int_0^{L_k^i} (N_c^i - N^i) P_n dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (19)$$

$$u^i(L_k^i) - u^i(0) - \int_0^{L_k^i} \varepsilon^i dx = 0, \quad (20)$$

$$-S_1^i - N^i(0) = 0, \quad (21)$$

$$-S_4^i + N^i(0) - \int_0^{L_k^i} p_x^i dx = 0. \quad (22)$$

Z znanimi postopki v numerični teoriji konstrukcij enačbe združimo v enačbe razpokane armiranobetonske palice in jih rešimo z upoštevanjem statičnih in kinematičnih robnih pogojev (8)–(15). Združene enačbe imenujemo posplošene diskretne ravnotežne enačbe razpokane armiranobetonske natezne palice. Neznane veličine v enačbah (19)–(22) določimo z izrazi ( $i = b, j$ ):

$$u^i(x) = u^i(0) + \int_0^x \varepsilon^i dx, \quad (23)$$

$$N^i(x) = N^i(0) - \int_0^x p_x^i dx, \quad (24)$$

$$N_c^i(\varepsilon^i) = \int_{A_i} \sigma^i(\varepsilon^i) dA, \quad (25)$$

$$p_x^b = -p_x^j, \quad (26)$$

$$\Delta(x) = u^j(x) - u^b(x), \quad (27)$$

$$p_x^b = p_{x,c}(\Delta) = \pi d \tau(\Delta). \quad (28)$$

Integrale v enačbah (23)–(25) izračunamo z Lobattovo numerično integracijo, nelinearni sistem posplošenih diskretnih ravnotežnih enačb palice pa z Newtonovo metodo.

cije razpok in posledično lokalizacije deformacij in mehčanje betona (območje  $B$  na sliki 5), izračunamo skladno s priporočili Bažanta in sodelavcev (Bažant, 1989) z enačbo:

$$h = \frac{G_f}{W_f}, \quad (29)$$

kjer  $W_f$  predstavlja površino ploskve konstitucijskega zakona natezno obremenjenega betona v območju mehčanja (glej sliko 5).

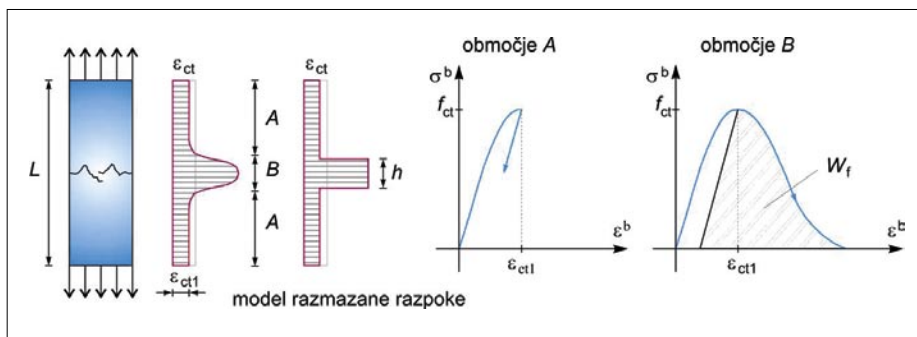
### 3 • NUMERIČNI MODEL Z RAZMAZANO RAZPOKO

V tem poglavju na kratko predstavimo numerični model, s katerim obnašanje razpokane armiranobetonske natezne palice opišemo z modelom razmazane razpoke. V tem modelu sta razporeditev in širina razpok namišljena in ne ustrezata dejanskemu stanju. Za ustrezno oceno togosti palice moramo pri tem modelu upoštevati tudi obnašanje betona v fazi mehčanja. Zanimivo je, da so zaradi

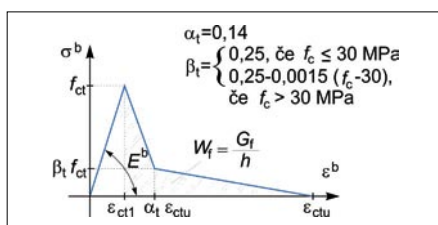
mehčanja betona rezultati analize odvisni tudi od gostote mreže končnih elementov (Bažant, 1989). Ta nezaželeni vpliv za analizo inženirskih konstrukcij relativno uspešno rešimo z vpeljavo t. i. kratkega (angl. *crack-band*) elementa v kombinaciji s konstantno energijo loma  $G_f$  kot materialnega parametra ((Bažant, 1989), (Bratina, 2004)). Dolžino območja  $h$ , na katerem nastopijo koncentra-

V predstavljenem modelu za analizo razpokane armiranobetonske natezne palice območje razmazane razpoke modeliramo s trilinearnim konstitucijskim zakonom betona skladno s priporočili Rabczuka in sodelavcev (Rabczuk, 2005). Graf tega zakona s pomenom pripadajočih materialnih parametrov prikazujemo na sliki 6. Soodvisnost med mehčanjem betona in dolžino lokaliziranih osnih deformacij pa zagotovimo z ustrežno izbiro parametrov  $\alpha_i$  in  $\beta_i$ .

V numeričnemu modelu za analizo razpokane armiranobetonske palice z upoštevanjem razmazane razpoke izberemo konstitucijski zakon armaturne palice in stika med armaturno palico in betonskim ovojem enak, kot smo ga v modelu z diskretno razpoko (glej sliko 3). Podobna je tudi matematična formulacija tega modela z deformacijsko metodo končnih elementov. Detajli formulacije so opisani v članku Markovičeve in sodelavcev (Markovič, 2013).



Slika 5 • Enosni natezni preizkus betona in model razmazane razpoke (Bažant, 1989)



Slika 6 • Konstitucijski model betona v nategu v območju razmazane razpoke ( $f_c$  je tlačna trdnost betona) (Rabczuk, 2005)

#### 4 • RAČUN ŠIRINE RAZPOK ARMIRANOBETONSKE PALICE SKLADNO S SIST EN 1992-1-1: 2005

V tem poglavju predstavimo poenostavljeno metodo za račun širine razpok armiranobetonskih konstrukcij skladno z evropskim standardom SIST EN 1992-1-1: 2005 (SIST, 2005). Poenostavljen postopek je zasnovan na modelu z diskretnimi razpokami v stabiliziranem stanju razpok. S tem modelom širino razpoke izračunamo kot razliko med spremembo dolžin armaturne palice in betonskega ovoja med sosednjima razpokama. Osne deformacije armaturne palice in betonskega ovoja izračunamo s povprečnimi normalnimi napetostmi na intervalu med sosednjima razpokama. Dodatno v modelu predpostavimo, da je kontaktna strižna napetost med armaturno palico in betonskim ovojem konstantna. Širino razpoke  $r$  (v EC2 (SIST, 2005) je označena z  $w_k$ ) izračunamo z izrazom:

$$r = w_k = s_{r,max} (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}), \quad (30)$$

kjer je  $s_{r,max}$  največja razdalja med sosednjima razpokama,  $\epsilon_{sm}$  je povprečna osna deformacija v armaturni palici,  $\epsilon_{cm}$  pa povprečna osna deformacija v betonskem ovoju med sosednjima razpokama. Razliko deformacij izračunamo z izrazom:

$$\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s}, \quad (31)$$

kjer je  $\sigma_s$  normalna napetost v natezni armaturi razpokanega prečnega prereza pri računski obtežbi za mejno stanje razpok,  $\alpha_e$  je raz-

$$\text{merje modulov } E_s/E_{cmv} \rho_{p,eff} = \frac{(A_s + \xi_1^2 A'_p)}{A_{c,eff}},$$

$A_s$  in  $A'_p$  sta natezna oziroma prednapeta armatura znotraj učinkovitega nateznega dela prečnega prereza  $A_{c,eff}$ ,  $k_t$  pa je faktor, ki je odvisen od trajanja obtežbe in je za kratkotrajno obtežbo  $k_t = 0,6$ . Če je natezna armatura v prečnem prerezu nameščena na dovolj majhnih medsebojnih oddaljenostih, največjo končno medsebojno razdaljo med sosednjima razpokama  $s_{r,max}$  določimo z izrazom:

$$s_{r,max} = k_3 c + k_1 k_2 k_4 \frac{\phi}{\rho_{p,eff}}. \quad (32)$$

V enačbi (32) je  $\phi$  premer armaturne palice,  $c$  je debelina krovnega sloja betona,  $s$  koeficientom  $k_1$  upoštevamo vpliv pogojev sidranja armature. Za rebrasto armaturo je priporočena vrednost tega koeficienta  $k_1 = 0,8$ . S koeficientom  $k_2$  pa v enačbi (32) upoštevamo vpliv razporeditve deformacij po prečnem prerezu, kjer v primeru armiranobetonske natezne palice upoštevamo priporočeno vrednost  $k_2 = 1$ . Za vrednosti koeficientov  $k_3$  in  $k_4$  upoštevamo priporočeni vrednosti 3,4 in 0,425.

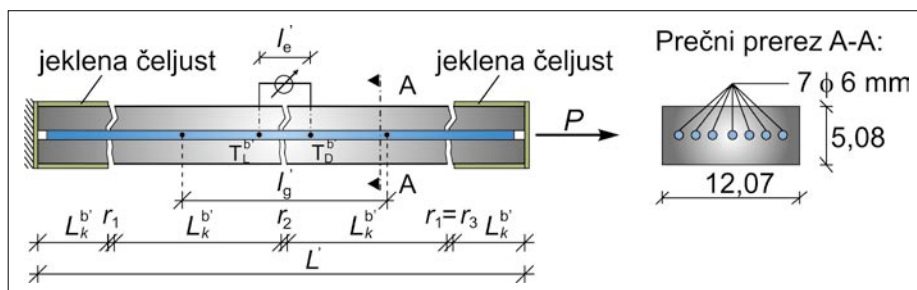
## 5 • RAČUNSKI PRIMERI

Z računskimi primeri prikazujemo natančnost predstavljenih numeričnih modelov za analizo širine in števila razpok ter togosti in nosilnosti razpokane armiranobetonske natezne palice. To prikažemo z medsebojno primerjavo rezultatov predstavljenih numeričnih modelov ter eksperimentalnih in numeričnih rezultatov sorodnih metod, ki so dostopni v literaturi.

### 5.1 Modela diskretne razpoke – primerjava z eksperimentom

V prvem računskem primeru ocenimo natančnost numeričnega modela z idealno razpoko in numeričnega modela s povezano razpoko. To prikažemo s primerjavo numeričnih rezultatov in rezultatov eksperimentov, ki so jih predstavili Wollrab in sodelavci (Wollrab, 1996). Obravnavamo palico s pravokotnim prečnim prerezom dimenzij  $b/h = 12,7/5,08$  cm in dolžino  $L = 63,5$  cm. Palica je armirana s sedmimi armaturnimi palicami premera 6 mm (glej sliko 7). Wollrab in sodelavci (Wollrab, 1996) so palico natežno obremenili preko jeklenih čeljusti, nameščenih na obeh koncih palice. Na sredino palice so namestili merilno urico z merskim območjem  $l_e = 12,7$  mm, s katero so merili spremembo dolžine  $r^* = l_e' - l_e$  na predvidenem mestu nastanka razpoke. Dodatno so na merskem območju  $l_g = 254$  mm (glej sliko 7) merili tudi spremembo dolžine palice  $\Delta u_b = l_g' - l_g$ , ki so jo prikazali v odvisnosti od velikosti obtežbe.

Izmerjeni materialni parametri palice so (Wollrab, 1996): elastični modul betona  $E^b = E_c = 3035,3$  kN/cm<sup>2</sup>, armaturnih palic  $E^l = E_s = 22348,0$  kN/cm<sup>2</sup>, natezna trdnost betona  $f_{ct} = 0,319$  kN/cm<sup>2</sup>, meja elastičnosti armaturnih palic pa  $f_{yk} = 50,6$  kN/cm<sup>2</sup>. Tlačna trdnost betona je  $f_c = 4,4$  kN/cm<sup>2</sup>. Ker Wollrab in sodelavci (Wollrab, 1996) ne navajajo mehanskih lastnosti stika med armaturno palico in betonskim ovojem, v analizi uporabimo zakon stika s slike 3c in pripadajočimi materialnimi parametri (Yankelevsky, 2008):  $\tau_1 = 0,6$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\tau_2 = 0,5$  kN/cm<sup>2</sup>, strižna trdnost stika  $\tau_u = 1,2$  kN/cm<sup>2</sup>, zamiki pa so  $\Delta_1 = 0,03$  mm,  $\Delta_2 = 1$  mm,  $\Delta_3 = 3$  mm in  $\Delta_4 = 10$  mm. Začetna togost stika je  $K_0 = 200$  kN/cm<sup>3</sup>. Dodatno upoštevamo  $f_{fk} = f_{yk}$  (glej sliko 3b). Vpliv povezanosti razpok z agregatnimi zrni upoštevamo v modelu s povezano razpoko tako, kot smo opisali v poglavju 2. Pri tem upoštevamo naslednje materialne parametre zakona (glej sliko 4):  $G_1 = 80$  N/m,  $\alpha_1 = 0,14$ ,  $\beta_1 = 0,2485$  in



Slika 7 • Geometrijski podatki in podatki o obtežbi razpokane armiranobetonske natezne palice (relativni pomiki so bili merjeni na površini betonskega ovoja)

$$w_{crit} = \frac{2G_1}{f_{ct}(\alpha_1 + \beta_1)} = 0,129 \text{ mm}$$

(Rabczuk, 2005). Zaradi posebnega vpetja palice in posledično obteževanja betonskega ovoja palice predpostavimo, da nastaneta prvi dve razpoki na razdalji 10 cm od levega in desnega konca palice. To se zgodi pri sili  $P_{1st}^+ = 24,10$  kN ( $r_1$  na sliki 7). Razpoka na območju merilne urice pa nastane pri sili  $P_{2st}^+ = 24,55$  kN in je široka  $r^* = 0,033$  mm ( $r_2 = 0,033$  mm). Z indeksom (•) označujemo silo tik pred pojavom razpoke, z indeksom (•)\* pa tik po njihovem nastanku. Zaradi primerjave z eksperimentalnimi rezultati prikazujemo rezultate za  $r^*$  in ne za dejansko širino razpoke  $r_2$ . S povečevanjem obtežbe se širina razpoke  $r^*(r_2)$  povečuje, vse dokler

natezne napetosti v nerazpokanih betonskih ovojih ne dosežejo natezne trdnosti betona  $f_{ct}$ . To se zgodi pri sili  $P_{3st}^- = 26,26$  kN in pri širini razpoke  $r^* = 0,036$  mm ( $r_2 = 0,035$  mm). Nato pri isti sili  $P_{3st}^+ = 26,26$  kN nastaneta dve novi razpoki, širina razpoke  $r^*$  pa se zmanjša na  $r^* = 0,033$  mm ( $r_2 = 0,033$  mm). Pri sili  $P_{4st}^+ = 39,61$  kN se v analizi pojavijo še štiri nove razpoke. Z nadaljnjim povečevanjem obtežbe se v palici ne pojavijo nove razpoke, pač pa se le povečujejo širine obstoječih. Tako je pri sili  $P = 98,97$  kN širina razpoke  $r^* = 0,107$  mm ( $r_2 = 0,106$  mm), kar je blizu mejni vrednosti  $w_{crit} = 0,129$  mm, pri kateri so razpoke skladno z modelom še povezane z agregatnimi zrni. Zaporedje pojavljanja razpok in spreminjanje širine razpoke na sredini palice  $r^*(r_2)$  prikazujemo tudi v preglednici 1.

št. razpok	0	2	2	3	3	5	5	9	9
stopnja	$P_{1st}^-$	$P_{1st}^+$	$P_{2st}^-$	$P_{2st}^+$	$P_{3st}^-$	$P_{3st}^+$	$P_{4st}^-$	$P_{4st}^+$	P
P [kN]	24,10	24,10	24,55	24,55	26,26	26,26	39,61	39,61	98,97
$r^*$ [mm]	0,001	0,001	0,001	0,033	0,036	0,033	0,054	0,037	0,107

Preglednica 1 • Model povezane razpoke; spreminjanje širine razpoke  $r_2(r^*)$  v sredini natezne palice za značilne nivoje zunanje obtežbe P

V nadaljevanju v preglednici 2 prikazujemo zaporedje pojavljanja razpok in spreminjanje širine razpoke na sredini palice za numerični model z idealno razpoko.

št. razpok	0	2	2	3	3	5	5	9	9
stopnja	$P_{1st}^-$	$P_{1st}^+$	$P_{2st}^-$	$P_{2st}^+$	$P_{3st}^-$	$P_{3st}^+$	$P_{4st}^-$	$P_{4st}^+$	P
P [kN]	24,10	24,10	24,15	24,15	27,05	27,05	43,25	43,25	88,45
$r^*$ [mm]	0,001	0,001	0,001	0,041	0,045	0,041	0,066	0,046	0,096

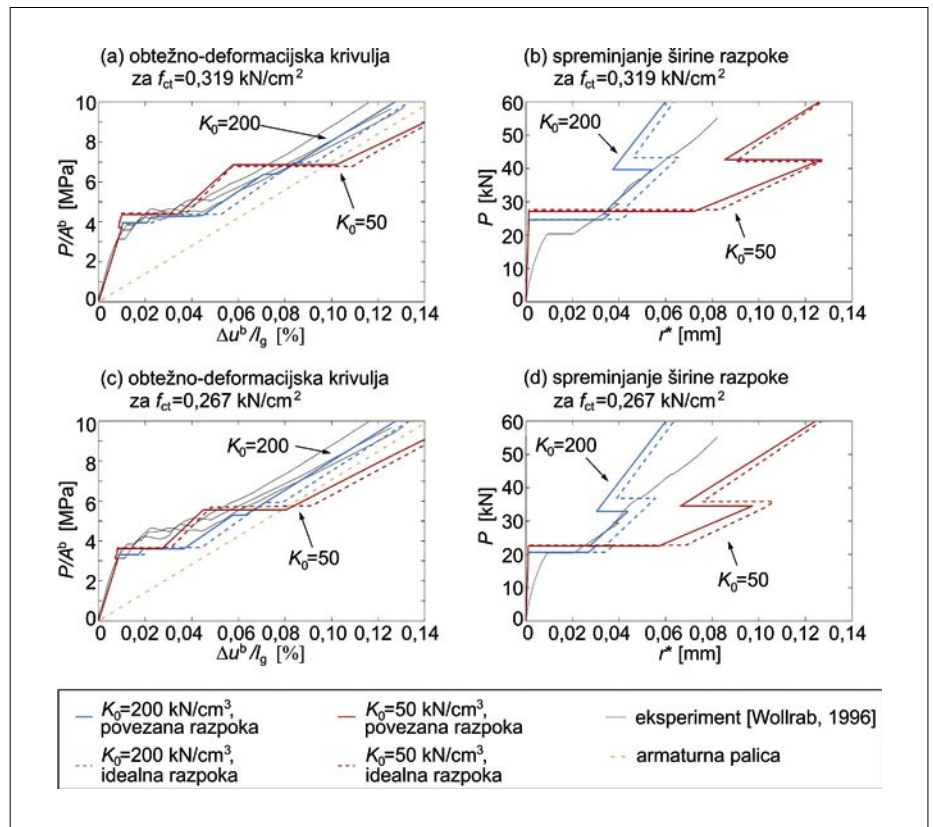
Preglednica 2 • Model idealne razpoke; spreminjanje širine razpoke  $r_2(r^*)$  v sredini natezne palice za značilne nivoje zunanje obtežbe P

S primerjavo rezultatov širjenja razpoke  $r^*$  za značilne nivoje zunanje obtežbe  $P$  ugotovimo, da so medsebojne razdalje razpok do stabiliziranega stanja za oba modela enake. Spremenijo se velikosti značilnih sil in širine razpoke. Tako nastane razpoka na sredini palice pri modelu z idealno razpoko pri  $P_{2st}^- = 24,15$  kN in je široka  $r^* = 0,041$  mm ( $r_2 = 0,041$  mm). Z nadaljnjim obremenjevanjem širina razpoke raste do  $r^* = 0,045$  mm ( $r_2 = 0,045$  mm) in se po nastanku dveh novih razpok zopet zmanjša na  $r^* = 0,041$  mm ( $r_2 = 0,041$  mm). V stabiliziranem stanju pri sili  $P_{4st}^+ = 43,25$  kN je širina razpoke  $r^* = 0,046$  mm ( $r_2 = 0,046$  mm), kar je več kot pri modelu s povezano razpoko, kjer je  $P_{4st}^+ = 39,61$  kN in širina razpoke  $r^* = 0,037$  mm ( $r_2 = 0,037$  mm).

Na koncu ocenimo natančnost predstavljenih numeričnih modelov s primerjavo med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati. Primerjamo obtežno-deformacijske oziroma napetostno-deformacijske krivulje obravnave palice in spreminjanje širine razpoke  $r_2$  ( $r^*$ ) v odvisnosti od zunanje sile  $P$  za dve različni natezne trdnosti betona  $f_{ct}$  in različni začetni togosti stika  $K_0$ . Rezultate analize prikazujemo na sliki 8. Glede na poročilo Wollraba in sodelavcev prikazujemo na slikah 8b in 8d meritev spreminjanja širine razpoke  $r^*$  za eno palico, na slikah 8a in 8c pa meritve obtežno-deformacijskih krivulj za tri armiranobetonske palice enakih karakteristik (Wollrab, 1996).

S polno črto prikazujemo na sliki 8 rezultate analize z upoštevanjem modela s povezano razpoko, s črtkano črto pa rezultate analize modela z idealno razpoko. Krivulje modre barve smo izračunali z upoštevanjem začetne togosti stika  $K_0 = 200$  kN/cm<sup>3</sup>, krivulje rdeče barve pa za  $K_0 = 50$  kN/cm<sup>3</sup>.

Na slikah 8a in 8b primerjamo obtežno-deformacijske krivulje in spreminjanje širine razpoke na sredini palice v odvisnosti od zunanje sile za natezno trdnost betona  $f_{ct} = 0,319$  kN/cm<sup>2</sup>. Ugotovimo, da se meritve in rezultati obeh numeričnih modelov najbolj ujemajo, ko v numeričnem modelu upoštevamo začetno togost stika  $K_0 = 200$  kN/cm<sup>3</sup>. Dodatno na sliki 8a relativno slabše opazimo, da se pri modelu s povezano razpoko poveča togost armiranobetonske palice predvsem pri nižjih nivojih obtežbe, kar je seveda pričakovano. Poleg tega se tako dobljeni rezultati bolje prilegajo izmerjenim vrednostim. Na slikah 8c in 8d primerjamo še obtežno-deformacijske krivulje in spreminjanje širine razpoke  $r^*$  za natezno trdnost betona  $f_{ct} = 0,267$  kN/cm<sup>2</sup>.



Slika 8 • Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov za različni začetni togosti stika  $K_0$ : (a) primerjava obtežno-deformacijskih krivulj za  $f_{ct} = 0,319$  kN/cm<sup>2</sup>; (b) primerjava spreminjanja širine razpoke v odvisnosti od obtežbe  $P$  za  $f_{ct} = 0,319$  kN/cm<sup>2</sup>; (c) primerjava napetostno-deformacijskih krivulj za  $f_{ct} = 0,267$  kN/cm<sup>2</sup>; (d) primerjava spreminjanja širine razpoke v odvisnosti od obtežbe  $P$  za  $f_{ct} = 0,267$  kN/cm<sup>2</sup>

Ta ustreza sili  $P_{cr} = P_{2st}^- = 20,48$  kN, pri kateri nastane po navedbah Wollraba in sodelavcev (Wollrab, 1996) razpoka  $r^*$  na sredini palice. Zaradi manjše natezne trdnosti betona se v numerični analizi razpoke pričakovano pojavijo pri manjših silah, medtem ko je vpliv na obtežno-deformacijske krivulje minimalen. Ujemanje izračunanih in izmerjenih obtežno-deformacijskih krivulj pa je za  $f_{ct} = 0,267$  kN/cm<sup>2</sup> nekoliko slabše, predvsem to velja pri manjših obtežbah. Nekoliko boljše je ujemanje rezultatov za spreminjanje širine razpoke na sredini palice  $r^*$  (glej sliko 8d), predvsem ko v analizi upoštevamo  $K_0 = 200$  kN/cm<sup>3</sup>. Opozorimo pa na nepričakovani zamik obtežno-deformacijskih krivulj na slikah 8a in 8c. Ta je posledica prikazovanja rezultatov. Kot lahko vidimo na slikah, smo podobno kot Wollrab in sodelavci (Wollrab, 1996) relativne zamike  $\Delta u^b$  normalni z  $l_0 = 254$  mm (glej sliko 7). Na merilnem območju  $l_0$  se zaradi prerazporeditve napetosti ob nastanku prvih dveh razpok, ki se pojavita zunaj obravnavanega območja, obravnavani betonski del palice skrči (glej sliko 8b in 8d), globalno pa se armiranobetonska palica pričakovano raztegne.

## 5.2 Modela diskretne razpoke – primerjava numeričnih metod

V drugem računskem primeru prikažemo primerjavo modelov z idealno in povezano razpoko z modelom, ki so ga predstavili Yankelevsky in sodelavci (Yankelevsky, 2008). Njegov numerični model je zasnovan na modelu z idealno razpoko. Obravnavamo armiranobetonsko natezno palico z dolžino  $L = 75$  cm in okroglim prečnim prerezom s premerom  $D = 9$  cm. Palica je ojačana z armaturno palico premera  $d = 1,2$  cm. Mehanske lastnosti betonskega ovoja in armaturne palice so (Yankelevsky, 2008): elastični modul betona  $E^b = E_c = 2900$  kN/cm<sup>2</sup>, armaturne palice pa  $E^l = E_s = 21000$  kN/cm<sup>2</sup>, natezna trdnost betona  $f_{ct} = 0,31$  kN/cm<sup>2</sup>, meja elastičnosti armaturne palice pa  $f_{yk} = 46,0$  kN/cm<sup>2</sup>. Tlačna trdnost betona je  $f_c = 22,95$  MPa. Materialne parametre konstitucijskega modela stika med betonskim ovojem in armaturno palico tudi povzamemo po Yankelevskem in sodelavcih (Yankelevsky, 2008):  $\tau_1 = 0,6$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\tau_u = 1,2$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\tau_2 = 0,5$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\Delta_1 = 0,03$  mm,  $\Delta_2 = 1$  mm,  $\Delta_3 = 3$  mm in  $\Delta_4 = 10$  mm. Pri modelu s povezano razpoko pa v numerični analizi za ma-

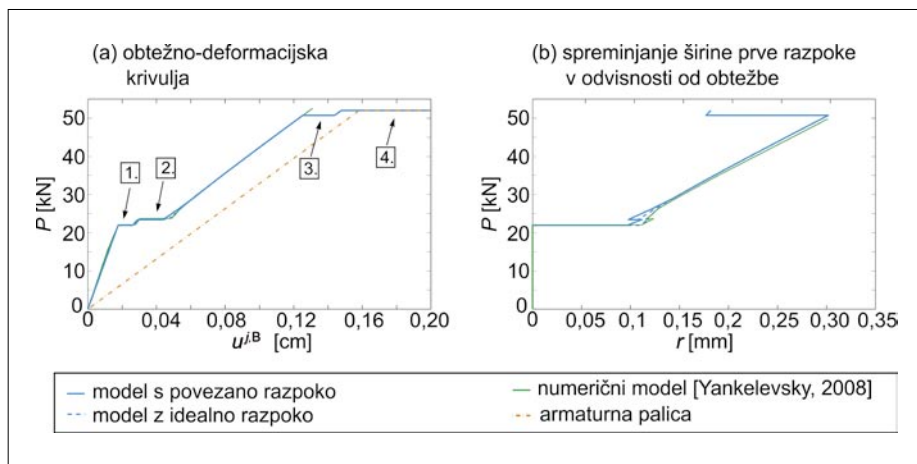


terialne parametre nelinearne vzmeti izberemo naslednje vrednosti (glej sliko 4):  $G_t = 80 \text{ N/m}$ ,  $\alpha_r = 0,14$ ,  $\beta_1 = 0,25$  in  $w_{crit} = 0,132 \text{ mm}$ . Dodatno upoštevamo  $f_{tk} = f_{yk}$  (glej sliko 3b).

Na sliki 9a prikazujemo obtežno-deformacijske krivulje razpokane armiranobetonske natezne palice, na sliki 9b pa spreminjanje širine prve razpoke v odvisnosti od zunanje obtežbe. Hkrati na sliki 9a prikazujemo obtežno-deformacijsko krivuljo armaturne palice.

Na sliki 9a opazimo, da je togost armiranobetonske palice bistveno večja od togosti armaturne palice. To je posledica kompozitnega oziroma nekompozitnega delovanja betona in armature. V nadaljevanju podrobneje predstavimo rezultate numerične analize razpokane armiranobetonske natezne palice, ki jih določimo z upoštevanjem modela s povezano razpoko. Prva razpoka (oznaka [1] na sliki 9a) se pojavi pri obtežbi  $P_{1st}^+ = 21,96 \text{ kN}$ . Naslednji dve razpoki se v palici pojavita pri sili  $P_{2st}^+ = 23,45 \text{ kN}$  (oznaka [2] na sliki 9a), in sicer na sredini leve oziroma desne polovice nerazpokanega betonskega ovoja. Pri sili  $P_{3st}^+ = 50,74 \text{ kN}$  se pojavijo v palici še štiri dodatne razpoke. To stopnjo razpokanosti palice smo na sliki 9a označili z oznako [3]. S povečevanjem sile se v palici ne pojavijo nove razpoke, pač pa se pri sili  $P = 52,02 \text{ kN}$  armaturna palica plastificira, kar predstavlja nosilnost obravnavane armiranobetonske palice. Na sliki 9a to označimo z oznako [4]. Iz primerjave obtežno-deformacijskih krivulj ugotovimo, da je vpliv povezanosti razpok z agregatnimi zrni na togost razpokane armiranobetonske natezne palice zanemarljiv. Prav tako ugotovimo, da se rezultati analiz vseh primerjanih numeričnih modelov zelo dobro ujemajo. Zanimivo pa je, da Yankelevsky in sodelavci (2008) ne poročajo o [3] stopnji razpokanosti armiranobetonske palice ter plastifikaciji armaturne palice. Manjša odstopanja rezultatov primerjanih modelov pa opazimo pri spreminjanju širine prve razpoke v odvisnosti od zunanje obtežbe (glej sliko 9b). Zdaj je vpliv povezanosti razpok z agregatnimi zrni sicer majhen, vendar opazen, saj pričakovano delno zmanjša širino razpok pri nižjih nivojih zunanje obtežbe. Vpliv pojavljanja dodatnih razpok v armiranobetonski palici na spreminjanje širine prve razpoke za značilne nivoje zunanje obtežbe pri modelu s povezano razpoko prikazujemo v preglednici 3.

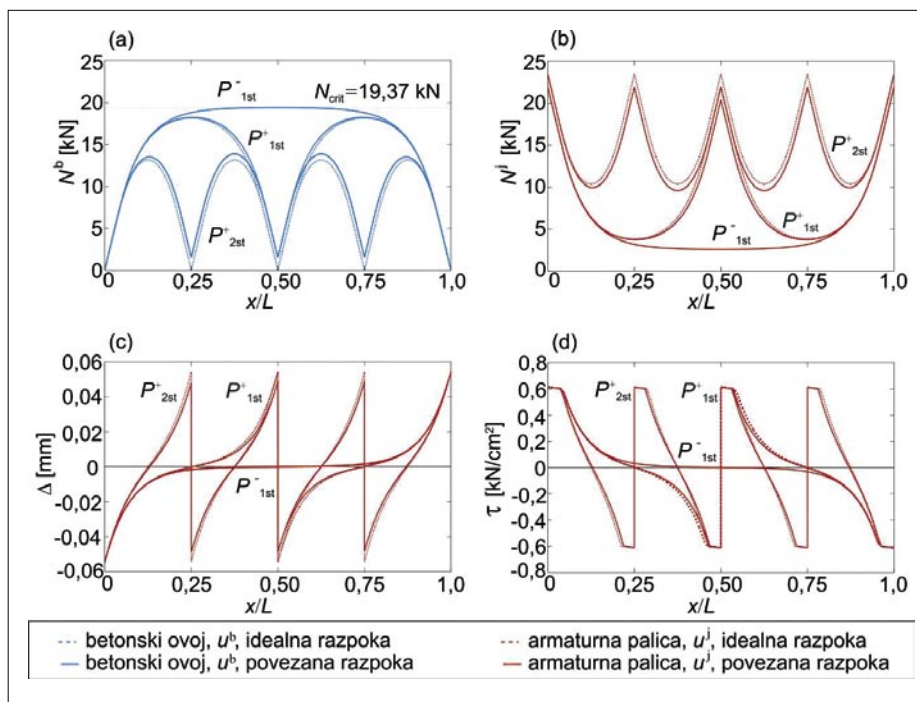
Za primerjavo povzamemo še rezultate, ki jih podajajo Yankelevsky in sodelavci (Yankelevsky, 2008). Po njihovih podatkih se prva razpoka s širino  $r = 0,111 \text{ mm}$  pojavi pri sili  $P_{1st}^- = 22,08 \text{ kN}$ , dve dodatni razpoki pa se



Slika 9 • Primerjava modelov z idealno in s povezano razpoko z modelom Yankelevskega in sodelavcev (Yankelevsky, 2008): (a) primerjava obtežno-deformacijskih krivulj in (b) primerjava spreminjanja širine prve razpoke v odvisnosti od obtežbe

št. razpok	0	1	1	3	3	7	7
stopnja	$P_{1st}^-$	$P_{1st}^+$	$P_{2st}^-$	$P_{2st}^+$	$P_{3st}^-$	$P_{3st}^+$	$P_{4st}^-$
P [kN]	21,96	21,96	23,45	23,45	50,74	50,74	52,02
r [mm]	0	0,097	0,112	0,098	0,302	0,177	0,182

Preglednica 3 • Model s povezano razpoko; spreminjanje širine prve razpoke v odvisnosti od števila razpok v armiranobetonski palici za značilne nivoje zunanje obtežbe



Slika 10 • Spreminjanje značilnih statičnih in kinematičnih veličin po osi armiranobetonske natezne palice za značilne nivoje zunanje obtežbe: (a) osna sila v armaturni palici; (b) osna sila v betonskem ovoju; (c) zamik na stiku med betonskim ovojem in armaturno palico; (d) strižne napetosti na stiku

pojavit pri sili  $P_{2st}^* = 23,72$  kN, ko se širina prve razpoke poveča na 0,113 mm, kar predstavlja relativno dobro ujemanje z rezultati v preglednici 3.

V nadaljevanju na sliki 10 prikazujemo spreminjanje značilnih statičnih in kinematičnih veličin po osi razpokane armiranobetonske natezne palice za značilne nivoje zunanje obtežbe. S polno črto na sliki 10 prikazujemo veličine, ki jih izračunamo z upoštevanjem modela s povezanimi razpokami, s črtkano črto pa iste veličine, ki jih izračunamo z modelom z idealno razpoko.

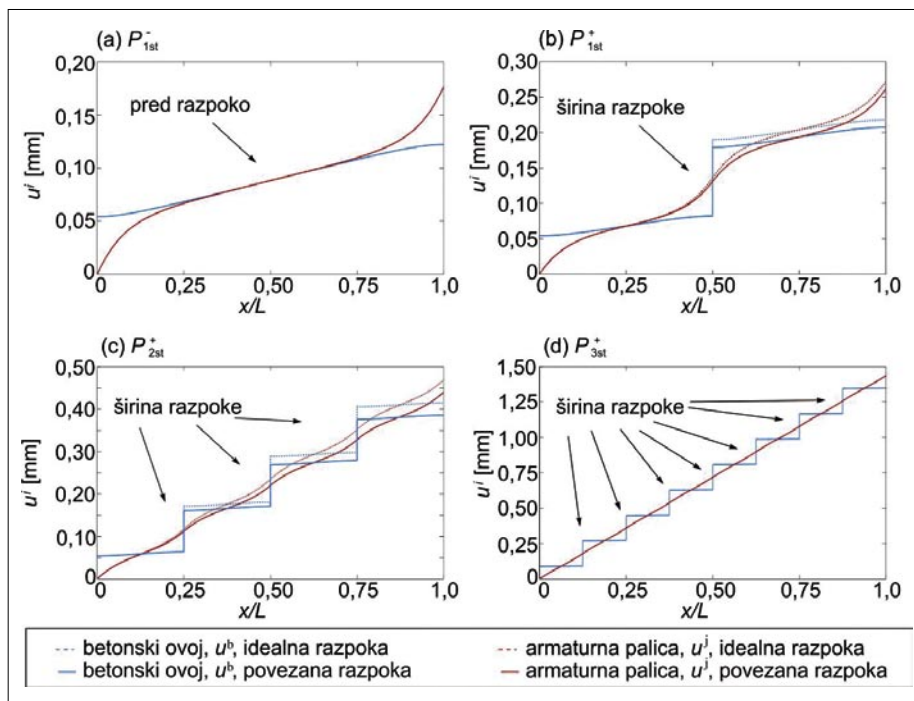
Na slikah 10a in 10b opazimo značilno trebušasto razporeditev osnih sil, ki se v betonskem ovoju in armaturni palici ustrezno dopolnjujeta; vsota obeh osnih sil je v kateremkoli prečnem prerezu enaka zunanji sili  $P$ . Značilno žagasto razporeditev zamikov in strižnih sil na stiku prikazujemo na slikah 10c in 10d. Na sliki 10d opazimo tudi vpliv nelinearnosti konstitucijskega zakona stika, ki se odraža z odrezanimi konicami strižnih sil na stiku ob razpokah. Za vse značilne statične in kinematične veličine razpokane armiranobetonske natezne palice opazimo zanemarljivo majhen vpliv povezanosti razpok z agregatnimi zrni na njihovo velikost in obliko.

Zanimivo je tudi spreminjanje vzdolžnih pomikov po osi betonskega ovoja in osi armaturne palice za značilne nivoje zunanje obtežbe (slika 11). Na sliki 11 opazimo značilen skok pomikov v betonskem ovoju na mestu razpoke ter opazen vpliv modela s povezano razpoko na velikosti pomikov. Pričakovano je ta vpliv neopazen za stabilizirano stanje razpok, ko je stopnja zunanje obtežbe že zelo velika in posledično tudi širina razpoke (slika 11d).

### 5.3 Analiza modela z razmazano razpoko

V tretjem računskem primeru ocenimo natančnost numeričnega modela z razmazano razpoko. Natančnost ocenimo s primerjavo numeričnih rezultatov obravnavane metode z eksperimentalnimi rezultati in numeričnimi rezultati metode s povezano razpoko.

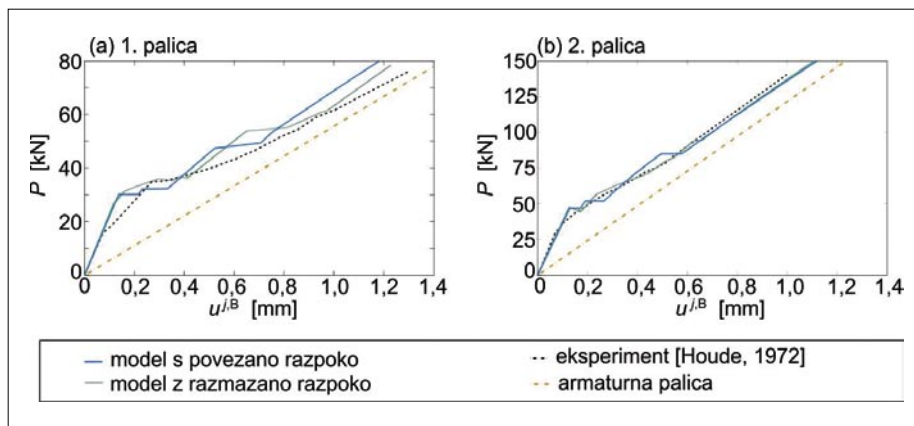
Analiziramo dve armiranobetonski palici, ki sta ju eksperimentalno obravnavala Houde in Mirza (Houde, 1972), njune rezultate pa je povzel Chan (Chan, 1992). Materialni podatki za prvo armiranobetonsko palico z dolžino  $L = 82,9$  cm in s krožnim prečnim prerezom so:  $E^b = E_c = 2482,30$  kN/cm<sup>2</sup>,  $f_{ct} = 0,138$  kN/cm<sup>2</sup>,  $E^i = E_s = 20000$  kN/cm<sup>2</sup>,  $d = 2,54$  cm in  $D = 15,24$  cm. Materialni podatki za drugo armiranobetonsko palico z dolžino  $L = 83,8$  cm in s pravokotnim prečnim prerezom  $b/h = 20,25/8,89$  cm pa so:



Slika 11 • Spreminjanje vzdolžnih pomikov po osi betonskega ovoja in armaturne palice po osi razpokane armiranobetonske natezne palice: (a) tik pred nastankom prve razpoke; (b) tik po nastanku prve razpoke; (c) tik po nastanku naslednjih dveh razpok; (d) v stabiliziranem stanju

$E^b = E_c = 2378,80$  kN/cm<sup>2</sup>,  $f_{ct} = 0,212$  kN/cm<sup>2</sup>,  $E^i = E_s = 20000$  kN/cm<sup>2</sup> in  $d = 2,54$  cm. Konstitucijski zakon stika med betonskim ovojem in armaturno palico oziroma palicami je za obe obravnavani palici enak (glej sliko 3c), pripadajoči materialni parametri modela pa so:  $\tau_1 = 0,6$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\tau_u = 1,2$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\tau_2 = 0,5$  kN/cm<sup>2</sup>,  $\Delta_1 = 0,03$  mm,  $\Delta_2 = 1$  mm,  $\Delta_3 = 3$  mm in  $\Delta_4 = 10$  mm (Yankelevsky, 2008). Za analizo vpliva povezanosti razpoke z agregatnimi zrni upoštevamo bilinearni konstitucijski zakon s pripadajočimi materialnimi parametri (slika 4):  $G_f = 80$  N/m,  $\alpha_t = 0,14$ ,  $\beta_t = 0,25$  in  $w_{crit} = 0,297$  mm za palico s

krožnim oziroma 0,194 mm za palico s pravokotnim prečnim prerezom. Kot smo že povedali, območje razmazanih razpok modeliramo s t. i. kratkimi končnimi elementi v kombinaciji s konstantno energijo loma  $G_f$ . Ker v splošnem ne vemo, kje se razpoke pojavijo, celotno armiranobetonsko palico modeliramo s kratkimi končnimi elementi. Prvo palico modeliramo s 24 končnimi elementi dolžine  $l = 9,15$  cm, drugo pa z 20 končnimi elementi dolžine  $l = 3,49$  cm. Odvisnost med mehčanjem betona in dolžino kratkega končnega elementa zagotovimo z ustrezno izbiro parametrov konstitucijskega modela betona v nategu. Za iz-



Slika 12 • Primerjava obtežno-deformacijskih krivulj

brano energijo loma  $G_f = 80 \text{ N/m}$  so parametri modela naslednji: za prvo armiranobetonsko palico:  $\alpha_1 = 9,03$ ,  $\beta_1 = 0,25$ ,  $\varepsilon_{ct1} = 0,053 \text{ ‰}$  in  $\varepsilon_{ct2} = 3,42 \text{ ‰}$ ; za drugo pa:  $\alpha_1 = 9,56$ ,  $\beta_1 = 0,25$ ,  $\varepsilon_{ct1} = 0,085 \text{ ‰}$  in  $\varepsilon_{ct2} = 5,81 \text{ ‰}$ . Primerjavo med obtežno-deformacijskimi krivuljami prikazujemo na sliki 12.

Na sliki 12 vidimo, da se vse obtežno-deformacijske krivulje zelo dobro ujemajo. Pričakovano pa z modelom razmazanih razpok slabše opišemo število in širino razpok, je pa model numerično učinkovitejši (Markovič, 2013).

#### 5.4 Analiza modela po EC2

V zadnjem računskem primeru primerjamo rezultate poenostavljenega postopka za račun razpok skladno z EC2 (SIST, 2005) z rezultati eksperimenta in rezultati nelinearne analize. Primerjamo rezultate izračunane širine razpoke skladno z EC2 (SIST, 2005), izmerjene širine (Wollrab, 1996) ter izračunane širine razpoke z upoštevanjem modela s povezano razpoko. Rezultate analize prikazemo za armiranobetonsko natezno palico, ki smo jo analizirali v prvem računskem primeru. Primerjavo rezultatov prikazujemo v preglednici 4.

Opazimo relativno dobro ujemanje med izračunanimi in izmerjeno širino razpoke na

	model s povezano razpoko		EC2 [SIST EN 1992-1-1:2005, 2005]	eksperiment Wollraba in sodelavcev [Wollrab, 1996]
št. razpok	5	9	6	-
stopnja	$P_{4st}^-$	$P_{4st}^+$	$P^+$	-
P [kN]	39,61	39,61	39,61	39,61
r [mm]	0,054	0,037	0,061	0,055

Preglednica 4 • Primerjava poenostavljene metode za račun razpok po EC2 (SIST EN 1992-1-1, 2005) z metodo povezane razpoke in merivami (Wollrab, 1996)

sredini armiranobetonske palice. Z modelom povezane razpoke dosežemo stabilizirano stanje pri devetih razpokah in sili  $P_{4st}^+ = 39,61 \text{ kN}$ , ko je širina razpoke  $r = 0,037 \text{ mm}$ . Tik pred stabiliziranim stanjem (5 razpok, stopnja z oznako  $P_{4st}^- = 39,61 \text{ kN}$ ) pa je širina razpoke večja in je  $r = 0,054 \text{ mm}$ . Pri računu razpok s poenostavljenim računskim postopkom skladno z EC2 (SIST, 2005) izračunamo širino razpok in njihovo največjo medsebojno oddaljenost v stabiliziranem stanju. Zaradi ustrezne primerjave predpostavimo, da nastopi stabilizirano stanje razpok pri obtežbi  $P_{4st}^+ = 39,61 \text{ kN}$ . Za to obtežbo je največja medsebojna razdalja med razpokama  $s_{r,max} = 10,78 \text{ cm}$ ; vzdolž palice se tako formira le šest razpok, takrat je  $s_{r,dej} = 8,70 \text{ cm}$ . Naj pri tem poudarimo, da razpokanost analiziramo na delu armiranobe-

tonske palice med jeklenima čeljustma, kjer predpostavimo, da se prva oziroma zadnja razpoka pojavi tik ob levi oziroma desni čeljusti (glej sliko 7). Širina razpoke skladno z EC2 je  $r = 0,061 \text{ mm}$ . Na osnovi poročila o merivah lahko ugotovimo le širino razpoke na sredini palice, ne pa skupnega števila razpok oziroma njihove razporeditve vzdolž palice (Wollrab, 1996). Ker tako izmerjenega stabiliziranega stanja razpok ne poznamo, predpostavimo, da to nastopi pri sili  $P_{4st}^+ = 39,61 \text{ kN}$ . Za to obtežbo je izmerjena širina razpoke  $r = 0,055 \text{ mm}$ . Iz prikazanega lahko zaključimo, da so vrednosti za širino razpok obravnavanih modelov pri enakem nivoju obtežbe medsebojno primerljive. Razlikuje pa se ocene o številu razpok skladno z EC2 in njihovi razporeditvi po osi armiranobetonske natezne palice.

## 6 • SKLEP

V članku smo predstavili tri enodimenzionalne numerične modele za nelinearno analizo razpokane armiranobetonske natezne palice. Prva dva predstavljena modela sta modela z diskretnimi razpokami. Prvi med njima je model z idealno razpoko, drugi pa model s povezano razpoko. Tako smo označili model, pri katerem v analizi upoštevamo tudi pojav, kjer sta nerazpokana betonska ovoja palice ob razpoki povezana z armaturno palico in tudi z agregatnimi zrni (angl. *aggregate*

*bridging*). Tretji predstavljeni model je model z razmazano razpoko (angl. *crack band model*). S primerjavo rezultatov o širini in številu razpok ter togosti in nosilnosti armiranobetonske natezne palice predstavljenih modelov z eksperimentalnimi rezultati in numeričnimi rezultati podobnih modelov, ki so dostopni v literaturi, smo ugotovili, da je:

- za analizo razpokane armiranobetonske natezne palice najbolj natančen numerični model s povezano razpoko;

- model z idealno razpoko glede natančnosti praktično primerljiv z modelom s povezano razpoko; model je manj natančen le za določitev širine razpok;
- model z razmazano razpoko primeren za določitev togosti in nosilnosti armiranobetonske natezne palice; pričakovano pa zaradi zasnove modela ni primeren za račun širine in števila razpok.

Na koncu smo v članku ocenili tudi ustreznost poenostavljenega računskega postopka za račun razpok armiranobetonskih konstrukcij skladno z EC2 (SIST, 2005). Primerjava rezultatov je pokazala, da je poenostavljen postopek primeren za določitev širine razpok.

## 7 • LITERATURA

- Abreshami, H. H., Mitchell, D., Influence of splitting cracks on tension stiffening. Journal of the American Concrete Institute, ACI, 93, 6, 703–710, 1996.
- Bajc, U., Saje, M., Planinc, I., Bratina, S., The influence of aggregate bridging on tension stiffening of RC bar, v pripravi.
- Bažant, Z. P., Pijaudier-Cabot, G., Measurement of characteristic length of nonlocal continuum. Journal of Engineering Mechanics, 115, 755–67, 1989.
- Bažant, Z. P., Planas, J., Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials, Boca Raton, CRC Press, 1997.

- Bergan, P. G., Holand, I., Nonlinear finite element analysis of concrete structures, *Composer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17/18, 443–467, 1979.
- Bratina, S., Saje, M., Planinc, I., Materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames, *International Journal of Solids and Structures*, 41, 7181–207, 2004.
- Cerioni, R., Bernardi, P., Michelini, E., Mordini, A., A general 3D approach for the analysis of multi-axial fracture behavior of reinforced concrete elements. *Engineering Fracture Mechanics*, 78, str. 1784–1793, 2011.
- Chan, H. C., Cheung, Y. K., Huang, Y. P., Crack analysis of reinforced concrete tension members, *Journal of Structural Engineering*, 8, 2118–2131, 1992.
- Dias da Costa, D., Alfaiate, J., Sluys, L. J., Julio, E., A discrete strong discontinuity approach, *Engineering Fracture Mechanics*, 76, 1176–1201, 2009.
- Houde, J., Mirza, M. S., A study of bond stress-slip relationship in reinforced concrete, *Structural Concrete Series* 72, 8, 1972.
- Kim, J. K., Lee, T. G., Nonlinear analysis of reinforced concrete beams with softening, *Computers and Structures* 44, 567–573, 1992.
- Kuutti, J., A local remeshing procedure to simulate crack propagation in quasi-brittle materials. *Engineering Computations*, 29, 2, 125–143, 2012.
- Kwak, H. K., Kim, S. P., Nonlinear analysis of RC beams based on moment-curvature relation, *Computers and Structures* 80, 615–628, 2002.
- Manfredi, G., Pecce, M., A reinforced RC beam element including bond-slip relationship for the analysis of continuous beams, *Computers and Structures*, 69, 52–63, 1998.
- Markovič, M., Krauberger, N., Saje, M., Planinc, I., Bratina, S., Non-linear analysis of pre-tensioned concrete planar beams, *Engineering Structures*, 46, 279–293, 2013.
- Rabczuk, T., Akkermann, J., Eibl, J., A numerical model for reinforced concrete structures, *International Journal of Solids and Structures*, 42, 132–1354, 2005.
- Reissner, E., On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, Basel, Birkhäuser, 23, 5, 795–804, 1972.
- SIST, SIST EN 1992–1–1:2005, Evrokod 2, Projektiranje betonskih konstrukcij–Del 1–1, Splošna pravila in pravila za stavbe, Slovenski inštitut za standardizacijo, Ljubljana, str. 227, 2005.
- Wollrab, E., Kulkarni, S. M., Ouyang, C., Shah, S. P., Response of reinforced concrete panels under uniaxial tension, *ACI Structural Journal*, 93, 648–657, 1996.
- Yang, Z. J., Chen, J., Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams, *Engineering Fracture Mechanics*, 72, 2280–2297, 2005.
- Yang, X. S., Lees, J. M., Morley, C. T., Modelling crack propagation in structures: Comparison of numerical methods, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24, 1373–1392, 2008.
- Yankelevsky, D. Z., A two-phase one dimensional model for steel-concrete interaction, *Computers and Structures* 85, 6, 781–794, 1997.
- Yankelevsky, D. Z., Jabareen, M., Abutbul, A. D., One-dimensional analysis of tension stiffening in reinforced concrete discrete cracks. *Engineering Structures*, 30, 206–217, 2008.