

2013

Letnik 60

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilno Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2013, letnik 60, številka 3, strani 81–120

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASIX **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec.

© 2013 DMFA Slovenije – 1906

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

KONFIGURACIJSKI PROSTORI IN TOPOLOŠKA KOMPLEKSNOST

ALEKSANDRA FRANC

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 55M30, 55R80

Na nekaj primerih pogledamo, kako določimo konfiguracijski prostor robotskega sistema. Spoznamo še pojem topološke kompleksnosti in s pomočjo znanega Brouwerjevega rezultata o vektorskih poljih na sferah poiščemo eksplisitna pravila gibanja ter določimo topološko kompleksnost sfer.

CONFIGURATION SPACES AND TOPOLOGICAL COMPLEXITY

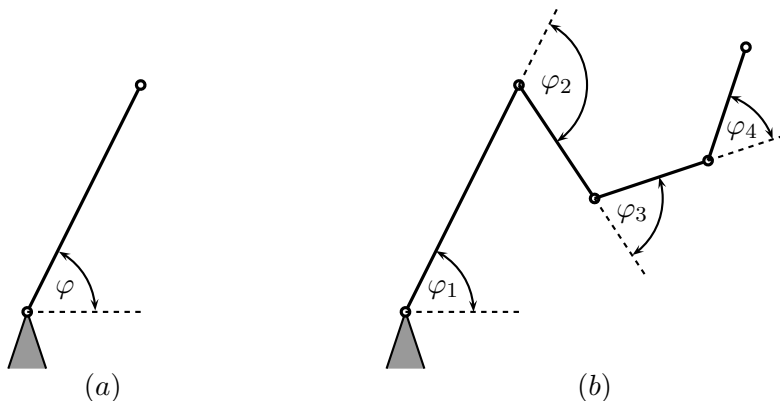
We look at a few examples of configuration spaces and introduce the notion of topological complexity. Finally, we use the famous Hairy Ball Theorem of Brouwer to construct explicit motion planning rules and determine the topological complexity of spheres.

Konfiguracijski prostori

Poiskati želimo matematične modele, ki dobro opisujejo mehanske, robotske ali fizikalne sisteme. Tak sistem je lahko na primer robotska roka v tovarni avtomobilov, robotski sesalnik, ki se vozi po naši dnevni sobi, vozički, s katerimi po tirih na tovarniških tleh prevažamo komponente iz enega dela tovarne v drugega, molekula plina, ki potuje po prostoru, ali pa recimo vrtavka.

Pri vsakem takem sistemu opazujemo *konfiguracijski prostor*, tj. prostor vseh možnih položajev oziroma stanj sistema. Če želimo sistem premakniti iz enega stanja v drugo, potem moramo samo poiskati neko pot v konfiguracijskem prostoru, ki ti stanji povezuje, in ta pot, če obstaja, nam bo povedala, prek katerih stanj moramo izvesti premik. Z vprašanjem obstoja in zveznih izbiri takih poti se bomo ukvarjali v razdelku o topološki kompleksnosti, tukaj pa si na nekaj primerih oglejmo, kako lahko določimo konfiguracijski prostor danega sistema. Spodnji primeri so večinoma povzeti po [1, §3.5].

Primer 1. Denimo, da je naš sistem sestavljen iz ene same robotske roke, ki je vpeta v enem krajišču in se lahko prosto vrti v ravnini, kot nakazuje slika 1(a). Položaj roke je natančno določen s kotom φ , ki ga roka oklepa z vodoravnico. Kot φ je lahko poljubno število z intervala $[0, 2\pi]$, pri čemer krajišči 0 in 2π določata isti položaj. Konfiguracijski prostor tega sistema je torej krožnica S^1 .

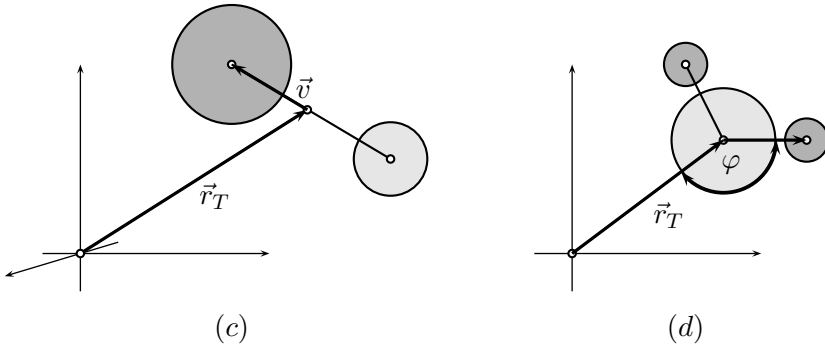


Slika 1. Enostavna (a) in sestavljena (b) robotska roka. Položaj sistema je natančno določen z označenimi koti φ oziroma φ_i , $i = 1, \dots, n$, konfiguracijski prostor pa je krožnica S^1 oziroma produkt $S^1 \times \dots \times S^1$ n kopij krožnice, kjer je n število ročic.

Primer 2. Posplošitev prejšnjega primera je robotska roka, sestavljena iz več zaporedno vezanih ročic, ki so vse prosto vrtljive v isti ravnini. Primer takega sistema je prikazan na sliki 1(b). Tokrat je stanje sistema povsem določeno, če poznamo še kote, ki jih vsaka naslednja ročica oklepa s tisto pred njo. Vsak od kotov $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je spet neko število z intervala $[0, 2\pi]$, pri čemer krajišči 0 in 2π določata isti položaj, poleg tega pa lahko kote izberemo poljubno. Možni položaji sistema torej ustrezajo urejenim n -tericam $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ in konfiguracijski prostor je produkt n kopij krožnice, $S^1 \times \dots \times S^1$. Konfiguracijski prostor za primer $n = 2$ je prikazan na sliki 4(b).

Primer 3. Na sliki 2(c) je shema molekule ogljikovega monoksida, ki jo sestavljata atom ogljika (večji, temnejši) in atom kisika (manjši, svetlejši). Zanimajo nas vsi možni položaji te molekule v $\mathbb{R}^3$. Njen položaj je natanko določen, če poznamo krajevni vektor težišča $\vec{r}_T \in \mathbb{R}^3$ in vektor $\vec{v}$, ki določa smer od težišča do središča ogljikovega atoma. Slednji določa neko smer v $\mathbb{R}^3$, njegova velikost pa je vedno enaka, zato leži na neki sferi $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Konfiguracijski prostor tega sistema je torej $\mathbb{R}^3 \times S^2$.

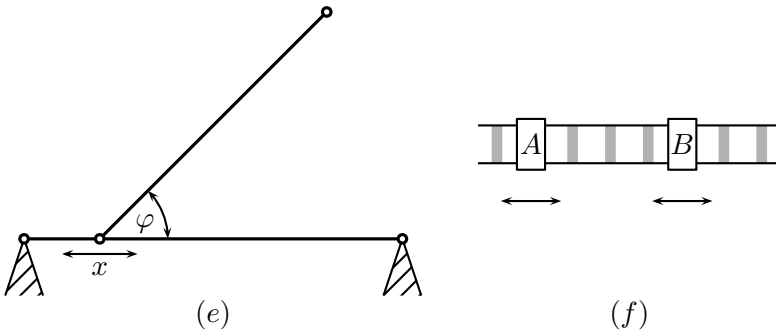
Primer 4. Konfiguracijski prostor molekule vode v ravnini je $\mathbb{R}^2 \times S^1$, saj je njen položaj natančno določen s krajevnim vektorjem središča atoma kisika $\vec{r}_T \in \mathbb{R}^2$ in s kotom $\varphi \in S^1$, ki ga ta vektor oklepa z enim od obeh vodikovih atomov. Seveda moramo vnaprej določiti, katerega od obeh vodikovih atomov smo izbrali. Na sliki 2(d) smo ga izbrali tako, da drugi vodikov atom oklepa kot $\varphi + 104,45^\circ$ z vektorjem $\vec{r}_T$, merjeno od $\vec{r}_T$ v smeri, ki je



Slika 2. Molekuli ogljikovega monoksida (c) in vode (d) v prostoru $\mathbb{R}^3$ in v ravnini $\mathbb{R}^2$.

nasprotna vrtenju urinih kazalcev. Ta konfiguracijski prostor si lažje predstavljamo, če upoštevamo, da je ravnina $\mathbb{R}^2$ homeomorfna odprtemu disku $\mathring{B}^2$, in tako dobimo odprt torus $\mathring{B}^2 \times S^1$, kot vidimo na sliki 4(d).

Pa recimo, da je molekula vode v $\mathbb{R}^3$. Položaj kisikovega atoma določimo s krajevnim vektorjem $\vec{r}_T \in \mathbb{R}^3$. Položaj prvega vodikovega atoma je potem določen z nekim vektorjem smeri $\vec{v} \in S^2$. Drugi vodikov atom je lahko kjerkoli na krožnici, ki jo opiše, ko molekulo zavrtimo okrog osi, ki poteka čez središči preostalih dveh atomov. Zato za določitev položaja molekule potrebujemo še drugi vektor smeri $\vec{u} \in S^1$. Konfiguracijski prostor je torej $\mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^1$.



Slika 3. Enostavna robotska roka s premikajočim se vrtiliščem (e) in sistem dveh robotov na neskončnem tiru (f).

Primer 5. Denimo, da vrtilišče robotske roke iz primera 1 ni fiksno, ampak se lahko premika vzdolž neke daljice, tirnice dolžine $d > 0$. Shema sistema

je na sliki 3(e). Položaj sistema je določen z razdaljo $x \in [0, d]$ od levega pritrdišča tirnice do vrtilišča ter s kotom $\varphi \in S^1$, ki ga ročica oklepa s tirnico. Konfiguracijski prostor je torej kolobar $[0, d] \times S^1$, produkt intervala in krožnice s slike 4(e).

Primer 6. Nazadnje si oglejmo še primer dveh robotov, označimo ju z A in B , ki se premikata po neskončni tirnici, kot vidimo na sliki 3(f). Robota lahko predstavimo s točkama na realni osi. Njuna položaja sta torej določena s parom realnih števil (x_A, x_B) . Seveda robota ne smeta biti istočasno v isti točki, zato je konfiguracijski prostor množica

$$\{(x_A, x_B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x_A \neq x_B\},$$

tj. ravnina brez simetrane $y = x$. Opazimo, da je v tem primeru konfiguracijski prostor sestavljen iz dveh kosov. V vseh drugih primerih so bili konfiguracijski prostori povezani s potmi in smo lahko iz poljubnega stanja sistema prešli v poljubno drugo stanje. V tem primeru pa očitno ne moremo robotov samo s premikanjem po premici pripeljati iz stanja, ko se robot A nahaja levo od robota B , do stanja, ko je robot B levo od robota A . Konfiguracijski prostor smo narisali na sliki 4(f).

Posplošitev tega primera je konfiguracijski prostor n različnih točk v m -razsežnem evklidskem prostoru,

$$F(\mathbb{R}^m, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^m)^n \mid x_i \neq x_j \text{ za } i \neq j\}.$$

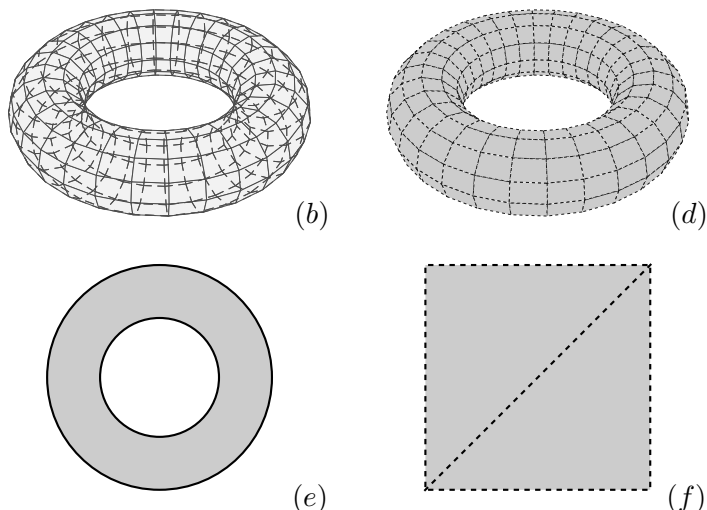
Pred nekaj leti sta Farber in Grant [7] dokončno izračunala topološko kompleksnost $F(\mathbb{R}^m, n)$. To invarianto bomo spoznali v naslednjem razdelku.

Topološka kompleksnost

Topološka kompleksnost, ki jo je vpeljal Farber [3] leta 2001, meri, kako zapleteno je gibanje po konfiguracijskem prostoru nekega robotskega sistema. Tukaj bomo podali nekaj osnovnih dejstev, podrobnosti pa lahko bralec najde v Farberjevih člankih [3], [4], [6] ali pa v četrtem poglavju knjige [5]. Čeprav vse trditve veljajo tudi v večji splošnosti (na primer za CW komplekse), bomo tukaj predpostavili, da je konfiguracijski prostor mnogoterost, tj. prostor, v katerem ima vsaka točka okolico, homeomorfno evklidskemu prostoru $\mathbb{R}^k$ ali pa polprostoru $\mathbb{R}_+^k$ za neki fiksni $k \in \mathbb{N}$.

Naj bo topološki prostor X konfiguracijski prostor nekega robotskega sistema. Gibanje robota lahko predstavimo s potjo med dvema točkama (začetnim in končnim položajem robota). Predpostavimo, da je X povezan s potmi, tako da je res mogoče priti iz vsake točke do vsake druge, in označimo z X^I prostor vseh poti v X . Naj bo π preslikava

$$\pi: X^I \rightarrow X \times X, \quad \pi(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1)),$$



Slika 4. Konfiguracijski prostori: (b) torus $S^1 \times S^1$ za robotsko roko z dvema ročicama, (d) polni torus brez robnega torusa $\hat{B}^2 \times S^1$ za molekulo vode v $\mathbb{R}^2$, (e) kolobar $I \times S^1$ za ročico na premičnem pritrdišču in (f) ravnina brez simetrale lihih kvadrantov za dva robota na premici.

ki vsaki poti $\alpha: I \rightarrow X$ priredi njeno začetno in končno točko. Iščemo algoritem $s: X \times X \rightarrow X^I$, ki bi za poljuben par točk $(x, y) \in X \times X$ vrnil neko pot $s(x, y): I \rightarrow X$, poleg tega pa želimo, da bi bile te poti zvezno odvisne od x in y . Seveda bo veljalo tudi $\pi \circ s = \text{id}_{X \times X}$. Preslikavi s s takimi lastnostmi pravimo *prerez*.

Hitro se lahko prepričamo, da prerez, ki je zvezen na vsem $X \times X$, obstaja le tedaj, ko je prostor X kontraktibilen (tj. lahko ga skrčimo v točko $x_0 \in X$ z zvezno preslikavo $H: X \times I \rightarrow X$, za katero je $H(x, 0) = x$ in $H(x, 1) = x_0$ za vse $x \in X$) [3, izrek 1]. Namesto globalnega si torej raje oglejmo lokalne zvezne prereze. Vprašajmo se, najmanj koliko lokalnih prerezov potrebujemo, da lahko za poljuben par točk dobimo pot med njima. Tako naravno pridemo do naslednje definicije [3, definicija 2]:

Definicija 1. *Topološka kompleksnost* $\text{TC}(X)$ prostora X je najmanjše naravno število n , za katero obstajajo pokritje $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ produkta $X \times X$ z odprtimi množicami in preslikave $s_i: U_i \rightarrow X^I$, za katere je $\pi \circ s_i = \text{id}_{U_i}$, $i = 1, \dots, n$. Če tak n ne obstaja, pravimo, da je $\text{TC}(X) = \infty$.

Formulacija je zelo podobna definiciji Lusternik-Schnirelmannove kategorije [2, definicija 1.1]:

Definicija 2. *Lusternik-Schnirelmannova (LS) kategorija* $\text{cat}(X)$ prostora X je najmanjše naravno število n , za katero obstaja pokritje $\{U_1, \dots, U_n\}$

prostora X z odprtimi množicami, ki jih lahko znotraj X skrčimo v točko. Če tak n ne obstaja, pravimo, da je $\text{cat}(X) = \infty$.

Takoj opazimo, da je topološko kompleksnost in LS kategorijo v splošnem težko določiti neposredno po definiciji. Poiskati moramo namreč pokritje z najmanjšim možnim številom množic z želenimi lastnostmi, potem pa moramo še dokazati, da je res optimalno. Pri tem so nam v pomoč številne zgornje in spodnje meje. Tukaj bomo našeli nekaj najpreprostejših.

LS kategorija je omejena z dimenzijo [9, trditev 2.1]. Analogna dimenzijska neenakost velja tudi za topološko kompleksnost, hkrati pa lahko topološko kompleksnost omejimo z LS kategorijo navzgor in navzdol [3, izrek 4] in [3, izrek 5]:

Trditev 1. *Naj bo X s potmi povezana mnogoterost. Tedaj je:*

$$(a) \text{ cat}(X) \leq \dim(X) + 1,$$

$$(b) \text{ TC}(X) \leq 2 \cdot \dim(X) + 1 \text{ in}$$

$$(c) \text{ cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq \text{cat}(X \times X) \leq 2 \cdot \text{cat}(X) - 1.$$

Dimenzijski oceni za LS kategorijo in topološko kompleksnost lahko še izboljšamo, če je prostor X visoko povezan (pri $n \geq 1$ pravimo, da je prostor X n -povezan, če je za vse $i \leq n$ vsaka preslikava $S^i \rightarrow X$ homotopna neki konstantni preslikavi, tj. če lahko slike poljubnih sfer dimenzij n ali manj znotraj prostora X skrčimo v točko). Rezultat za LS kategorijo je izpeljal James [9, trditev 5.1], za topološko kompleksnost pa Farber [4, izrek 5.2].

Izrek 2. *Naj bo X $(p-1)$ -povezana mnogoterost. Potem je*

$$(a) \text{ cat}(X) \leq \frac{\dim(X)}{p} + 1 \text{ in}$$

$$(b) \text{ TC}(X) < \frac{2 \cdot \dim(X) + 1}{p} + 1.$$

Primer 7. Poglejmo, kaj nam te zgornje meje povedo o sferah. Sfera S^n je n -dimenzionalen in $(n-1)$ -povezan prostor (S^m ne moremo homotopsko netrivialno preslikati v S^n pri $m \leq n-1$, npr. krožnico na sferi lahko vedno skrčimo v točko). Iz ocene 1(a) dobimo slabo zgornjo mejo $\text{cat}(S^n) \leq n+1$, iz ocene 2(a) pa boljšo

$$\text{cat}(S^n) \leq \frac{n}{n} + 1 = 2.$$

Izkaže se, da je $\text{cat}(S^n) = 2$. Po definiciji je namreč LS kategorija prostora enaka 1 natanko tedaj, ko je prostor kontraktibilen, sfere pa to niso (to lahko dokažemo s pomočjo Brouwerjevega izreka o fiksnih točkah preslikav na diskih). Kategorična spodnja meja 1(c) nam pove, da je $2 \leq$

$\mathrm{TC}(S^n)$. Dimenzijska ocena za topološko kompleksnost 1(b) pravi, da je $\mathrm{TC}(S^n) \leq 2n + 1$, medtem ko dobimo s pomočjo LS kategorije boljšo oceno 1(c): $\mathrm{TC}(S^n) \leq 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Če upoštevamo še povezanost, dobimo

$$\mathrm{TC}(S^n) < \frac{2n+1}{n} + 1 = 2 + 1 + \frac{1}{n} = 3 + \frac{1}{n}.$$

Ker je $\mathrm{TC}(S^n)$ naravno število, lahko spet sklepamo le, da je $\mathrm{TC}(S^n) \leq 3$. Izkaže pa se, da je ta meja ostra samo za sode n , medtem ko pri lihih n velja $\mathrm{TC}(S^n) = 2$. To bomo pokazali v naslednjem razdelku.

Sfere

V tem razdelku bomo določili topološko kompleksnost sfer S^n . Pomagali si bomo z znanim Brouwerjevim rezultatom o (ne)počesanih sferah:

Izrek 3. *Na S^n obstaja povsod neničelno gladko tangentno vektorsko polje natanko tedaj, ko je n lih.*

Najprej razložimo, od kod izreku ime. Sfero S^n predstavimo kot podmnožico točk

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

v $\mathbb{R}^{n+1}$. Vektorsko polje na S^n je preslikava $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, ki vsaki točki sfere priredi neki vektor iz $\mathbb{R}^{n+1}$. Lahko si torej predstavljamo, da iz vsake točke na sferi S^n raste las, ki kaže v neko smer v $\mathbb{R}^{n+1}$. Sfero želimo počesati, tj. radi bi dosegli, da je v vsaki točki pripadajoči vektor tangenta na sfero (pravokoten na polmer). Zgornji izrek nam pove, da pri lihih n to vedno lahko storimo, pri sodih n pa nikoli. O prvem se lahko hitro prepričamo, saj ni težko videti, da za sfero

$$S^{2n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + \dots + x_{2n}^2 = 1\}$$

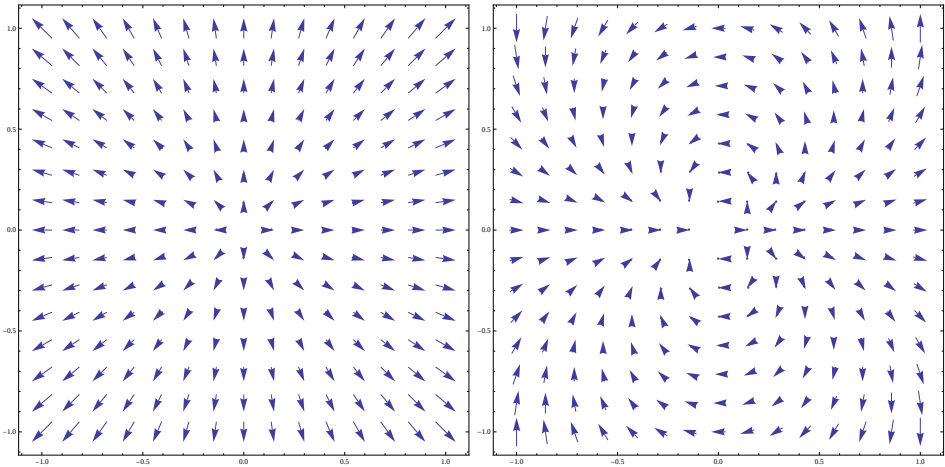
predpis

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \mapsto (-x_2, x_1, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1})$$

krajevemu vektorju vsake točke sfere priredi neki vektor, ki je nanj pravokoten (njun skalarni produkt je enak 0). Težje je dokazati, da za sfere sodih dimenzij takega predpisa ni.

Krožnico S^1 torej lahko počesemo, medtem ko bomo na žogi S^2 vedno dobili kak vrtinec, singularno točko, v kateri bo polje enako nič. Dva primera okolice singularne točke sta prikazana na sliki 5.

Vrnimo se k topološki kompleksnosti. V primeru 7 smo ugotovili, da je $2 \leq \mathrm{TC}(S^n) \leq 3$. Za lihe n je $\mathrm{TC}(S^n) = 2$, kar dokažemo tako, da



Slika 5. Dva primera obnašanja vektorskega polja v okolici singularne točke.

konstruiramo pokritje $S^n \times S^n$ z dvema množicama, nad katerima obstajata zvezna prereza.

Naj bo

$$U_1 = \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x \neq -y\},$$

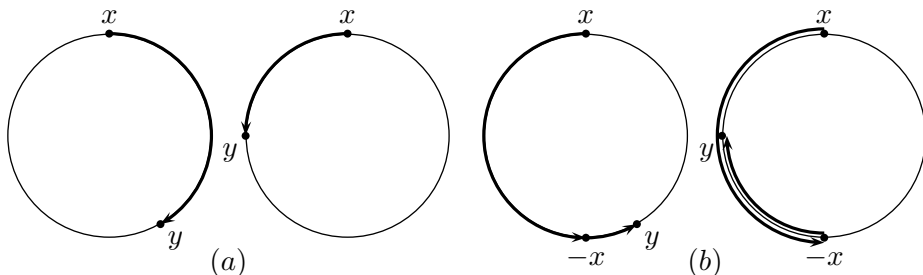
$$U_2 = \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x \neq y\}.$$

Iz prve množice smo torej izvzeli pare antipodnih točk, iz druge pa tiste pare, kjer sta obe koordinati enaki.

Prerez $s_1: U_1 \rightarrow (S^n)^I$ naj vsakemu paru točk $(x, y) \in U_1$ priredi pot $s_1(x, y)$, ki teče od x do y po krajšem loku vzdolž glavne krožnice, določene z x in y . Ker točki x in y nista antipodni, je prerez s_1 dobro definiran in poljubnemu paru točk $(x, y) \in U_1$ priredi najkrajšo možno pot po sferi od x do y .

Zdaj pa uporabimo dejstvo, da imamo pri lihih n na S^n neko povsod neničelno tangentno vektorsko polje v . To polje v vsaki točki sfere S^n natanko določa neko glavno krožnico in še neko odlikovano smer na tej krožnici. Prerez $s_2: U_2 \rightarrow (S^n)^I$ naj vsakemu paru točk $(x, y) \in U_2$ priredi pot $s_2(x, y)$, ki gre najprej od x do antipodne točke $-x$ vzdolž glavne krožnice v smeri, določeni z $v(x)$, nato pa teče od $-x$ do y po najkrajši možni poti. Tudi prerez s_2 je dobro definiran, ker polje v ni nikjer enako nič in ker točki $-x$ in y nista antipodni. Na sliki 6 sta za primer $n = 1$ prikazana po dva primera za vsak prerez.

Na sferah sodih dimenzij pa ne obstajajo povsod neničelna tangentna vektorska polja, zato zgornja ideja odpove. Z nekaj iznajdljivosti lahko najdemo pokritje s tremi množicami. Za sode n obstaja na S^n tangentno vektorsko polje, ki je neničelno povsod razen v eni točki $x_0 \in S^n$. Množico U_1 in prerez s_1 definiramo enako kot pri lihih n . Množico U_2 nekoliko



Slika 6. Na sliki (a) sta prikazani poti $s_1(x, y)$ za dve različni (generični) izbiri x in y . Na sliki (b) sta prikazani poti $s_2(x, y)$ pri istih dveh izbirah za x in y . Če je $x = y$, je $s_1(x, x) = c_x$ konstantna pot, $s_2(x, x)$ pa ni definirana. Če je $y = -x$, opiše $s_2(x, -x)$ lok med x in $-x$ v pozitivni smeri (določeni z vektorskim poljem v), $s_1(x, -x)$ pa ni definirana.

popravimo:

$$U_2 = \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x \neq y, x \neq x_0\}.$$

Na tem U_2 lahko definiramo s_2 kot zgoraj, saj je $v(x)$ za $x \in U_2$ neničelno. Skupaj množici U_1 in U_2 pokrijeta ves $S^n \times S^n$ razen točke $(x_0, -x_0)$. Izberimo poljubno kontraktibilno okolico U_3 točke $(x_0, -x_0)$. Nad U_3 tedaj obstaja zvezen prerez s_3 .

S konstrukcijo pokritja smo torej dobili še eno potrditev, da je $\text{TC}(S^n) \leq 3$. Potrebujemo še spodnjo mejo, ki bi pokazala, da za sode n velja $\text{TC}(S^n) > 2$. Dobimo jo iz kohomološke ocene.

Farber [3, izrek 7] je pokazal naslednji izrek:

Izrek 4. Naj bo k obseg. Tedaj je $\text{TC}(X) \geq \text{zcl}_k(X) + 1$.

Tukaj je $\text{zcl}_k(X)$ dolžina najdaljšega netrivialnega produkta določenih kohomoloških razredov. V primeru sodih sfer S^{2k} lahko najdemo kohomološke razrede a_k , za katere je $a_k^2 \neq 0$, od koder potem sklepamo, da je $\text{zcl}_{\mathbb{Q}}(S^{2k}) \geq 2$ in zato $\text{TC}(S^{2k}) \geq 3$. Za lihe sfere taki razredi ne obstajajo.

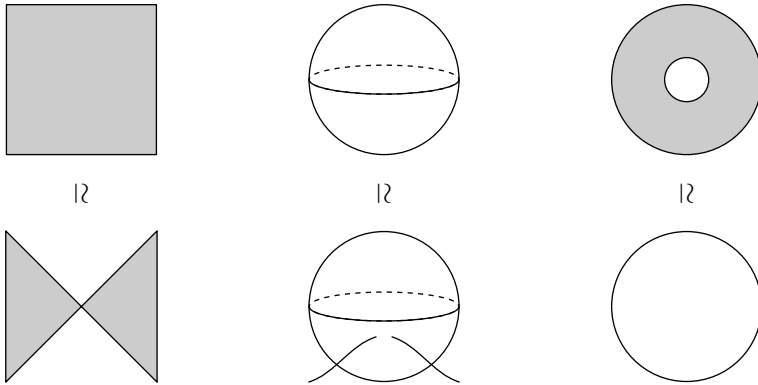
Dokazali smo:

Izrek 5. Za n -dimenzionalno sfero S^n velja:

$$\text{TC}(S^n) = \begin{cases} 2; & n \text{ lih,} \\ 3; & n \text{ sod.} \end{cases}$$

Kaj pa topološke kompleksnosti konfiguracijskih prostorov iz prvega razdelka? Pomagali si bomo z dejstvom, da je topološka kompleksnost homotopska invarianta. To pomeni, da se ne spremeni, če prostor zamenjamo s

kakšnim drugim homotopsko ekvivalentnim prostorom. Tako bi lahko na primer skrčili v točko poljuben kontraktibilen podprostor, pa to ne bi vplivalo na topološko kompleksnost. Lahko bi tudi na prostor v poljubni točki vzdolž enega od krajišč prilepili interval (rečemo, da smo dodali brk), ali pa celo skrčili cel kontraktibilen faktor v produktu prostorov v točko. To so zgolj najpreprostejši in geometrično nazorni primeri konstrukcij, ki ne spremenijo homotopskega tipa prostora, a za naše potrebe bodo zadoščali. Nekaj primerov je ilustriranih na sliki 7.



Slika 7. V kvadratu $I \times I$ stisnemo v točko daljico $\{\frac{1}{2}\} \times I$, sferi S^2 dodamo dva brka, v kolobarju $S^1 \times I$ skrčimo kontraktibilni faktor I v točko. V vseh treh primerih tako dobimo prostor, ki je homotopsko ekvivalenten prvotnemu.

- (a) **Enostavna robotska roka:** Konfiguracijski prostor je krožnica in vemo, da je $\text{TC}(S^1) = 2$.
- (b) **Sestavljena robotska roka:** Topološko kompleksnost produkta n krožnic je izpeljal Farber [3, izrek 12]:

$$\text{TC}(S^1 \times \dots \times S^1) = n + 1.$$

- (c) **Molekula CO v prostoru:** Prostor $\mathbb{R}^3 \times S^2$ je homotopsko ekvivalenten sferi S^2 (faktor $\mathbb{R}^3$ je kontraktibilen in ga lahko skrčimo v točko), zato je

$$\text{TC}(\mathbb{R}^3 \times S^2) = \text{TC}(S^2) = 3.$$

- (d) **Molekula H₂O v ravnini:** Prostor $\mathbb{R}^2 \times S^1$ je homotopsko ekvivalenten krožnici S^1 , zato je

$$\text{TC}(\mathbb{R}^2 \times S^1) = \text{TC}(S^1) = 2.$$

- (e) **Enostavna robotska roka s premikajočim se vrtilščem:** Prostor $I \times S^1$ je prav tako homotopsko ekvivalenten krožnici S^1 , zato je

$$\mathrm{TC}(I \times S^1) = \mathrm{TC}(S^1) = 2.$$

- (f) **Roboti v evklidskem prostoru:** Pri konfiguracijskih prostorih n robotov v $\mathbb{R}^m$ so zanimivi le primeri, ko je $n \geq 2$ in $m \geq 2$. Pri $n = 1$ je namreč

$$F(\mathbb{R}^m, 1) = \mathbb{R}^m$$

in $\mathrm{TC}(F(\mathbb{R}^m, 1)) = 1$, pri $m = 1$ pa dobimo prostore

$$F(\mathbb{R}, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq x_j \text{ za } i \neq j\},$$

ki niso povezani s potmi. Hiperravnine $x_i = x_j$ jih namreč razdelijo na $n!$ kontraktibilnih kosov, vsak ustreza nekemu vrstnemu redu n točk na premici, tj. neki permutaciji n elementov.

Pri $m, n \geq 2$ velja

$$\mathrm{TC}(F(\mathbb{R}^m, n)) = \begin{cases} 2n - 1; & m \text{ lih,} \\ 2n - 2; & m \text{ sod.} \end{cases}$$

LITERATURA

- [1] C. Adams in R. Franzosa, *Introduction to Topology: Pure and Applied*, Pearson, 2008.
- [2] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea in D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann Category*, Mathematical Surveys and Monographs **103**, AMS, 2003.
- [3] M. Farber, *Topological Complexity of Motion Planning*, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), 211–221.
- [4] M. Farber, *Instabilities of Robot Motion*, Topology and its Applications **140** (2004), 245–266.
- [5] M. Farber, *Invitation to Topological Robotics*, EMS Publishing House, Zürich, 2008.
- [6] M. Farber, *Topology of robot motion planning*, Morse Theoretic Methods in Nonlinear Analysis and in Symplectic Topology, Paul Biran, Octav Cornea, Francois Lalonde editors, Springer, 2006, 185–230.
- [7] M. Farber in M. Grant *Topological complexity of configuration spaces*, Proceedings of the AMS **137** (2009), 1841–1847.
- [8] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002, dostopno na <http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html>
- [9] I. M. James, *On category in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 331–348.

STEREOSNEMANJE: PRINCIPI DVOUŠESNE ZAZNAVE ZVOKA

DANIEL SVENŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 43.66.Pn, 43.20.+g, 43.38.Md

Spregovorili bomo o izzivih, s katerimi se soočamo pri snemanju akustičnih scen s stereomikrofonskim parom. Poslušalčevo akustično izkušnjo želimo čim verneje zajeti in jo nato reproducirati z namenom, da bi v njem ponovno vzbudila občutke žive izvedbe. Omnidirekcionalni mikrofoni prekašajo direkcionalne, razmaknjene postavitve so ustreznejše od koincidenčnih. Z akustično oviro med razmaknjenima mikrofonomoma lahko izboljšamo intenzitetno separacijo kanalov. V najbolj naravnem primeru je ovira lahko umetna (celo človekova) glava. Vpliv glave bomo kvalitativno pojasnili in vpeljali njena impulzni odziv (HRIR) in prenosno funkcijo (HRTF). Z vpadom zvočnega valovanja na visokoimpedančno mejno površino bomo kvalitativno razložili vpliv glave na nizke in visoke frekvence. Predstavili bomo eksaktno rešitev sipanja ravnega vala na togi krogli in iz nje izluščili prenosno funkcijo, ki rabi kot model prenosne funkcije človeške glave. Na primeru tega modela si bomo ogledali, kako kvalitativne lastnosti prenosne funkcije glave interpretiramo v luči temeljnih fizikalnih načel.

STEREO RECORDING: PRINCIPLES OF BINAURAL PERCEPTION OF SOUND

Challenges of stereo pair miking of acoustic venues are reviewed. The goal is to capture the listener's live acoustic experience as veristic as possible and then reproduce it as to arouse in him the feelings he had during the live performance. Coincident setups are disfavoured and omnidirectional spaced pair techniques are preferred to directional ones. These can be baffled to improve the intensity separation of the two channels. A natural extrapolation of the baffling is the use of a dummy (or even human) head – the binaural recording technique. The effect of the head is qualitatively discussed, the head-related impulse response (HRIR) and transfer function (HRTF) are introduced. The effect of the incidence on a high impedance boundary is discussed and related to the influence of the dummy head surface on low and high frequencies. The exact solution of the scattering of a plane wave on a hard sphere is presented and from it the hard sphere transfer function is extracted, which serves as a model for the HRTF of human head. With the help of this model, qualitative features of the HRTF are brought in connection with underlying physical principles.

Uvod

Snemanje glasbe, ki se izvaja in doživlja v akustičnem ambientu, se bistveno razlikuje od studijskega snemanja. Pri slednjem iluzijo akustičnega prostora sestavimo umetno, ob tem pa, odvisno od zvrsti glasbe, uporabljamo številne

efekte, s katerimi lahko posnetek obenem naredimo polnejši, mogočnejši, intenzivnejši, jasnejši, mehkejši ... Nasprotno pa pri snemanju v akustičnem prostoru izhajamo iz minimalističnega načela, da je najlepša zvočna slika naravna, natanko tista, ki jo v tem ambientu doživlja poslušalec. Z akustičnim posnetkom želimo poslušalčevo izkušnjo čim verneje zajeti in jo potem tudi kar najbolje reproducirati, da bi v njem ob ponovnem poslušanju, tokrat posnetka, vzbudila enake občutke. Predpogoj za dober posnetek te vrste je akustično lep ambient in posnetku podrejena postavitev izvajalcev. Ker sta to v praksi zelo selektivni zahtevi, se dandanes tudi v akustičnih ambientih praviloma uporabljajo snemalne tehnike, ki so bližje studijskim.

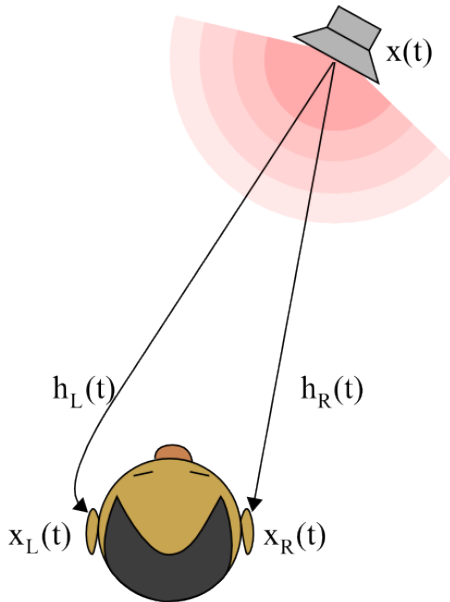
Kljub postopnemu uveljavljanju tehnik prostorskega zvoka („surround“), ki lepo zajamejo in reproducirajo ambient, kar bogati poslušalčevo izkušnjo, se bomo tukaj omejili na stereotehniko, ki je daleč najbolj razširjena. Praviloma gre za dva krajevno ločena uparjena mikrofona za levi in desni kanal, redkeje tri (npr. „Decca Tree“ z dodatnim sredinskim mikrofonom). Uparjenost mikrofonskega para pomeni, da se (kompleksni!) prenosni funkciji mikrofонов, ki ga sestavljata, karseda malo razlikujeta. Pri tem je toleranca izredno majhna, tako da se uparjenih mikrofонов ne da načrtno izdelati, ampak se iz proizvodne serije z naključno posejanimi odstopanji izbere tiste, ki se najbolj ujemajo.

V akustičnem ambientu koincidenčne tehnike (pri teh se membrani dveh usmerjenih mikrofонов nahajata praktično v isti točki) niso zaželeni, saj ambienta ne zaznajo realno. V nasprotju z direktnim zvokom z značilno močno korelacijo med kanaloma je za prostorski zvok, kot ga zaznavamo z razmaknjenima ušesoma, značilna nekoreliranost, in ravno ta daje občutek prostornosti. Ker pa koincidenčni stereopar informacijo za levi in desni kanal zajema v isti točki, sta signala po definiciji fazno povsem korelirana, neglede na to, ali gre za direktni ali prostorski zvok. Dokončno se omejimo še na omnidirekcionalne mikrofone, tj. mikrofone s krogelnosimetrično smerno karakteristiko, ki se jim morajo za vrhunski posnetek usmerjeni mikrofoni vsekakor umakniti, seveda pa so najbolj selektivni, kar se primernosti prostora tiče.

Razmaknjen par omnidirekcionalnih mikrofонов je torej osnova, ki daje najnaravnejši rezultat. V primerjavi z zaznavo z ušesi sta kanala šibkeje intenzitetno ločena, podobnejša, zaradi česar je tudi monokompatibilnost (kvaliteta monosignala, ki ga dobimo s seštevanjem signalov obeh kanalov), kolikor je ta danes sploh še pomembna, slaba. Zato se med mikrofona včasih nameščajo absorptivne ovire (npr. sfera, disk – t. i. Jecklin disk), ki desnemu mikrofonu delno zastirajo akustični pogled na levo in obratno. S tem ohranimo prednosti omnidirekcionalnih mikrofонов in hkrati močnejše intenzitetno ločimo kanala. Tako razmišljanje nas vodi do sklepa, da je najbolj realna ovira kar človeška glava. Snemalna tehnika, pri kateri omnidirekcionalna mikrofona namestimo v ušesni školjki umetne (ali tudi žive) glave, se imenuje dvoušesna (v nadaljevanju „binauralna“) tehnika. Tovrstne posnetke reproduciramo s slušalkami, pri čemer jim po realnosti in

zaznavi prostora ni para. Pri snemanju so odločilne prav vse podrobnosti, od položaja mikrofona (na milimeter natančno), oblike in velikosti uhljev, do snovi, iz katere je narejena snemalna glava. Zaradi odboja, absorpcije, uklona in resonanc v „votlinah“ ušesne školjke glava tlačno polje ob membranah mikrofona močno spremeni, pri določenih frekvencah se glasnost poveča za več kot 10 dB. Vemo tudi, da je višjefrekvenčni del zvoka, ki prihaja z leve, ob desnem ušesu oslavljen, saj je uklona okrog glave pri manjših valovnih dolžinah vse manj. Zavedati se moramo, da je enako kot amplituda pomembna tudi faza valovanja, saj v dani točki ob glavi prihaja do interference uklonjenega valovanja, kar daje zaznanemu zvoku značilen spektralni pečat, odvisen od smeri vpadlega valovanja glede na smer glave.

Prenosna funkcija glave



Slika 1. Impulzni odziv na lokaliziran izvir na mestih obeh ušes.

Celoten vpliv glave na tlak v ušesnih školjkah opišemo z impulznim odzivom glave (HRIR, head-related impulse response) za levo in desno uho, $h_L(t, \mathbf{r})$ in $h_R(t, \mathbf{r})$, oziroma njegovo kompleksno Fourierovo transformiranko, prenosno funkcijo glave (HRTF, head-related transfer function), $H_L(\omega, \mathbf{r})$ in $H_R(\omega, \mathbf{r})$, kjer $\mathbf{r}$ podaja lego zvočnega izvira glede na glavo (slika 1). Naj bo $x(t, \mathbf{r})$ tlačni signal izvira pri $\mathbf{r}$. Tlačna signala v levem in desnem ušesu, $x_L(t)$ in

$x_R(t)$, dobimo s konvolucijo z impulznim odzivom,

$$x_{L,R}(t) = h_{L,R}(t, \mathbf{r}) * x(t, \mathbf{r}) = \quad (1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau h_{L,R}(t - \tau, \mathbf{r}) x(\tau), \quad (2)$$

pri čemer velja $h_{L,R}(t < 0, \mathbf{r}) = 0$, v frekvenčnem prostoru pa preprosto

$$x_{L,R}(\omega) = H_{L,R}(\omega, \mathbf{r}) x(\omega, \mathbf{r}), \quad (3)$$

kjer je $x(\omega, \mathbf{r})$ kompleksna amplituda tlaka izvira pri $\mathbf{r}$, $x_{L,R}(\omega)$ pa kompleksna amplituda tlaka v levem oziroma desnem ušesu. Impulzni odziv glave se ponavlja premeri v daljnem polju, kjer imamo opravka z ravnimi valovi in je odvisnost od oddaljenosti izvora samo še asimptotična ($\propto 1/r$), tako da je HRIR (in posledično tudi HRTF) netrivialno odvisen „le“ od smeri, ki jo opišemo s kotoma ϑ (zenitna razdalja) in φ (azimut), $\mathbf{r} = (r, \vartheta, \varphi)$. Če torej zvočilo premikamo v vodoravni ravnini, ki poteka skozi glavo (ekvatorialna ravnina), je $\vartheta = \pi/2$ in se spreminja kot φ , pri čemer naj $\varphi > 0$ pomeni, da zvok prihaja z leve.

V načelu je tlak v ušesih s HRIR ali HRTF torej popolnoma določen. V praksi seveda nastopijo problemi: nezadostno število izmerjenih smeri, raznolikost ušesnih školjk, odvisnost prenosne funkcije od točnega položaja v ušesu, vpliv bližnjega polja pri velikih valovnih dolžinah ... Če želimo v prenosni funkciji glave videti kaj več kot nabor kompleksnih podatkov v odvisnosti od kotov ϑ in φ , si moramo ogledati fizikalne zakonitosti in koncepte, ki nastopajo pri vpadu skalarne valovanja na oviro.

Vpliv površine

Valovanje, ki pod vpadnim kotom α pada na neskončno ravno površino s specifično mehansko (= akustično) impedanco Z , se odbije po odbojnem zakonu, amplituda odbitega valovanja tik ob površini pa je

$$p_1 = \frac{\frac{Z}{Z_0} \cos \alpha - 1}{\frac{Z}{Z_0} \cos \alpha + 1} p_0, \quad (4)$$

kjer je $Z_0 = \sqrt{\rho/\chi} \approx 410 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ specifična akustična impedanca zraka, p_0 pa amplituda vpadnega valovanja tik ob površini. Običajno velja $Z \gg Z_0$ (impedanca človeškega mehkega tkiva [2] npr. znaša okrog $Z \approx 1.6 \cdot 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$), tako da je $p_1 \approx p_0$ praktično za vse vpadne kote ($\cos \alpha = 1$ pomeni pravokotni vpad). To pomeni, da je ob takšni površini amplituda tlaka dvakrat večja kot v vpadnem valovanju, kar predstavlja 6 dB večjo glasnost (pojav izkorišča t. i. PZM – „pressure zone microphone“, ki se ga namesti na tla ali steno).

Pri glavi sta koristna dva mejna primera. Za valovne dolžine, majhne v primerjavi s premerom glave, le-ta pomeni veliko in ravno površino, za katero velja zgornja ugotovitev. Visokofrekvenčno valovanje, ki prihaja s strani, bo torej na vpadni strani ob površini za 6 dB ojačano. Na nasprotni strani pa bo zaradi šibkega uklona pri teh valovnih dolžinah glede na vpadno valovanje celo oslabiljeno. Drugače je pri nizkih frekvencah: za valovanje z valovno dolžino, veliko v primerjavi s premerom glave, le-ta ne pomeni nobene ovire. V tem primeru torej nikjer ob glavi ni sprememb glasnosti. Značilno frekvenco, okrog katere se na vpadni strani glave zgodi prehod od nespremenjene k povečani glasnosti, ocenimo z zahtevo, da je valovna dolžina enaka „premeru“ glave, na okrog 1700 Hz. Eksaktno pa velja, da je ta frekvenca obratnosorazmerna z velikostjo glave.

Sipanje valovanja na krogli

V tem razdelku si bomo ogledali eksaktno rešitev sipanja ravnega zvočnega vala na togi krogli (slika 2). Ta podaja polno informacijo o akustičnem polju v prostoru okrog krogle. Če jo preberemo na površini krogle, pa predstavlja točno prenosno funkcijo toge krogle, ki jo ob izmerjenih HRTF kot eno od opcij običajno srečamo v računalniških programih za auralizacijo (simulacijo zvoka, ki ga slišimo). Zaradi krogelne simetrije je prenosna funkcija v tem primeru, drugače kot pri prenosni funkciji dejanske glave, odvisna le od enega kota.

Iz linearizirane Eulerjeve enačbe (Newtonov zakon za gibanje idealne tekočine),

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad (5)$$

kjer sta $p(\mathbf{r}, t)$ in $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ tlačno in hitrostno polje, ρ pa gostota zraka, linearizirane kontinuitetne enačbe za maso,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6)$$

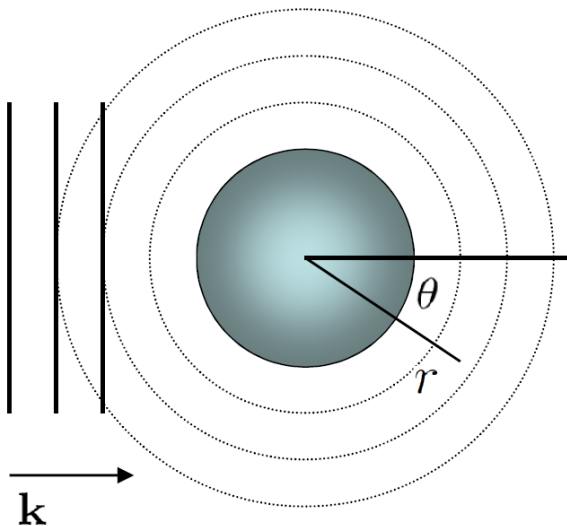
in linearizirane enačbe stanja,

$$\frac{d\rho}{\rho} = \chi dp, \quad (7)$$

kjer je χ adiabatna stisljivost, sledita valovna enačba za tlačno polje in z nastavkom $p = p_0 e^{-i\omega t}$ amplitudna enačba:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 p_0 + k^2 p_0 = 0, \quad (8)$$

kjer je $c = 1/\sqrt{\rho\chi}$ hitrost valovanja in $k = \omega/c$ velikost valovnega vektorja. Rešitve slednje zapišimo v sfernih koordinatah [1]. Rešitve radialnega dela



Slika 2. Sipanje ravnega vala na togi krogli. Ravni val potuje v smeri $\theta = 0$. Rešitev za celotno tlačno polje je osnosimetrična glede na to smer in je tako odvisna le od polarnega kota θ .

so sferne Besselove in Neumannove funkcije, $j_l(kr)$ in $n_l(kr)$, s katerimi zapišemo potujoče krogelno valovanje, ki se širi iz koordinatnega izhodišča navzven, v obliki sfernih Hanklovih funkcij prve vrste, $h_l^{(1)} = j_l + in_l$. Osnosimetrične rešitve kotnega dela pa so Legendrovi polinomi $P_l(\cos \theta)$.

Tlačno polje okrog krogle (slika 2) sestavimo iz vpadajočega ravnega vala z amplitudo 1 in od površine krogle odbitih krogelnih valov,

$$p_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l} h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \theta), \quad (9)$$

kjer so $A_{k,l}$ koeficienti, ki jih moramo določiti. Fazo ravnega vala zapišemo kot $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$ in ga razvijemo po krogelnih funkcijah,

$$p_0(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[(2l+1) i^l j_l(kr) + A_{k,l} h_l^{(1)}(kr) \right] P_l(\cos \theta). \quad (10)$$

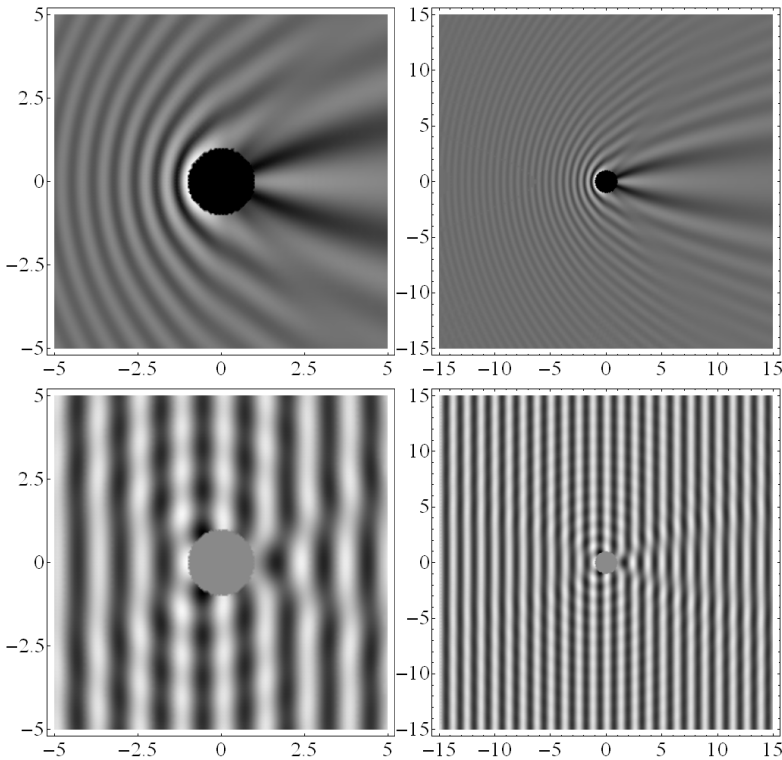
Na površini toge krogle s polmerom R mora za radialno komponento hitrosti veljati $v_r(R) = 0$, od koder iz enačbe (5) sledi robni pogoj za tlak:

$$\left. \frac{\partial p_0}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad (11)$$

z njim pa iz enačbe (10) iskani koeficienti:

$$A_{k,l} = -(2l+1)i^l \frac{j'_l(kR)}{h'_l(kR)}. \quad (12)$$

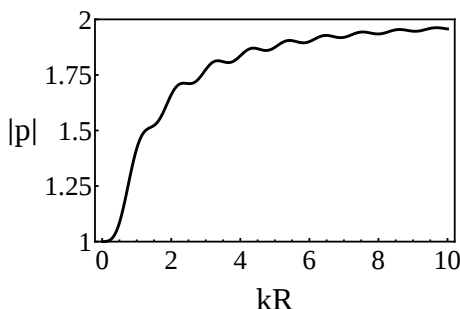
Rešitev za akustično polje, ki je podana z enačbo (9) in koeficienti (12), je vsota (interferenca) vpadajočega ravnega vala in odbitih krogelnih valov. Seštevati moramo do dovolj velikega l , da je prispevek členov z višjimi l zanemarljiv. Slika 3 (zgoraj) prikazuje amplitudo tlaka okrog krogle (absolutna vrednost kompleksnega tlaka po enačbi (9)) za $kR = 5$. Lepo je viden porast tlaka pred kroglo in uklonski minimumi za njo, kakor tudi interferenca vpadajočega ravnega vala z odbitimi krogelnimi valovi, ki z razdaljo od krogle postopno pojema (daleč stran ostane samo ravni val, tj. konstantna amplituda). Na sliki 3 (spodaj) pa je primer trenutnega tlačnega polja. Zanimiva je zakasnitev valovanja za kroglo.



Slika 3. Sipanje ravnega vala na togi krogli, ravni val s $kR = 5$ vpada z leve; (zgoraj); amplituda tlaka po enačbi (9) in trenutna slika tlačnega polja (spodaj). Desni sliki prikazujeta razmere dlje od krogle.

HRTF v modelu toge krogle

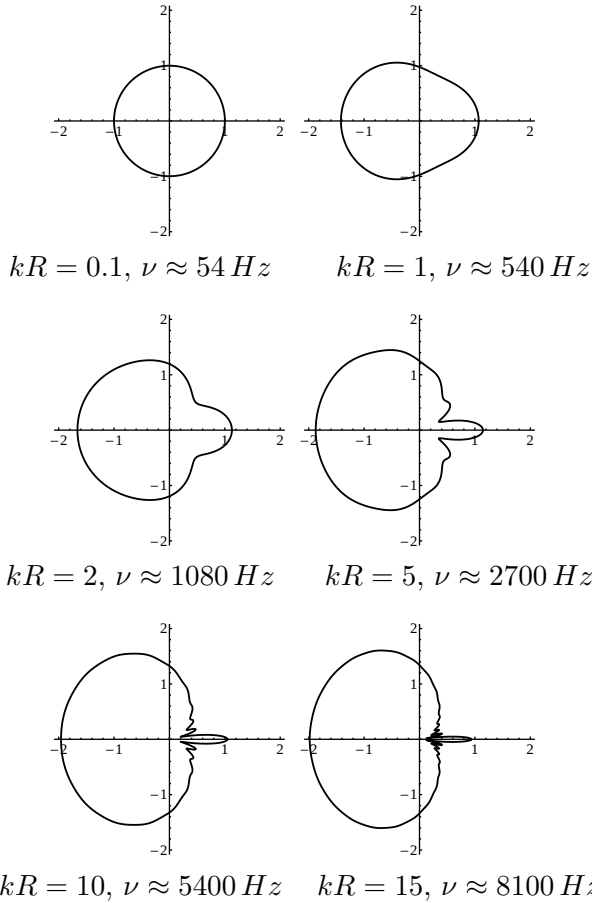
Za binauralni zajem zvoka je seveda pomemben tlak ob površini krogle, kamor namestimo mikrofona. Najprej si na sliki 4 oglejmo, kako je amplituda tlaka na površini pri $\theta = \pi$ (vpadna stran) odvisna od k , torej od frekvence $\nu = kc/2\pi$, oziroma valovne dolžine $\lambda = 2\pi/k$. Vidimo, da je pri nizkih frekvencah tlačna amplituda zares enaka amplitudi vpadajočega vala, pri visokih frekvencah pa postane skladno z napovedjo dvakrat večja. Prehod se zgodi okrog $kR \approx 2$ oziroma $\lambda \approx \pi R$. Na vpadni strani je torej visokofrekvenčni del spektra dvignjen za 6 dB.



Slika 4. Amplituda tlaka na površini krogle pri $\theta = \pi$ v odvisnosti od brezdimenzijske velikosti valovnega vektorja kR .

Slika 5 prikazuje polarne diagrame amplitude tlaka na površini krogle za naraščajoče frekvence. Ravni val vpada z leve. Na tej strani je tlak pri višjih frekvencah torej povečan do faktorja 2. Na senčni strani, kjer so višje frekvence oslabiljene, prihaja do izrazitih interferenčnih efektov, pri čemer se položaj ojačitvenih izrastkov z valovno dolžino živahno spreminja. V dani smeri so zato nekatere frekvence močno oslabiljene – za senčno stran je torej značilna izrazita koloracija zvoka. Zanimiv je uklonski preostanek pri $\theta = 0$, ki z naraščajočo frekvenco ne pojema, ampak se le tanjša. Tak centralni uklonski maksimum srečamo tudi pri uklonu svetlobe na okrogli ploščici.

Slika 6 združeno prikazuje odvisnost amplitude tlaka na površini krogle od kota θ in od frekvence v enotah kR ($kR = 2\pi\nu R/c$), ki je na grafih predstavljena z razdaljo od izhodišča. Nizkofrekvenčni del spektra se nahaja na sedlastem območju v okolici izhodišča. Ker je kompleksna amplituda vpadajočega vala kar 1, je kompleksni tlak $p(R, \theta)$ iz enačbe (9) pravzaprav že iskana kompleksna prenosna funkcija toge krogle (na grafih 4–6 smo prikazovali le amplitudo, torej absolutno vrednost kompleksnega tlaka). Paziti je treba le še pri kotni odvisnosti, saj je prenosna funkcija funkcija smeri, iz katere prihaja valovanje, in ne smeri točke na krogli, v kateri merimo tlak. Kompleksni prenosni funkciji toge krogle za levo in desno uho, torej HRTF v približku toge kroglaste glave, za zvočilo v ekvatorialni ravnini ($\vartheta = \pi/2$)



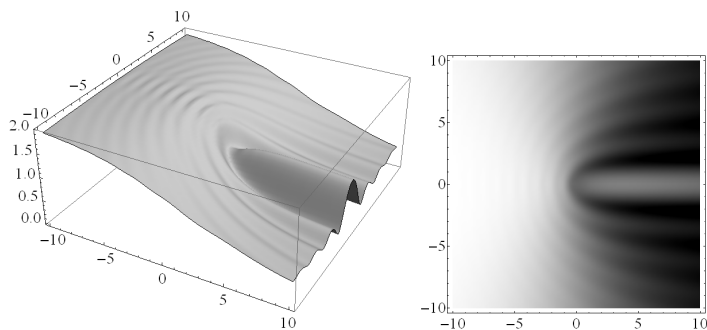
Slika 5. Amplituda tlaka na površini krogle v odvisnost od kota θ za naraščajoče vrednosti kR . Pripisana je orientacijska vrednost frekvence za primer $R = 10 \text{ cm}$. Vpadna stran je na levi, senčna ($\theta = 0$) pa na desni.

sta tako

$$H_L(\vartheta = \frac{\pi}{2}, \varphi) = p(R, \frac{\pi}{2} + \varphi), \quad (13)$$

$$H_D(\vartheta = \frac{\pi}{2}, \varphi) = p(R, \frac{\pi}{2} - \varphi), \quad (14)$$

kjer $p(R, \theta)$ podaja enačba (9). Za zvočilo v splošni smeri (ϑ, φ) upoštevamo osno simetrijo, izračunamo kot Θ glede na os od desnega ušesa proti levemu,



Slika 6. Odvisnost amplitude tlaka na površini krogle od frekvence v enotah kR (predstavlja jo oddaljenost od izhodišča) in kota θ (kaže ga polarni kot). Ravni val vpada z leve. Oba grafa prikazujeta isto funkcijo. Pozor: to je dvodimenzionalna predstavitev tlaka na površini krogle, ne tlačno polje okrog krogle kot na sliki 3.

$\cos \Theta = \sin \vartheta \sin \varphi$, in zapišemo prenosni funkciji v splošnem:

$$H_L(\vartheta, \varphi) = p(R, \pi - \Theta), \quad (15)$$

$$H_D(\vartheta, \varphi) = p(R, \Theta). \quad (16)$$

Sklep

Zvok, zajet s snemalno glavo, je moduliran in prek odziva snemalne glave (HRIR ali HRTF) nosi „prstni odtis“ glave, ki je bila uporabljena. Binauralni posnetek se posluša s slušalkami, praviloma odprtimi, ker najmanj spremenijo prenosno funkcijo obušenega območja. Seveda se ne moremo izogniti biološkim raznolikostim. Morda le tako, da mikrofona namestimo kar v svoji ušesi – vendar se pri tem takoj pojavi problem točne pozicije in ponovljivosti nameščanja. Binauralni posnetek, predvajan prek stereo zvočnikov, je ob poslušanju že drugič konvolviran z odzivom glave in poleg nekoliko oddaljene zvočne perspektive deluje presvetlo, zato ga je treba vsaj ekvilizirati. Večji problem je mešanje kanalov, saj zvok levega zvočnika dospe tudi v desno uho in obratno. Z dekonvolucijo je ta t. i. „cross-talk“ možno v principu odstraniti, a le za točno določen položaj poslušalčeve glave glede na geometrijo zvočnikov, individualno prilagojeno HRTF, gluho poslušalnico ... Prav tako so problematične nizke frekvence, ki jih običajno zaznavamo že v bližnjem polju. Ker je dekonvolucija inverzni problem, so vse neidealnosti toliko bolj kritične.

LITERATURA

- [1] I. Kuščer in A. Kodre, *Matematika v fiziki in tehniki*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1994.
- [2] I. Ogura *et al.*, v *Ultrasound in Medicine*, Vol. 4, urednika D. White in E. A. Lyons, 535–543, Plenum Press, New York, 1978.

O METU KROGLE IN METU KLADIVA

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.80+b

Gibanje izstrelka je priljubljen zgled v učbenikih fizike. Pogosto se z njim ukvarjajo fizikalne poučevalske revije. Članek opiše račune pri metu krogle in metu kladiva. Slednji je zanimiv zaradi uspeha Primoža Kozmusa. Izračuna delo zračnega upora in oceni zmanjšanje dometa zaradi njega. Nazadnje sledi poskusom, da bi pospeševalni del meta povezali s prostim delom in naredi nekaj ocen.

ON SHOT PUT AND HAMMER THROW

Projectile motion is a popular example in physics textbooks. It is often discussed in physical educational journals. In the article some calculations are presented for shot put and hammer throw, the latter being particularly interesting due to the success of Primož Kozmus. The work of the air drag is calculated and its influence on the range is estimated. Finally, the trials are followed to connect the acceleration phase with the free motion phase giving some estimates.

Že v starih časih so tekmovali v metanju težkih predmetov. Iliada omenja, da so oblegovalci Troje tekmovali v metanju skale. Vojaki so v času, ko so bili topovski izstrelki kamnite krogle, metali topovske krogle. Iz tega se je postopno razvil *met krogle* (angleško shot put, suvanje izstrelka – topovske krogle). Za moške je bil met krogle olimpijska disciplina od prve olimpiade leta 1896. Za ženske je postal olimpijska disciplina leta 1948. Škoti, ki jim je angleški kralj med boji za osamosvojitev na koncu 13. stoletja prepovedal uporabo orožja, so si pomagali s kroglo na drogu. Tako orodje so uporabljali tudi na tekmovanjih na Škotskem višavju. Iz tega se je postopno razvil *met kladiva*. Prvič so ga za moške vključili na drugo olimpiado leta 1900. Za ženske so ga uvedli na olimpiadi leta 2000.

Pri obeh metih moški uporabljajo kroglo z maso 7,26 kg iz železa ali medenine s premerom od 11 do 13 cm, ženske pa kroglo z maso 4 kg s premerom od 9,5 do 11 cm. Pri kladivu je na kroglo pritrjena za moške do 1,215 m in za ženske do 1,195 m dolga jeklena žica. Na drugem krajišču žice je ročaj. Kladivo metalec meče z dvema rokama in lahko uporablja rokavice. Pri metu krogle mora uporabiti eno roko. Pri obeh metih metalec meče iz kroga s premerom 2,135 m, ki ga obdaja 10 cm visok lesen obroč. Metalec se ga lahko dotakne na notranji strani, ne sme se ga dotakniti na zgornji strani

ali ga prestopiti, preden krogla pade na tla. Let krogle pri metu kladiiva je mogoče primerjati z letom krogle pri metu krogle. Pri drugih dveh metih v lahki atletiki, metu diska in metu kopja, sta orodji precej drugačni. Drugače od metalca krogle, ki uporablja le roko, metalec kladiiva uporabi obe roki in žico kot nekakšno napravo za dodatno pospešitev krogle. Najprej sta obe disciplini veljali za preizkus moči, potem so razvili načine, ki vključujejo hitrost in spretnost ter zahtevajo dobro časovno usklajenost.

Svetovni rekordi			
krogla			
moški	Randy Barnes (ZDA)	23,12 m	1990
ženske	Natalija Lisovskaja (Rusija)	22,63 m	1987
kladiivo			
moški	Jurij Sedih (Rusija)	86,74 m	1986
ženske	Betty Heidler (Nemčija)	79,42 m	2011

Primož Kozmus je na olimpiadi v Pekingu leta 2008 z metom 82,05 m dosegel zlato kolajno.

Zanimivo je obdelati mehanične osnove metov [7, 9]. Opazujmo gibanje krogle, ko jo metalec spusti. Tedaj ima krogla *začetno hitrost* V pod *začetnim kotom* β proti vodoravnici in *začetno višino* y_0 nad tlemi. Krogla nato pada s pospeškom prostega padanja g navpično navzdol. Najprej ne upoštevamo zračnega upora. Vodoravna komponenta hitrosti se ne spreminja $v_x = V \cos \beta$, navpična pa se zmanjšuje $v_y = V \sin \beta - gt$, če čas t začnemo meriti v trenutku, ko krogla zapusti metalčevo roko. Tirnico krogle dobimo, ko iz enačbe $x = Vt \cos \beta$ izračunamo čas in ga vstavimo v enačbo $y = y_0 + Vt \sin \beta - \frac{1}{2}gt^2$:

$$y = y_0 + x \tan \beta - gx^2 / (2V^2 \cos^2 \beta). \quad (1)$$

V enačbo je pripravno vpeljati brezenotski koordinati $\xi = gx/V^2$ in $\eta = gy/V^2$ ter $\eta_0 = gy_0/V^2$:

$$\eta = \eta_0 + \xi \tan \beta - \frac{1}{2}\xi^2 / \cos^2 \beta.$$

Z enačbo izračunamo *metno razdaljo*, to je razdaljo $x_0 = V^2 \xi_0 / g$, v kateri krogla zadene tla pri $y = \eta = 0$:

$$\xi_0^2 - \xi_0 \sin 2\beta - 2\eta_0 \cos^2 \beta = 0. \quad (2)$$

Metna razdalja:

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \sin 2\beta + \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 2\beta + 2\eta_0 \cos^2 \beta} \quad (3)$$

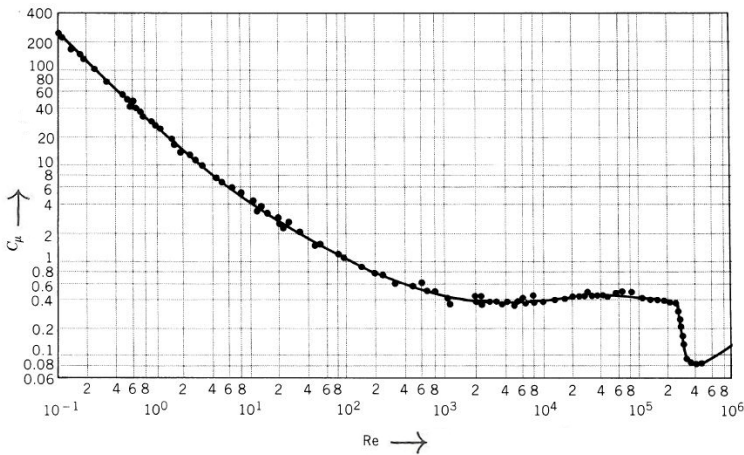
je odvisna od začetnega kota β . V splošnem kroglu doseže tla po dveh tirnicah pri večjem in manjšem kotu β . Le pri *dometu* x_{0m} , ki mu ustreza ξ_{0m} , to je največji metni razdalji, je kot en sam: β_0 . Nadomestimo $1/\cos^2 \beta$ z $1 + \tan^2 \beta$ in v (1) prepoznamo kvadratno enačbo za $\tan \beta_0$ [2, 5]:

$$\tan^2 \beta_0 - 2 \tan \beta_0 / \xi_0 - 2\eta_0 / \xi_0^2 + 1 = 0.$$

Pri dometu je diskriminanta enaka nič: $(2/\xi_{0m})^2 = 4 \cdot 1 \cdot (1 - 2\eta_0/\xi_{0m}^2)$, tako da je:

$$\tan \beta_0 = 1/\xi_{0m}, \quad \tan^2 \beta_0 = 1/(1 + 2\eta_0), \quad \xi_{0m}^2 = 1 + 2\eta_0. \quad (4)$$

Enak izid bi dobili, če bi izračunali odvod $d\xi/d\beta$, ga izenačili z 0 in rešili enačbo. Po enačbah (4) se zaradi začetne višine η_0 domet poveča.



Slika 1. Odvisnost koeficienta upora za gladko kroglo od Reynoldsovega števila [11]. Merili na obeh oseh sta logaritemski. Začetni premi del $c_u = 24/Re$ ustreza linearnemu zakonu upora.

Domet pa se zmanjša zaradi zračnega upora. Upor izračunamo s *kvadratnim zakonom* $F_u = \frac{1}{2} c_u \rho S v^2$. Pri tem je c_u *koeficient upora*, ρ gostota zraka, S čelni presek telesa in v^2 kvadrat velikosti hitrosti. Upor je odvisen od oblike telesa [10]. Za kroglo s polmerom r meri čelni presek $S = \pi r^2$. Delo zračnega upora med letom je $A_u = \int \vec{F}_u \cdot d\vec{s} = - \int F_u ds$. Pri tem je $ds = v dt$ kratek odsek tirnice in ima upor nasprotno smer hitrosti. Kvadrat velikosti hitrosti se med metom le malo spremeni. Zanj vstavimo $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ in za odsek tirnice $ds = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt$. Dobljena izraza sestavimo v:

$$A_u = - \int F_u ds = \frac{1}{2} c_u \rho S \int (v_x^2 + v_y^2) \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt = \frac{1}{2} c_u \rho S \int (v_x^2 + v_y^2)^{3/2} dt.$$

Izračunamo kvadrat velikosti hitrosti:

$$v_x^2 + v_y^2 = (V \cos \beta)^2 + (V \sin \beta - gt)^2 = V^2 - 2Vgt \sin \beta + g^2 t^2 = V^2(1 - 2\xi \tan \beta + \xi^2 / \cos^2 \beta).$$

Nazadnje smo t nadomestili z x in tega s ξ . To naredimo tudi z $dt = dx/(V \cos \beta) = (V/g)d\xi/\cos \beta$ in dobimo:

$$A_u = -\frac{c_u \rho S V^4}{2g \cos \beta} \int_0^{\sqrt{1+2\eta_0}} (1 - 2\xi \tan \beta + \xi^2 / \cos^2 \beta)^{3/2} d\xi = -\frac{c_u \rho S V^4}{2g \cos \beta} I(\eta_0). \quad (5)$$

Koeficient pred integralom in z njim absolutna vrednost dela zračnega upora izrazito naraščata z začetno hitrostjo. Integral $I(\eta_0)$ in odvod $\partial I/\partial \eta_0$ izračunamo s programskim paketom za simbolično računanje *Mathematico* numerično, ne da bi uporabili kak približek. Pri začetni višini 0 dobimo $I(\eta_0 = 0) = 0,5544$ in $(\partial I/\partial \eta_0)_{\eta_0=0} = 0,3859$. Z integralom si pomagamo, ko računamo delo zračnega upora pri začetni višini 0, odvod pa pove, kako se to delo spreminja z začetno višino.

Najprej si ustvarimo pregled v prvem približku, v katerem ne upoštevamo začetne višine krogle $\eta_0 = 0$ in zračnega upora in je $\xi_{0m} = 1$ in $\beta_0 = 45^\circ$. V tem približku je začetna hitrost $V^{(1)} = \sqrt{gx_0}$. Za navedene svetovne rekorde dobimo z $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ za $V^{(1)}$ pri moških za kroglo 15,06 m/s in za kladiivo 29,17 m/s ter pri ženskah za kroglo 14,90 m/s in za kladiivo 27,91 m/s. Rekordri so imenitni in jih pogosto navajajo, vendar so nastali v izjemno ugodnih okoliščinah. Večkrat je bolje uporabiti podatke, ki so jih dala podrobna merjenja, ali povprečja. Že na prvi pogled vidimo, koliko je pospešitev pri metu kladiiva uspešnejša kot pri metu krogle. Razmerje začetnih kinetičnih energij, to je kvadratov začetnih hitrosti, pri metu kladiiva in metu krogle pri moških doseže 3,75 in pri ženskah 3,51. Po tem in po rekordih tudi uvidimo, da so razmerje med masama krogel za moške in ženske izbrali premišljeno.

Začetna višina metno razdaljo poveča in metni kot zmanjša, približno:

$$\begin{aligned} \xi_{0m} = \sqrt{1+2\eta_0} \approx 1 + \eta_0 \quad \text{in} \quad \tan \beta_0 = 1/\sqrt{1+2\eta_0} \approx 1 - \eta_0 \\ \text{in} \quad \beta_0 \approx \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\eta_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Prvo zvezo za ξ_{0m} preprosto pojasnimo. V prvem približku kroglja zapusti metalčevo roko pod kotom $\frac{1}{4}\pi$ in pod približno tem kotom pade na tla. Tako si na mestu padca krogle lahko zamislimo pravokotni trikotnik, katerega navpična kateta y_0 je enaka vodoravni kateti, za katero se podaljša metna razdalja x_0 .

Pomnožimo enačbo $x_0 = V^2/g + y_0$ z mg . Zveza:

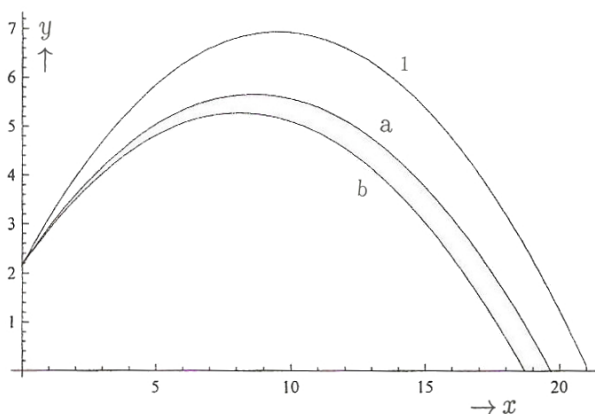
$$mgx_0 = mV^2 + mgy_0 = 2W_k + W_p \quad (7)$$

kaže, da je v prvem približku v tem pogledu za metalca dvakrat ugodneje, da delo vloži v kinetično energijo kot v potencialno. Pogosto za y_0 upoštevajo podatek 2,15 m. Začetni kot se zaradi tega zmanjša pri moških pri metu krogle za $2,7^\circ$ in metu kladiva za $0,71^\circ$ ter pri ženskah pri metu krogle za $3,1^\circ$ in pri metu kladiva za $0,78^\circ$.

Pri uporabi smo integral $I(\eta_0)$ izračunali, ne da bi se zatekli k približku. Pojavijo pa se druge negotovosti. Navadno vzamemo, da je koeficient upora konstanten in za kroglo meri nekaj več kot 0,4 [10]. Odvisnost koeficienta upora od Reynoldsovega števila $Re = 2r\rho v/\mu$ z viskoznostjo zraka μ pokaže, da je tako pri Reynoldsovih številih med $2 \cdot 10^3$ in $2 \cdot 10^5$ [3]. Pri nekoliko večjem Reynoldsovem številu kot $2,3 \cdot 10^5$ pa koeficient precej strmo pade na 0,1 (slika 1). Koeficient upora je odvisen še od hrapavosti, a pri metih lahko vzamemo kroglo za gladko. Reynoldsovo število je pri rekordih za moške pri metu krogle $1,20 \cdot 10^5$ in pri metu kladiva $2,33 \cdot 10^5$, pri ženskah pri metu krogle $1,20 \cdot 10^5$ in pri metu kladiva $2,23 \cdot 10^5$. Računali smo za temperaturo 20°C z viskoznostjo zraka $1,802 \cdot 10^{-5}$ kg/(ms) in gostoto $1,205 \text{ kg/m}^3$ – najdemo tudi druge podatke – s premerom krogle 12 cm in s hitrostjo $V^{(1)}$. Predpisi dopuščajo premer krogle od 11 cm do 13 cm, zaradi česar je premer negotov na 18 % in presek na skoraj 40 %. Razmerje med absolutno vrednostjo dela upora in začetno kinetično energijo $|A_u|/W_k$ meri za moške pri metu krogle 0,0136 in pri metu kladiva 0,0511 ter za ženske pri metu krogle 0,0244 in metu kladiva 0,0848. Zaradi izrazite odvisnosti upora od hitrosti sta prispevka upora pri metu kladiva precej večja kot pri metu krogle. V prvem približku je domet sorazmeren s kinetično energijo: $\frac{1}{2}mV^{(1)2} = \frac{1}{2}mgx_0$. Po tej zvezi se zaradi zračnega upora domet zmanjša za moške pri metu krogle za 0,31 m in pri metu kladiva za 4,48 m ter za ženske pri metu krogle za 0,55 m in pri metu kladiva za 7,15 m. Medtem ko se zaradi začetne višine domet poveča, se zaradi zračnega upora zmanjša. Pri metu krogle učinek začetne višine prevlada nad učinkom zračnega upora, pri metu kladiva pa učinek zračnega upora nad učinkom začetne višine.

Prvi približek za odvisnost metne razdalje od začetne višine in zračnega upora bi lahko izboljšali z iteracijo. (Bolje je govoriti o metni razdalji kot o dometu, saj ni gotovo, da je pri dani velikosti začetne hitrosti izbrani začetni kot najugodnejši). Začetno hitrost bi pri metu krogle za malenkost zmanjšali in pri metu kladiva zvečali in ponovili račun ter se s ponavljanjem računa poskušali približati doseženim metnim razdaljam. Toda podatki, ki so jih dobili s podrobnejšim merjenjem na nekaterih pomembnih tekmovanjih, namigujejo, da bi pri metu krogle imelo tako računanje malo smisla. Za začetni kot pri metu krogle so dobili v povprečju $33,5^\circ$ z velikim odstopanjem na obe strani [11]. Tolikšnega zmanjšanja začetnega kota na opisani način ne bi mogli pojasniti. Pri metu kladiva so za povprečni začetni kot dobili $41,5^\circ$ in je odstopanje manjše.

Doslej smo obravnavali *prosti del meta*, ko se je krogla gibala le pod



Slika 2. Tirnice po enačbi (1) z $\beta_0 = \frac{1}{4}\pi$, $x_0 = 21,1$ m in $V = 13,7$ m/s (1), po (10a) z $\beta_0 = 38,8^\circ$, $x_0 = 19,7$ m in $V = 13,2$ m/s (a) ter po (10b) pri $\beta_0 = 37,5^\circ$, $x_0 = 18,7$ m in $V = 12,9$ m/s (b).

vplivom teže in zračnega upora. Nismo se ozirali na *pospeševalni del meta*, v katerem je na kroglo deloval še metalec. Pri tem smo privzeli, da so začetna hitrost, začetni kot in začetna višina neodvisni. To velja za prosti del meta, ne pa za pospeševalnega. V pospeševalnem delu je začetna višina povezana z začetnim kotom [6]:

$$y_0 = y_r + b \sin \beta, \quad (8)$$

če je y_r višina metalčevih ramen in b dolžina roke.

Izkušnje pri dviganju uteži v ležečem položaju (angleško: bench pressing) so pokazale, da je zaradi zgradbe človeškega telesa sila roke odvisna od kota proti osi telesa. Največja je, ko roka deluje pravokotno na os telesa. To upoštevamo pri metu krogle in privzamemo, da roka kroglo pospešuje z večjo silo v vodoravni smeri in z manjšo v navpični smeri. V pomanjkanju boljših podatkov si pomagamo s priročnim zasilnim modelom:

$$F = F_0 f(\beta) \quad \text{s} \quad f(\beta) = \frac{1}{3}(2 + \cos \beta). \quad (9)$$

F_0 bi bila sila v vodoravni smeri. Najprej privzamemo, da je kinetična energija, ki jo krogla pridobi na račun dela te sile, sorazmerna s silo, in nadomestimo:

$$V^2 \rightarrow V^2 f(\beta). \quad (10a)$$

Ali je morda bolje upoštevati, da se na račun dela roke poveča potencialna energija krogle in se za pospeševanje porabi manj dela, ter nadomestiti:

$$V^2 \rightarrow V^2 f(\beta) - 2gb \sin \beta? \quad (10b)$$

Pospeševalni del meta se nadaljuje v prostem delu in določa začetno hitrost V in začetni kot β .

Pospeševalni del se pri metu kladiva močno razlikuje od pospeševalnega dela pri metu krogle. Najprej obravnavamo le met krogle. Pri njem v enačbi za metno razdaljo (3) upoštevamo za y_0 (8) ter V^2 nadomestimo z (10a) ali z (10b). Nova enačba za metno razdaljo je dokaj zapletena:

$$x_0 = (V^2/g)[(\cos \beta + 2)/3 - \delta \cdot 2(gb/V^2) \sin \beta] \cdot \left[\frac{1}{2} \sin 2\beta + \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 2\beta + \frac{2\left(\frac{gy_r}{V^2} + \frac{gb}{V^2} \sin \beta\right) \cos^2 \beta}{\frac{2+\cos \beta}{3} - \delta \frac{gy_r}{V^2} \sin \beta}} \right]. \quad (11)$$

Za primer (10a) vstavimo $\delta = 0$, za primer (10b) pa $\delta = 1$. Enačbe se lotimo z *Mathematico* s podatki $V = 13,7$ m/s, $y_r = 1,66$ m in $b = 0,8$ m [6]. Izračunamo odvod (11) po začetnem kotu β in grafično (z risanjem krivulje na vse ožjih intervalih okoli ničle) poiščemo kot β_0 , pri katerem je odvod enak 0. Za primer (10a) dobimo $\beta_0 = 0,6779 = 38,8^\circ$, $x_0 = 19,7$ m in $V^{(2)} = 13,2$ m/s ter za primer (10b) $\beta_0 = 0,6543 = 37,49^\circ$, $x_0 = 18,7$ m in $V^{(2)} = 12,9$ m/s (slika 2). Za večjo metno razdaljo mora pri tem načinu metanja metalec doseči večjo začetno hitrost. Izida kažeta v pravo smer in se dobro ujemata z izidi iz [6]. Vendar nastavkoma (10) ne kaže preveč zaupati. Boljše rezultate si je mogoče obetati po podrobnejših merjenjih. Na drugi strani veliki odmiki od povprečij pričajo, da vsak metalec meče po svoje in se tudi pri istem metalcu pojavijo razlike od meta do meta. Zaželeno bi bilo, da bi z računi podrobneje opisali posamične mete in metalcu pomagali, da izboljša svoj met.

Pospeševalni del pri metu kladiva bi zahteval posebno obravnavo. Metalec kroglo pospešuje s krožnim gibanjem. Primerjava z delovanjem pospeševalnika pa se ne zdi posrečena [1]. Pri enakomernem kroženju deluje na telo centripetalna sila proti središču krožnice. Metalec pospeši kroglo s tangентno komponento sile. Najprej metalec kladivo zaniha in s tem da krogli majhno hitrost. Potem jo zavihti najprej v vodoravni ravnini in med tremi do štirimi vrtljaji poveča nagib ravnine proti vodoravnici. Krogla odleti, ko metalec spusti držaj, v smeri tangente v navpični ravnini. Pri začetnem kotu $\beta 41,5^\circ$ je v tistem trenutku tolikšen tudi kot med žico in navpičnico. To pomeni, da je začetna višina y_0 pri metu kladiva manjša kot pri metu krogle. Tik preden metalec orodje spusti, deluje na kroglo z radialno komponento sile, ki jo ocenimo z mV^2/R . Pri tem je R skupna dolžina roke in žice, ki jo ocenimo na 2 m. Radialna komponenta doseže skoraj 3000 N, kar približno ustreza teži 300 kg. Po mnenju nekaterih ta sila omejuje hitrost in z njo metno razdaljo. Del začetne kinetične energije krogle, ki je odvisna od začetne hitrosti, se porabi za delo proti zračnemu

uporu. Preden bi se zdelo smiselno podrobneje računati, pa bi kazalo razčistiti negotovost o koeficientu upora. Lahko, da v idealnih razmerah metalci kladiva dosežejo tolikšno začetno hitrost, da se koeficient upora zmanjša od 0,4 na 0,1 (slika 1). V tem primeru je upor štirikrat manjši in ga skoraj ni treba upoštevati.

Omenimo, da poznamo v športih še drugačno metanje, „preko podlakti“, na primer pri baseballu, ko je hitrost približno pravokotna na podlaket [4]. Kroglo mečejo z iztegnjeno roko, suvajo. „Met“ krogle smo uporabljali namesto „suvanja“ krogle zaradi podobnosti z „metom“ kladiva. Raziskali so tudi nekatere druge podrobnosti, na primer to, kako na metno razdaljo vpliva vrtenje Zemlje [8].

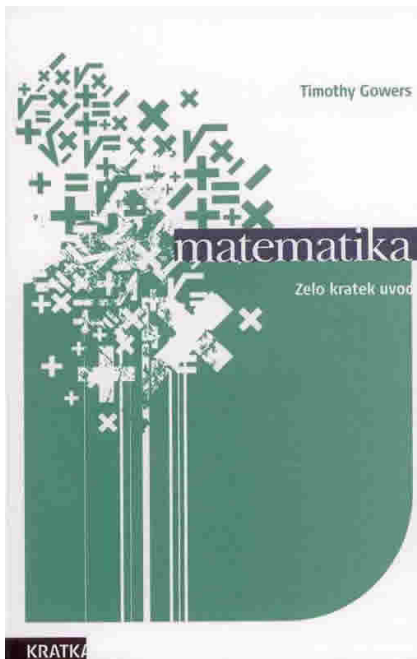
Kot zanimivost navedimo še IgNobelovo nagrado za fiziko za leto 2011. Od leta 1991 podeljujejo na univerzi Harvard IgNobelovo nagrado za deset najbolj nesmiselnih raziskovanj. Besedna igra kaže, da gre za šalo na račun Nobelove nagrade. Leta 2011 so IgNobelovo nagrado za fiziko dobili Nizozemci Philippe Perrin in sodelavci za članek *Vrtoglavost pri metalcih diska zaradi vrtenja je povezana z morsko boleznijo* [12]. V njem so opisali, zakaj metalci diska ob metu pogosto postanejo vrtoglavci, metalci kladiva pa ne. Metalci kladiva z nogami ostanejo na tleh, metalci diska pa poskočijo. Vrtenje lahko povzroči izgubo orientacije v prostoru in vrtoglavost, če zgubimo stik s tlemi.

LITERATURA

- [1] R. Allain, *How the hammer throw is like a particle accelerator*, www.wired.com/playbook/2012/08/olympics-physics-hammer-throw/.
- [2] S. K. Bose, *Maximizing the range of the shot put without calculus*, Am. J. Phys. **51** (1983) 458–459; J. S. Thomsen, *Maxima and minima without calculus*, Am. J. Phys. **52** (1984) 881–883; M. Baće, S. Ilijić, Z. Narančić, *Maximizing the range of a projectile*, Eur. J. Phys. **23** (2002) 409–411.
- [3] J. M. Cimbala, *Drag on spheres*, www.mne.psu.edu/cimbala.
- [4] R. Cross, *Physics of overarm throwing*, Am. J. Phys. **72** (2004) 305–312.
- [5] R. De Luca, *Shot-put kinematics*, Eur. J. Phys. **26** (2005) 1031–1036.
- [6] A. Lenz in F. Rappl, *The optimum angle of release in shot put*, <http://arxiv.org/pdf/1007.3689.pdf>.
- [7] D. L. Lichtenberg in J. G. Wills, *Maximizing the range of the shot put*, Am. J. Phys. **46** (1978) 546–549; C. S. Inouye, E. W. T. Chong, *Maximum range of a projectile*, Phys. Teach. **30** (1992) 168–169; R. A. Brown, *Maximizing the range of a projectile*, Phys. Teach. **30** (1992) 344–347.
- [8] F. Mizera in G. Horvath, *Influence of environmental factors on shot put and hammer throw range*, J. Biomechanics **35** (2002) 785–796.
- [9] J. Strnad, *Meti*, Presek **13** (1985/86) 86–91.
- [10] *Drag coefficient*, http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient.
- [11] *Shot Putt*, www.brianmac.co.uk/shot/; *Hammer Throw. Techniques and Training*, brianmac.co.uk/hammer/.
- [12] www.improbable.com/2011/09/29/announcing_the_2011_ig_nobel_prize_winners/.

Timothy Gowers, Matematika, Zelo kratek uvod, prevedel Jure Vogrinc, Založba Krtina, Ljubljana 2011, 156 strani.

Odločitev, da v okviru zbirke knjižic kratkih predstavitev najrazličnejših (znanstvenih, umetnostnih, socioloških in drugih) področij, to nalogo za področje matematike zaupajo Fieldsovemu nagrajencu in profesorju matematike na univerzi v Cambridgeu, je bila zadetek v polno. Avtor Timothy Gowers je pronicljivo zaznal in premagal dve poglavitni oviri za matematično sporazumevanje: 1) da bi sploh lahko razumeli temeljne koncepte moderne matematike (npr. Hilbertov prostor), ki omogočajo obravnavo različnih problematik v okviru iste teorije, moramo prej preučiti celotno hierarhijo manj zahtevnih pojmov; 2) z nekaterimi matematičnimi pojmi (kot so neskončnost, kvadratni koren iz minus ena, šestindvajseta dimenzija in ukrivljeni prostor), imajo nekateri ljudje težave (bolj filozofske kot



tehnične narave), saj se jim ti pojmi zdijo moteče paradoksalni. Sporočilo knjige je, da nam tudi takšne matematične ideje lahko postanejo domače, ne da bi se potopili v strokovno izrazoslovje, preprosto tako, da se naučimo razmišljati abstraktno, s tem pa marsikatera filozofska težava izgine.

Prva tri poglavja (Modeli, Števila in abstrakcija, Dokazi) obravnavajo nekatere splošne „metamatematične“ teme, nadaljnja štiri (Limite in neskončnost, Dimenzija, Geometrija, Ocene in približki) bolj specifične matematične teme, zadnje (Nekatera pogosta vprašanja) pa se posveča bolj matematikom kot matematiki. V drugem poglavju avtor natančno razloži, kaj razume pod pojmom „abstraktna metoda“. V prvem poglavju se posveča prevajanju problemov iz resničnega sveta v matematične probleme, v tretjem razloži, kaj pomeni strog dokaz.

Branje bolj kot predhodno znanje, ki lahko ne presega maturitetnega, od bralca zahteva nekaj zanimanja, ki ga avtor zavestno noče pričarati sam ne s slogovnimi in oblikovnimi sredstvi (npr. s šaljivimi zgodbicami ali slikami Mandelbrotove množice) ne z raznimi popularnimi temami (npr. teorija kaosa), ki po njegovem mnenju bolj burijo ljudsko domišljijo kot pa vplivajo na trenutne matematične raziskave. Kot pojasni v uvodu, raje izbira bolj

vsakdanje teme in z njihovo podrobnejšo obravnavo pokaže, kako jih lahko kompleksneje razumemo. Stremi torej bolj h globini kot k širini, zainteresiranim bralcem pa želi približati privlačnost glavnega toka matematike tako, da mu dovoli govoriti samemu zase.

Razlago ključnega koncepta knjige, *abstraktne metode*, avtor najprej nazorno predstavi na primeru šahovskih figur: tako kot npr. črni kralj ni lesena figura (ki je zgolj njegov simbol na materialni ravni), ampak „eksistira“ le na ravni idej (v okviru šahovske igre, ki poteka po določenih pravilih), tako tudi o „eksistenci“ matematičnih pojmov (kot so npr. premice, števila, itd.) nima smisla razmišljati drugače kot v okviru matematične teorije (ali matematičnega modela), katere aksiomi (oziroma predpostavke) in definicije opišejo te objekte posredno: ne prek njihove identitete (kaj so), ampak prek njihove funkcije (kaj se da z njimi početi oziroma kako delujejo). Šah (ali katerokoli podobno igro) je mogoče opisati celo brez figur in šahovnice in jo modelirati z grafom vseh možnih pozicij v igri!

Abstraktna metoda, pravi avtor, je uporabna tudi pri obravnavi in razumevanju števil. Koncept naravnega števila je tesno povezan s konceptoma seštevanja in množenja (to zlahka razumemo, če se spomnimo npr. na rimske številke – nekaj jim manjka, ker z njimi ne moremo udobno računati – prav to pa je tisto, kar prvenstveno počnemo s števili!). Bolj se moramo torej osredotočiti na računska pravila kot na števila sama. Števila so samo simboli (ali žetoni) v nekakšni igri. Podobno tudi o drugih matematičnih pojmihi ne bi smeli razmišljati kot o izoliranih objektih, ampak bi jih morali začeti razumevati prek njihovih lastnosti in odnosov do drugih objektov istega sistema.

Tretji primer uporabe abstraktne metode je razrešitev filozofske težave s številom nič: „Kako lahko nekaj obstaja in je hkrati nič?“ To vprašanje je najbolje obiti in se zadovoljiti s pravilom $0 + a = a$, ki pove vse, kar nam je treba vedeti o številu nič (to, da je enota za operacijo seštevanja). Na podoben način zlahka vpeljemo negativna števila in ulomke. Če si pri opisu $\sqrt{2}$ še lahko do neke mere pomagamo s konceptom neskončnega decimalnega ulomka, pa lahko imaginarno enoto i definiramo le kot rešitev (v realnem neresljive) enačbe $x^2 = -1$, in ker je tudi $(-i)^2 = -1$, lahko razumemo, da i ne obstaja kot samostojno obstoječ platonski objekt.

Podobno privlačno avtor pojasni osnove matematičnega modeliranja, pri katerem gre v bistvu za to, da iz realne situacije odmislimo nebitvene dejavnike, da dobimo računsko dovolj preprost model, ki nam še omogoča toliko natančen opis situacije, kot ga potrebujemo. Isto situacijo (npr. poševni met, met kocke, obnašanje plinov) lahko opišemo z različnimi modeli.

V poglavju o dokazih srečamo znani dokaz iracionalnosti $\sqrt{2}$ s protislovjem, metodo matematične indukcije, obravnavana pa so tudi vprašanja lepote, očitnosti in prepričljivosti dokaza (najboljši je tak, ki nazorno poja-

sni tudi, *zakaj* je nekaj res). Za očitnost izjave je naveden uporaben kriterij: „Izjava je očitna, če nam njen dokaz pride takoj na misel.“

Tudi poglavja o bolj specifičnih temah (npr. hiperbolična geometrija, praštevilski izrek, urejevalni algoritmi) so tako zaradi same izbire snovi kot tudi zaradi načina podajanja, ki gre brez utrudljivega dlakocepljenja takoj v samo bistvo stvari, zelo zanimiva tako za nepoznavalca kot za matematika.

Knjigo lepo zaokroži nekaj vprašanj o matematiki in matematikih (npr. ali kdaj kakšen znan matematični problem reši amater).

Kar se tiče samega prevoda, ki je na splošno korekten, moti zlasti uporaba malih začetnic pri pojmi, kot so npr. Cauchyjevo zaporedje, Riemannova hipoteza, Hilbertov prostor. Nekaj je tudi očitnih jezikovnih nerodnosti, kot so npr. „števila na negativne in racionalne potence“ (kam so izginili eksponenti?). In namesto o „robovih“ grafa bi bilo primerneje, v skladu z današnjo rabo, govoriti o povezavah grafa.

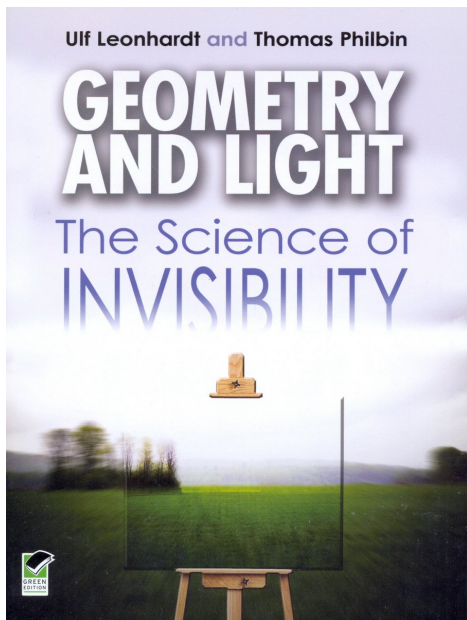
Knjiga je za matematika prijetno in lahko branje, za nepoznavalca pa ne pretežak uvod, ki s svojim prijaznim, pogovornim pristopom razblini vsaj nekaj nepotrebnega strahu pred matematiko kot nečim suhoparnim in nematematiku povsem nedosegljivim.

Jurij Kovič

Ulf Leonhardt, Thomas Philbin, Geometry and Light – The Science of Invisibility, Green Edition, Dover Publications, Mineola, New York, 2010, 286 strani.

Knjiga obravnava geometrijsko in valovno optiko v jeziku geometrijskih transformacij prostora. Avtorja v njej obravnavata tudi tako imenovane nevidne naprave, zasnovane na modernih metamaterialih, teoretične osnove pa so jima Fermatov princip v optiki, nekatere podobnosti med mehaniko in optiko ter geometrija ukrivljenega prostora. Knjiga je razdeljena na pet poglavij. Od teh vsa razen prvega vsebujejo tudi naloge za samostojno reševanje.

V prvem poglavju, prologu, avtorja poudarita pomembnost loma svetlobe v optiki. Na kratko predstavita glavne raziskovalce na področju op-



tike in elektromagnetnih valov, pojasnita glavne ideje in usmerita bralca, tako kot v preostalih poglavjih, v nadaljnje branje.

Drugo poglavje se začena s Fermatom in njegovim principom v optiki. Kmalu spoznamo, da so pomembna optična sredstva, v katerih se lomni količnik v prostoru spreminja, navadno zvezno. Fermatov princip nas hitro preusmeri v variacijski račun v optiki. Nato najdemo lepe analogije z zakoni gibanja točkastega telesa okoli privlačnega centra. Lepa zgleda za to sta Luneburgova leča, ki snop vzporednih svetlobnih žarkov zbira v točki in je povezana s Hookovim zakonom, ter Eatonova leča, ki snop vzporednih žarkov obrne za 180° in je v povezavi z Newtonovim gravitacijskim zakonom oziroma s Keplerjevimi zakoni. Nadalje so obravnavani Hamiltonov kanonski sistem diferencialnih enačb v optiki, konformne preslikave, transmutacije kot transformacije potencialov, sferna simetrija in tomografija. Poglavje se konča z nevidnimi sferami in popolnimi lečami.

Tretje poglavje je precej obširno in je posvečeno diferencialni geometriji. Tu se srečamo s transformacijami koordinat, metriko, vektorji, tenzorji, kovariantnim odvodom, divergenco in rotorjem vektorskega polja, Laplaceovim operatorjem, ukrivljenostjo, geodetskami, Riemannovim tenzorjem in svetom Minkowskega.

Četrto poglavje se ukvarja z Maxwelllovimi enačbami, še posebej v snovi. Avtorja razložita odboj in lom elektromagnetnega valovanja na njihovi osnovi in pojasnita temelje geometrijske optike, na koncu poglavja pa smo spet v svetu Minkowskega.

V zadnjem poglavju teče v matematičnem jeziku beseda v glavnem o popolnoma nevidnih napravah, prikrivanju, negativnem odboju in popolnih lečah ter optiki v gibajoči se snovi. Poglavje se konča z Aharonov-Bohmovim učinkom ter analogijo s črnimi luknjami in njihovimi horizonti.

V dodatku knjige avtorja obravnavata tenzor elektromagnetnega polja, sledita pa še obširen seznam literature in indeksno kazalo. Knjiga je opremljena s številnimi slikami in nekaj fotografijami.

Delo je primerno tako za študente tehniških ved, fizike in matematike kakor tudi za raziskovalce. Za boljše razumevanje je, kljub temu da avtorja sama pojasnjujeta najnujnejše matematične in fizikalne koncepte, dobro poznati osnove analitične geometrije, analize, algebre, diferencialne geometrije, konformnih preslikav, variacijskega računa, vektorske in tenzorske analize, mehanike, splošne teorije relativnosti, optike in Maxwelllove teorije elektromagnetizma. Knjiga je lep primer prepletanja fizikalnih in matematičnih vsebin.

Marko Razpet

BISTROUMI 2013 – SREČANJE NAJUSPEŠNEJŠIH MLADIH MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV

V letošnjem letu se je tekmovanj iz matematike, fizike, astronomije, razvedrilne matematike in poslovne matematike za različne stopnje OŠ in SŠ v organizaciji DMFA Slovenije udeležilo 121.359 učencev in dijakov, podeljenih pa je bilo skupaj 799 zlatih priznanj (<http://www.dmfa.si/Aktualno/Statistika.html>). Med prejemniki zlatih priznanj je bilo 154 nagrajencev skupaj z družinskimi člani, mentorji in predstavniki šol povabljenih na tradicionalno podelitev nagrad, ki je pod naslovom **Bistroumi 2013** potekala v nedeljo, 26. maja, v Linhartovi dvorani Cankarjevega doma v Ljubljani.



Državno tekmovanje iz matematike za Vegova priznanja je največje in najbolj znano tekmovanje v organizaciji DMFA, ki na šolski stopnji že nekaj let poteka kot del tekmovanja Mednarodni matematični Kenguru. Foto: Vojko Opaškar

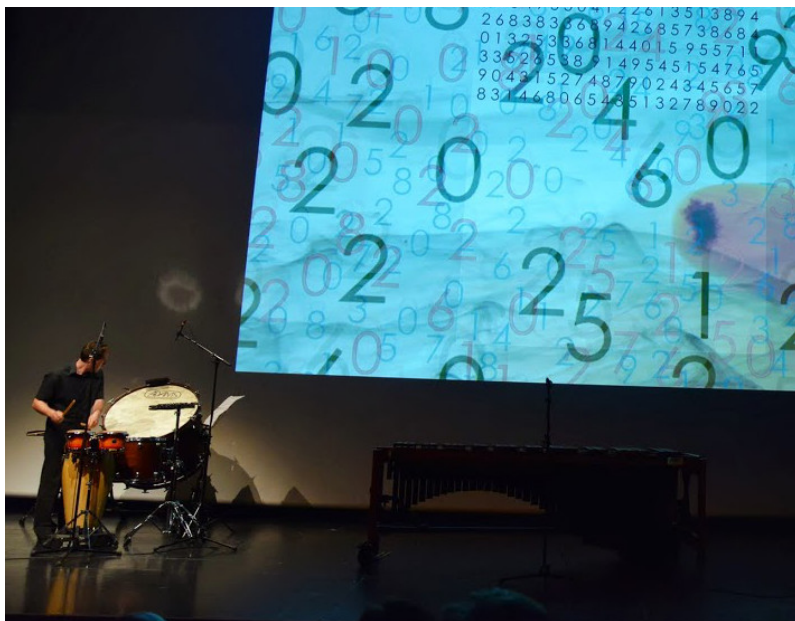
Prireditev je potekala v znamenju mednarodne pobude Matematika planeta Zemlja 2013. V pestrem programu so tekmovalce nagovorili tudi predstavniki slovenskih univerz in bivši olimpijec astrofizik dr. Anže Slosar, ki ga je revija Popular science leta 2012 uvrstila med deset „najbriljantnejših“ umov na svetu. Nagrade najboljšim so podelili predstavniki tekmovalnih komisij, upravnega odbora DMFA in častni člani DMFA, v programu prire-

ditve, ki sva jo pripravila dr. Boštjan Kuzman in dr. Matjaž Željko, pa so sodelovali še matematik in stand-up komik dr. Uroš Kuzman, ustanova Hiša eksperimentov s fizikalnimi poskusi v živo, tolkalist Jože Bogolin, voditelj Matic Jerman ter hostese iz Študentske sekcije DMFA.



Udeleženec fizikalne olimpijade iz leta 1996, zdaj svetovno znani astrofizik dr. Anže Slosar, ki ga je revija Popular Science leta 2012 uvrstila med 10 najbriljantnejših mladih umov na svetu, je v nagovoru nagrajencem dejal, da so največje face tisti znanstveniki, ki svoje najboljše ideje delijo z drugimi, in da je iskanje pravih vprašanj pomembnejše od učenja že znanih odgovorov. Foto: Vojko Opaškar

Na odru so bila tako podeljena številna priznanja, med njimi tudi znamenita Vegova priznanja najboljšim mladim matematikom ter nagrada diamantni kenguru trem devetošolcem, ki so v devetih letih osnovnega šolanja osvojili skupaj največ točk na tekmovanju Kenguru. Vrhunec prireditve je bila predstavitev petnajsterice dijakov, izbranih za udeležbo na letošnjih mednarodnih olimpijadah iz znanja, ki sta jih na odru sprejela predsednik RS Borut Pahor in predsednik DMFA Slovenije prof. dr. Andrej Likar, letošnje olimpijske majice so jim predali nosilci medalj s preteklih olimpijad Vesna Iršič, Matej Aleksandrov in Venko Mramor. Ob koncu šolskega leta smo vsem tekmovalcem zaželeli prijetne počitnice, olimpijcem pa obilo uspeha in lepih doživetij na mednarodnih tekmovanjih.



Za zlitje matematike in glasbe je poskrbel odlični tolkalist Jože Bogolin s skladbo skladatelja Xenakisa v ritmičnih zlatih reza ob umetniški animaciji LPDJLQH D VHFUHW, ki so jo navdihnile eliptične krivulje. Foto: Vojko Opaškar

Slovenski dijaki na mednarodnih tekmovanjih v letu 2013

2. evropska dekliška matematična olimpijada je potekala od 8. do 14. aprila v Luksemburgu. V slovenski ekipi so sodelovale Maruša Pečovnik (I. gimnazija v Celju), ki je prejela bronasto medaljo, Lara Jerman (Gimnazija in SŠ Rudolfa Maistra Kamnik) in Mihaela Pušnik (I. gimnazija v Celju), ki sta prejeli pohvali, in Klara Nosan (I. gimnazija v Celju). Tekmovalke sta spremljala Matej Aleksandrov in Vesna Iršič.

44. mednarodna fizikalna olimpijada je potekala od 7. do 15. julija v Københavnu na Danskem. Petčlansko slovensko ekipo so sestavljali Michel Adamič (Gimnazija Bežigrad) in Žiga Krajnik (Gimnazija Škofja Loka), ki sta osvojila bronasti medalji, Bine Brank (Gimnazija Bežigrad), ki je osvojil pohvalo, ter Žan Kokalj (II. gimnazija Maribor) in Žiga Nosan (Gimnazija Ledina, Ljubljana). Tekmovalce sta spremljala dr. Jure Bajc in dr. Barbara Rovšek.

54. mednarodna matematična olimpijada je potekala od 18. do 28. julija v mestu Santa Marta v Kolumbiji. Šestčlansko slovensko ekipo so sestavljali Juan Gabriel Kostelec (Gimnazija Bežigrad), Žiga Krajnik (Gimnazija Škofja Loka), Amadej Kristjan Kocbek (II. gimnazija Maribor) in



Katera žival lahko zleze pod vrhvo, ki jo napnemo po Ekvatorju, podaljšamo za 1 m in enakomerno odmaknemo od tal – mravlja, golob ali žirafa? Občinstvo se je od srca nasmejalo ob duhoviti točki matematika dr. Uroša Kuzmana in voditelja Matica Jermana. Foto: Vojko Opaškar

Klara Nosan (I. gimnazija v Celju), ki so vsi osvojili pohvale, ter Rok Havlas (II. gimnazija Maribor) in Mihaela Pušnik (I. gimnazija v Celju). Tekmovalce so spremljali dr. Gregor Dolinar, vodja ekipe in tajnik Svetovalnega telesa pri MMO, pomočnik vodje Matej Aleksandrov in dr. Matjaž Željko, vodja informacijske podpore za MMO.

7. mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike je potekala od 27. julija do 5. avgusta v mestu Volos v Grčiji. Slovenski tekmovalci so se tekmovanja tokrat udeležili prvič in se odlično odrezali. Žan Kokalj (II. gimnazija Maribor) in Krištof Skok (I. gimnazija v Celju) sta osvojila srebrni medalji, Michel Adamič (Gimnazija Bežigrad) in Jernej Černigoj (Sr. šola Venca Pilon Ajdovščina) pa pohvali. Tekmovalce je spremljal Andrej Guštin.

7. srednjeevropska matematična olimpijada je potekala avgusta v mestu Veszprem na Madžarskem. Amadej Kristjan Kocbek (II. gimnazija Maribor) je osvojil srebrno medaljo, Klara Nosan (I. gimnazija v Celju) in Juan Gabriel Kostelec (Gimnazija Bežigrad) bronasti medalji, Juš Kosmač (Gimnazija Jesenice), Žiga Krajnik (Gimnazija Škofja Loka) in Lara Jerman (Gimnazija in SŠ Rudolfa Maistra Kamnik) pa pohvale. Tekmovalce je spremljal Venc Mramor.

Boštjan Kuzman

SKUPNA MEDNARODNA KONFERENCA MATEMATIČNIH DRUŠTEV KATALONIJE, SLOVAŠKE, AVSTRIJE, ČEŠKE IN SLOVENIJE CSASC 2013

Univerza na Primorskem je v Kopru od 9. do 13. junija na mednarodni konferenci CSASC 2013 gostila 150 matematikov iz 21 držav. Konferenco, ki vsaki dve leti poteka v drugi državi, so v zglednem sodelovanju organizirali DMFA Slovenije, UP FAMNIT, UP IAM, UL FMF in IMFM. Znanstveni del konference je potekal v minisimpozijih Diferencialna geometrija in matematična fizika, Teorija grafov, Kombinatorika, Funkcije kompleksnih spremenljivk, Simetrije grafov, zemljevidov in drugih diskretnih struktur, Algebra, Diskretna in računska geometrija, Matematične metode v obdelavi slik, Numerične metode za parcialne diferencialne enačbe, Dokazovanje v matematičnem izobraževanju, znanstveni program pa sta obogatila tudi sestanek projektne skupine EuroGiga in razstava plakatov.



Pod pokroviteljstvom Evropskega matematičnega društva (EMS) je John Erik Fornaess v Kopru predaval o konveksnosti v kompleksni analizi (foto B. Kuzman).

Osnovna ideja konference je bila povezovanje matematikov iz različnih držav in različnih področij. V 10-članskem znanstvenem odboru sta tako sodelovala po dva predstavnika iz vsakega društva. Raznovrstna plenarna predavanja je pripravilo sedem mednarodno uveljavljenih matematikov, med njimi tudi **prof. dr. John Erik Fornaess** (NTNU Trondheim, Norveška), ki je na konferenci predaval na povabilo akad. prof. dr. Franca Forstneriča pod pokroviteljstvom Evropskega matematičnega društva. Drugi plenarni predavatelji so bili **Primož Moravec** (Univerza v Ljubljani), **Ivan Mizera**

(University of Alberta, Kanada), **Marc Noy** (Universitat Politècnica de Catalunya, Španija), **Gerald Teschl** (University of Vienna, Avstrija), **Xavier Tolsa** (Universitat Autònoma de Barcelona, Španija), **Günter Rote** (Freie Universität Berlin, Nemčija). Eden od glavnih pobudnikov srečanja prof. dr. Tomaž Pisanski je ob koncu srečanja menil, da je bila konferenca odlična promocija slovenske matematike in spodbuda mladim slovenskim raziskovalcem, zahvalil pa se je tudi dr. Klavdiji Kutnar in dr. Jasni Prezelj, ki sta odlično opravili levji delež organizatorskega dela, in rektorju Univerze na Primorskem prof. dr. Draganu Marušiču za gostoljubje.

Boštjan Kuzman

V SPOMIN IN POKLON MARIJI MUNDA (1932–2012)

V februarju minulega leta je v starosti 80 let končala svojo uspešno življenje – pot Marija Munda, dolgoletna profesorica na II. gimnaziji v Mariboru.

Težko je z nekaj stavki opisati njeno neizmerno predanost poučevanju matematike. Prav to ji je prineslo sloves profesorice, ki je znala snov sijajno posredovati svojim učencem. Sama je dejala, da dijake uči, da bi: matematiko znali „tako za silo“, da bi jo znali dobro ali pa da bi jo obvladali odlično.

Njenega veselja in povezanosti z matematiko se zelo dobro spominjamo vsi njeni kolegi, še zlasti pa množica učencev, ki so se uspešno uveljavili na različnih področjih znanosti – doma in v tujini.

Nekoč je rekla: „Bilo je veliko dogodkov, veselih in žalostnih. Najlepši pa so zame bili uspehi mojih dijakov na matematičnih tekmovanjih. Takrat sem bila v zraku od sreče.“

Ne nazadnje je bilo dragoceno tudi njeno delovanje v DMFA, še zlasti v mariborski podružnici. Organizirala je republiško tekmovanje iz matematike in fizike, številna predavanja za učence in učitelje ter prijetna srečanja članov mariborske podružnice na občnih zborih društva.

Za njen veliki prispevek k popularizaciji matematike je bila imenovana za častno članico DMFA Slovenije. Na to je bila še posebej ponosna.

Vsi kolegi smo občudovali njeno neizmerno voljo v času, ko se je že spopadala s hudo boleznijo, zaradi katere je morala opustiti poučevanje.

Velik je bil njen prispevek k popularizaciji matematike v Sloveniji in prav zato ostaja v neizbrisnem spominu bivšim sodelavcem, kolegom matematikom in seveda množici njenih učencev.

Majda Šaus

KOLIKO JE ENKRAT MANJ KOT 100?

Matematiki, predvsem učitelji matematike, smo odgovorni tudi za matematično pravilno uporabo števil in računanje z njimi v vsakdanjem, nestrokovnem okolju, saj vse mlade tega učimo dvanajst let (13?), od prvega razreda do mature. Prve informacije o številih dobijo otroci od staršev in učiteljic razrednega pouka – toda tudi te smo naučili računati mi, matematiki. To besedilo pišem zato, ker se v javnosti, ne le v pogovorih, temveč tudi v tisku, pri javnem nastopanju in na TV pogosto slišijo čudne številčne primerjave, pa do sedaj še ni bilo strokovnega odmeva na to. Kako daleč smo že padli zaradi svoje neskrbnosti pa se najbolj vidi v učbenikih, saj se napake pojavljajo tudi tam. Učbenike pišejo – učitelji!

Vsak dan uporabljamo števila pri štetju, pri primerjavah merskih števil in pri osnovnih računskih operacijah. Npr.:

- Janez je visok 170 cm, Tone je (ZA) 5 cm višji: $170 + 5 = 175$,
- Franc pa (ZA) 2 cm nižji: $170 - 2 = 168$.

Razlike, ki jih dobimo pri seštevanju in odštevanju višin, označimo z besedami, npr. višji, nižji, in uporabimo besedice ZA, ŠE ZA, ... itd. Pri večjih razlikah uporabimo večkratnike, npr.:

- Janez ima 100€, Tone ima DVAKRAT TOLIKO (dvakrat več): $2 \times 100\text{€} = 200\text{€}$,
- Franc ima DESETKRAT TOLIKO (desetkrat več): $10 \times 100\text{€} = 1000\text{€}$.

Smiselno je uporabljati „...krat več“, saj lahko podobno uporabimo tudi „...krat manj“:

- Janez ima 100€, Tinka ima DVAKRAT MANJ: $100\text{€} : 2 = 50\text{€}$
- Tonka ima DESETKRAT MANJ: $100\text{€} : 10 = 10\text{€}$

Tokrat smo množili in delili. Trendi javnega spakovanja, ki so vplivnejši od vsakega učitelja, pa terjajo hkrati uporabo obeh načinov: prištevanje večkratnika k začetni vrednosti. Zato govorimo in pišemo:

- Janez ima 100€, Tone ima ŠE ZA ENKRAT TOLIKO ($100\text{€} + 1 \times 100\text{€} = 200\text{€}$); ali pa
- Janez ima 100€, Tone ima ŠE ENKRAT TOLIKO (200€); ali
- Janez ima 100€, Tone ima ZA ENKRAT VEČ (200€); ali kar

- Janez ima 100€, Tone ima ENKRAT VEČ (200€).

Pri tej zadnji, zaradi kratkosti najbolj priljubljeni obliki izražanja bi pa že morali biti zaskrbljeni, saj tako obstajata dve protislovni izjavi:

- 200 je enkrat(?) več od 100
- 200 je dvakrat(?) več od 100.

In če ima Tone 300€, ali je to potem dvakrat ali trikrat več od 100€? Izjave z matematično vsebino vendar ne bi smele biti dvoumne ali celo protislovne! Morda se vam zdijo taka premišljevanja malenkostna in nepotrebna, toda predstavljajte si izjavo predsednika vlade, da bo drugo leto naš dolg že dvakrat večji! Če smo letos dolžni 10 milijard €, koliko bo to drugo leto: 30 milijard € ali „samo“ 20 milijard €? To pa ni več malenkost, politik bi lahko celo izkoriščal jezikovno nejasnost za zavažanje javnosti! Ali pa razlaga Stefanovega zakona v učbeniku naravoslovja(!): če se temperatura poveča ZA dvakrat, se energija poveča ZA šestnajstkrat – torej $(1 + 2)^4 = 1 + 16$?

„Pravilo“ o prištevanju k začetni vrednosti pa ni univerzalno in največkrat obstane pri „enkratniku“; nisem še bral ali slišal, da ima npr. Franc (1000) devetkrat več kot Janez (100). Faktor večkratnosti je največkrat (pa ne vedno!) samo 1 in nima naslednika, zato bi morda problem lahko rešili že z opozorilom, da pogovorni ENKRAT VEČ pomeni isto kot DVAKRAT VEČ, čeprav se to sliši nekoliko neumno. Žal pa se enkratovanje uspešno uporablja tudi pri manjšanju: Tinka (50) ima pogovorno „ENKRAT MANJ“ kot Janez ($50 = 100 - 1 \times 50$). Enak način razmišljanja se čuti tudi pri presenetljivi izjavi, da so letos neki prihodki (40) bili manjši (od lanskih 100) za 150 % ($40 = 100 - 40 \times 1,5$) – toda računanje z odstotki itak spada že skoraj v višjo matematiko!

Vprašanje članom DMFA: ali se ne bi mogli matematiki skupaj s slaviisti dogovoriti in poskrbeti za nedvoumno govorico osnovnih matematičnih informacij, ki bi jo potem poskušali sistematično prenesti na šolarje in s tem tudi na kasnejše odrasle Slovence? Seveda najprej na učitelje (tudi pisce učbenikov) in na študente – bodoče učitelje! To pa bi terjalo predvsem sodelovanje fakultetnih učiteljev, brez njih ni upanja na uspeh!

Peter Prelog

VESTI

STROKOVNA EKSURZIJA V GRADEC/GRAZ

DMFA ter Društvo univerzitetnih profesorjev organizirata v soboto, 19. oktobra 2013 strokovno ekskurzijo v GRADEC/GRAZ.

PROGRAM: Ogled muzejske zbirke eksperimentov, ki jih je pripravil Ludwig Boltzmann. Srečanje z nekaterimi graškimi fiziki. Muzeji v gradu Eggenberg. Če seanimate, pišite na naslov Mitja.Rosina@ijs.si.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 2013

Letnik 60, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA	
Članki	Strani
Konfiguracijski prostori in topološka kompleksnost (Aleksandra Franc)	81–91
Stereosnemanje: principi dvoušesne zaznave zvoka (Daniel Svenšek)	92–101
Šola	
O metu krogle in metu kladiva (Janez Strnad)	102–109
Nove knjige	
Timothy Gowers, Matematika, Zelo kratek uvod (Jurij Kovič)	110–112
Ulf Leonhardt, Thomas Philbin, Geometry and light – The Science of Invisibility (Marko Razpet)	112–113
Vesti	
Bistroumi 2013 – srečanje najuspešnejših mladih matematikov, fizikov in astronomov (Boštjan Kuzman)	114–117
Skupna mednarodna konferenca matematičnih društev Katalonije, Slovaške, Avstrije, Češke in Slovenije CSASC 2013 (Boštjan Kuzman)	118–119
V spomin in poklon Mariji Munda (1932–2012) (Majda Šaus)	119
Strokovna ekskurzija v Gradec/Graz	XI
Pisma bralcev	
Koliko je enkrat manj kot 100? (Peter Prelog)	120–XI

CONTENTS	
Articles	Pages
Configuration spaces and topological complexity (Aleksandra Franc) ..	81–91
Stereo Recording: Principles of Binaural Perception of Sound (Daniel Svenšek)	92–101
School	102–109
New books	110–113
News	114–118
Letters	120–XI

Na naslovnici: Letošnje olimpijce sta na odru sprejela predsednik države Borut Pahor in predsednik DMFA Slovenije dr. Andrej Likar, olimpijske majice pa so jim predali trije nosilci medalj s preteklih olimpijad Vesna Iršič, Matej Aleksandrov in Veni Mramor.