Primerjava metod lastnih vektorjev, LLSM in DEA za računanje vektorja uteži v modelih AHP

Petra Grošelj, Lidija Zadnik Stirn
Univerza v Ljubljani, Biotehniška fakulteta
petra.groselj@bf.uni-lj.si, lidija.zadnik@bf.uni-lj.si

Povzetek

Analitični hierarhični proces (AHP) je metoda, ki se uporablja za vrednotenje odločitev oz. določanje vektorja uteži posameznih odločitev v večkriterijskem problemu, ko imamo posamezne kriterije ovrednotene s parnimi primerjavami. Ko je Saaty razvil hierarhični večkriterijski model AHP, je za izračun vektorja uteži predlagal metodo lastnih vektorjev. Ker pa je izračun vektorja uteži pomemben problem v AHP, saj ima ta vektor pri vrednotenju posameznih odločitev bistveno vlogo, so različni avtorji predlagali še druge metode. V tem prispevku predstavljamo poleg metode lastnih vektorjev še logaritmično metodo najmanjših kvadratov (Logarithmic Least Squares Method – LLSM) in metodo podatkovne ovojnice (Data Envelopment Analysis – DEA), ki je bila za izračun vektorja uteži prvič predlagana šele pred kratkim. Rezultate vseh treh metod primerjamo na konkretnem računskem primeru in podamo razlike v rezultatih glede na posamezne metode.

Ključne besede: večkriterijsko odločanje, analitični hierarhični proces (AHP), metoda lastnih vektorjev, logaritmična metoda najmanjših kvadratov (LLSM), metoda podatkovne ovojnice (DEA).

Abstract

COMPARISON OF EIGENVECTOR, LLSM AND DEA METHODS FOR CALCULATION OF A PRIORITY VECTOR IN AHP MODELS

Analytic Hierarchy Process (AHP) is a method for solving a multiple criteria decision model in which the criteria are compared pair-wise with respect to their importance. AHP has been developed by Saaty who suggested an eigenvector method for deriving a priority vector from a pairwise comparison matrix. How to gain a priority vector, has been an important research topic in the AHP problems and quite a number of alternative approaches have been suggested. The eigenvector method, the logarithmic least squares method (LLSM) and data envelopment analysis (DEA) method, which has been recently developed, are discussed in the paper. All three methods are compared within a numerical example and the differences in results when using a particular method are discussed.

Key words: multiple criteria decision-making (MCDM), analytic hierarchy process (AHP), eigenvector method, logarithmic least squares method (LLSM), data envelopment analysis (DEA).

1 UVOD

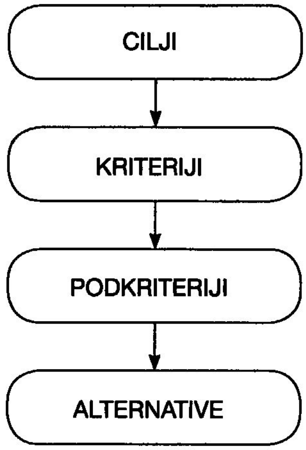
Problemi odločanja, pri katerih se srečujemo z več kriteriji, se v današnjem svetu pojavljajo na vseh področjih. V tovrstnih problemih je treba posebno pozornost posvetiti usklajevanju različnih interesov, saj so interesi skupin, tako primarnih kot sekundarnih, številni, se prekrivajo ali pa so si nasprotujoči. Prav zaradi te kompleksnosti so problemi odločanja po več kriterijih izredno zahtevni in kot podpora pri vrednotenju in sprejemanju tovrstnih odločitev služijo modeli, ki temeljijo na metodah večkriterijskega odločanja [18].

Glede na zelo aktualno in hkrati kompleksno problematiko je raziskovanje večkriterijskega odločanja (teorija) in prenos raziskovalnih rezultatov v prakso v svetu in v Sloveniji velik strokovni izziv in je deležno vse večje pozornosti. Kot lahko vidimo v obsežni literaturi s tega področja (npr. [3] in [19]), je bilo v zadnjem času razvitih zelo veliko različnih modelov. Analitični hierarhični proces (AHP, angl. Analytic Hierarchy Process) je model oziroma metoda [14], ki predstavlja eno od možnosti za reševanje večkriterijskih problemov in v tem prispevku smo osredinjeni le na to metodo. Tako najprej predstavimo osnove metode AHP, nato obravnavamo problem računanja vektorja uteži v metodi AHP. Ker za računanje vektorja uteži v AHP obstoji več metod, naredimo kratek pregled metod, ki jih najdemo v literaturi, in podrobneje predstavimo tri: metodo lastnih vektorjev (angl. eigenvector method), logaritmično metodo najmanjših kvadratov (LLSM, angl. Logarithmic Least Squares Method) in metodo podatkovne ovojnice

(DEA, angl. Data Envelopment Analysis). Pri metodi DEA najprej predstavimo splošni model DEA in nato njegovo prilagoditev za izračun vektorja uteži v metodi AHP. Vse tri metode nato primerjamo na konkretnem računskem primeru. V sklepu na podlagi izračunov v prejšnjem poglavju povzamemo, pri katerih pogojih glede na indeks konsistentnosti matrike parnih primerjav da posamezna metoda boljše rezultate, in nakažemo nekaj smeri nadaljnjih raziskav metod za računanje uteži kriterijev v večkriterijskih problemih odločanja, ki jih rešujemo z metodo AHP.

2 METODA AHP

Metodo AHP je razvil Saaty [14] in je namenjena reševanju diskretnih večkriterijskih problemov. V zadnjih dvajsetih letih so jo uporabljali za reševanje problemov na različnih področjih: ekonomskem, ekološkem, socialnem, izobraževalnem, političnem, pri upravljanju z naravnimi viri itn. Metoda AHP nam pomaga pri odločitvi, katera izmed možnih alternativ je najboljša glede na naš cilj, dane kriterije in podkriterije. Skladno s teorijo AHP večkriterijske probleme najprej predstavimo v obliki hierarhičnega modela (slika 1).



Slika 1: **Hierarhična struktura v metodi AHP**

Osnova metode AHP so parne primerjave dveh objektov (kriterijev) na istem nivoju glede na element, s katerim sta povezana na naslednjem višjem nivoju. Za primerjave uporabljamo lestvico od 1 do 9 (tabela 1), ki jo je sestavil Saaty [13]. Če damo kriteriju i, ko ga primerjamo s kriterijem j, oceno a_{ij}, damo potem kriteriju j, ko ga primerjamo s kriterijem i za oceno recipročno vrednost, to je $\frac{1}{a_{ij}}$.Primerjave med pari kriterijev (objektov) zapišemo v matriko parnih primerjav, ki jo označimo z A, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{ij}} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Tabela 1: **Lestvica parnih primerjav**

Intenziteta pomembnosti	Definicija	Razlaga
1	Enaka pomembnost	Kriterija i in j sta enako pomembna.
2	Šibka razlika pomembnosti	
3	Opazna razlika pomembnosti	Kriterij i je nekoliko pomembnejši od j.
4	Srednja razlika pomembnosti	
5	Velika razlika pomembnosti	Kriterij i je precej pomembnejši od j.
6	Zelo velika razlika pomembnosti	
7	Močna razlika pomembnosti	Kriterij i je močno pomembnejši od j.
8	Zelo močna razlika pomembnosti	
9	Ekstremna razlika pomembnosti	Kriterij i je ekstremno pomembnejši od j.

Če so naše ocene konsistentne, to je $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$, za $i, j, k=1,\dots,n$, lahko matriko A zapišemo kot,

$$\text{kot } A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix},$$

kjer je posamezna ocena a_{ij} enaka razmerju uteži w_i in w_j primerjanih kriterijev i in j. V tem primeru dobimo vektor uteži $w = (w_1,\dots, w_n)$ kot rešitev homogenega sistema linearnih enačb

$$Aw = nw. \tag{1}$$

Ker je n največja lastna vrednost matrike A [13], je w njen glavni lastni vektor, ki je določen do multiplikativne konstante natančno.

Vendar matrike parnih primerjav običajno niso konsistentne. Tedaj velja $\lambda_{max} \geq n$, z enačajem natanko tedaj, ko je A konsistentna matrika [13]. Da bi ugotovili stopnjo nekonsistentnosti, izračunamo indeks konsistentnosti:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1} \tag{2}$$

matrike A, ga primerjamo z random indeksom RI, ki predstavlja povprečni indeks konsistentnosti in je zapisan v [13], in dobimo kvocient konsistentnosti CR:

$$CR = \frac{CI}{RI}, \tag{3}$$

ki ga imenujemo tudi indeks nekonsistentnosti. Saaty v [13] trdi, da, če je $CR \leq 0{,}1$, je stopnja nekonsistentnosti matrike A še sprejemljiva.

3 METODE ZA IZRAČUN VEKTORJA UTEŽI

Eno od pomembnih vprašanj pri uporabi metode AHP je, kako iz še sprejemljive nekonsistentne matrike parnih primerjav dobiti vektor uteži [17]. Ko je Saaty razvil metodo AHP, je predlagal metodo lastnih vektorjev [13], ki je hkrati tudi najbolj poznana in uporabljana metoda. Crawford in Williams sta predlagala logaritmično metodo najmanjših kvadratov (LLSM) [8]. Drugi avtorji pa so predlagali uteženo metodo najmanjših kvadratov (WLSM) [6], geometrično metodo najmanjših kvadratov (GLSM) [10], metodo mehkega (fuzzy) programiranja (FPP) [11] idr.

V literaturi najdemo več primerjav teh metod. Vsak avtor je določil svoje kriterije, glede na katere je primerjal izbrane metode. Saaty in Hu [15] sta primerjala metodo lastnih vektorjev in LLSM in zaključila, da je metoda lastnih vektorjev boljša. Barzilai [2] je prav tako primerjal metodo lastnih vektorjev in LLSM in zaključil, da je boljša LLSM. Ishizaka in Lusti [9] sta s pomočjo simulacije Monte Carlo primerjala več metod, med njimi tudi metodo lastnih vektorjev in LLSM in zaključila, da nobena metoda v vseh pogledih ne prekaša drugih. Bajwa in sod. [1] so primerjali sedem različnih metod in zaključili, da je najboljša LLSM. Naštete raziskave nam kažejo, da ni enotno sprejete najboljše metode in da verjetno ne obstaja metoda, ki bi bila najboljša oz. optimalna v vseh pogledih.

Ramanathan [12] je razvil metodo DEAHP, ki temelji na metodi DEA (Data Envelopment Analysis), vendar sta Wang in Chin [17] na računskih primerih pokazala, da ima pomankljivosti. Nedavno sta tako Wang in Chin [17] razvila novo metodo DEA za izračun vektorja uteži v metodi AHP, ki odpravlja pomankljivosti prejšnje metode. Ta metoda v literaturi še ni bila primerjana z drugimi in prav to primerjavo predstavljamo v prispevku kot novost na tem področju.

V prispevku bomo torej predstavili klasično Saatyjevo metodo lastnih vektorjev [13], [14], metodo LLSM [8] in novo metodo DEA [17] in jih primerjali na računskem primeru.

3.1 Metoda lastnih vektorjev

Za konsistentno matriko A velja: $A^k = n^{k-1}A$. V normalizirani obliki imata obe matriki A in A^k isti glavni lastni vektor. Če matrika ni konsistentna, to ne drži. V nekonsistentnem primeru normalizirane vsote vrstic vseh potenc matrike A prispevajo h končnemu lastnemu vektorju. Če uporabimo Cezarove vsote in Perron-Frobeniusov izrek, dobimo vektor uteži kot glavni lastni vektor [13].

Izrek [13]: Za primitivno matriko A velja: $\lim_{k\to\infty} \frac{A^k e}{e^T A e} = cw$, kjer je c konstanta, w glavni lastni vektor, ki pripada $\lambda_{max} \equiv \lambda_1$, in $e = (1,1,\dots,1)^T$.

Računsko dobimo vektor uteži tako, da matriko parnih primerjav A potenciramo, izračunamo vsote po vrsticah in jih normaliziramo [14]. Hitro konvergenco si zagotovimo tako, da matrike zaporedoma kvadriramo $A \to A^2 \to (A^2)^2 \to \dots$. Ko je razlika med temi vsotami v dveh zaporednih izračunih potenc manjša od predpisane vrednosti, končamo. To je metoda, ki jo uporablja tudi računalniški program SuperDecisions [16], ki smo ga uporabili pri naših izračunih.

3.2 Logaritmična metoda najmanjših kvadratov (LLSM)

Pri metodi LLSM rešujemo naslednji optimizacijski problem:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} {}^{*}(\ln a_{ij} - (\ln w_i - \ln w_j))^2 \tag{4}$$

Crawford in Williams [8] sta pokazala, da je rešitev tega problema geometrijska sredina vrstic matrike A, ki jih zatem še normaliziramo:

$$w_i = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}},\ i = 1,\dots,n. \tag{5}$$

3.3 Metoda DEA

DEA, analiza ovojnice podatkov, je metoda za merjenje relativne učinkovitosti odločitvenih enot (DMU, angl. Decision Making Units), ki jih težko primerjamo zaradi več vhodov in izhodov. Temelji na linearnem programiranju, njeni začetniki pa so Charnes, Cooper in Rhodes [5], ki so razvili CCR model [7], ki ga tu v nadaljevanju tudi predstavljamo.

Naj bo E množica n odločitvenih enot $E = \{DMU_1, DMU_2,\dots,DMU_n\}$. Vsaka enota potrebuje m vhodov $x_1,\dots,x_m$, da proizvede s izhodov $y_1,\dots,y_s$. Vrednosti vhodov in izhodov so nenegativne in vsaj en vhod in en izhod imata pozitivno vrednost.

Učinkovitost $h_0(\mathbf{u},\mathbf{v})$ odločitvene enote DMU_0 definiramo kot količnik vsote uteženih izhodov in vsote uteženih vhodov (6):

$$h_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_r x_{i0}}, \tag{6}$$

kjer je x_{i0} i-ti vhod odločitvene enote DMU_0, y_{r0} r-ti izhod odločitvene enote DMU_0, v_i utež, ki določa pomembnost vhoda i in u_r utež, ki določa pomembnost izhoda r.

Učinkovitost odločitvene enote DMU_0 dobimo z rešitvijo naslednjega problema:
max učinkovitost odločitvene enote DMU_0,
glede na to, da je učinkovitost vseh odločitvenih enot ≤ 1, kar matematično zapišemo kot (7):

$$\max h_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_r x_{i0}},$$

$$\text{glede na } \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}} \text{ za vsak } j=1,\dots,n, \tag{7}$$

$$u_r \geq 0 \text{ za } r=1,\dots,n; \text{ in za } i=1,\dots,n.$$

Model (7), ki je zapisan v obliki kvocienta, ima neskončno rešitev. Če je $(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*)$ optimalen vektor uteži, je tudi vektor $(\alpha\mathbf{u}^*,\alpha\mathbf{v}^*)$ optimalen za vsak $\alpha>0$. Charnes in Cooper [4] sta razvila transformacijo, ki za ulomljeni linearni program izbere reprezentativno rešitev, to je rešitev, za katero velja $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1$, in nam problem pretvori v ekvivalenten problem linearnega programiranja. Pri tem je sprememba spremenljivk iz $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ v $(\boldsymbol{\mu},\mathbf{v})$ posledica Charnes-Cooperjeve transformacije. Dobljeni problem linearnega programiranja pa je potem sledeč (8):

$$\max w_0 = \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{r0},$$

$$\text{glede na } \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{r0} - \sum_{i=1}^{s} v_i x_{ij} \leq 0 \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0} = 1,\quad \mu_r \geq 0 \quad \text{za } r=1,\dots,n \quad \text{in} \quad v_i \geq 0 \text{ za } \quad i=1,\dots,n.$$

V nadaljevanju pa model DEA (8) transformiramo v model DEA, ki bo uporaben za reševanje našega problema, to je problema računanja vektorja uteži v metodi AHP.

Naj bo dana matrika parnih primerjav

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

kjer je $a_{ii} = 1$ za vsak $i=1,\dots,n$ in $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ za $j \neq i$. Vsaka vrstica matrike A, to je kriterij ali alternativa, naj bo odločitvena enota DMU. Vsak stolpec A naj bo izhod, vhod pa naj bo konstanten z vrednostjo 1 za vse DMU. Vsaka odločitvena enota DMU ima torej n izhodov in en konstantni vhod. Na osnovi teh predpostavk zapišemo naslednji CCR model (9), ki ga je predlagal Ramanathan [12]:

$$\begin{aligned} \max \quad & w_0 = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} v_j, \\ \text{glede na } & u_1 = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j - u1 \leq 0, \text{ i=1,...,n} \\ & u_1, v_j \geq 0, \text{ j =1,...,n,} \end{aligned} \tag{9}$$

kjer indeks 0 predstavlja odločitveno enoto DMU_0, katere učinkovitost ocenjujemo.

Kot smo že omenili, model (9) ni najboljši, zato sta ga Wang in Chin [17] izboljšala tako, da sta v ciljni funkciji namesto vrednosti alternative oziroma kriterija (vrstice v matriki A) raje maksimirala njeno relativno vrednost. Poleg tega sta upoštevala še omejitev, ki je znana iz Saatyjeve metode lastnih vektorjev [13], to je $s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \geq n_{vi}$ za vsak i=1,...,n, kjer enakost velja le za konsistentne matrike parnih primerjav. Tako se oblikuje naslednji model (10):

$$\begin{aligned} \max \quad & w_0 = \frac{s_0}{\sum_{k=1}^{n} s_k}, \\ \text{glede na: } & s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \leq 1, \text{ i=1,...,n} \\ & 0 \leq v_i \leq \frac{s_i}{n}, \text{ i = 1,...,n,} \end{aligned} \tag{10}$$

kjer indeks $_0$ predstavlja odločitveno enoto DMU_0, katere učinkovitost ocenjujemo, $v_1,...,v_n$ pa so spremenljivke, ki predstavljajo uteži.

Če vpeljemo oznake $t = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} s_j}$ in $x_j = tv_j, j=1,...,n,$

lahkomodel (10) poenostavimo in dobimo model (11):

$$\begin{aligned} & \max w_0 = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j, \\ & \text{glede na: } \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) x_j = 1, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq n x_i, \; i=1,...,n, \quad x_j \geq 0, j=1,...,n. \end{aligned} \tag{11}$$

Z rešitvijo linearnega programa (11) za vsak w_i, $i=1,...,n$, dobimo utež za vsako od n alternativ oziroma kriterijev.

Wang in Chin [17] sta dokazala, da z modelom (11) dobimo prave uteži za vsako konsistentno matriko parnih primerjav.

Ena od prednosti modela (11) pred Saatyjevo metodo lastnih vektorjev je, da je model (11) podan z linearnimi programi, ki so veliko enostavnejši za reševanje kot metoda lastnih vektorjev, ki je po naravi nelinearna.

Primerjavo vseh treh metod prikažimo na naslednjem računskem primeru.

4 PRIMER

Obravnavajmo ekološko-podnebni problem odločanja, kjer nas zanima razvrstitev ekoloških kriterijev po pomembnosti. Predpostavimo, da je za ta problem pomembnih naslednjih pet ekoloških kriterijev (našteti so po abecedi): biološka raznovrstnost (b), kakovost vode (v), nevarnost poplav (p), nevarnost zemeljske erozije (e) in svež zrak (z). Pri določanju parnih primerjav kriterijev smo v praksi naleteli na problem usklajevanja različnih interesov odločevalcev oziroma ekspertov. Na podlagi individualnih preferenc za posamezne kriterije posameznih odločevalcev smo morali dobiti usklajene preference za vse odločevalce skupaj. Za rešitev tega problema smo si pomagali s tehnikami, kot so nevihta možganov (angl. brainstorming), možgansko zapisovanje (angl. brainwriting), delfi idr. [20]. Na podlagi več ekspertnih mnenj smo po usklajevanju za naš ekološko-podnebni problem zapisali naslednjo matriko parnih primerjav posameznih kriterijev:

$$A = \begin{array}{c} \\ b \\ v \\ p \\ e \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b & v & p & e & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 8 & 1 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{6} & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Na osnovi matrike (12) vektor uteži najprej izračunamo s pomočjo Saatyjeve metode lastnih vektorjev, ki je podana v poglavju 3.1. Uporabimo program SuperDecisions [16] in dobimo naslednji rezultat (tabela 2):

Tabela 2: **Vektor uteži, dobljen s Saatyjevo metodo lastnih vektorjev s programom SuperDecisions**

The inconsistency index is 0,0631. It is desirable to have a value of less than 0,1	
Biološka raznovrstnost	0,248007
Kvaliteta vode	0,329409
Nevarnost poplav	0,070467
Nevarnost zemeljske erozije	0,302731
Svež zrak	0,049387

Rezultati kažejo, da je najpomembnejši ekološki kriterij kakovost vode, kar vidimo tudi iz matrike parnih primerjav, saj je ocenjen kot pomembnejši ali enako pomemben v parni primerjavi z vsemi ostalimi kriteriji. Drugi kriterij po pomembnosti je nevarnost zemeljske erozije, ki ima enake ocene kot kriterij kakovost vode, le v parni primerjavi z nevarnostjo poplav ima nižjo oceno kot kakovost vode. Tretji kriterij je biološka raznovrstnost, ki je ravno tako ocenjena kot pomembnejša ali enako pomembna v parni primerjavi z vsemi ostalimi kriteriji, vendar so ocene nižje kot pri kriterijih kakovost vode in nevarnost zemeljske erozije. Sledita še kriterija nevarnost poplav in svež zrak, ki pa imata precej nižje izračunane uteži.

Indeks nekonsistentnosti je 0,0631, kar je manj kot 0,1. Tako je po Saatyu [13] matrika parnih primerjav A (12) še sprejemljiva glede na konsistentnost ocen ekspertov.

V nadaljevanju izračunamo še uteži za matriko AHP parnih primerjav A (12) po metodi LLSM (5) in dobimo rezultate, ki so v tabeli 3.

Tabela 3: **Vektor uteži, dobljen z metodo LLSM**

Ekološki dejavnik	**Vektor uteži**
Biološka raznovrstnost	0,248664
Kakovost vode	0,328114
Nevarnost poplav	0,065848
Nevarnost zemeljske erozije	0,309768
Svež zrak	0,047607

Nato uporabimo še novo metodo DEA, kot je zapisana z modelom (11). Sestavimo naslednjih pet linearnih programov, pri katerih so omejitve enake, razlikujejo pa se v ciljni funkciji.
Omejitve so naslednje:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{43}{12}x_1 & + & \frac{79}{24}x_2 & + & \frac{58}{3}x_3 & + & \frac{10}{3}x_4 & + & 19x_5 & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \geq & 5x_1 \\
x_1 & + & x_2 & + & 8x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & \geq & 5x_2 \\
\frac{1}{4}x_1 & + & \frac{1}{8}x_2 & + & x_3 & + & \frac{1}{6}x_4 & + & 3x_5 & \geq & 5x_3 \\
x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & \geq & 5x_4 \\
\frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{6}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & + & \frac{1}{6}x_4 & + & x_5 & \geq & 5x_5
\end{array}$$

Ciljne funkcije za vsakega od petih linearnih programov pa so naslednje:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\max & w_1 & = & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 \\
\max & w_2 & = & x_1 & + & x_2 & + & 8x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 \\
\max & w_3 & = & \frac{1}{4}x_1 & + & \frac{1}{8}x_2 & + & x_3 & + & \frac{1}{6}x_4 & + & 3x_5 \\
\max & w_4 & = & x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 \\
\max & w_5 & = & \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{6}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & + & \frac{1}{6}x_4 & + & x_5
\end{array}$$

Linearne programe nato rešimo s programom Excel in dobimo vektor uteži, ki je zapisan v tabeli 4.

Tabela 4: **Vektor uteži in normaliziran vektor uteži za ekološke dejavnike, dobljena z metodo DEA**

Ekološki dejavnik	Vektor uteži	Normaliziran vektor uteži
Biološka raznovrstnost	0,252679	0,249687
Kakovost vode	0,331676	0,327748
Nevarnost poplav	0,072428	0,071570
Nevarnost zemeljske erozije	0,303754	0,300157
Svež zrak	0,051448	0,050838

Ker vsota uteži v vektorju uteži ni enaka 1, je ta v zadnjem stolpcu normalizirana (vsaka komponenta je deljena z vsoto vseh komponent). Če primerjamo vse tri vektorje uteži, vidimo, da so rezultati zelo podobni. Obstojijo pa vendar majhne razlike.

Običajno so tako majhne razlike nepomembne, lahko pa igrajo ključno vlogo, kar obravnavamo na primeru v nadaljevanju.

Predpostavimo, da so strokovnjaki v parni primerjavi kriterijev ocenili, da je biološka raznovrstnost dvakrat bolj pomemben kriterij kot kakovost vode. V prejšnjem primeru (matrika (12)) so ju eksperti ocenili kot enako pomembna kriterija. Ostale ocene ostanejo enake kot v prejšnjem primeru (matrika (12)). Ob tej domnevi dobimo naslednjo matriko parnih primerjav.

$$A = \begin{array}{c} \\ b \\ v \\ p \\ e \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b & v & p & e & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 8 & 1 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{6} & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (13)$$

Za izračun vektorja uteži najprej uporabimo Saatyjevo metodo lastnih vektorjev, program SuperDecisions [16] in dobimo naslednji rezultat (tabela 5).

Tabela 5: **Vektor uteži, dobljen s Saatyjevo metodo lastnih vektorjev s programom SuperDecisions**

The inconsistency index is 0,0954. It is desirable to have a value of less than 0,1	
Biološka raznovrstnost	0,294778
Kvaliteta vode	0,292340
Nevarnost poplav	0,069502
Nevarnost zemeljske erozije	0,293884
Svež zrak	0,049496

Najprej opazimo, da se je indeks nekonsistentnosti zvišal na 0,0954, kar je precej bliže kritični vrednosti 0.1, vendar je ne presega. Torej so v tem primeru ocene bolj nekonsistentne kot v prejšnjem.

Rezultati nam tudi kažejo, da sta uteži za kriterija nevarnost poplav in svež zrak ostali približno enaki, uteži za ostale tri kriterije pa so se zelo izenačile.

Nato vektor uteži izračunamo še z metodo LLSM (5) in metodo DEA, model (11), in dobimo naslednje rezultate (tabela 6).

Tabela 6: **Normalizirani vektorji uteži, dobljeni z metodo lastnih vektorjev, metodama LLSM in DEA za podatke (13)**

Ekološki dejavnik	Metoda lastnih vektorjev	Vrstni red kriterijev	Metoda LLSM	Vrstni red kriterijev	Metoda DEA	Vrstni red kriterijev
Biološka raznovrstnost	0,294778	1	0,287219	2–3	0,296108	1
Kakovost vode	0,292340	3	0,287219	2–3	0,291702	2
Nevarnost poplav	0,069502	4	0,066212	4	0,070582	4
Nevarnost zemeljske erozije	0,293885	2	0,311481	1	0,290426	3
Svež zrak	0,049496	5	0,04787	5	0,051182	5

Če v tabeli 6 primerjamo vektorje uteži za vse tri metode, opazimo, da so uteži za posamezne kriterije med seboj še vedno precej podobne, različni pa so vrstni redi treh najpomembnejših kriterijev: biološke raznovrstnosti, kakovosti vode in nevarnosti zemeljske erozije, kar pa seveda pomeni bistveno razliko v rezultatih. Kateri kriterij je torej v tem primeru najpomembnejši in bi moral imeti višjo utež? Če pogledamo v matriko parnih primerjav (13), vidimo, da so eksperti pri primerjavi teh treh kriterijev dali višjo oceno biološki raznovrstnosti v primerjavi s kakovostjo vode, medtem ko so ocenili biološko raznovrstnost in nevarnost zemeljske erozije kot enakovredna kriterija. Prav tako so ocenili kot enakovredna kriterija kakovost vode in nevarnost zemeljske erozije. Torej je bolj logično, da ima kriterij biološka raznovrstnost najvišjo utež, kar je rezultat, ki smo ga dobili z metodo lastnih vektorjev in z metodo DEA. Ti dve metodi dasta tudi številsko podobnejše uteži kot metoda LLSM, čeprav v našem primeru dobimo različni vrstni red naslednjih dveh kriterijev: kakovosti vode in nevarnosti zemeljske erozije. Tu pa je iz matrike parnih primerjav že teže logično sklepati, kateri kriterij bi moral dobiti višjo utež. Vse omenjene težave izvirajo iz dejstva, da ocene strokovnjakov niso konsistentne.

5 SKLEP

Ugotavljamo, da je predstavljena metoda DEA zanimiva za izračun vektorja preferenc, zlasti ker je rešljiva z metodo linearnega programiranja, kar ji po enostavnosti daje prednost pred metodo lastnih vektorjev. Na primeru smo pokazali, da dajo vse tri metode isti vrstni red kriterijev oz. alternativ v večnivojskem modelu AHP, kadar je indeks nekonsistentnosti nizek. Tudi vrednosti komponent vektorja uteži so zelo podobne. Če pa je indeks nekonsistentnosti večji – čeprav še vedno sprejemljiv –, se lahko zgodi, da kljub skoraj enakim vrednostim komponent vektorja uteži pri vseh metodah, dobimo različne vrstne rede kriterijev oz. posledično alternativ v modelu AHP. V takem primeru se izkaže, da so si bolj podobne uteži pri metodi lastnih vektorjev in metoda DEA, se pa malo bolj razlikujejo od uteži, dobljenih po metodi LLSM, ki je zelo preprosta za izračun. To pomeni, da je v nadaljnjih raziskavah treba bolj podrobno primerjati metode in ugotoviti, kdaj je uporaba vseh treh enakovredna in v katerih posebnih primerih je primernejša katera od metod, ker da zanesljivejše rezultate. Prav tako bo treba tudi ugotoviti, kako razlike v vrednostih uteži vplivajo na model AHP, ki ima več nivojev, pri katerih se uteži na različnih nivojih med seboj množijo.

6 VIRI IN LITERATURA

[1] BAJWA, G. CHOO, E. U., WEDLEY, W. C.: Effectiveness Analysis of Deriving Priority Vectors from Reciprocal Pairwise Comparison Matrices, Proceedings of the 9th International Symposium on the Analytic Hierarchy Proces for Multi-criteria Decision Making 2007, Online Proceedings.

[2] BARZILAI, J.: Deriving weights from pairwise comparison matrices, Journal of the Operational Research Society 48, 1997, 1226–1232.

[3] BOUYSSOU, D., MARCHANT, T., PIRLOT, M., TSOUKIAS, A., VINCKE, P.: Evaluation and Decision Models with Multiple Criteria. Springer, 2006.

[4] CHARNES A., COOPER W.W.: Programming with linear fractional functionals, Naval Research Logistic Quaterly 92, 1962, 181–185.

[5] CHARNES A., COOPER W.W., RHODES E.: Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research 2, 1978, 429–444.

[6] CHU A.T.W., KALABA R.E., SPINGARN K.: A comparison of two methods for determining the weights belonging to fuzzy sets, Journal of Optimization Theory and Applications 27 (4), 1979, 531–538.

[7] COOPER W.W., SEIFORD L.M., J. ZHU: Handbook on Data Envelopment Analysis, Kluwer Academic Publisher, Boston, 2004, Chapter 1, 1–39.

[8] CRAWFORD G., WILLIAMS C.: A note on the analysis of subjective judgement matrices, Journal of Mathematical Psychology 29, 1985, 387–405.

[9] ISHIZAKA, A., LUSTI, M.: How to derive priorities in AHP: a comparative study, Central European Journal of Operations Research 14, 2006, 387–400.

[10] ISLEI G., LOCKETT A.G.: Judgemental modelling based on geometric least square, European Journal of Operational Research 36, 1988, 27–35.

[11] MIKHAILOV L.: A fuzzy programming method for deriving priorities in the analytic hierarchy process, Journal of the Operational Research Society 51, 2000, 341–349.

[12] RAMANATHAN R.: Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process, Computers and Operations Research 33, 2006, 1289–1307.

[13] SAATY, T. L.: Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process, RWS Publications, Pittsburgh, PA, USA, 2006.

[14] SAATY, T. L.: Theory and applications of the analytic network process. RWS Publications, Pittsburgh, PA, USA, 2005.

[15] SAATY, T. L., HU, G.: Ranking by Eigenvector Versus Other Methods in the Analytic Hierarchy Process, Applied Mathematics Letters 11, 1998, 121–125.

[16] SUPERDECISIONS: http://www.superdecisions.com.

[17] WANG Y.M., CHIN K.S.: A new data envelopment analysis method for priority determination and group decision making in the analytic hierarchy process, European Journal of Operational Research 195, 2009, 239–250.

[18] ZADNIK STIRN, L.: Izbira optimalne odločitve z uporabo večkriterialnega programiranja in mehke logike. Uporab. inform. (Ljubl.), 2006, letn. 14, št. 3, str. 123–128.

[19] ZADNIK STIRN, L.: Evaluation of environmental investment projects using a hybrid method. V: proceedings of the 11th Int. Conference of Operational Research, KOI, Pula, Croatia, V. Boljunčič et al. (eds.), Croational Operational Research Society, Zagreb, Croatia, 2008, pp. 245–255.

[20] Zadnik Stirn, L.: Compromise programming for solving economic and environmental problems. V: Ways for improving woodworking industry for transitional economics, Tratnik, M. et al. (eds.); Biotechnical Faculty, Ljubljana, 2001, str. 157–162.

■

Petra Grošelj je diplomirala in magistrirala na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Zaposlena je kot asistentka na Biotehniški fakulteti Univerze v Ljubljani. Njeno področje raziskovanja so operacijske raziskave, predvsem analitični hierarhični procesi, in teorija iger.

■

Lidija Zadnik Stirn je redna profesorica za področje operacijskih raziskav na Univerzi v Ljubljani. Na Biotehniški fakulteti poučuje kvantitativne metode, matematične metode in metode operacijskih raziskovanj. Bila je gostujoči učitelj na Univerzi v Trierju v Nemčiji in na Univerzi Washington, Seattle, ZDA. Njeno raziskovalno delo je usmerjeno predvsem na področje metod optimiranja in v oblikovanje matematičnih modelov, ki služijo kot podpora sprejemanju optimalnih odločitev pri upravljanju z različnimi sistemi ob upoštevanju ekonomskih, okoljevarstvenih in socialnih ciljev. Je predsednica sekcije za operacijske raziskave SDI in podpredsednica SDI.