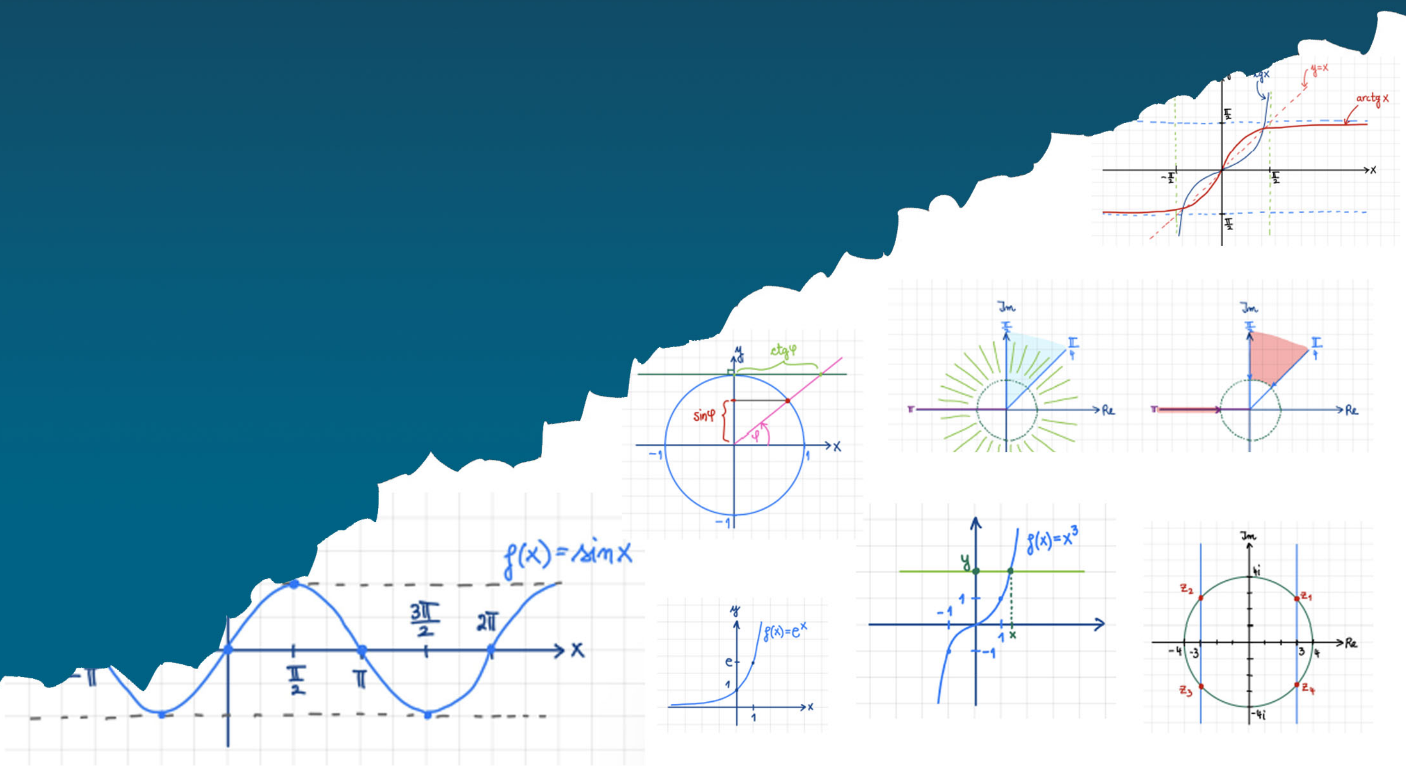
Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

KVIZI IZ

MATEMATIKE I

2. DEL

Aleksandra Tepeh



Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko,
računalništvo in informatiko

Kvizi iz Matematike I

2. del

Avtorica
Aleksandra Tepeh

April 2024

Naslov *Title*	**Kvizi iz Matematike I** *Mathematics 1 Quizzes*	**Podnaslov** *Subtitle*	**2. del** *Part Two*

Avtorica *Author*
Aleksandra Tepeh
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)

Recenzija *Review*
Dragana Božović
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)

Lektoriranje *Language editing*
Tadeja Kraner Šumenjak
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za kmetijstvo in biosistemske vede)

Tehnična urednika *Technical editors*
Aleksandra Tepeh
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)

Jan Perša
(Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)

Grafične priloge *Graphics material*
Viri so lastni, razen če ni navedeno drugače.
Tepeh, 2024

Oblikovanje ovitka *Cover designer*
Jan Perša
(Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)

Grafika na ovitku *Cover graphic*
Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba in Tepeh, 2024

Založnik *Published by*
Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba
Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija
https://press.um.si, zalozba@um.si

Izdajatelj *Issued by*
Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko
Koroška cesta 46, 2000 Maribor, Slovenija
https://feri.um.si, feri@um.si

Izdaja *Edition*	Prva izdaja	**Izdano** *Published at*	Maribor, april 2024
Vrsta publikacije *Publication type*	E-knjiga	**Dostopno na** *Available at*	https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/863

Izdajo sofinancirata Evropska unija – NextGenerationEU in Republika Slovenija, Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in inovacije.

NOO | NAČRT ZA OKREVANJE IN ODPORNOST
Univerza v Mariboru
REPUBLIKA SLOVENIJA MINISTRSTVO ZA VISOKO ŠOLSTVO, ZNANOST IN INOVACIJE
Financira Evropska unija NextGenerationEU

```
CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

51(0.034.2)

TEPEH, Aleksandra
    Kvizi iz matematike I [Elektronski
vir]. Del 2 / Aleksandra Tepeh. - 1. izd.
- Maribor : Univerza v Mariboru,
Univerzitetna založba, 2024

Dostopno tudi na:
https://press.um.si/index.php/ump/catalog/
book/863
ISBN 978-961-286-844-4 (WEB, pdf)
doi: 10.18690/um.feri.2.2024
COBISS.SI-ID 190516739
```


ISBN	978-961-286-844-4 (pdf)	**DOI**	https://doi.org/10.18690/um.feri.2.2024
Cena *Price*	Brezplačni izvod	**Odgovorna oseba založnika** *For publisher*	prof. dr. Zdravko Kačič, rektor Univerze v Mariboru

Citiranje *Attribution*
Tepeh, A. (2024). *Kvizi iz Matematike I: 2. del.* Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba. doi: 10.18690/um.feri.2.2024

KAZALO

1 Predgovor 1
2 Naloge 3
2.1 Limita funkcije 3
2.2 Odvod 9
2.3 Nedoločeni integral 13
2.4 Določeni integral 14
2.5 Zaporedja 16
2.6 Vrste 17
2.7 Mešane naloge 18
3 Rešitve 21
3.1 Limita funkcije 21
3.2 Odvod 34
3.3 Nedoločeni integral 43
3.4 Določeni integral 46
3.5 Zaporedja 50
3.6 Vrste 52
3.7 Mešane naloge 54

1

PREDGOVOR

Zbirka rešenih nalog je učni pripomoček, ki je v prvi vrsti namenjen študentom 1. letnika visokošolskih študijskih programov *Računalništvo in informacijske tehnologije* in *Informatika in tehnologije komuniciranja* na UM FERI, ki poslušajo predmet *Matematika 1*. Predstavlja nadaljevanje zbirke nalog *Kvizi iz matematike I (1.del)*, v kateri so pokrite snovi prvega kolokvija pri omenjenem predmetu (osnove logičnega sklepanja, množice, kompleksna števila in funkcije). Pričujoča zbirka je namenjena pripravi na drugi kolokvij, saj zajema snovi o limitah, odvodih, integralih, zaporedjih in vrstah. Na koncu je dodano še poglavje z nalogami za pregled čez celotno snov in s tem pripravo na izpit.

Kot v prvem delu zbirke so tudi tokrat vse naloge opremljene z rešitvami in večina še z dodatnimi pojasnili o poteku reševanja. Glede na pozitivne odzive študentov na prvi del zbirke tudi tokrat uporabljam kombinacijo formalnega knjižnega zapisa in neformalnih zapiskov s skicami, ki so študentom velikokrat bližji zaradi narave matematičnega jezika.

Kljub skrbnemu pregledu se zavedam, da je v zbirki morda ostala kakšna napaka. Če jo opazite, bom vesela, če svojo pripombo sporočite na naslov aleksandra.tepeh@um.si.

2

NALOGE

2.1 LIMITA FUNKCIJE

Naloga 1 *Zapiši vsaj tri pravila za računanje z limitami.*

Naloga 2 *Dopolni pravilo za računanje z limitami:*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) =$$

Naloga 3 *Dopolni pravilo za računanje z limitami:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} =$$

Naloga 4 $\lim\limits_{x\to 4}(x^2+3x-8)$=

(a) ∞

(b) 20

(c) 12

(d) *ne obstaja.*

Naloga 5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}|-2x-4|-4=$

(a) ∞

(b) -2

(c) 2

(d) *ne obstaja.*

Naloga 6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=$

(a) 0

(b) 1

(c) $\frac{1}{2}$

(d) *ne obstaja.*

Naloga 7 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4} =$

(a) $\sqrt{8}$

(b) 1

(c) 8

(d) ∞.

Naloga 8 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+3x-16}{3x^2+x-2} =$

(a) $\frac{1}{3}$

(b) 3

(c) 1

(d) ∞.

Naloga 9 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}} =$

(a) 2

(b) $\sqrt{2}$

(c) 0

(d) *nič od zgoraj navedenega.*

Naloga 10 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}} =$

(a) 2

(b) $\sqrt{2}$

(c) 0

(d) ∞

Naloga 11 *Dopolni:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} =$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} =$

Naloga 12 *S katero znano limito si lahko pomagaš pri izračunu limite* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}$ *? Izračunaj jo.*

Naloga 13 *Dopolni:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3} =$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x} =$

(c) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-6x-16}{x+2} =$

Naloga 14 *Dopolni:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} =$

(b) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^-}\tan x =$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{x} =$

(d) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-2x-15}{x-5} =$

Naloga 15 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2-5}{|x-1|} =$

(a) 1

(b) 5

(c) 10

(d) *ne obstaja.*

Naloga 16 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} =$

(a) $\frac{0}{0}$

(b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $-\frac{1}{2}$

Naloga 17 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} =$

(a) $\frac{0}{0}$

(b) $-\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $-\frac{1}{2}$

Naloga 18 *Obkroži vsako izjavo, ki je pravilna, če je* $f(x) = -\frac{x^2-x-12}{x+3}$.

(a) *Funkcija* f *ni definirana pri* $x = -3$.

(b) *Funkcija* f *je zvezna povsod, kjer je definirana.*

(c) $f(x) = -x + 4$.

(d) *Graf funkcije* f *je premica brez ene točke.*

Naloga 19 *Obkroži vse pravilne odgovore. Da je funkcija* f *zvezna v točki* $x = a$*, mora veljati:*

(a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

(b) *funkcija* f *je definirana pri* $x = a$.

(c) $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(d) $f(x) = a$.

Naloga 20 *Grafično prikaži, kako se na grafu funkcije* f *odraža dejstvo, da je*

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \infty.$$

Naloga 21 *Grafično prikaži, kako se na grafu funkcije* f *odraža dejstvo, da je*

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \infty.$$

Naloga 22 *Skiciraj graf funkcije* f*, ki ima limito v točki* $x = 5$*, a v tej točki ni definirana.*

Naloga 23 *Skiciraj graf funkcije f, ki ima limito v točki $x = 5$ in je v tej točki tudi definirana, a ni zvezna.*

Naloga 24 *Podana je funkcija $f(x) = \frac{4x+1}{x+2}$. Njena horizontalna asimptota*

(a) *je* $x = 4$.

(b) *je* $y = 4$.

(c) *je* $y = 0$.

(d) *ne obstaja.*

Naloga 25 *Podana je funkcija $f(x) = \frac{4x^3+2x+1}{7x^5+3x^2+2}$. Njena horizontalna asimptota je*

(a) $y = 0$.

(b) $y = 5$.

(c) $y = -5$.

(d) *ne obstaja.*

Naloga 26 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna, če je $f(x) = \frac{5x^2+1}{x+2}$.*

(a) *Graf funkcije f ima poševno asimptoto.*

(b) *Graf funkcije f ima vertikalno asimptoto.*

(c) *Graf funkcije f ima horizontalno asimptoto.*

(d) *Graf funkcije f nima asimptote.*

Naloga 27 *Podana je funkcija $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^3+8}$. Njena horizontalna asimptota je*

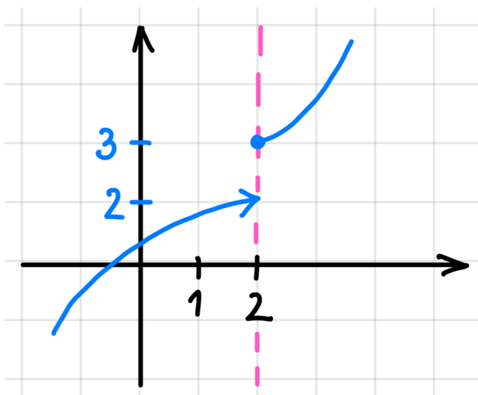
(a) $x = 3$.

(b) $y = 3$.

(c) $y = 0$.

(d) *ne obstaja.*

Naloga 28 *Za graf funkcije f na spodnji sliki velja, da je $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$*



(a) ∞.

(b) 1.

(c) 2.

(d) *ne obstaja.*

Naloga 29 *Grafično prikaži, kaj za graf funkcije f pomeni, da je $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ in $f(2) = 1$. Kaj lahko poveš o zveznosti take funkcije?*

Naloga 30 *Grafično prikaži, kaj za graf pomeni, da je $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.*

Naloga 31 *Izračunaj limito $\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x^3-1}$ in pojasni, kaj ta rezultat pomeni za graf funkcije.*

Naloga 32 *Izračunaj limito $\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{2x-1}$ in pojasni, kaj ta rezultat pomeni za graf funkcije.*

Naloga 33 *Izračunaj limito $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{3x+2}$ in pojasni, kaj ta rezultat pomeni za graf funkcije.*

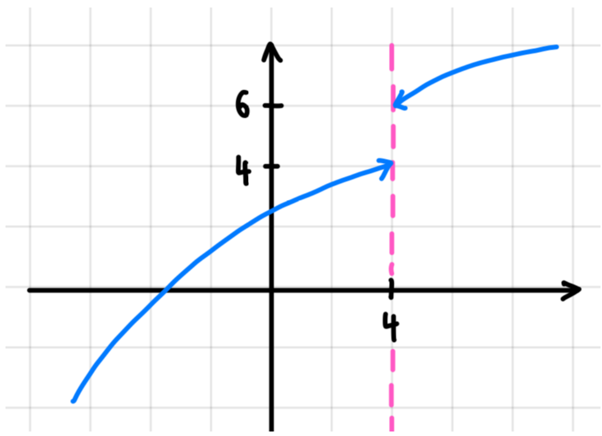
Naloga 34 *Za graf funkcije f na spodnji sliki velja, da je $\lim_{x\to 4^-} f(x) =$*

(a) ∞

(b) 4

(c) 6

(d) $-\infty$



Naloga 35 *Za graf funkcije f na zgornji sliki (pri nalogi 34) velja:*

(a) *f je zvezna funkcija,*

(b) *leva in desna limita funkcije v $x = 4$ sta različni,*

(c) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 4$,

(d) *funkcija f v $x = 4$ ni definirana.*

2.2 ODVOD

Naloga 36 *Izračunaj odvod funkcije $f(x) = \cos x - 6(x-2)^{12}$ in zapiši pravila, ki si jih pri tem uporabil-a.*

Naloga 37 *Izračunaj odvod funkcije $f(x) = \ln x - 5x^4$ in zapiši pravila, ki si jih pri tem uporabil-a.*

Naloga 38 *Izračunaj odvod funkcije $f(x) = 6x^2 \cdot \tan x$ in zapiši pravila, ki si jih pri tem uporabil-a.*

Naloga 39 *Izračunaj odvod funkcije $f(x) = \arctan\left(e^{5x}\right)$ in zapiši pravila, ki si jih pri tem uporabil-a.*

Naloga 40 *Tretji odvod funkcije $f(x) = (2x+1)e^x$ je:*

(a) $(5-3x)e^x$.

(b) $(7+3x)e^x$.

(c) $(2x-7)e^x$.

(d) $(2x+7)e^x$.

Naloga 41 *Devetnajsti odvod funkcije $f(x) = (x-1)e^x$ je:*

(a) $(18-x)e^x$.

(b) $(18+x)e^x$.

(c) $(19-x)e^x$.

(d) $(19+x)e^x$.

Naloga 42 *Če je $f(x) = 7x^3$, $g(2) = 4$, $g'(2) = -2$, potem je prvi odvod kompozituma $f(g(x))$ v $x = 2$ enak:*

(a) 672.

(b) 726.

(c) -336.

(d) -672.

(e) 336.

Naloga 43 *Če je* $f(x) = 6x^2$, $g(-1) = -2$, $g'(-1) = -3$, *potem je prvi odvod kompozituma* $f(g(x))$ *v* $x = -1$ *enak*

(a) 72.

(b) 0.

(c) -12.

(d) 36.

Naloga 44 *Podana je funkcija* $F(x) = f^2(g(x))$, *pri čemer velja* $g(1) = 2, g'(1) = 3$ *in* $f(2) = 4, f'(2) = 1$. *Potem je*

(a) $F'(1) = 12$.

(b) $F'(1) = 18$.

(c) $F'(1) = 20$.

(d) $F'(1) = 24$.

Naloga 45 *Podana je funkcija* $F(x) = f^2(g(x)) + 2$, *pri čemer velja* $g(2) = 3, g'(2) = 1$ *in* $f(3) = 2, f'(3) = 2$. *Potem je*

(a) $F'(2) = 2$.

(b) $F'(2) = 4$.

(c) $F'(2) = 8$.

(d) $F'(2) = 10$.

Naloga 46 *Pojasni geometrijski pomen odvoda.*

Naloga 47 *Poišči smerni koeficient tangente na graf funkcije* $f(x) = (x-1)e^{4x}$ *v točki* $x = 1$.

Naloga 48 *Zapiši enačbo tangente na graf funkcije* $f(x) = \left(5\ln x + x^2\right)^2$ *v točki z absciso* $x = 1$.

Naloga 49 *Opiši kako izračunamo tangento na graf funcije* $f(x)$ *v dani točki* (a, b). *Lahko razložiš na primeru:* $f(x) = x^3$, $(a, b) = (2, b)$.

Naloga 50 *Na katerem intervalu narašča funkcija* $f(x) = xe^x$?

Naloga 51 *Za $x \in (a, b)$ velja $f'(x) > 0$. Potem lahko za funkcijo f rečemo, da je na intervalu (a, b)*

(a) *padajoča.*

(b) *naraščajoča.*

(c) *konveksna.*

(d) *konkavna.*

Naloga 52 *Kaj je stacionarna točka? Poišči stacionarne točke funkcije $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x - 5$.*

Naloga 53 *Opiši, kako s pomočjo višjih odvodov poiščemo lokalne ekstreme funkcije.*

Naloga 54 *Za funkcijo $f(x)$ velja, da je $f'(3) = f''(3) = f'''(3) = 0$ in $f^{(4)}(3) = 4$. Potem ima funkcija f v $x = 3$*

(a) *prevoj.*

(b) *lokalni maksimum.*

(c) *lokalni minimum.*

(d) *nič od zgoraj naštetega.*

Naloga 55 *Dana je funkcija $f(x) = xe^x$. Obkroži črko pred vsako pravilno trditvijo:*

(a) *Funkcija f je naraščajoča na intervalu $(-1, \infty)$.*

(b) *Funkcija f je padajoča na intervalu $(0, \infty)$.*

(c) *Funkcija f ima v $x = 0$ stacionarno točko.*

(d) *Funkcija f ima v $x = -1$ lokalni minimum.*

Naloga 56 *Kako izračunamo globalne ekstreme na intervalu $[a, b]$?*

Naloga 57 *Kaj pomeni, da je funkcija konkavna in kako izračunamo intervale, na katerih je funkcija konkavna?*

Naloga 58 *Opiši, kako s pomočjo odvoda ugotovimo, kje je funkcija konveksna.*

Naloga 59 *Opiši, kako poiščemo prevoje funkcije.*

Naloga 60 *Za $x \in (a, b)$ velja $f''(x) < 0$. Potem lahko za funkcijo f rečemo, da je na intervalu (a, b)*

(a) *naraščajoča.*

(b) *konveksna.*

(c) *konkavna.*

(d) *padajoča.*

Naloga 61 *Za funkcijo $f(x)$ velja, da je $f'(2) = f''(2) = 0$ in $f'''(2) = 7$. Potem ima funkcija f v $x = 2$*

(a) *prevoj.*

(b) *lokalni maksimum.*

(c) *lokalni minimum.*

(d) *nič od zgoraj naštetega.*

Naloga 62 *Kaj pravi L'Hôspitalovo pravilo?*

Naloga 63 *S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(16x)}{4x}$. Pojasni, zakaj lahko to pravilo uporabimo.*

Naloga 64 *S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$. Pojasni, zakaj lahko to pravilo uporabimo.*

Naloga 65 *S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito $\lim_{x\to \infty} \frac{x \ln x}{3x^2 + x + 5}$. Pojasni, zakaj lahko to pravilo uporabimo.*

Naloga 66 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna:*

(a) *Izraz $\frac{f(x+h)+f(x)}{h}$ imenujemo diferenčni kvocient.*

(b) *Funkcija f je odvedljiva v točki x natanko tedaj, ko sta levi in desni odvod v x enaka.*

(c) *Če je funkcije f zvezna, potem je tudi odvedljiva.*

(d) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Naloga 67 *Zapiši pravili za odvod produkta in odvod kvocienta dveh funkcij.*

2.3 NEDOLOČENI INTEGRAL

Naloga 68 *Zapiši definicijo nedoločenega integrala funkcije f.*

Naloga 69 *Izračunaj nedoločeni integral funkcije* $f(x) = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2x^3 \right) dx$ *in opiši, katera pravila si pri tem uporabil-a.*

Naloga 70 *Izračunaj nedoločeni integral funkcije* $f(x) = \int (8x+5)^5 \, dx$ *in opiši, katero integracijsko metodo si pri tem uporabil-a.*

Naloga 71 *Zapiši formulo za integracijo po delih (per partes).*

Naloga 72 *Zapiši formulo za integracijo po delih (per partes) ter s to metodo izračunaj integral* $f(x) = \int \ln x \, dx$.

Naloga 73 *Dopolni:*

(a) $\int \frac{1}{x} \, dx =$

(b) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx =$

(c) $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx =$

Naloga 74 *Dopolni:*

(a) $\int x^7 \, dx =$

(b) $\int \frac{2}{x} \, dx =$

(c) $\int \sin x \, dx =$

Naloga 75 *Dokaži, da za odvedljivo funkcijo $g(x)$ velja*

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln |(g(x))| + C.$$

Naloga 76 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna:*

(a) *Nedoločeni integral je število.*

(b) *Nedoločeni integral je funkcija.*

(c) *Če je F nedoločeni integral funkcije f, je njen nedoločeni integral tudi funkcija $G(x) = F(x) + C$, kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta.*

(d) $\int (f(x) \cdot g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \cdot \int g(x) \, dx$.

Naloga 77 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna:*

(a) $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \tan x + C.$

(c) $\displaystyle\int (3+2x)^{42} \,\mathrm{d}x = \frac{(3+2x)^{43}}{43} + C.$

(d) $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)} \,\mathrm{d}x = \frac{\int f(x)\,\mathrm{d}x}{\int g(x)\,\mathrm{d}x}.$

2.4 DOLOČENI INTEGRAL

Naloga 78 *Pojasni geometrijski pomen določenega integrala.*

Naloga 79 *Kaj predstavlja določeni integral nenegativne funkcije?*

(a) *Naklon tangente na funkcijo f.*

(b) *Odvod funkcije funkcije f.*

(c) *Največjo vrednost funkcije f.*

(d) *Ploščino pod krivuljo funkcije f.*

Naloga 80 *Dopolni pravilo:* $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \,\mathrm{d}x =$

Naloga 81 *Določeni integral funkcije $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ od $x = 1$ do $x = 5$ je enak:*

(a) *10*

(b) *36*

(c) *64*

(d) *104*

Naloga 82 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.*

(a) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$

Naloga 83 *Določeni integral zvezne funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, a]$ je enak:*

(a) $f(a)$

(b) ∞

(c) $F(a)$

(d) 0

Naloga 84 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.*

(a) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, *kjer je* $F'(x) = f(x)$.

(b) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

(c) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *kjer* $c \in [a, b]$.

(d) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Naloga 85 $\displaystyle\int_{-1}^{2} (9 - x^2)\,\mathrm{d}x$ *je enako:*

(a) 42.

(b) 24.

(c) 36.

(d) 54.

Pojasni še geometrijski pomen izračunanega števila.

Naloga 86 *Izračunaj* $f(x) = \displaystyle\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$. *Pojasni geometrijski pomen izračunanega integrala.*

Naloga 87 *Izračunaj* $f(x) = \displaystyle\int_1^3 (2x - 5\sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x$. *Pojasni geometrijski pomen izračunanega integrala.*

Naloga 88 $\displaystyle\int_0^1 (4 + 3x^2)\,\mathrm{d}x$ *je enako:*

(a) 10.

(b) 5.

(c) 12.

(d) 8.

Pojasni še geometrijski pomen izračunanega števila.

Naloga 89 $\int_0^{\pi} (1 + \cos x)\, dx$ *je enako:*

(a) $-\pi$.

(b) π.

(c) 0.

(d) 2π.

(e) -2π.

Naloga 90 $\int_{-4}^{4} |x|\, dx$ *je enako:*

(a) 24.

(b) 8.

(c) 16.

(d) 0.

(e) -8.

2.5 ZAPOREDJA

Naloga 91 *Kaj pomeni, da je zaporedje navzgor omejeno in kako je definirana zgornja meja zaporedja?*

Naloga 92 *Dokaži, da je* 2 *zgornja meja zaporedja s splošnim členom* $a_n = \frac{2n-7}{n}$.

Naloga 93 *Dokaži, da je* 4 *zgornja meja zaporedja s splošnim členom* $a_n = \frac{4n-3}{n}$.

Naloga 94 *Kaj je supremum zaporedja?*

Naloga 95 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna:*

(a) *Supremum ni vedno člen zaporedja.*

(b) *Infimum zaporedja je najmanjši člen zaporedja.*

(c) *Maksimum zaporedja je vrednost največjega člena zaporedja.*

(d) *Minimum zaporedja zmeraj obstaja.*

Naloga 96 *Dokaži, da je zaporedje s splošnim členom* $a_n = \frac{n+3}{n}$ *strogo padajoče.*

Naloga 97 *Pojasni razliko med stekališčem in limito zaporedja.*

Naloga 98 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna:*

(a) *Za omejeno zaporedje stekališče ne obstaja nujno.*

(b) *Zaporedje je omejeno, ko je navzgor in navzdol omejeno.*

(c) *Če je neko število limita zaporedja, potem je tudi stekališče tega zaporedja.*

(d) *Če ima zaporedje eno stekališče, je divergentno.*

Naloga 99 *Zapiši definicijo geometrijskega zaporedja in pojasni, od česa je odvisno padanje, naraščanje ter omejenost takega zaporedja.*

2.6 VRSTE

Naloga 100 *Naj bo* $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *vrsta. Zapiši zaporedje delnih vsot te vrste.*

Naloga 101 *Kdaj pravimo, da je vrsta* $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *konvergentna in kaj je njena vsota?*

Naloga 102 $\sum_{k=1}^{13} \left(3 + \frac{3}{2}(k-1)\right)$ *je enako:*

(a) 156.

(b) 154.

(c) -154.

(d) 108.

(e) -156.

Naloga 103 *Če vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ *konvergira, izračunaj njeno vsoto.*

Naloga 104 *Če vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ *konvergira, izračunaj njeno vsoto.*

Naloga 105 *Obkroži črko pred konvergentno vrsto:*

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^k$

Naloga 106 *Geometrijska vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k$ *je konvergentna, če je*

(a) $|q| \leq 1$

(b) $q < 1$

(c) $|q| < 1$

(d) $q \geq 1$.

2.7 MEŠANE NALOGE

Naloga 107 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.*

(a) *Zaporedje s splošnim členom* $a_n = 3 \cdot (\frac{3}{2})^n$ *je konvergentno.*

(b) *Vsak lokalni maksimum je stacionarna točka.*

(c) *Funkcija* $f(x) = 2 \ln x$ *nima stacionarnih točk.*

(d) *Nedoločeni integral funkcije je število, ki predstavlja ploščino nekega lika.*

Naloga 108 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.*

(a) *Vsaka stacionarna točka je bodisi maksimum bodisi minimum.*

(b) *Eksponentna funkcija* $f(x) = 5e^{4x}$ *nima stacionarnih točk.*

(c) *Določeni integral funkcije je vedno pozitivno število, ki predstavlja ploščino nekega lika.*

(d) *Zaporedje s splošnim členom* $a_n = 5 - 3(n-1)$ *je aritmetično.*

Naloga 109 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna:*

(a) *Če negiramo izjavo* $\neg p$*, dobimo izjavo* p*.*

(b) *Implikacija ima prednost pred konjunkcijo.*

(c) *Za kartezični produkt množic velja* $|A \times B| = |A| \cdot |B|$*.*

(d) $(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$

Naloga 110 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.*

(a) *Vsak lokalni ekstrem je stacionarna točka.*

(b) *Kandidate za prevoje dobimo kot ničle prvega odvoda.*

(c) *Nedoločeni integral funkcije je funkcija.*

(d) *Eksponentna funkcija* $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ *nima stacionarnih točk.*

Naloga 111 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.*

(a) *Funkcija tangens je naraščajoča povsod, kje je definirana.*

(b) *Vsaka racionalna funkcija ima vsaj en pol.*

(c) *Če je polinom lihe stopnje, ima vsaj eno realno ničlo.*

(d) *Če integriramo produkt logaritemske funkcije in polinoma, lahko integriramo vsak faktor posebej in dobljena integrala zmnožimo.*

Naloga 112 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.*

(a) *Naravno definicijsko območje funkcije* $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+5}$ *je* $(-5, \infty)$.

(b) *Funkcija* $f(x) = \sin^2 x$ *je soda.*

(c) *Če je* $f(x) = \sqrt{2x}$, *potem je* $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{2a+2h} - \sqrt{2a}}{h}$.

(d) *Tretji odvod od* $f(x) = \cos x$ *je* $f'''(x) = -\cos x$.

Naloga 113 *Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.*

(a) *Funkcija* $f(x) = x + \cos x$ *ima v* 0 *lokalni ekstrem.*

(b) $\displaystyle\int e^{3x}\,\mathrm{d}x = e^{3x} + C$.

(c) *Argument kompleksnega števila* $z = -4 - 4i$ *je* $\frac{5\pi}{4}$.

(d) *Imaginarni del kompleksnega števila* $\frac{3+i}{4-5i}$ *je* $-\frac{1}{5}$.

3

REŠITVE

3.1 LIMITA FUNKCIJE

OPOMBA: Nekatere limite iz tega razdelka je mogoče rešiti tudi s pomočjo L'Hôspitalovega pravila. Z njegovo pomočjo bomo limite reševali v poglavju o odvodu.

Naloga 1 Zapiši vsaj tri pravila za računanje z limitami.

Rešitev:

(a) $\lim\limits_{x \to a} A = A$

(b) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a}(f(x)) \cdot \lim\limits_{x \to a}(g(x))$

(c) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a}(f(x)) + \lim\limits_{x \to a}(g(x))$

Naloga 2 Dopolni pravilo za računanje z limitami:

$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) =$

Rešitev: $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a}(f(x)) \cdot \lim\limits_{x \to a}(g(x))$

Naloga 3 Dopolni pravilo za računanje z limitami:

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$

Rešitev: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, kjer je $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Naloga 4 $\lim\limits_{x \to 4}(x^2 + 3x - 8)$=

(a) ∞

(b) 20

(c) 12

(d) ne obstaja.

Rešitev: Pravilen odgovor je (b), saj je

$$\lim_{x\to 4}(x^2+3x-8) = \lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4} 3x - \lim_{x\to 4} 8 = 16+12-8 = 20.$$

Naloga 5 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}\left|-2x-4\right| - 4 =$

(a) ∞

(b) -2

(c) 2

(d) ne obstaja.

Rešitev: Pravilen odgovor je (b).

Naloga 6 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} =$

(a) 0

(b) 1

(c) $\frac{1}{2}$

(d) ne obstaja.

Rešitev: Pravilen odgovor je (b).

Naloga 7 $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} =$

(a) $\sqrt{8}$

(b) 1

(c) 8

(d) ∞

Rešitev: Pravilen odgovor je odgovor (c). Če v ulomek $\frac{x^2-16}{x-4}$ vstavimo 4, dobimo nedoločen izraz $\frac{0}{0}$. Da se te nedoločenosti znebimo, izraz v števcu razstavimo na produkt. Velja torej:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}.$$

Zapis $x\to 4$ pove, da se x-i približujejo 4 (in torej x ni enak 4), zato lahko ulomek v limiti okrajšamo z $x-4$, saj smo sigurni, da pri tem ne delimo z 0. Tako nadaljujemo z izračunom, kjer uporabimo še pravilo, da je limita vsote enaka vsoti limit in pravilo, da je limita konstante enaka tej konstanti:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=\lim_{x\to 4}x+\lim_{x\to 4}4=\lim_{x\to 4}x+4=8.$$

Naloga 8 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-16}{3x^2+x-2}=$

(a) $\frac{1}{3}$

(b) 3

(c) 1

(d) ∞

Rešitev: Pravilen odgovor je odgovor (a). Opazimo, da gre za limito tipa $\frac{\infty}{\infty}$. Te nedoločenosti se znebimo tako, da delimo z največjo potenco x-a, ki nastopa v števcu in imenovalcu. Ulomek torej okrajšamo z x^2, nakar upoštevamo pravila za računanje z limitami, ki nam omogočajo gledati števec in imenovalec, kakor tudi vsak člen vsote oz. razlike posebej. Tako dobimo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-16}{3x^2+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{16}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}}=\frac{1+0+0}{3+0+0}=\frac{1}{3}.$$

Naloga 9 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}=$

(a) 2

(b) $\sqrt{2}$

(c) 0

(d) nič od zgoraj navedenega.

Rešitev: Pravilen odgovor je odgovor (a). Če v ulomek $\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}$ vstavimo 2, dobimo nedoločen izraz $\frac{0}{0}$. Da se te nedoločenosti znebimo, izraz pod korenom v števcu razstavimo na produkt in upoštevamo, da je koren produkta števil enak produktu korenov teh števil. Velja torej:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}.$$

Zapis $x\to 2$ pove, da se x-i približujejo 2 (in torej x ni enak 2), zato lahko ulomek v limiti okrajšamo z $\sqrt{x-2}$, saj smo sigurni, da ne delimo z 0. Tako nadaljujemo z izračunom:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2}\sqrt{x+2}=2.$$

Naloga 10 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}=$

(a) 2

(b) $\sqrt{2}$

(c) 0

(d) ∞

Rešitev: Pravilen odgovor je (d):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+2}=\infty.$$

Naloga 11 Dopolni:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=$

(b) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=$

(c) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=$

Rešitev: Gre za znane limite, katerih vrednost je v primeru nalog (a) in (d) enaka 1, v primeru nalog (b) in (c) pa je rešitev enaka e.

Naloga 12 S katero znano limito si lahko pomagaš pri izračunu limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{x}$? Izračunaj jo.

Rešitev: Limita v nalogi je podobna znani limiti $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Števec in imenovalec ulomka $\frac{\sin 6x}{x}$ razširimo s 6. Če gre x proti 0, gre proti 0 tudi $6x$, torej je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{6 \sin 6x}{6x} = 6 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{6x}.$$

V zadnji limiti lahko $6x$ smatramo kot novo spremenljivko a, s čemer nadalje glede na omenjeno znano limito dobimo

$$6 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{6x} = 6 \lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{a} = 6.$$

Naloga 13 Dopolni:

(a) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} =$

(b) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x} =$

(c) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 6x - 16}{x+2} =$

Rešitev:

(a) $-\infty$

(b) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right)^{15} = e^{15}$

(c) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 6x - 16}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-8)}{x+2} = -10$

Naloga 14 Dopolni:

(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} =$

(b) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \tan x =$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x} =$

(d) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x-5} =$

Rešitev:

(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

(b) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin(4x)}{4x} = 4\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{4x} = 4$

(d) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-2x-15}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+3)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+3) = 8$

Naloga 15 $\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-5}{|x-1|} =$

(a) 1

(b) 5

(c) 10

(d) ne obstaja.

Rešitev: Pravilen odgovor je (d). Spomnimo se, da velja

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; \; x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & ; \; x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & ; \; x \geq 1 \\ -x+1 & ; \; x < 1 \end{cases}$$

Zato moramo ločiti možnosti, ko se enici približujemo iz leve oz. iz desne:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{5x^2-5}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{5x^2-5}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{5(x-1)(x+1)}{x-1} = 5\lim_{x\to 1^+}(x+1) = 10,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{5x^2-5}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{5x^2-5}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{5(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = -5\lim_{x\to 1^-}(x+1) = -10.$$

Ker se leva in desna limita, ko gre x proti 1, razlikujeta, limita ne obstaja.

Naloga 16 $\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} =$

(a) $\frac{0}{0}$

(b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $-\frac{1}{2}$

Rešitev: Pravilen odgovor je (d).

Naloga 17 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} =$

(a) $\frac{0}{0}$

(b) $-\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $-\frac{1}{2}$

Rešitev: Pravilen odgovor je (b), saj je limita tipa $\frac{0}{0}$, ki jo rešimo po naslednjem postopku

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{-(x-2)}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}.$$

Naloga 18 Obkroži vsako izjavo, ki je pravilna, če je $f(x) = -\frac{x^2-x-12}{x+3}$.

(a) Funkcija f ni definirana pri $x = -3$.

(b) Funkcija f je zvezna povsod, kjer je definirana.

(c) $f(x) = -x + 4$.

(d) Graf funkcije f je premica brez ene točke.

Rešitev: Pravilni odgovori so (a), (b) in (d).

Naloga 19 Obkroži vse pravilne odgovore. Da je funkcija f zvezna v točki $x = a$, mora veljati:

(a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

(b) funkcija f je definirana pri $x = a$.

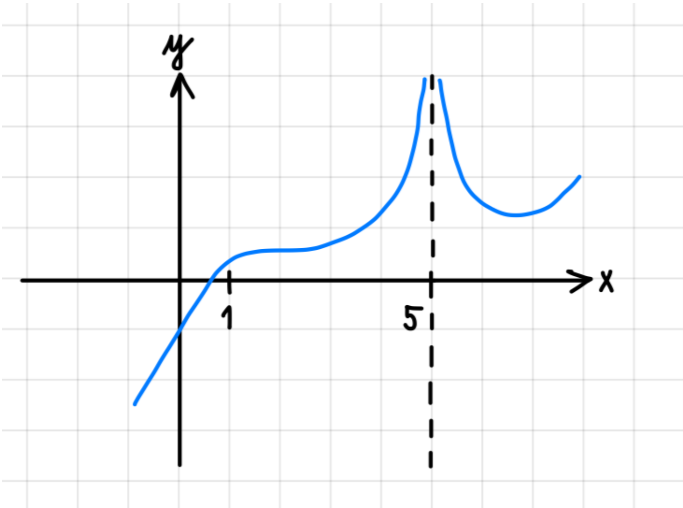
(c) $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(d) $f(x) = a$.

Rešitev: Pravilni odgovori so (a), (b) in (c).

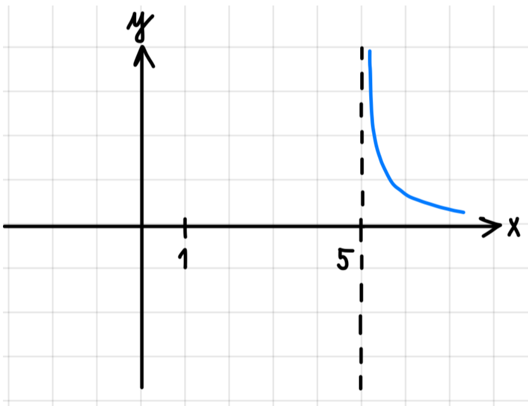
Naloga 20 Grafično prikaži, kako se na grafu funkcije f odraža dejstvo, da je $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \infty$.

Rešitev: Zapis $\lim_{x \to 5} f(x) = \infty$ pomeni, da gredo funkcijske vrednosti $f(x)$ proti ∞, ko se x-i tako iz leve, kakor tudi iz desne smeri, približujejo 5. Primer take funkcije je spodnja:



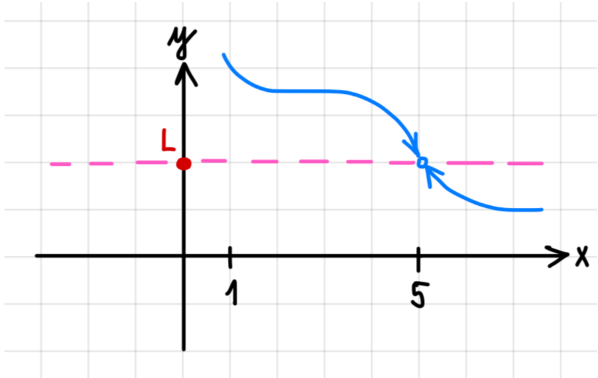
Naloga 21 Grafično prikaži, kako se na grafu funkcije f odraža dejstvo, da je $\lim_{x \to 5^+} f(x) = \infty$.

Rešitev: Za razliko od prejšnje naloge imamo sedaj desno limito, kar nam pove indeks + v zapisu $\lim_{x \to 5^+} f(x) = \infty$. To pomeni, da gredo funkcijske vrednosti $f(x)$ proti ∞, ko se x-i približujejo 5 iz desne smeri. V nalogi niso podane lastnosti funkcije na intervalu $(-\infty, 5)$, zato lahko graf tam skiciramo poljubno. Če si npr. zamislimo, da funkcija na tem intervalu sploh ni definirana, potem je primer funkcije, ki ustreza pogoju $\lim_{x \to 5^+} f(x) = \infty$, tudi spodnja:



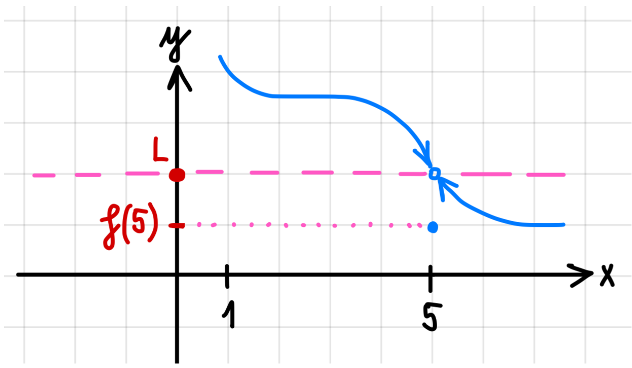
Naloga 22 Skiciraj graf funkcije f, ki ima limito v točki $x = 5$, a v tej točki ni definirana.

Rešitev: Na spodnji sliki je razvidno, da sta leva in desna limita, ko gre x proti 5, enaki, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = L$, zato je tudi $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = L$, čeprav funkcija za $x = 5$ ni definirana.



Naloga 23 Skiciraj graf funkcije f, ki ima limito v točki $x = 5$ in je v tej točki tudi definirana, a ni zvezna.

Rešitev: Ker sta leva in desna limita, ko gre x proti 5, enaki, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = L$. Obstaja tudi $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ in je enaka L. Ker pa ta limita ni enaka funkcijski vrednosti v $x = 5$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$, funcija v tej točki ni zvezna.



Naloga 24 Podana je funkcija $f(x) = \frac{4x+1}{x+2}$. Njena horizontalna asimptota

(a) je $x = 4$.

(b) je $y = 4$.

(c) je $y = 0$.

(d) ne obstaja.

Rešitev: Pravilen odgovori je (b).

Naloga 25 Podana je funkcija $f(x) = \frac{4x^3+2x+1}{7x^5+3x^2-x}$. Njena horizontalna asimptota je

(a) $y = 0$.

(b) $y = 5$.

(c) $y = -5$.

(d) ne obstaja.

Rešitev: Pravilen odgovor je (a).

Naloga 26 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna, če je $f(x) = \frac{5x^2+1}{x+2}$.

(a) Graf funkcije f ima poševno asimptoto.

(b) Graf funkcije f ima vertikalno asimptoto.

(c) Graf funkcije f ima horizontalno asimptoto.

(d) Graf funkcije f nima asimptote.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (a) in (b), saj ima funkcija pol (vertikalno asimptoto) $x = -2$ in poševno asimptoto $y = 5x - 10$. Dobimo jo iz celega dela pri deljenju polinomov:

$$
\begin{array}{l}
(5x^2+1):(x+2) = 5x-10 \\
\underline{-(5x^2+10x)} \\
\qquad -10x+1 \\
\qquad \underline{-(-10x-20)} \\
\qquad\qquad 21
\end{array}
\qquad \Rightarrow \qquad
\frac{5x^2+1}{x+2} = \underbrace{5x-10}_{\text{celi del}} + \underbrace{\frac{21}{x+2}}_{\text{ostanek}}
$$

Naloga 27 Podana je funkcija $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^3+8}$. Njena horizontalna asimptota je

(a) $x = 3$.

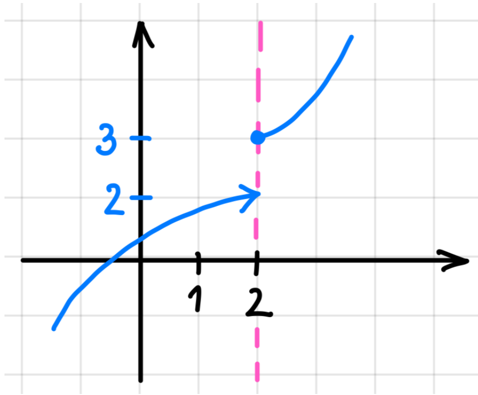
(b) $y = 3$.

(c) $y = 0$.

(d) ne obstaja.

Rešitev: Pravilen odgovor je (c), saj je stopnja polinoma v števcu manjša, kot stopnja polinoma v imenovalcu.

Naloga 28 Za graf funkcije f na spodnji sliki velja, da je $\lim_{x\to 2} f(x) =$



(a) ∞.

(b) 1.

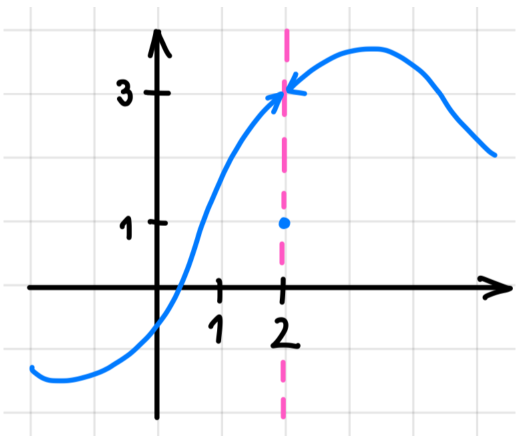
(c) 2.

(d) ne obstaja.

Rešitev: Pravilen odgovor je (d). Limita $\lim_{x\to 2} f(x)$ ne obstaja, saj leva in desna limita funkcije nista enaki. Leva limita je namreč enaka 1, desna limita je enaka 2.

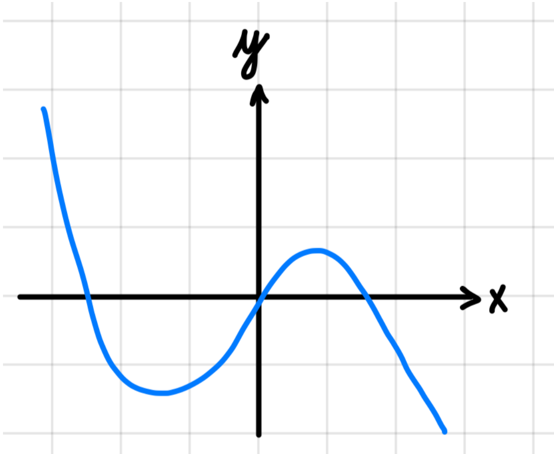
Naloga 29 Grafično prikaži, kaj za graf funkcije f pomeni, da je $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ in $f(2) = 1$. Kaj lahko poveš o zveznosti take funkcije?

Rešitev: Na spodnji sliki je razvidno, da se funkcijske vrednosti približujejo vrednosti 3, ko se x-i približujejo 2 iz obeh smeri, funkcijska vrednost v $x = 2$ pa ni enaka limiti v tej točki, zato funkcija ni zvezna v $x = 2$.



Naloga 30 Grafično prikaži, kaj za graf pomeni, da je $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Rešitev: Ko x-i naraščajo, gredo proti ∞, se funkcijske vrednosti manjšajo, gredo proti $-\infty$. Primer grafa take funkcije je naslednji:



Naloga 31 Izračunaj limito $\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x^3-1}$ in pojasni, kaj ta rezultat pomeni za graf funkcije.

Rešitev: Ulomek najprej okrajšamo z največjo potenco x-a:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}} = 0.$$

To pomeni, da se funkcijske vrednosti približujejo vrednosti 0, ko x-i naraščajo proti ∞. Z drugimi besedami, funkcija ima (desno) horizontalno asimptoto $y = 0$.

Naloga 32 Izračunaj limito $\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{2x-1}$ in pojasni, kaj ta rezultat pomeni za graf funkcije.

Rešitev:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2-\frac{1}{x}} = 2.$$

To pomeni, da se funkcijske vrednosti približujejo vrednosti 2, ko x-i naraščajo proti ∞. Z drugimi besedami, funkcija ima (desno) horizontalno asimptoto $y = 2$.

Naloga 33 Izračunaj limito $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{3x+2}$ in pojasni, kaj ta rezultat pomeni za graf funkcije.

Rešitev: Ulomek v limiti okrajšamo z x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = \infty.$$

Ko x-i naraščajo proti ∞, tudi funkcijske vrednosti naraščajo proti ∞. Natančneje, z deljenjem polinomov ugotovimo, da je celi del racionalne funkcije $f(x) = \frac{5x^2}{3x+2}$ enak $\frac{5x}{3} - \frac{10}{9}$, kar hkrati predstavlja predpis za poševno asimptoto funkcije f.

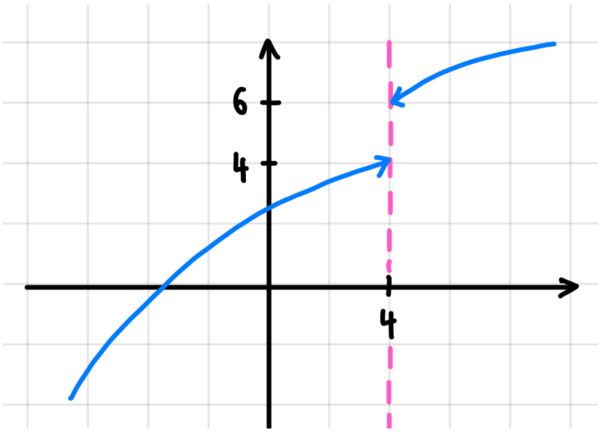
Naloga 34 Za graf funkcije f na spodnji sliki velja, da je $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$

(a) ∞

(b) 4

(c) 6

(d) $-\infty$



Rešitev: Pravilen odgovor je (b).

Naloga 35 Za graf funkcije f na zgornji sliki (v nalogi 34) velja:

(a) f je zvezna funkcija,

(b) leva in desna limita funkcije v $x = 4$ sta različni,

(c) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 4$,

(d) funkcija f v $x = 4$ ni definirana.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (b) in (d).

3.2 ODVOD

Naloga 36 Izračunaj odvod funkcije $f(x) = \cos x - 6(x-2)^{12}$ in zapiši pravila, ki si jih pri tem uporabil-a.

Rešitev:

$$f'(x) = (\cos x)' - (6(x-2)^{12})' = -\sin x - 72(x-2)^{11}$$

Pravila, ki jih potrebujemo pri zgornjem izračunu (zaradi lepše preglednosti uporabimo f in g namesto $f(x)$ in $g(x)$; C in n sta konstanti):

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(C \cdot f)' = C \cdot f'$
- $(\cos x)' = \sin x$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Naloga 37 Izračunaj odvod funkcije $f(x) = \ln x - 5x^4$ in zapiši pravila, ki si jih pri tem uporabil-a.

Rešitev:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 20x^3$$

Pravila, ki jih potrebujemo pri zgornjem izračunu:

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(C \cdot f)' = C \cdot f'$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$

Naloga 38 Izračunaj odvod funkcije $f(x) = 6x^2 \cdot \tan x$ in zapiši pravila, ki si jih pri tem uporabil-a.

Rešitev:

$$f'(x) = 12x \cdot \tan x + 6x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Pravila, ki jih potrebujemo pri zgornjem izračunu:

- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $(C \cdot f)' = C \cdot f'$

- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$

Naloga 39 Izračunaj odvod funkcije $f(x) = \arctan\left(e^{5x}\right)$ in zapiši pravila, ki si jih pri tem uporabil-a.

Rešitev:

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^{10x}} \cdot e^{5x} \cdot 5$$

Pravila, ki jih potrebujemo pri zgornjem izračunu:

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(e^x)' = e^x$

Opazimo, da gre pri tej nalogi za kompozitum treh funkcij, zato uporabimo posplošeno pravilo za odvod kompozituma več funkcij: odvajati začnemo po funkciji arkus tangens (ki v kompozitumu deluje zadnja), nato po eksponentni funkciji, nazadnje odvajamo funkcijo, ki v kompozitumu deluje prva, t.j. funkcija s predpisom $5x$.

Naloga 40 Tretji odvod funkcije $f(x) = (2x+1)e^x$ je:

(a) $(5-3x)e^x$.

(b) $(7+3x)e^x$.

(c) $(2x-7)e^x$.

(d) $(2x+7)e^x$.

Rešitev: Pravilen odgovor je (d).

Naloga 41 Devetnajsti odvod funkcije $f(x) = (x-1)e^x$ je:

(a) $(18-x)e^x$.

(b) $(18+x)e^x$.

(c) $(19-x)e^x$.

(d) $(19+x)e^x$.

Rešitev: Pravilen odgovor je (b).

Naloga 42 Če je $f(x) = 7x^3$, $g(2) = 4$, $g'(2) = -2$, potem je prvi odvod kompozituma $f(g(x))$ v $x = 2$ enak:

(a) 672.

(b) 726.

(c) -336.

(d) -672.

(e) 336.

Rešitev: Pravilen odgovor je (d). Razmislimo tako:

podano: $f(x) = 7x^3 \Rightarrow f'(x) = 21x^2$

$g(2) = 4$

$g'(2) = -2$

odvod funkcije: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

odvod v $x = 2$: $(f(g(2)))' = f'(g(2)) \cdot g'(2)$

$$= f'(4) \cdot g'(2) =$$
$$= 21 \cdot 4^2 \cdot (-2) =$$
$$= -672$$

Naloga 43 Če je $f(x) = 6x^2$, $g(-1) = -2$, $g'(-1) = -3$, potem je prvi odvod kompozituma $f(g(x))$ v $x = -1$ enak

(a) 72.

(b) 0.

(c) -12.

(d) 36.

Rešitev: Pravilen odgovor je (a).

Naloga 44 Podana je funkcija $F(x) = f^2(g(x))$, pri čemer velja $g(1) = 2, g'(1) = 3$ in $f(2) = 4, f'(2) = 1$. Potem je

(a) $F'(1) = 12$.

(b) $F'(1) = 18$.

(c) $F'(1) = 20.$

(d) $F'(1) = 24.$

Rešitev: Pravilen odgovor je (d). Ker gre za odvod kompozituma, najprej odvajamo po kvadratni funkciji, nato po funkciji f in nazadnje po funkciji g:

$F(x) = f^2(g(x))$ $\quad$ $g(1)=2$, $g'(1)=3$ $\quad$ $f(2)=4$, $f'(2)=1$

$$F'(x) = 2f(g(x)) \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$F'(1) = 2 \cdot f(g(1)) \cdot f'(g(1)) \cdot g'(1)$$
$$= 2 \cdot f(2) \cdot f'(2) \cdot g'(1)$$
$$= 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 = 24$$

Naloga 45 Podana je funkcija $F(x) = f^2(g(x)) + 2$, pri čemer velja $g(2) = 3, g'(2) = 1$ in $f(3) = 2, f'(3) = 2$. Potem je

(a) $F'(2) = 2.$

(b) $F'(2) = 4.$

(c) $F'(2) = 8.$

(d) $F'(2) = 10.$

Rešitev: Pravilen odgovor je (c). Razmislimo podobno kot pri zgornji nalogi.

Naloga 46 Pojasni geometrijski pomen odvoda.

Rešitev: Prvi odvod funkcije f v točki $x = x_0$ je enak smernemu koeficientu tangente na graf funkcije f v točki $T(x_0, f(x_0))$.

Naloga 47 Poišči smerni koeficient tangente na graf funkcije $f(x) = (x-1)e^{4x}$ v točki $x = 1$.

Rešitev: Velja, da je $k = f'(1)$, zato najprej poiščemo prvi odvod, nato pa vstavimo vrednost 1:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{4x} + (x-1)e^{4x} \cdot 4.$$

Torej je $k = f'(1) = e^4$.

Naloga 48 Zapiši enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = (5 \ln x + x^2)^2$ v točki z absciso $x = 1$.

Rešitev: Tangenta na graf funkcije f v točki x_0 je premica, ki gre skozi točko $T(x_0, f(x_0))$ in je njen smerni koeficient enak $f'(x_0)$. Enačba tangente je

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Potrebujemo torej prvi odvod funkcije: $f'(x) = 2(5 \ln x + x^2)(5\frac{1}{x} + 2x)$. Torej velja $f'(1) = 14$, zato je enačba tangente enaka $y = 14(x - 1) + 1 = 14x - 13$. Če enačbe tangente ne znamo na pamet, jo lahko sami izpeljemo na naslednji način:

Tangenta je premica, zato je njena enačba oblike $y = kx + n$.

Smerni koeficient k dobimo z izračunom prvega odvoda v $x = 1$:

$$f(x) = (5 \ln x + x^2)^2$$

$$f'(x) = 2(5 \ln x + x^2)(5 \cdot \frac{1}{x} + 2x)$$

$$f'(1) = 2(5 \cdot 0 + 1)(5 + 2) = 14 \quad \Rightarrow \quad k = 14$$

Enačba tangente je torej $y = 14x + n$. Izračunati moramo še n. To je mogoče, če poznamo x in y, torej koordinate točke, ki leži na tangenti. Tako točko poznamo, saj točka $T(1, f(1))$ leži hkrati na tangenti, kot na grafu funkcije

$f(1) = 1$

$$y = 14x + n$$

$$T(1,1): \quad 1 = 14 + n \quad \Rightarrow \quad n = -13$$

Torej je enačba tangente $y = 14x - 13$.

Naloga 49 Opiši kako izračunamo tangento na graf funcije $f(x)$ v dani točki (a, b). Lahko razložiš na primeru: $f(x) = x^3$, $(a, b) = (2, b)$.

Rešitev: S prvim odvodom v točki a izračunamo smerni koeficient tangente. Za dani konkretni primer je torej $f'(x) = 3x^2$ in $f'(2) = 12$. Tako vemo, da je enačba tangente $y = 12x + n$, poiskati pa je treba še n. Izračunamo ga tako, da v zadnjo enačbo vstavimo točko (a, b), ki leži na tangenti. V danem primeru je to točka $(2, b)$, oz. $(2, 8)$, saj je $b = f(2)$, ker točka $(2, b)$ leži hkrati tudi na grafu funkcije f.

Naloga 50 Na katerem intervalu narašča funkcija $f(x) = xe^x$?

Rešitev: Funkcija narašča, ko je $f'(x) \geq 0$. Tako dobimo neenačbo $e^x + xe^x \geq 0$ oz. $e^x(1+x) \geq 0$. Njene rešitve so $x \geq -1$. Funkcija je torej naraščajoča na intervalu $[-1, \infty)$.

Naloga 51 Za $x \in (a, b)$ velja $f'(x) > 0$. Potem lahko za funkcijo f rečemo, da je na intervalu (a, b)

(a) padajoča.

(b) naraščajoča.

(c) konveksna.

(d) konkavna.

Rešitev: Pravilen odgovor je (b).

Naloga 52 Kaj je stacionarna točka? Poišči stacionarne točke funkcije $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x - 5$.

Rešitev: Stacionarne točke so ničle prvega odvoda funkcije (in predstavljajo kandidate za ekstreme funkcije). Rešimo torej enačbo $f'(x) = 0$. Tako dobimo $-3x^2 - 6x + 9 = 0$, katere rešitvi sta $x = -3$ in $x = 1$.

Naloga 53 Opiši, kako s pomočjo višjih odvodov poiščemo lokalne ekstreme funkcije.

Rešitev: Najprej poiščemo stacionarne točke (ničle prvega odvoda), s čemer dobimo kandidate za lokalne ekstreme. Za vsakega kandidata računamo vrednosti višjih odvodov, vse dokler ne pridemo do prvega neničelnega odvoda. Stopnja prvega neničelnega odvoda nam pove ali ekstrem v danem kandidatu obstaja (to se zgodi, ko je ta stopnja soda) ali ne (ko je ta stopnja liha). Če je stopnja soda in je vrednost prvega neničelnega odvoda v kandidatu negativna, je to lokalni maksimum, če pa je pozitivna, gre za lokalni minimum.

Naloga 54 Za funkcijo $f(x)$ velja, da je $f'(3) = f''(3) = f'''(3) = 0$ in $f^{(4)}(3) = 4$. Potem ima funkcija f v $x = 3$

(a) prevoj.

(b) lokalni maksimum.

(c) lokalni minimum.

(d) nič od zgoraj naštetega.

Rešitev: Pravilen odgovor je (c), saj je v $x = 3$ prvi odvod enak 0, prvi neničelni odvod je sode stopnje in je pozitiven (glej pojasnilo pri nalogi 53).

Naloga 55 Dana je funkcija $f(x) = xe^x$. Obkroži črko pred vsako pravilno trditvijo:

(a) Funkcija f je naraščajoča na intervalu $(-1, \infty)$.

(b) Funkcija f je padajoča na intervalu $(0, \infty)$.

(c) Funkcija f ima v $x = 0$ stacionarno točko.

(d) Funkcija f ima v $x = -1$ lokalni minimum.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (a) in (d). Stacionarne točke (kandidate za lokalne ekstreme) izračunamo s pomočjo ničel prvega odvoda. Ker je e^x pozitivno število ne glede na vrednost x, dobimo edino stacionarno točko $x = -1$. Ker se izkaže, da je levo od -1 funkcija padajoča (saj je prvi odvod tam manjši od 0), desno pa naraščajoča (prvi odvod je tam večji od 0), je v $x = 1$ lokalni minimum.

$f(x) = xe^x$

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

stacionarne točke: $\overset{>0}{e^x}(1+x) = 0$

$1+x=0$

$x=-1$

f narašča: $f'(x)>0$

$e^x(1+x)>0$

$1+x>0$

$x>-1$

$f'(x)<0 \qquad f'(x)>0$

-1

$\Rightarrow$ f ima v $x=-1$ lokalni minimum

Naloga 56 Kako izračunamo globalne ekstreme na intervalu $[a, b]$?

Rešitev: Kandidati za globalne ekstreme so kandidati za lokalne ekstreme, robni točki $x = a$ in $x = b$, ter točke, v katerih funkcija ni odvedljiva. Nato v vsakem izmed kandidatov izračunamo funkcijsko vrednost. V točki (kandidatu), kjer je dosežena minimalna vrednost, je globalni minimum, v točki, kjer je dosežena maksimalna vrednost, pa globalni maksimum.

Naloga 57 Kaj pomeni, da je funkcija konkavna in kako izračunamo intervale, na katerih je funkcija konkavna?

Rešitev: Funkcija je konkavna na nekem intervalu, če v vsaki točki tega intervala tangenta na graf funkcije leži nad grafom funkcije. Intervale konkavnosti dobimo z rešitvijo neenačbe $f''(x) < 0$.

Naloga 58 Opiši, kako s pomočjo odvoda ugotovimo, kje je funkcija konveksna.

Rešitev: Funkcija je konveksna za tiste vrednosti x, v katerih je drugi odvod pozitiven, $f''(x) > 0$.

Naloga 59 Opiši, kako poiščemo prevoje funkcije.

Rešitev: Kandidate za prevoje dobimo tako, da poiščemo ničle drugega odvoda. Za vsakega kandidata računamo vrednosti višjih odvodov, dokler ne pridemo do prvega neničelnega odvoda. Stopnja prvega neničelnega odvoda nam pove ali prevoj v danem kandidatu obstaja, kar se zgodi, ko je ta stopnja liha. Če je ta stopnja soda, prevoja v danem kandidatu ni.

Naloga 60 Za $x \in (a,b)$ velja $f''(x) < 0$. Potem lahko za funkcijo f rečemo, da je na intervalu (a,b)

(a) naraščajoča.

(b) konveksna.

(c) konkavna.

(d) padajoča.

Rešitev: Pravilen odgovor je (c).

Naloga 61 Za funkcijo $f(x)$ velja, da je $f'(2) = f''(2) = 0$ in $f'''(2) = 7$. Potem ima funkcija f v $x = 2$

(a) prevoj.

(b) lokalni maksimum.

(c) lokalni minimum.

(d) nič od zgoraj naštetega.

Rešitev: Pravilen odgovor je (a), saj je v $x = 2$ drugi odvod enak 0, prvi neničelni odvod pa je tretje (lihe) stopnje (glej razlago pri nalogi 59).

Naloga 62 Kaj pravi L'Hôspitalovo pravilo?

Rešitev: Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na neki okolici točke a (razen morda v točki a sami). Denimo da sta funkciji g in g' na tej okolici različni od 0 (razen morda v točki a sami) in da je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (ali ∞). Če obstaja $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tedaj obstaja tudi $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in sta enaki:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Naloga 63 S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(16x)}{4x}$. Pojasni, zakaj lahko to pravilo uporabimo.

Rešitev: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(16x)}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(16x)\cdot 16}{4} = 4$. L'Hôspitalovo pravilo smo lahko uporabili, ker gresta tako števec kot imenovalec proti 0, ko gre x proti 0.

Naloga 64 S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$. Pojasni, zakaj lahko to pravilo uporabimo.

Rešitev: Ko gre x proti 1, gresta števec in imenovalec oba proti 0, zato lahko odvajamo vsakega posebej:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Naloga 65 S pomočjo L'Hôspitalovega pravila izračunaj limito $\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{3x^2+x+5}$. Pojasni, zakaj lahko to pravilo uporabimo.

Rešitev: Števec in imenovalec gresta oba proti ∞, zato lahko odvajamo vsakega posebej (L'Hôspitalovo pravilo uporabimo dvakrat zapored):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{3x^2+x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x + x\frac{1}{x}}{6x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{6} = 0.$$

Naloga 66 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna:

(a) Izraz $\frac{f(x+h)+f(x)}{h}$ imenujemo diferenčni kvocient.

(b) Funkcija f je odvedljiva v točki x natanko tedaj, ko sta levi in desni odvod v x enaka.

(c) Če je funkcije f zvezna, potem je tudi odvedljiva.

(d) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (b) in (d).

Naloga 67 Zapiši pravili za odvod produkta in odvod kvocienta dveh funkcij.

Rešitev:

- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

3.3 NEDOLOČENI INTEGRAL

Naloga 68 Zapiši definicijo nedoločenega integrala funkcije f.

Rešitev: Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ dana funkcija, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ odprti interval. Funkcijo F, za katero je $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in I$, imenujemo nedoločeni integral funkcije f in označimo $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Naloga 69 Izračunaj nedoločeni integral funkcije $f(x) = \displaystyle\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2x^3\right) \mathrm{d}x$ in opiši, katera pravila si pri tem uporabil-a.

Rešitev: Pri izračunu

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2x^3\right) \mathrm{d}x = \tan x + 2\frac{x^4}{4} + C = \tan x + \frac{x^4}{2} + C$$

uporabimo pravila:

- $\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int Cf(x)\,\mathrm{d}x = C\int f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$
- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

Naloga 70 Izračunaj nedoločeni integral funkcije $f(x) = \displaystyle\int (8x+5)^5\,\mathrm{d}x$ in opiši, katero integracijsko metodo si pri tem uporabil-a.

Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko $t = 8x + 5$. Potem je $\mathrm{d}t = 8\,\mathrm{d}x$, od koder sledi $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{8}$. Tako izračunamo:

$$f(x) = \int (8x+5)^5\,\mathrm{d}x = \int t^5 \frac{1}{8}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8} \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{48}(8x+5)^6 + C.$$

Poleg uvedbe nove spremenljivke smo uporabili še pravili:

- $\int Cf(x)\,\mathrm{d}x = C\int f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

Naloga 71 Zapiši formulo za integracijo po delih (per partes).

Rešitev: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

Naloga 72 Zapiši formulo za integracijo po delih (per partes) ter s to metodo izračunaj integral $f(x) = \int \ln x\,\mathrm{d}x$.

Rešitev: V integralu $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ izberemo $u = \ln x$ in $dv = dx$. Potem je $du = \frac{1}{x}\,dx$ in $v = x$. Tako dobimo:

$$f(x) = \int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C.$$

Naloga 73 Dopolni:

(a) $\int \frac{1}{x}\,dx =$

(b) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx =$

(c) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

Rešitev:

(a) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

(b) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

(c) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

Naloga 74 Dopolni:

(a) $\int x^7\,dx =$

(b) $\int \frac{2}{x}\,dx =$

(c) $\int \sin x\,dx =$

Rešitev:

(a) $\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + C$

(b) $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| + C$

(c) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

Naloga 75 Dokaži, da za odvedljivo funkcijo $g(x)$ velja

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|(g(x))| + C.$$

Rešitev: Vpeljemo novo spremenljivko:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|g(x)| + C$$

$$t = g(x)$$
$$dt = g'(x)\,dx$$

Naloga 76 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.

(a) Nedoločeni integral je število.

(b) Nedoločeni integral je funkcija.

(c) Če je F nedoločeni integral funkcije f, je njen nedoločeni integral tudi funkcija $G(x) = F(x) + C$, kjer je $C \in \mathbb{R}$ poljubna konstanta.

(d) $\int (f(x) \cdot g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (b) in (c).

Naloga 77 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna:

(a) $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C.$

(c) $\displaystyle\int (3+2x)^{42}\,\mathrm{d}x = \frac{(3+2x)^{43}}{43} + C$

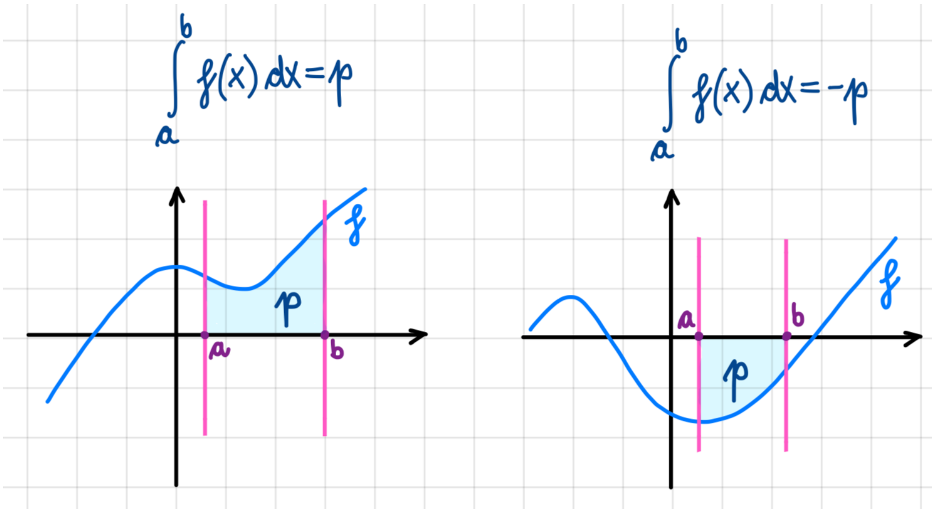
(d) $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\int f(x)\,\mathrm{d}x}{\int g(x)\,\mathrm{d}x}.$

Rešitev: Pravilna odgovora sta (a) in (b).

3.4 DOLOČENI INTEGRAL

Naloga 78 Pojasni geometrijski pomen določenega integrala.

Rešitev: Če je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna in nenegativna, je ploščina lika, ki ga omejujejo graf funkcije f, abscisna os ter premici $x = a$ in $x = b$ enaka $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Če za vsak x iz intervala $[a, b]$ velja, da je $f(x) \leq 0$ (graf torej leži pod abscisno osjo oz. na njej), potem je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ enak negativni ploščini lika, omejenega z grafom funkcije f, abscisno osjo ter premicama $x = a$ in $x = b$.



Naloga 79 Kaj predstavlja določeni integral nenegativne funkcije?

(a) Naklon tangente na funkcijo f.

(b) Odvod funkcije funkcije f.

(c) Največjo vrednost funkcije f.

(d) Ploščino pod krivuljo funkcije f.

Rešitev: Pravilen je odgovor (d).

Naloga 80 Dopolni pravilo: $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x =$

Rešitev: $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Naloga 81 Določeni integral funkcije $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ od $x = 1$ do $x = 5$ je enak:

(a) 10

(b) 36

(c) 64

(d) 104

Rešitev: Pravilen je odgovor (d).

Naloga 82 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.

(a) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

(b) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(c) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(d) $\int_a^b f(x)\,dx = f(b) - f(a)$

Rešitev: Pravilna odgovora sta (b) in (c)

Naloga 83 Določeni integral zvezne funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, a]$ je enak:

(a) $f(a)$

(b) ∞

(c) $F(a)$

(d) 0

Rešitev: Pravilen je odgovor (d).

Naloga 84 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.

(a) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, kjer je $F'(x) = f(x)$.

(b) $\int_a^b f(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

(c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, kjer $c \in [a, b]$.

(d) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (a) in (c).

Naloga 85 $\displaystyle\int_{-1}^{2} (9 - x^2)\,dx$ je enako:

(a) 42.

(b) 24.

(c) 36.

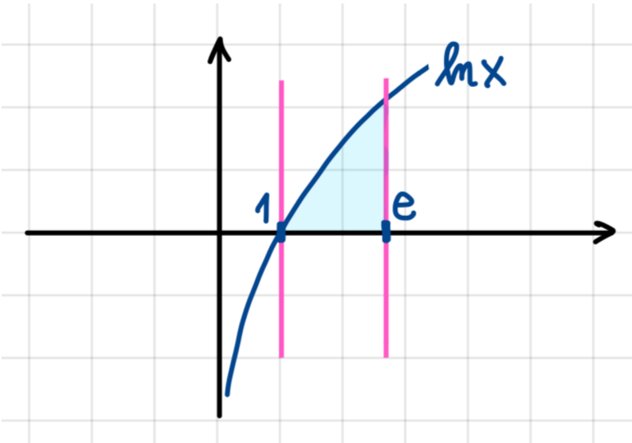
(d) 54.

Pojasni še geometrijski pomen izračunanega števila.

Rešitev: Pravilen odgovor je (b). Odgovor predstavlja ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije $f(x) = 9 - x^2$, premici $x = -1$ in $x = 2$ ter abscisna os, saj je na intervalu $[-1, 2]$ funkcija $f(x)$ pozitivna.

Naloga 86 Izračunaj $f(x) = \int_1^e \ln x \, dx$. Pojasni geometrijski pomen izračunanega integrala.

Rešitev: Nedoločeni integral izračunamo s pomočjo metode per partes (glej rešitve naloge 72), s čemer dobimo $F(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$. Ko izračunamo še razliko $F(e) - F(1)$, dobimo rezultat 1, kar predstavlja ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije $f(x) = \ln x$, premici $x = 1$ in $x = e$ ter abscisna os, saj je na intervalu $[-1, 2]$ funkcija $f(x)$ pozitivna.



Naloga 87 Izračunaj $f(x) = \int_1^3 (2x - 5\sqrt[3]{x}) \, dx$. Pojasni geometrijski pomen izračunanega integrala.

Rešitev:

$$\int_1^3 (2x - 5\sqrt[3]{x}) \, dx = \left(x^2 - \frac{15x^{\frac{4}{3}}}{4} \right) \Bigg|_1^3 \approx -4.48.$$

Rezultat predstavlja negativno ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije $f(x) = 2x - 5\sqrt[3]{x}$, premici $x = 1$ in $x = 3$ ter abscisna os, saj je na intervalu $[1, 3]$ funkcija $f(x)$ negativna.

Naloga 88 $\int_0^1 (4 + 3x^2) \, dx$ je enako:

(a) 10.

(b) 5.

(c) 12.

(d) 8.

Pojasni še geometrijski pomen izračunanega števila.

Rešitev: Pravilen odgovor je (b). Odgovor predstavlja ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije $f(x) = 4 + 3x^2$, premici $x = 0$ in $x = 1$ ter abscisna os, saj je na intervalu $[0, 1]$ funkcija $f(x)$ pozitivna.

Naloga 89 $\int_0^{\pi} (1 + \cos x)\, \mathrm{d}x$ je enako:

(a) $-\pi$.

(b) π.

(c) 0.

(d) 2π.

(e) -2π.

Rešitev: Pravilen odgovor je (b).

Naloga 90 $\int_{-4}^{4} |x|\, \mathrm{d}x$ je enako:

(a) 24.

(b) 8.

(c) 16.

(d) 0.

(e) -8.

Rešitev: Pravilen odgovor je (c). Dobimo ga z izračunom:

$$\int_{-4}^{4} |x|\, \mathrm{d}x = \int_{-4}^{0} (-x)\, \mathrm{d}x + \int_0^4 x\, \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8 + 8 = 16.$$

3.5 ZAPOREDJA

Naloga 91 Kaj pomeni, da je zaporedje navzgor omejeno in kako je definirana zgornja meja zaporedja?

Rešitev: Zaporedje s splošnim členom a_n je navzgor omejeno, če obstaja tako število z, da velja $a_n \leq z$, za vsak $n \in \mathbb{N}$ (z drugimi besedami, noben člen zaporedja ni večji od z). Takemu številu z rečemo zgornja meja.

Naloga 92 Dokaži, da je 2 zgornja meja zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{2n-7}{n}$.

Rešitev: Dokazati moramo, da je vsak člen zaporedja manjši ali enak 2. To pomeni, da dokazujemo, da za vsako naravno število n velja neenakost $a_n \leq 2$ oz. $\frac{2n-7}{n} \leq 2$. Slednje je res natanko tedaj, ko je $2n - 7 \leq 2n$, kar pa drži natanko takrat, ko je $-7 \leq 0$. Zadnja neenakost drži, zato je dokaz zaključen.

Naloga 93 Dokaži, da je 4 zgornja meja zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{4n-3}{n}$.

Rešitev:

$a_n \leq 4, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{4n-3}{n} \leq 4 \quad / \cdot n$

$4n-3 \leq 4n \quad / -4n$

$-3 \leq 0$ ✓

Naloga 94 Kaj je supremum zaporedja?

Rešitev: Supremum (ali natančna zgornja meja) zaporedja je najmanjša zgornja meja zaporedja. Označimo ga s $\sup(a_n)$.

Naloga 95 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna:

(a) Supremum ni vedno člen zaporedja.

(b) Infimum zaporedja je najmanjši člen zaporedja.

(c) Maksimum zaporedja je vrednost največjega člena zaporedja.

(d) Minimum zaporedja zmeraj obstaja.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (a) in (c).

Naloga 96 Dokaži, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n+3}{n}$ strogo padajoče.

Rešitev: Dokazati moramo, da je vsak naslednji člen zaporedja strogo manjši od njegovega predhodnika, t. j. da za vsako naravno število n velja $a_{n+1} < a_n$. To pomeni, da se moramo prepričati, da za vsak n velja neenačba $\frac{(n+1)+3}{n+1} < \frac{n+3}{n}$ oziroma $\frac{n+4}{n+1} < \frac{n+3}{n}$. Da se znebimo ulomka, neenačbo pomnožimo z $(n+1)n$. Ker smo zagotovo množili s pozitivnim številom, se neenakost ohrani in dobimo $(n+4)n < (n+3)(n+1)$, kar je ekvivalentno $n^2 + 4n < n^2 + 4n + 3$. Ker lahko na obeh straneh zadnje neenačbe odštejemo $n^2 + 4n$, dobimo $0 < 3$, kar drži, zato je dokaz zaključen.

Naloga 97 Pojasni razliko med stekališčem in limito zaporedja.

Rešitev: Vsaka limita je hkrati stekališče zaporedja, obratno pa ne velja. V poljubni okolici limite je neskončno mnogo členov zaporedja, medtem ko jih je izven te oklice končno mnogo. V poljubni okolici stekališča je neskončno mnogo členov zaporedja, prav tako pa jih je lahko neskončno tudi izven te okolice. Limita zaporedja, če obstaja, je le ena, stekališč je lahko več.

Naloga 98 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna:

(a) Za omejeno zaporedje stekališče ne obstaja nujno.

(b) Zaporedje je omejeno, ko je navzgor in navzdol omejeno.

(c) Če je neko število limita zaporedja, potem je tudi stekališče tega zaporedja.

(d) Če ima zaporedje eno stekališče, je divergentno.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (b) in (c).

Naloga 99 Zapiši definicijo geometrijskega zaporedja in pojasni, od česa je odvisno padanje, naraščanje ter omejenost takega zaporedja.

Rešitev: Zaporedje s splošnim členom a_n je geometrijsko, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kjer je q konstanta. Glede na q ločimo:

- $q > 1 \Rightarrow$ zaporedje je strogo naraščajoče,
- $q = 1 \Rightarrow$ zaporedje je konstanto,
- $0 < q < 1 \Rightarrow$ zaporedje je strogo padajoče,
- $q < 0 \Rightarrow$ zaporedje ni monotono,
- $|q| > 1 \Rightarrow$ zaporedje ni omejeno,
- $|q| < 1 \Rightarrow$ zaporedje je konvergentno z limito 0.

3.6 VRSTE

Naloga 100 Naj bo $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ vrsta. Zapiši zaporedje delnih vsot te vrste.

Rešitev:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

Naloga 101 Kdaj pravimo, da je vrsta $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergentna in kaj je njena vsota?

Rešitev: Vrsta je konvergentna, če je konvergentno zaporedje njenih delnih vsot $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. V tem primeru je vsota vrste limita zaporedja delnih vsot

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Naloga 102 $\sum_{k=1}^{13} \left(3 + \frac{3}{2}(k-1)\right)$ je enako:

(a) 156.

(b) 154.

(c) -154.

(d) 108.

(e) -156.

Rešitev: Pravilen odgovor je (a). Pri izračunu upoštevamo, da lahko seštevamo v poljubnem vrstnem redu ter formulo za izračun vsote prvih n členov aritmetičnega zaporedja:

$$\sum_{k=1}^{13}\left(3+\frac{3}{2}(k-1)\right) = \sum_{k=1}^{13}\left(3+\frac{3}{2}k-\frac{3}{2}\right) = \sum_{k=1}^{13}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{13}\left(\frac{3}{2}(1+k)\right) = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{13}(1+k) = \frac{3}{2}\big(\underbrace{2+3+\cdots+14}_{\text{aritmetično zaporedje}}\big) =$$

Vsota prvih n členov aritmetičnega zaporedja:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{m(a_1+a_m)}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{13\cdot(2+14)}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{13\cdot 16}{2} = 156$$

Naloga 103 Če vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ konvergira, izračunaj njeno vsoto.

Rešitev: Vrsta konvergira, saj je geometrijska s $q=\frac{2}{3}$, za katerega velja $|q|<1$. Vsoto geometrijske vrste dobimo po formuli:

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2.$$

Naloga 104 Če vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ konvergira, izračunaj njeno vsoto.

Rešitev: Ker je vrsta geometrijska in je $q=\frac{2}{3}<1$, vrsta konvergira. Njena vsota je

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3.$$

Naloga 105 Obkroži črko pred konvergentno vrsto:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}3^k$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^k$

Rešitev: Pravilen odgovor je (c). Vse vrste so geometrijske, a le v primeru (c) je izpolnjen pogoj za konvergenco geometrijske vrste, namreč $|q|<1$.

Naloga 106 Geometrijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}a_1q^k$ je konvergentna, če je

(a) $|q|\leq 1$

(b) $q<1$

(c) $|q|<1$

(d) $q\geq 1$.

Rešitev: Pravilen odgovor je (c).

3.7 MEŠANE NALOGE

Naloga 107 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.

(a) Zaporedje s splošnim členom $a_n = 3 \cdot (\frac{3}{2})^n$ je konvergentno.

(b) Vsak lokalni maksimum je stacionarna točka.

(c) Funkcija $f(x) = 2 \ln x$ nima stacionarnih točk.

(d) Nedoločeni integral funkcije je število, ki predstavlja ploščino nekega lika.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (b) in (c). Odgovor (a) je nepravilen, saj členi z naraščanjem n naraščajo proti ∞. Vsak lokalni ekstrem je stacionarna točka (obratno ne velja nujno), zato je odgovor (b) pravilen. Prav tako je pravilen odgovor (c), saj prvi odvod funkcije f ne more biti enak 0 za noben x iz definicijskega območja funkcije, ki je $(0, \infty)$, oz. ker je funkcija na celem definicijskem območju strogo naraščajoča. Odgovor (d) ni pravilen, saj v primeru funkcije, katere graf oz. del grafa leži pod abscisno osjo, izjava ne drži.

Naloga 108 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.

(a) Vsaka stacionarna točka je bodisi maksimum bodisi minimum.

(b) Eksponentna funkcija $f(x) = 5e^{4x}$ nima stacionarnih točk.

(c) Določeni integral funkcije je vedno pozitivno število, ki predstavlja ploščino nekega lika.

(d) Zaporedje s splošnim členom $a_n = 5 - 3(n-1)$ je aritmetično.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (b) in (d). Stacionarna točka je vsaka točka, za katero velja, da je v njej vrednost prvega odvoda enaka 0, tangenta na graf funkcije je v tej točki vzporedna abscisni osi, kar se pa ne zgodi le v lokalnih ekstremih, zato odgovor (a) ni pravilen. Eksponentna funkcija iz primera (b) je strogo naraščajoča in kot taka ne more imeti stacionarnih točk. Odgovor (c) ni pravilen, saj za funkcije, ki so (odsekoma) negativne, trditev ne velja. Zaporedje je aritmetično, če je razlika med poljubnima zaporednima členoma zaporedja konstantna, t.j. $a_{n+1} - a_n = d$ za neko konstanto d. Preverimo lahko torej, da je $a_{n+1} - a_n = (5 - 3(n+1-1)) - (5 - 3(n-1)) = -3$, kar je konstanta, zato je odgovor (d) pravilen.

Naloga 109 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna:

(a) Če negiramo izjavo $\neg p$, dobimo izjavo p.

(b) Implikacija ima prednost pred konjunkcijo.

(c) Za kartezični produkt množic velja $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

(d) $(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$

Rešitev: Pravilna odgovora sta (a) in (c). Če negiramo negacijo izjave, dobimo osnovno izjavo. Konjunkcija ima prednost pred implikacijo. Po De Morganovem pavilu je $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$, zato odgovor (d) ni pravilen.

Naloga 110 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.

(a) Vsak lokalni ekstrem je stacionarna točka.

(b) Kandidate za prevoje dobimo kot ničle prvega odvoda.

(c) Nedoločeni integral funkcije je funkcija.

(d) Eksponentna funkcija $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ nima stacionarnih točk.

Rešitev: Pravilni odgovori so (a), (c) in (d). Izjava (a) drži, saj za vsak lokalni ekstrem velja, da je vrednost prvega odvoda enaka 0. Izjava (b) ni pravilna, kandidate za prevoje namreč dobimo kot ničle drugega odvoda. Odgovor (c) je pravilen, saj je nedoločeni integral funkcije f funkcija F, za katero velja $F'(x) = f(x)$ za vsak x. Odgovor (d) je pravilen, saj je funkcija $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ strogo padajoča funkcija.

Naloga 111 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.

(a) Funkcija tangens je naraščajoča povsod, kjer je definirana.

(b) Vsaka racionalna funkcija ima vsaj en pol.

(c) Če je polinom lihe stopnje, ima vsaj eno realno ničlo.

(d) Če integriramo produkt logaritemske funkcije in polinoma, lahko integriramo vsak faktor posebej in dobljena integrala zmnožimo.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (a) in (c). Racionalna funkcija nima nujno pola (npr. $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$). Če imamo produkt funkcij, ne obstaja pravilo, po katerem bi smeli integrirati vsak faktor posebej in dobljena rezultata pomnožiti (da lahko integriramo vsak člen posebej velja le pri vsoti in razliki funkcij). Integral, opisan v odgovoru (d) je običajno mogoče rešiti z metodo per partes, kjer za u izberemo logaritemsko funkcijo, za dv pa polinom.

Naloga 112 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.

(a) Naravno definicijsko območje funkcije $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x+5}$ je $(-5, \infty)$.

(b) Funkcija $f(x) = \sin^2 x$ je soda.

(c) Če je $f(x) = \sqrt{2x}$, potem je $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{2a+2h}-\sqrt{2a}}{h}$.

(d) Tretji odvod od $f(x) = \cos x$ je $f'''(x) = -\cos x$.

Rešitev: Pravilna odgovora sta (b) in (c). Odgovor (a) ni pravilen. Izpolnjena morata biti hkrati pogoja $x-2 \geq 0$ in $x+5 \geq 0$, kar je res, ko je $x \geq 2$. Odgovor (b) drži, saj je $f(-x) = \sin^2(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$ za vsak x. Odgovor (c) je pravilen, saj je odvod funkcije v dani točki enak limiti diferenčnega kvocienta v tej točki, ko gre h proti 0. Odgovor (d) ni pravilen, saj je tretji odvod funkcije $\cos x$ enak $\sin x$.

Naloga 113 Obkroži črko pred vsako izjavo, ki je pravilna.

(a) Funkcija $f(x) = x + \cos x$ ima v 0 lokalni ekstrem.

(b) $\displaystyle\int e^{3x}\,\mathrm{d}x = e^{3x} + C$.

(c) Argument kompleksnega števila $z = -4-4i$ je $\frac{5\pi}{4}$.

(d) Imaginarni del kompleksnega števila $\frac{3+i}{4-5i}$ je $-\frac{1}{5}$.

Rešitev: Pravilen odgovor je (c). Izjava (a) ni pravilna. Namreč, če je $f(x) = x + \cos x$, potem je $f'(0) = 1$, torej 0 ne more biti kandidat za lokalni ekstrem. Izjava (b) ni pravilna, saj je $\displaystyle\int e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x} + C$ (za integriranje uporabi novo spremenljivko $t = 3x$). Odgovor (c) drži: argument kompleksnega števila (kar je kot, pod katerim kompleksno število leži v kompleksni ravnini) izračunaj s pomočjo formule $\arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{-4}{-4} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ in prištej π, saj kot $\frac{\pi}{4}$ leži v prvem kvadrantu, kompleksno število z pa v tretjem kvadrantu. Izjava (d) ni pravilna. Za izračun imaginarnega dela kompleksnega števila je potrebno kompleksno število zapisati v obliki $a+ib$, kjer sta a in b realni števili. Izračunamo torej:

$$\frac{3+i}{4-5i} = \frac{(3+i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)} = \frac{7+19i}{41} = \frac{7}{41} + i\frac{19}{41}.$$

Imaginarni del del kompleksnega števila $\frac{3+i}{4-5i}$ je torej $\frac{19}{41}$.

Kvizi iz matematike I: 2. del

Aleksandra Tepeh
Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Maribor, Slovenija
aleksandra.tepeh@um.si

Pričujoča zbirka rešenih nalog je učni pripomoček, v prvi vrsti namenjen študentom 1. letnika visokošolskih študijskih programov Računalništvo in informacijske tehnologije in Informatika in tehnologije komuniciranja na UM FERI, ki poslušajo predmet Matematika 1. Ker večina naravoslovnih in tehniških študijskih smeri drugih fakultet v prvem letniku pokriva enako snov, je tako namenjen tudi širši publiki. Prvi del zbirke pokriva teme iz osnov logičnega sklepanja, množice, kompleksnih števil in funkcij. V tem (drugem) delu zbirke so obravnavane limite, odvodi, integrali, zaporedja in vrste. Zbirka kot celota študenta nagovori k pripravi dobrih zapiskov, kar je eden izmed temeljev dobre priprave na izpite.

DOI
https://doi.org/
10.18690/um.feri.2.2024

ISBN
978-961-286-844-4

Ključne besede:
funkcije,
limita,
odvodi,
integrali,
zaporedja,
vrste

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

NAČRT ZA OKREVANJE IN ODPORNOST

Univerza v Mariboru

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VISOKO ŠOLSTVO, ZNANOST IN INOVACIJE

Financira Evropska unija
NextGenerationEU

Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko

ta matematična zbirka nalog je odličen učni pripomoček, ki študentom omogoča sistematično učenje, razumevanje in utrjevanje snovi predmeta Matematika I, ter s tem prispeva k njihovemu uspehu in samozavesti pri reševanju matematičnih problemov.

Dragana Božovic
Univerza v Mariboru