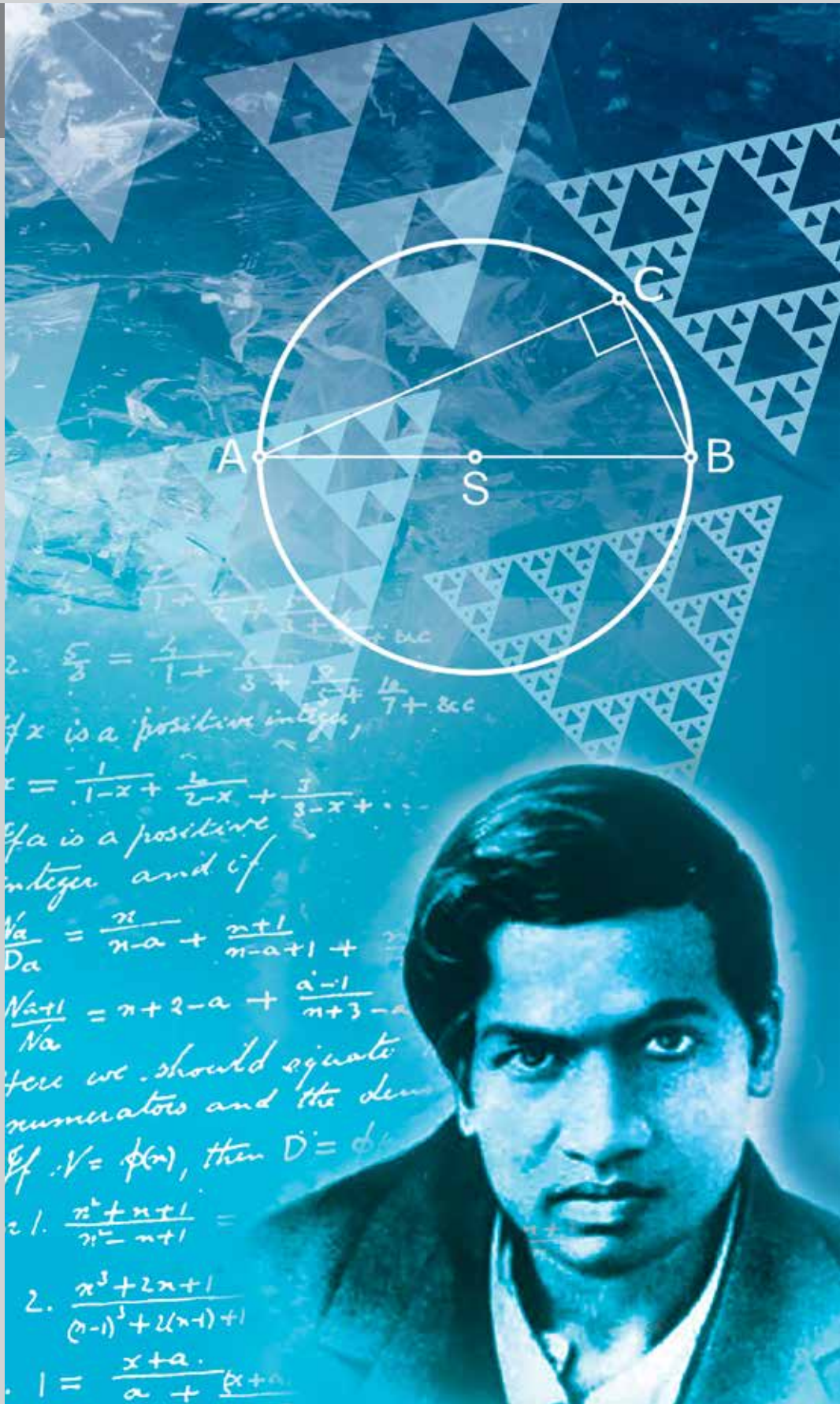
Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2019, letnik 25

2



IZ TEORIJE ZA PRAKSO:

Bernoullijeva lemniskata

Vzorci z olimpijskimi krogi

IZ RAZREDA:

Razvijanje in spremljanje problemskih znanj

Dapoma – utrjevanje poštevanke

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO:

Srinivasa Aiyanger Ramanujan – 2. del

NOVICE:

Raziskovalne naloge

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Matematika v šoli

2019, letnik 25 2

VSEBINA

mag. Mateja Sirnik
Kaj je geometrija

IZ TEORIJE ZA PRAKSO

dr. Marko Razpet
Bernoullijeva lemniskata 2

mag. Mateja Sirnik
Projekt ATS 2020 skozi učenje matematike 7

Jerneja Bone
Vzorci z olimpijskimi krogi 11

IZ RAZREDA

Sonja Ivančič
Razvijanje in spremljanje problemskih znanj v povezavi s pojmi krivulja, funkcija, premica in stožnica 23

Julija Viličnjak in dr. Alenka Lipovec
Dapoma – didaktična igra za utrjevanje poštevanke 39

Jasna Černic
Uporaba pozicijskega računala pri matematiki v podaljšanem bivanju 45

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO

mag. Milena Strnad in Aleksander Simonič
Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) – 2. del 51

NOVICE

dr. Borut Jurčič Zlobec
Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2019 62

Kaj je geometrija?

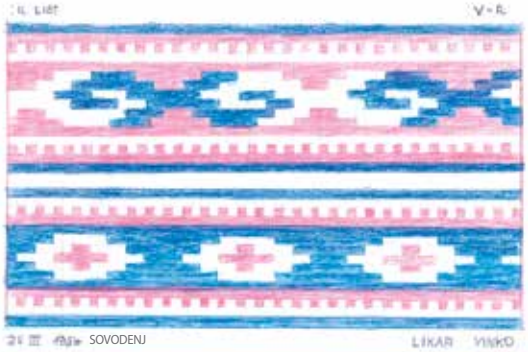
Geometrija je ena najstarejših znanosti, beseda *geometrija* izvira iz grških besed γη [ge] (starejša oblika: γαία [gaja]) = *zemlja* + μετρία [metria] = *merjenje*.

Začetke geometrije najdemo v Mezopotamiji, Egiptu (Rhindov papirus, Moskovski papirus) in v dolini reke Ind okoli leta 3000 pr. n. št. Ukvarjali so se s problemi merjenja zemlje-njiv. Za očeta sodobne matematične geometrije velja Evklid iz Aleksandrije. Njegovo delo *Elementi* je lahko še danes zgled za znanstven način pisanja. Evklid je izhajal iz majhnega števila očitnih resnic, ki jih je imenoval aksiomi oziroma postulati. Na osnovi aksiomov pa je izpeljal vse bolj zapletene značilnosti.

Morda geometrija v sedanjem času zgublja veljavo, če pa se ozremo po naravi, vidimo, koliko geometrijskih vzorcev nam nudi. Čebele gradijo satje v obliki pravilnih šestkotnikov, ker jim ta način gradnje omogoča najbolj ekonomičen izkoristek prostora in porabljenega voska. Za gradnjo čebeljega satja v naravi pa se skriva tlakovanje evklidske ravnine, ki jo lahko na tri načine tlakujemo s skladnimi pravilnimi večkotniki: z enakostraničnimi trikotniki, s kvadrati ali s pravilnimi šestkotniki.

Članki *Bernoulijeva lemniskata*, *Vzorci z olimpijskimi krogi*, *Razvijanje in spremljanje problemskih znanj v povezavi s pojmi krivulja, funkcija, premica in stožnica* nam govorijo o tem, kako povezati matematiko s pojavi, ki nas obdajajo. Želimo si, da bi videli uporabnost geometrije, ko opazujemo lepoto narave okrog nas.

Primer geometrijskega vzorca kot izdelka pri pouku v osnovni šoli iz 60ih let prejšnjega stoletja:



mag. Mateja SIRNIK, *odgovorna urednica*

Mateja Sirnik

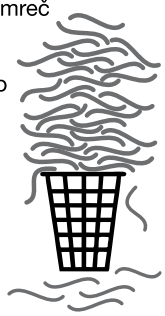
Spoštovane bralke in bralci,

tokrat smo vam poslali **revijo brez zaščitne folije**. Za to smo se odločili po premisleku zaradi škode, ki jo le-ta povzroča. Na leto namreč razpošljemo prek **14.000** izvodov revij, zavitih v folijo.

Zavedamo se, da se nezaščitena revija lahko pri dostavi poškoduje, pa vendar se nam to zdi sprejemljivo v primerjavi s škodo, ki jo 14.000 zaščitnih folij povzroča okolju.

Upamo, da boste našo odločitev sprejeli z razumevanjem.

Na e-naslovu *zalozba@zrss.si* bomo veseli vašega odziva.



ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXV, številka 2, 2019

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Odgovorna urednica: mag. Mateja Sirnik, Zavod RS za šolstvo
Uredniški odbor:
dr. Darja Antolin Drešar, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta,
Jerneja Bone, Zavod RS za šolstvo,
mag. Melita Gorše Pihler, Zavod RS za šolstvo,
mag. Valentina Herbaj, Zavod RS za šolstvo,
dr. Marjan Jerman, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko,
Silva Kmetič,
Sabina Kumer, Šolski center Krško – Sevnica,
dr. Zlatan Magajna, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta,
dr. Sandra Mršnik, Zavod RS za šolstvo,
mag. Sonja Rajh, Zavod RS za šolstvo,
Simona Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem,
dr. Amalija Žakelj, Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta,
dr. Lucija Željko, Osnovna šola Dravlje,
dr. Herremans Adriaan, Universiteit Antwerpen, Belgija,
dr. Jasmina Milinković, Pedagoška fakulteta Beograd, Srbija,
dr. Evgenia Sendova, Institute of Matematics and Informatics at the Bulgarian academy of Sciences, Bolgarija.

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj
Prevod povzetkov v angleščino: Ensitra prevajanje, Brigita Vogrinec Škraba, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Fotografije: avtorji člankov
Računalniški prelom in tisk: Design Demšar, d. o. o., Present, d. o. o.
Naklada: 520 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Kidričeva 53, 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirnik@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe, 8,50 € za študente, dijake in upokojence. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

© Zavod Republike Slovenije za šolstvo, 2019
Vse pravice pridržane. Brez založnikovega pisnega dovoljenja ni dovoljeno nobenega dela te revije na kakršenkoli način reproducirati, kopirati ali kako drugače razširjati. Ta prepoved se nanaša tako na mehanske oblike reprodukcije (fotokopiranje) kot na elektronske (snemanje ali prepisovanje na kakršenkoli pomnilniški medij).

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Bernoullijeva lemniskata

Dr. Marko Razpet
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Izvleček

V članku na kratko opišemo zgodovino Bernoullijeve lemniskate in nekaj njenih geometrijskih konstrukcij, ki jih realiziramo z Geo-Gebro. Izpeljemo enačbo Cassinijevega ovala, ki je v posebnem primeru Bernoullijeva lemniskata. Podane so nekatere njene lastnosti.

Ključne besede: origami, J. Bernoulli, G. D. Cassini, R. Descartes, Cassinijev oval, elastična krivulja, lemniskata, ogrinjača, geometrijska konstrukcija, GeoGebra

Lemniscate of Bernoulli

Abstract

The article briefly describes the history of the lemniscate of Bernoulli and some of its geometric constructions, which are realized with GeoGebra. The equation of the Cassini oval is derived, which is a special case of the lemniscate of Bernoulli. Some of its properties are given.

Keywords: Origami, J. Bernoulli, G. D. Cassini, R. Descartes, Cassini oval, elastic curve, lemniscate, envelope, geometric construction, GeoGebra

Uvod

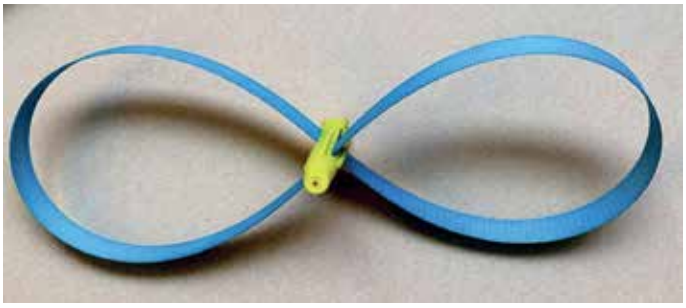
V osemdesetih letih preteklega stoletja sta otroka dobila tanko knjižico, ki obravnava umetnost prepogibanja papirja – origami. Slikovna navodila, kako se prepogiba papir, sta hitro razumela in v nekaj urah je bilo stanovanje polno papirnatih ptičev, tjulnjev, zajčkov in barčic. Če drugega ne, je bil pri hiši nekaj časa mir, otroka pa sta razvijala domišljijo in ročno spretnost. Kasneje smo vsi skupaj spoznali, da je prepogibanje papirja prava matematična znanost, o kateri je nastala in še nastaja obsežna literatura.

Slika 1: Upogib papirja.

Origami je doma na Japonskem in se je od tam razširil po vsem svetu. Po naših šolah je lahko del likovne vzgoje, saj razvija odnos do ustvarjalnega in umetniškega dela. Prepogibanje papirja pa ni le zabava in umetnost, ampak je lahko tema resnega matematičnega raziskovanja. O tem pišejo seminarske naloge, članke, diplomska in magistrska dela ter doktorske disertacije.

V prispevku se ne bomo posebej ukvarjali s prepogibanjem papirja, ampak z neko matematično krivuljo, ki jo opazimo pri upogibu papirja, preden ga do konca prepognemo do ostrega roba. Pravokoten, nezmečkan list nekoliko debelejšega papirja ali prozorne folije previdno upognemo tako, da združimo nasprotna robova pod pravim kotom. Dobimo valjasto ploskev, katere prečni presek je krivulja, ki jo bomo obravnavali v nadaljevanju. Papir je prožen in zanj veljajo zakoni elastomehanike, tako kot na primer tanka prožna palica. Zato zavzame določeno obliko, ki je razvidna na sliki 1.

Upogibamo in prepogibamo pa lahko tudi papirnate in drugačne trakove in dobivamo zanimive oblike. Primerno dolg plastičen trak od embalaže se lepo upogiba in prav tako dobimo oblike, ki spominjajo na sliko 1. Brez težav lahko že otroci naredijo iz takega traku lepo, simetrično pentljo, podobno znaku ∞, kakršna je na sliki 2. Za pravokotno sekanje poskrbi primeren zidni vložek.



Slika 2. Dvojni upogib prožnega traku.

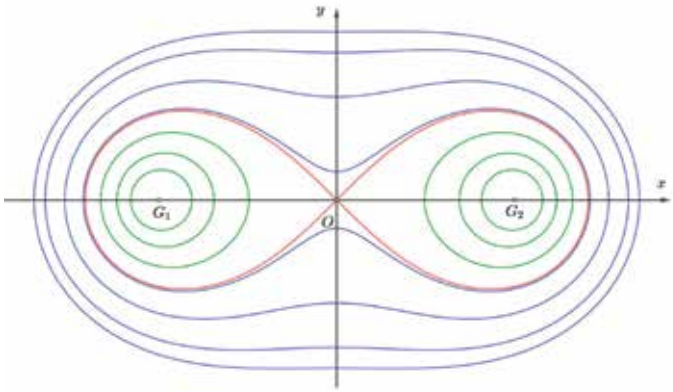
Sredinsko črto upognjenih tankih prožnih palic ali trakov mehaniki imenujejo *elastična krivulja*. Za take krivulje sta se zanimala matematika, brata Jakob (1655–1705) in Johann Bernoulli (1667–1748). Rodbina Bernoullijevih je zanimiva, ker je dala več odličnih matematikov in fizikov. Več stvari so poimenovali po kakšnem Bernoulliju, tako da se včasih težko ugotovi, po katerem. Pogosto sta dva približno v istem času študirala isti problem in objavila podobna članka, celo v isti reviji. Jakob je leta 1694 v reviji *Acta Eruditorum* objavil članek, ki dejansko omenja algebrsko krivuljo, ki ima enačbo $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$. Članek je napisan v latinščini s črkami, ki so jih takrat uporabljali tiskarji. Nastal je sicer ob posebnem problemu elastične krivulje, uporablja pa besedo *lemnisci*, kar je rodilnik ednine samostalnika *lemniscus*. Bernoulli piše, da ima krivulja z enačbo $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$, ki je četrte razsežnosti, obliko »jacentis notæ octonarii ∞, seu complicata in nodum fasciæ, sive lemnisci, d'un noud de ruban Gallis.« Besedilo je deloma v francoščini. Namesto enačba ali krivulja četrte razsežnosti danes rečemo enačba ali krivulja četrte stopnje. Bernoulli piše, da ima omenjena krivulja obliko ležeče osmice, torej ∞, ali v vozel zvitega traku ali *lemniskusa*, obliko vozla francoskega traku. Očitno je bila beseda *lemniscus* matematikom všeč in krivuljo so poimenovali *curva lemniscata*, s trakovi okrašena krivulja, krajše *lemniskata*. Sicer pa je beseda lemniscus grškega izvora. Stari Grki so zmagovalcem na športnih igrah na glavo pripeli lovorjev venec s posebnim volnenim trakom, ki se je v grščini imenoval *lemniskos*. Beseda lemniscus je znana tudi v anatomiji. Navadni ljudje imamo lemniscuse v glavi, ne da bi za to sploh vedeli, na primer *lemniscus medialis* in *lemniscus lateralis*.

V Bernoullijevem prispevku opazimo, da avtor še ni uporabljal znaka za kvadrat, na primer x^2, ampak je pisal je kar xx. Eksponentni zapis se je ustalil v času Leonharda Eulerja (1707–1783). V nekem obdobju so eksponentni zapis x^n uporabljali za naravne $n \geq 3$.

Znanstveno revijo *Acta Eruditorum*, kar v latinščini pomeni dela učenjakov, izobražencev, sta leta 1682 v Leipzigu postavila na noge nemški filozof in znanstvenik Otto Mencke (1644–1707) ter bolj znani filozof in matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Od znanih so poleg Bernoullijev v njej objavljali še Euler, Tschirnhaus, Laplace in Lalande. Revija je objavljala teološke, pravne, medicinske, fizikalne, matematične, zgodovinske, geografske, filozofske in filološke razprave. Besedo lemniskata so uporabili tudi za dve drugi krivulji, Boothovo in Geronovo lemniskato. V tem prispevku bomo razpravljali samo o Bernoullijevi lemniskati, krajše o lemniskati, ki ima v pravokotnih kartezičnih koordinatah enačbo $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Jakob Bernoulli še ni vedel, da je lemniskati sorodne krivulje, *Cassinijeve ovale*, že poznal Giovanni Domenico Cassini (1625–1712), italijansko-francoski matematik in astronom. Več o tem najdemo na primer v [2]. Lemniskata je poseben primer Cassinijevih ovalov. Kako so definirani, bomo spoznali v nadaljevanju.

Analitična obravnava in konstrukcije

Znano je, da je *elipsa* množica točk T v ravnini, za katere je *vsota* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 ($G_1 \neq G_2$) te ravnine konstantna. Podobno je *hiperbola* množica točk T v ravnini, za katere je *razlika* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 te ravnine konstantna. Kaj pa če vsoto oziroma razliko nadomestimo s produktom ali kvocientom? Za *kvocient* je odgovor preprost: krožnica, ki ji pravimo *Apolonijeva krožnica*. Če pa vzamemo produkt, dobimo Cassinijev oval. Torej: *Cassinijev oval* je množica točk T v ravnini, za katere je *produkt* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 te ravnine konstanten.



Slika 3: Družina Cassinijevih ovalov.

Če označimo $r_1 = |G_1T|$ in $r_2 = |G_2T|$ ter izberemo za konstanto neko dolžino k, potem je enačba Cassinijevega ovala $r_1 \cdot r_2 = k^2$. Pri tem smo vzeli k^2 zato, da uskladimo dimenzije obeh strani enačbe. Točki G_1 in G_2 po zgledu elipse in hiperbole imenujemo *gorišči* ovala. S točkama G_1 in G_2 smo v ravnini vzpostavili tako imenovani *bipolarni koordinatni sistem*. Razdalji r_1 in r_2 sta v njem koordinati, ki točke T ne določata enolično, a ju kljub temu pogosto uporabljamo. Točki T in T', ki sta si zrcalni glede na premico skozi G_1 in G_2, imata enaka r_1 in r_2, ki ju imenujemo *prevodnici* ustrezne točke (glej [4]). Elipsa ima v bipolarnem koordinatnem sistemu enačbo $r_1 + r_2 = 2a$, hiperbola pa $|r_1 - r_2| = 2a$.

René Descartes (1596–1650) je uveljavil pravokotni koordinatni sistem Oxy in zapis krivulj v po njem imenovanih *kartezičnih koordinatah*, po navadi x in y. Dejstvo, da ima točka T koordinati x (abscisa) in y (ordinata), zapišemo na kratko s $T(x, y)$. Po Descartesu krivuljo zapišemo z enačbo $f(x, y) = 0$, kjer je $(x, y) \to f(x, y)$ neka funkcija dveh spremenljivk. Kako pridemo do enačbe Cassinijevega ovala? V koordinatnem sistemu Oxy izberemo gorišči $G_1(-c, 0)$ in $G_2(c, 0)$. Pri tem je $c = |G_1G_2|/2 > 0$, kar je polovica medgoriščne razdalje. Prevodnici točke $T(x, y)$ sta

$$r_1 = |G_1T| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ r_2 = |G_2T| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Enačba Cassinijevega ovala v kartezičnih koordinatah je potem

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=k^2.$$

Po odpravi korenov in preureditvi dobimo

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=k^4-c^4.$$

Oval je simetričen glede na os x in glede na os y ter glede na koordinatno izhodišče O, ki je njegovo središče. Oblika ovala je močno odvisna od razmerja k/c. Za $k > c$ je oval enodelna, za $k < c$ pa dvodelna sklenjena krivulja, ki sama sebe ne seka.

Zanimiv je mejni primer $k = c$, ko je krivulja sicer enodelna, toda samo sebe preseka v točki O (Slika 3). To je *Bernoullijeva lemniskata*, ki ima v bipolarnih koordinatah enačbo $r_1 \cdot r_2 = c^2$, v pravokotnih kartezičnih pa

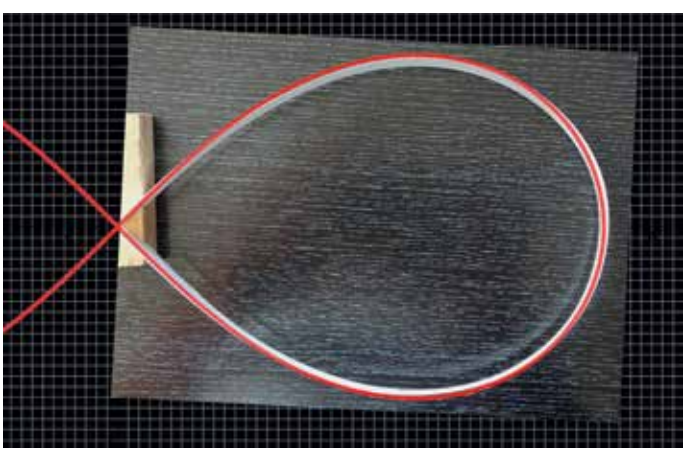
$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2).$$

Krivulja poteka skozi koordinatno izhodišče, je simetrična glede na obe koordinatni osi in glede na svoje samopresečišče O, kjer se seka pod pravim kotom. Tangenti v O sta premici $y = x$ in $y = -x$. Os x preseka v točkah $P(-c\sqrt{2},0)$ in $Q(c\sqrt{2},0)$. To sta temeni lemniskate. Če vpeljemo $a = c\sqrt{2}$, kar je *polos* lemniskate, lahko njeno enačbo zapišemo v obliki

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

Z uvedbo polarnih koordinat r in φ, tako da je $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$, dobimo enačbo lemniskate v polarni obliki: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

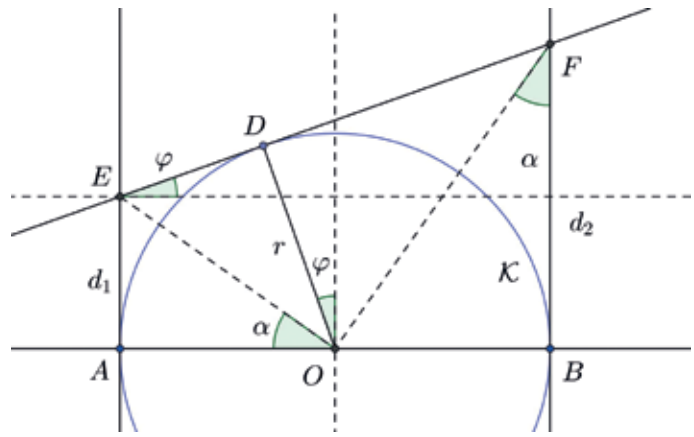
Da bi se prepričali o pravilnosti Bernoullijevih izračunov upogiba prožnega traku, ga fotografiramo in fotografijo postavimo z GeoGebro za podlago, čeznjo pa narišemo lemniskato po enačbi. Za pravokotnost traku poskrbi košček lesa, v katerega pod pravim kotom zažagamo dve zarezi. Fotografijo v GeoGebri po potrebi nekoliko zasučemo, parameter a pa prilagodimo tako, da se izračunana krivulja in tista na fotografiji ujemata v samopresečišču in temenu (Slika 4). Očitno je ujemanje povsod zelo dobro.



Slika 4: Primerjava oblike upognjenega traku in lemniskate.

Posamezne točke lemniskate dobimo geometrijsko na podlagi katerekoli relacije oblike $d_1 \cdot d_2 = c^2$, kjer so d_1, d_2 in c dolžine nekih daljic, pri čemer je c konstanta. Oglejmo si nekoliko manj znan primer iz kitajske matematične zakladnice.

Kitajski matematik Li Ye (1192–1279), morda bolj znan kot Li Zhi, je živel v času vladanja dinastije Song (960–1279). Leta 1248 je Li Ye dokončal zanimivo delo z nenavadnim naslovom *Ceyuan haijing*, kar pomeni *Morsko ogledalo meritev kroga*. V njem obravnava številne geometrijske naloge, ki jih prevede na algebrske enačbe.



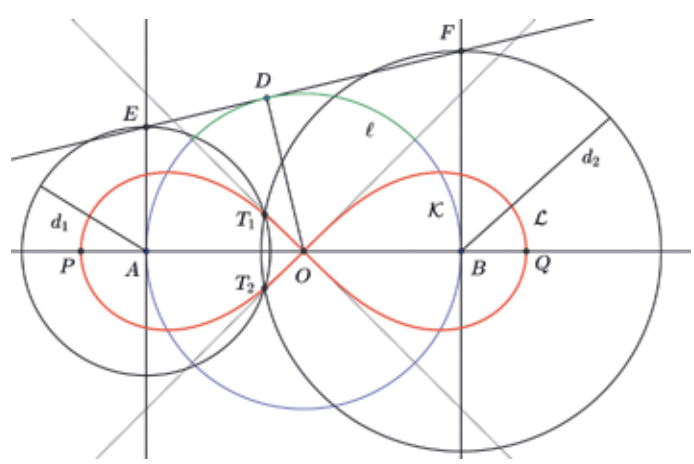
Slika 5: K dokazu enakosti $d_1 d_2 = r^2$.

V eni od nalog (vir [1]) uporabi krožnico $\mathcal{K}$ s polmerom r, v njej premer s krajiščema A in B, v katerih postavi pravokotnici, na krožnici pa izbere točko $D \neq A$, B in v njej konstruira tangento, ki seka pravokotnici v točkah E in F. Nato trdi, da velja enakost $|AE| \cdot |BF| = r^2$, in sicer neodvisno od izbire točke D (Slika 5).

Da dokažemo enakost v zgornji trditvi, označimo na kratko $d_1 = |AE|$ in $d_2 = |BF|$ ter z O središče krožnice $\mathcal{K}$. Nato načrtamo daljici OE in OF in hitro ugotovimo: $|AE| = |ED|$, $|BF| = |FD|$, $\sphericalangle EOA = \sphericalangle OFB = \alpha$ (Slika 5). Trikotnika AOE in BFO sta pravokotna in sta si podobna, ker se ujemata v kotu α in v pravem kotu. Zato velja relacija $d_1/r = r/d_2$, iz katere sledi $d_1 d_2 = r^2$.

Štirikotnika $OBFD$ in $AODE$ sta deltoida, ker je $|FB| = |FD|$, $|ED| = |EA|$ in $|OA| = |OD| = |OB| = r$. Trikotnik EOF je podoben trikotnikoma AOE in BFO.

Če obstaja trikotnik s stranicami $2r$, d_1 in d_2, se pomožni krožnici s središčema v A in B ter z ustreznima polmeroma d_1 in d_2 sekata v točkah T_1 in T_2, ki ležita simetrično glede na premico skozi A



Slika 6: Nastanek Bernoullijeve lemniskate.

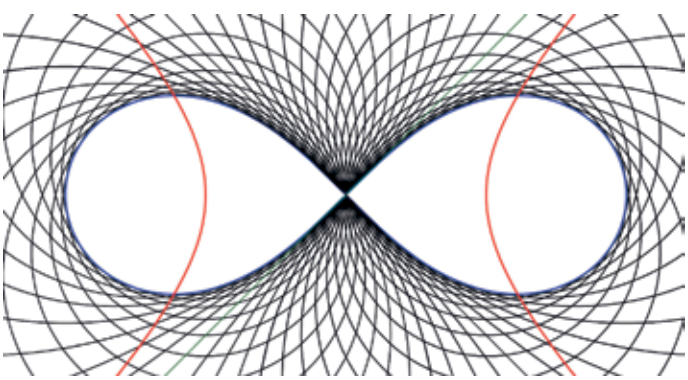
in B. Ko je $d_1 = d_2$, se T_1 in T_2 zlijeta v O, kjer se pomožni krožnici dotikata.

Vedno velja relacija $d_1 + d_2 \geq 2r$, kar sledi iz relacije med aritmetično in geometrično sredino dveh pozitivnih števil: $(d_1 + d_2)/2 \geq \sqrt{d_1 d_2} = \sqrt{r^2} = r$. Pri tem nastopi enačaj natanko tedaj, ko je $d_1 = d_2 = r$. Takrat sta omenjena deltoida kvadrata, polmer OD pravokoten na premer AB, točka D pa razpolavlja daljico EF.

Da točki T_1 in T_2 obstajata, morata biti izpolnjena še pogoja $d_1 + 2r \geq d_2$ in $d_2 + 2r \geq d_1$, kar lahko strnemo v $|d_2 - d_1| \leq 2r$. Ta pogoj velja, če je kot φ, ki ga daljica OD oklepa s simetralo daljice AB, manjši kot 45°. Ustrezni krožni lok na $\mathcal{K}$ je označen z l. To sledi iz relacije $|d_2 - d_1| = 2r \tan|\varphi|$. Pri $|\varphi| = 45°$ se točki T_1 in T_2 spet zlijeta v eno, pomožni krožnici pa se dotikata ena znotraj druge.

Ko spreminjamo dotikališče D po krožnem loku l, opišeta T_1 in T_2 krivuljo $\mathcal{L}$, za katero velja: produkt razdalj katerekoli točke T na $\mathcal{L}$ od točk A in B je stalen, in sicer je enak kvadratu polovične razdalje med A in B. Krivulja je očitno Bernoullijeva lemniskata (Slika 6). Točki A in B sta gorišči lemniskate in določata njeno os. Njeno središče je točka O, temeni P in Q na njeni osi pa sta oddaljeni za $r\sqrt{2}$ od O. Konstrukcijo se da elegantno izvesti z GeoGebro. Poskrbimo samo za to, da točki T_1 in T_2 puščata sled.

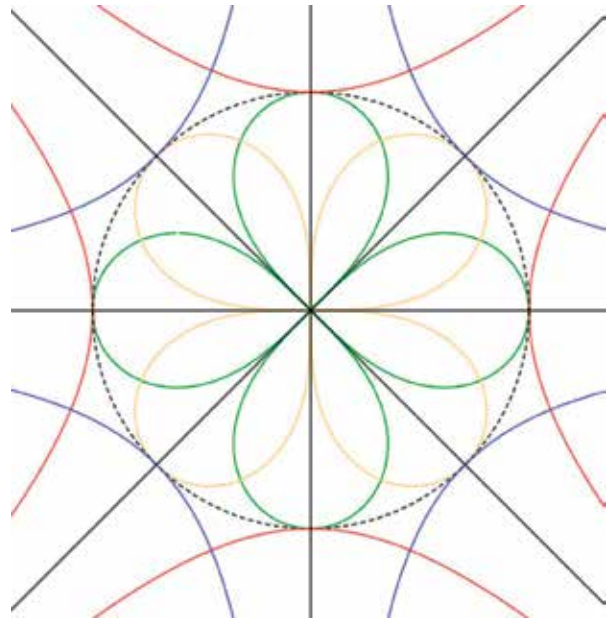
Od mnogih zanimivosti v zvezi z lemniskato jih omenimo samo nekaj. Lemniskata je namreč povezana z enakoosno hiperbolo $x^2 - y^2 = a^2$. Družina krožnic, ki imajo na njej središča in potekajo skozi koordinatno izhodišče O, ogrinjajo lemniskato $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2)$, kar kaže slika 7, do katere pridemo z GeoGebro z nekaj ukazi. V vsaki točki lemniskate se jo dotika natančno ena krožnica iz družine.



Slika 7: Lemniskata kot ogrinjača krožnic.

Omembe vredna zanimivost lemniskate je, da če na krožnici z enačbo $x^2 + y^2 = a^2$ zrcalimo enakoosno hiperbolo $x^2 - y^2 = a^2$, dobimo lemniskato $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Na sliki 8 je na krožnici zrcaljenih več enakoosnih hiperbol, ki se krožnice dotikajo. Tako dobimo več lemniskat, ki so ena glede na drugo zasukane za kot 45° okoli središča krožnice.

Ponovimo, kaj je *zrcaljenje točke na krožnici* s polmerom a in središčem v točki O. To je geometrijska transformacija, ki jo opišemo na kratko takole: zrcalna točka točke T na tej krožnici je točka T', če T' leži na istem poltraku s krajiščem O kot točka T in če je $|OT| \cdot |OT'| = a^2$. Če je T zunaj krožnice, je T' znotraj nje in



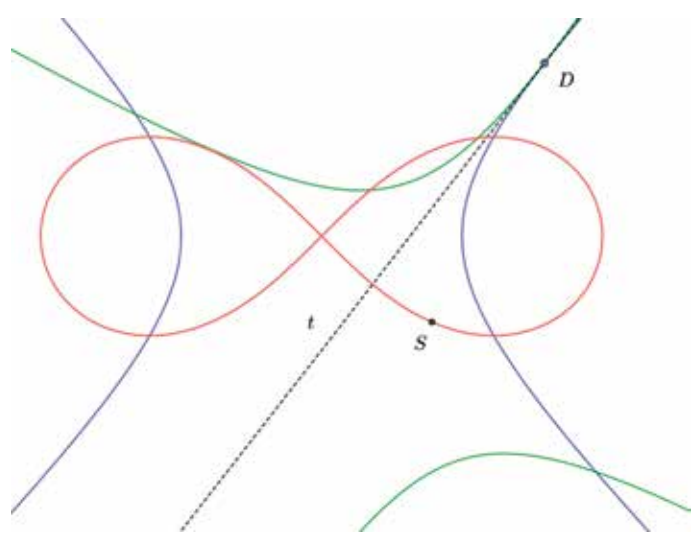
Slika 8: Zrcaljenje hiperbol na krožnici.

obratno. Če je T zelo daleč od O, je T' zelo blizu O in obratno. Če je T na krožnici, potem je $T' = T$. V pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu Oxy imata T in T' koordinate: $T(x, y)$ in $T'(x', y')$. Pri tem velja:

$$x' = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

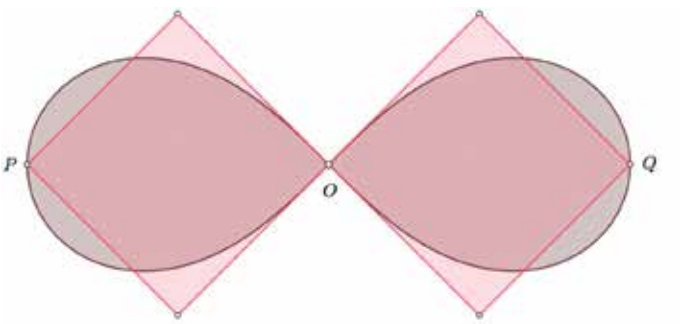
Zrcaliti krivuljo na krožnici seveda pomeni zrcaliti vse točke te krivulje. Rezultat je neka nova krivulja. GeoGebra ima že vgrajeno funkcijo, s katero lahko zrcalimo geometrijske objekte na krožnici. Tako lahko hitro ustvarimo sliko 8.

Oglejmo si še kotaljenje (brez drsenja) enakoosne hiperbole po njej skladni hiperboli, ki miruje. Obe hiperboli se v vsakem položaju dotikata v točki D in imata v njej skupno tangento t. Pri kotaljenju se D pomika po mirujoči hiperboli. Da se dokazati, da središče S kotaleče se hiperbole pri tem opisuje lemniskato. Sliko 9 brez težav realiziramo z GeoGebro.



Slika 9: Kotaljenje hiperbole po hiperboli.

V zvezi z lemniskato je kar nekaj zahtevnejših problemov. Odgovorimo samo na vprašanje, kakšno ploščino omejujeta oba lista lemniskate. Ploščino S dobimo z razmeroma enostavnim integralom, če lemniskato zapišemo v polarnih koordinatah: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Rezultat je preprost: $S = a^2 = 2c^2$. Ploščina je torej enaka skupni ploščini dveh kvadratov s stranico c, ki ju lahko lepo namestimo na lemniskato (Slika 10).



Slika 10: Ploščina lemniskatinih listov.

Težji problem je izračunati dolžino loka lemniskate, kajti naletimo na integral, ki ni elementaren. Zgodovinsko pa je s tem ravno lemniskata poskrbela, da se je začela razvijati teorija eliptičnih funkcij in integralov. Nekaj lažjih pa tudi težjih problemov v zvezi z lemniskato je rešenih v obsežni matematični literaturi, nekaj pa tudi v študijskem gradivu [3].

Lemniskata je tudi uporabna krivulja. Njen gladek prehod skozi središče je vzor graditeljem železnic, ko naredijo prehod iz levega ovinka v desnega ali obratno. Pri konstantni hitrosti tirnega vozila po lemniskati se namreč sredobežna sila lepo zvezno spreminja po velikosti in smeri, ne pa sunkovito.

Zaključek

O Bernoullijevi lemniskati smo v prispevku v resnici povedali bolj malo. Krivuljo so v zadnjih treh stoletjih temeljito raziskovali številni matematiki in prišli do presenetljivih rezultatov, od katerih mnogi niso ravno trivialni, ker zahtevajo kar precej znanja geometrije in analize. Kljub temu pa upamo, da bo marsikdo po branju prispevka le poiskal primerno knjigo, ponovil katero od opisanih konstrukcij z GeoGebro ali pa vsaj vzel v roke papirje in trakove in jih upogibal tako, kot je razloženo v uvodu.

Literatura

[1] P. Y. Ho, Li, Qi in Shu (2000). *An Introduction to Science and Civilization in China.* New York: Dover Publications, Mineola.

[2] A. Ostermann, G.Wanner (2012). *Geometry by Its History*, Springer, Berlin, Heidelberg.

[3] M. Razpet (2019). *Bernoullijeva lemniskata*. Študijsko gradivo http://www.pef.uni-lj.si/matwww/lemniskata01.pdf (24. junij 2019).

[4] I. Vidav (1968). *Višja matematika I*. Ljubljana: DZS.

Projekt ATS 2020 skozi učenje matematike

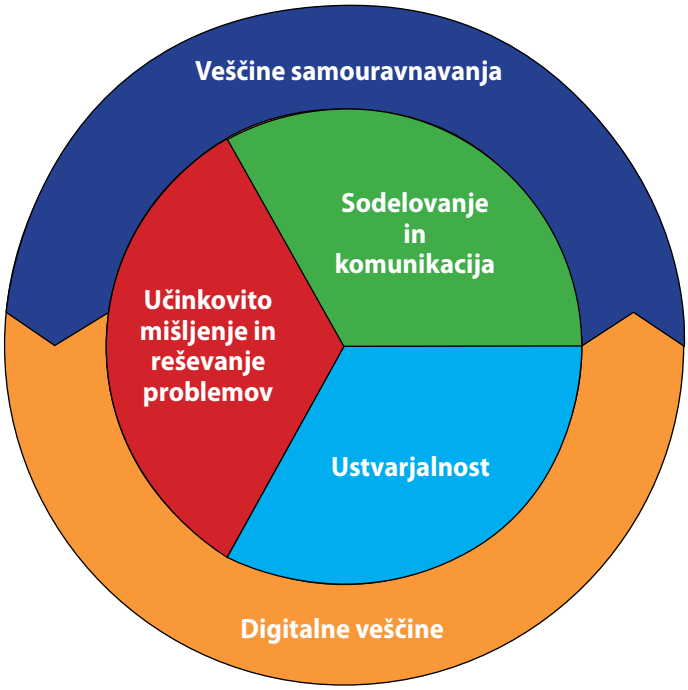
Mag. Mateja Sirnik
Zavod RS za šolstvo

V obdobju 2015–2018 je na Zavodu RS za šolstvo potekal mednarodni projekt ***Spremljanje in vrednotenje prečnih veščin*** (Assessment of Transversal Skills – ATS 2020). Temeljni cilj projekta je bil iskanje odgovora na raziskovalno vprašanje:

Kako naj učence spodbujam, da načrtujejo, spremljajo in vrednotijo (samouravnavajo) učenje lastnih prečnih veščin (kritičnega mišljenja, sodelovanja in komuniciranja ter ustvarjalnosti) – ob podpori IKT?

Vprašanje je res zahtevno in je od sodelujočih učiteljev zahtevalo veliko znanj in veščin. Temeljna teoretska izhodišča in koncepti, na katerih je temeljil projekt, so:

- Transferzalne/prečne veščine (kritično mišljenje (argumentiranje), delo z viri, raziskovanje, sodelovanje in komuniciranje, ustvarjalnost, samouravnavanje ter uporaba informacijsko-komunikacijske tehnologije). (Slika 1)



Slika 1: ATS2020 slovenski model prečnih veščin

- Formativno spremljanje (v najširšem smislu kot filozofija učenja in poučevanja, v kateri ima ključno vlogo sprotna povratna informacija in samovrednotenje učenja in dosežkov učenca na temelju kriterijev uspešnosti, ter kontinuirana spodbuda učitelja, da se v individualnem tempu učenec nenehno izboljšuje – v našem primeru na področju prečnih veščin). (Slika 2)

Slika 2: Moje učenje (My Learning Cycle) – shematski prikaz korakov učnega procesa učenca (ki običajno niso linearni, pač pa prepleteni).

- Razvojni e-listovnik (kot orodje in filozofija, ki dopolnjuje in nadgrajuje formativno spremljanje, predvsem v elementu so-načrtovanja učenja).

V projektu so učitelji zavzeto in ustvarjalno sodelovali in ustvarili več kot 250 učnih priprav na pouk, v katerih razvijajo zgoraj omenjene veščine in koncepte. Vzorčni primer z naslovom *Vzorci z olimpijskimi krogi* je objavljen v tej številki revije Matematika v šoli, nekatere primere učiteljev pa bomo objavili v naslednjih številkah.

Spodbujanje razvoja prečnih veščin

Dr. Tanja Rupnik Vec v publikaciji *Orodja za spremljanje prečnih veščin* piše naslednje:
Razvoj prečnih veščin lahko spodbujamo *implicitno* ali *eksplicitno*. V primeru implicitnega poučevanja učitelj obravnava snov tako, da učence vabi v takšne dejavnosti, ki od učencev terjajo raznovrstne prečne veščine, npr. veščine kritičnega mišljenja (argumentiranje, delo z viri, sklepanje, raziskovanje …), ustvarjalnost, sodelovanje, sporazumevanje, rabo IKT, vendar so učenci usmerjeni predvsem na učno vsebino, ne pa na veščino oz. proces. Za odličnost v veščini si ne prizadevajo, saj ne vedo natanko, kaj je cilj oz. kaj pomeni odlično obvladovanje veščine, niti lastne veščine po dejavnosti ne ozaveščajo in ne reflektirajo. Takšen pouk temelji na predpostavki, da vsaka priložnost, ko

učenec veščino uporabi, pomeni učenje oz. napredek v tej veščini. Vendar ta predpostavka ne drži, kar utemeljujejo različni teoretski modeli (npr. Kolbov model izkustvenega učenja, Kolb, 1984) ter raziskave (Biggs, 1993, pri kritičnem mišljenju pa Zohar in Peled, 2008. Halpern, 1996, Solon, 2007 idr.). Lahko sklepamo, da je učenje veščin učinkovitejše, če je eksplicitno: usmerjeno k jasnemu cilju oz. če učenec ve, kaj je cilj učenja veščine, kaj so kriteriji uspešnosti ter kaj so dokazi napredka v veščini in si zavestno prizadeva, da bi cilje dosegel ter zbral dokazila o napredovanju. Tovrstno spodbujanje torej temelji na filozofiji formativnega spremljanja – v našem primeru – prečnih veščin.

Ozaveščanje o veščini (Kako dobro mi gre?) poteka nepretrgoma, lahko po vsaki dejavnosti, ki zahteva njeno rabo; torej na začetku, kot preverjanje predznanja v prepletu z dogovarjanjem o ciljih učenja in oblikovanjem kriterijev uspešnosti (Kaj pomeni dobro sodelovati? Kako vem, da dobro argumentiram? Po čem presodim, ali je moj izdelek ustvarjalen?) kot kasneje pri sprotni refleksiji o lastni učinkovitosti v dejavnosti.

Razvijanje veščine delo z viri

Razvijanje dela z viri podpirajo učni načrti za matematiko. V tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju v osnovni šoli imamo zapisane naslednje standarde znanja, ki podpirajo delo z viri:

- razvije učinkovite bralne strategije za nadaljnje učenje in izobraževanje,
- v skladu z vsebinami osnovnošolske matematike razvije matematično in nematematično terminologijo,
- kritično vrednoti informacije na spletu in drugje,
- kritično reflektira lastno znanje (učenje učenja).

Tudi v učnem načrtu za matematiko v gimnazijskih programih imamo zapisane pričakovane dosežke na ravni procesnih znanj. V njem je zapisano:
V času izobraževanja naj bi dijaki razvili veščine oz. procesna znanja, ki so sicer tesno povezana z matematičnim znanjem, vendar nekoliko bolj splošna, prenosljiva tudi na druga področja. To so znanja, ki omogočajo uporabo specifičnih (npr. matematičnih) znanj. Dijak:

- razvije učinkovite bralne strategije za nadaljnje učenje in izobraževanje,
- komunicira v matematičnem jeziku (branje in sporočanje matematičnih vsebin, uporaba matematičnega jezika pri predstavitvi projektov),
- uporablja informacijsko-komunikacijsko tehnologijo, sposoben je kritičnega odnosa do informacij na spletu in drugje,
- kritično reflektira lastno znanje (učenje učenja).

Učbenik je eden od virov pri pouku matematike. Kaj naj bi bil cilj uporabe učbenikov s strani učencev za učitelja? Stremeti moramo k cilju, da:

- je učbenik več kot samo zbirka nalog za vaje,
- se uporablja za učenje novih vsebin,
- uporabljamo rešene zglede,
- uporabljamo dinamične slike v e-učbenikih kot eno od reprezentacij,
- razvijamo učne strategije.

Za uspešno učenje iz učbenikov je pomembno, da se *učbenik prilagaja učencu* in da se *učenec prilagaja učbeniku* ter se nauči uporabljati učinkovite učne strategije. Navajanje na učenje iz učbenika oz. prilagajanje učenca učbeniku naj se začne dovolj zgodaj, in sicer v 3. oz. 4. razredu osnovne šole in se sistematično nadaljuje skozi celo življenje. (B. M. Požarnik, 171–172).

Za spremljanje razvoja veščine **dela z učbenikom** pri matematiki lahko uporabimo nekatera orodja, katerih uporaba je opisana v izbrani vsebini v publikaciji *Spodbujanje razvoja veščin dela z viri s formativnim spremljanjem*.

Naveden je nabor vprašanj, s katerimi lahko na začetku šolskega leta ali pred sistematičnim uvajanjem uporabe učbenika v šolsko in domače delo preverimo začetno stanje na področju uporabe učbenikov pri učenju matematike:

- *Ali uporabljam svoj učbenik za učenje matematike? Če da, kako ga uporabljam, če ne, zakaj ga ne uporabljam?*
- *Kako je zgrajen moj učbenik za matematiko?*
- *Ali poznam in uporabljam še kateri drug učbenik za matematiko?*
- *Ali poznam in uporabljam e-učbenik za matematiko?*
- *Kdaj uporabljam učbenik za matematiko?*
- *Katere dele učbenika uporabljam in kako jih uporabljam?*

Vprašanja, ki si jih zastavlja učenec pred in med procesom reševanja oz. učenja:

- *Kako se bom lotil dejavnosti? Kako si bom pomagal pri učenju?*
- *Ali razumem nove matematične vsebine? Kje imam težave? Kako si lahko pomagam?*
- *Kako bom vedel, da sem cilj dosegel?*

Po reševanju vedno skupaj pogledamo in predstavimo različne zapiske in rešitve nalog. Učitelj z uporabo svoje tabelske slike preveri razumevanje učencev. Na osnovi povratnih informacij učenci dopolnijo in popravijo zapiske in rešitve nalog. Odgovorijo na vprašanja:

- *Kaj sem se naučil?*
- *Kje sem imel težave? Česa še ne znam?*
- *Sem s svojim učenjem zadovoljen? Kaj bom drugič naredil drugače?*

Za vrednotenje dela z učbenikom lahko uporabimo kriterije uspešnosti, ki so navedeni v Preglednici 1.

Primer kriterijev uspešnosti za pisanje lastnih povzetkov oziroma zapiskov pri samostojnem učenju iz učbenika je naveden v Preglednici 2.

Za samovrednotenje samostojne izdelave zapiskov se učitelj z učenci pogovori ob dveh vprašanjih (Pečjak, 254):

- *Katere značilnosti dobrih zapiskov imajo tvoji zapiski?*
- *Katere vidike pri zapiskih lahko še izboljšaš?*

Zapiski, ki ustrezajo zgoraj zapisanim kriterijem, še ne pomenijo, da učenec zapisano razume in zna uporabiti. Zato je treba vsebinska znanja preveriti z ustreznimi nalogami, ki jih sestavimo sami ali primerno izberemo iz učbenika.

Ne pozabimo, noben učbenik ni popoln. To je samo eden od virov učenja, ki nam je na voljo in ga poskušamo smiselno uporabljati. Pri tem je bistveno, da poučevanje ne temelji na enem izbranem učbeniku ampak na učnem načrtu.

Preglednica 1: Kriteriji uspešnosti učenja z učbenikom pri matematiki

Kriteriji uspešnosti pri učenju z učbenikom	**Da**	**Deloma**	**Ne**	**Utemeljitev, opombe, pojasnila:**
1. Prepoznam in razumem ključne podatke in pomembne podrobnosti (nove pojme, povezave med pojmi, njihove lastnosti, nove matematične postopke).				
2. Oblikujem samostojne zapiske.				
3. Zapišem pravilne odgovore na zastavljena vprašanja.				
4. Naučeno izkažem z razumevanjem rešenih zgledov v učbeniku.				
5. Naučeno izkažem s samostojno rešenimi nalogami na različnih zahtevnostnih ravneh.				
6. Smiselno oblikujem kriterije uspešnosti za obravnavano matematično vsebino.				
7. Pripravim razumljivo predstavitev (razlago) naučenega za sošolce.				

Preglednica 2: Kriteriji uspešnosti za pisanje lastnih povzetkov

Kriteriji uspešnosti	**Da**	**Deloma**	**Ne**
Zapisane so definicije pojmov (uporabljene različne reprezentacije pojmov, vidne so povezave med reprezentacijami) in glavnih idej.			
Zapisani so uporabljeni in izpeljani postopki (na razumljiv način).			
Vključene so ključne besede in pomembne podrobnosti.			
Razvidna je zveza med glavnimi pojmi/idejami/ključnimi besedami in pomembnimi podrobnostmi.			
Matematična terminologija je smiselno uporabljena.			
Opombe:			

Samovrednotenje dela z viri pa moramo v prvi vrsti učitelji razvijati pri sebi. V pomoč so nam lahko naslednja vprašanja:

- *Katere vire uporabljam za pripravo na pouk?*
- *Ali so zapisani viri obsežnejši od virov, ki jih imajo na razpolago učenci?*
- *Ali berem pedagoške revije, zbornike konferenc? Uporabljam prebrano pri svojem delu?*
- *Kaj si bom zastavil na področju dela z viri za svoj osebni cilj?*
- *Kaj si bom na področju dela z viri zastavil kot cilj, na katerem bom delal pri pouku?*

Več o različnih orodjih, ki so jih pri razvijanju prečnih veščin izdelali učitelji različnih predmetov, lahko preberete v publikacijah na spletni strani: https://www.zrss.si/strokovne-resitve/digitalna-bralnica v zavihku ATS2020.

Viri

Marentič Požarnik, B. (2000). *Psihologija učenja in pouka*. Ljubljana: DZS.

Pečjak, S. in Gradišar, A. (2012). *Bralne učne strategije*. Ljubljana: ZRSŠ.

Rupnik Vec. T. (2018). Predgovor, Ozaveščanje: Kaj vem o veščini? Kako vešč sem? V Rupnik Vec, T.: *Orodja za formativno spremljanje prečnih veščin*. Ljubljana: ZRSŠ,

https://www.zrss.si/strokovne-resitve/digitalna-bralnica, v zavihku ATS2020.

Sirnik, M. (2018). Delo z viri pri matematiki. V Brodnik, V.: *Spodbujanje razvoja veščin dela z viri s formativnim spremljanjem*. Ljubljana: ZRSŠ, https://www.zrss.si/strokovne-resitve/digitalna-bralnica, v zavihku ATS2020

Žakelj, A., Bon Klanjšček, M., Jerman, M., Kmetič, S., Repoluk, S., Ruter, A. (2008). *Učni načrt. MATEMATIKA*: *Gimnazija*. Ljubljana: ZRSŠ.

Žakelj, A. in ostali. *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika*, http://www.mss.gov.si/fileadmin/mss.gov.si/pageuploads/podrocje/os/devetletka/predmeti_obvezni/Matematika_obvezni.pdf (1. 2. 2018)

IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

Avtorici: Alenka Kompare, Tanja Rupnik Vec

Cena: 31,90 €

KAKO SPODBUJATI RAZVOJ MIŠLJENJA

Od temeljnih miselnih procesov do argumentiranja

- Namenjeno osnovnošolskim in srednješolskim učiteljem različnih predmetov ter bodočim pedagoškim delavcem.
- Učitelju omogoča spodbujanje in razvoj kritičnega mišljenja, ponuja eksplicitne poučevalne pristope, miselne izzive in naloge za razvoj kritičnega mišljenja na različnih stopnjah izobraževanja od osnovne do srednje šole.
- Podaja različna deklarativna in proceduralna znanja s področja kritičnega mišljenja.
- Namenjeno tudi vsem, ki jih zanima področje kritičnega mišljenja in spodbujanje razvoja kritičnega misleca.

Naročila:
P Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana **T** 01 300 51 00 **F** 01 300 51 99 **E** zalozba@zrss.si **S** www.zrss.si

Vzorci z olimpijskimi krogi

Jerneja Bone
Zavod RS za šolstvo

Vzorci nas obkrožajo v vsakdanjem življenju. V vzorcih najdemo pravila, ki nas vedno znova presenečajo. Matematiko odkrivamo v vzorcih. Z raziskovanjem vzorcev povezujemo matematična znanja. V spodaj opisanem primeru smo uporabili olimpijske kroge kot izhodišče preiskovanj. Predstavljen je učni scenarij za izvedbo dejavnosti pri pouku matematike. Izvedba traja 2–3 šolske ure in je primerna za učence stare od 12 do 16 let.

Vir: http://www.rtvslo.si/sport/strani/zgodovina/4178

Učenci v predstavljeni dejavnosti poskušajo odgovoriti na naslednja vprašanja:

- *Ali lahko iz olimpijskih krogov oblikujem vzorec?*
- *Kateri vzorec znam oblikovati?*
- *Katera raziskovalna vprašanja si zastavim, da odkrivam matematiko v vzorcu?*
- *Kako predstavim vzorec?*

Učni scenarij (učna priprava)

Splošne informacije	Šola: ZRSŠ, OE Nova Gorica Učiteljica: Jerneja Bone Predmet/razred: 8. razred Učna tema: Vzorci Učni cilji: a) Vsebinski cilji a. Rešijo odprti problem, razčlenijo problemsko situacijo. b. Zastavijo raziskovalna vprašanja. c. Razpravljajo o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi. č. Raziskujejo in samostojno oblikujejo vzorce. d. Opazujejo in prepoznajo pravilo v vzorcu in vzorec nadaljujejo. e. Poiščejo posplošitev in zapišejo algebrski izraz. b) Procesni cilji: Učenec a. Izbere ustrezen, sistematičen način za zbiranje in organiziranje podatkov. b. Razloži ugotovitve. c. Uporablja matematično terminologijo in simbole. Pripomočki: • računalnik oz. tablica z dostopom do interneta • okolje Mahara (dostopno na SIO portalu) • fotografije olimpijskih krogov (lahko se poiščejo na spletu) • elastike, rinke, obročki (oz. pripomočki, ki predstavljajo olimpijske kroge)

CILJI Vpišite tako vsebinske kot procesne cilje, z *ležečo pisano označite transverzalne veščine*	**DEJAVNOSTI UČENCEV** Predstavitev strategije oz. metod in oblik dela	**PRIČAKOVANI REZULTATI**
V tem koraku učenec: • ozavešča pravilno rabo matematične terminologije, • ozavešča, kaj že ve o reševanju nalog, povezanih z vzorci, • samostojno oblikuje vzorec, • *zastavi raziskovalna vprašanja,* • *načrtuje izvedbo raziskave,* • rešuje nalogo.	**(A) PREDZNANJE** (prva ura) Učenci individualno ob prebrani nalogi razmišljajo o pravilni uporabi matematične terminologije *(Dejavnost 1a in 1b: Vzorci z olimpijskimi krogi)* in v nadaljevanju predstavijo svoje ugotovitve v vodeni razpravi v razredu (lahko pro et contra). Zapišejo v Maharo v zavihek Moje učenje – predznanje.	Zapis utemeljitve.

CILJI Vpišite tako vsebinske kot procesne cilje, z *ležečo pisano označite transverzalne veščine*	**DEJAVNOSTI UČENCEV** Predstavitev strategije oz. metod in oblik dela	**PRIČAKOVANI REZULTATI**
	Učenci individualno oblikujejo vzorec, zastavijo raziskovalno(a) vprašanje(a), načrtujejo izvedbo in začnejo z reševanjem *(Dejavnost 1c: Vzorci z olimpijskimi krogi)*. Svoj izdelek fotografirajo in oddajo v zavihek Moje učenje – predznanje, izvirnik pa učitelju.	Oblikovan vzorec, zapis zastavljenih vprašanj, načrt dela. Prvi osnutki reševanja. (izpolnjena rubrika Predznanje zavihka Moje učenje – predznanje, oddajo fotografijo izdelka, zapisa …).
V tem koraku učenec: • oblikuje osebne cilje učenja in cilje v povezavi z vzorci ter jih dopolni oz. uskladi s cilji učitelja, • sooblikuje kriterije uspešnosti za oblikovane cilje, • *uzavesti cilje in kriterije uspešnosti za veščino raziskovanja in sodelovanja.*	**(B) CILJI IN KRITERIJI USPEHA** Učenci individualno oblikujejo osebne cilje učenja, cilje v povezavi z matematično vsebino in kriterije uspešnosti glede na reševanje naloge in glede na svoje prejšnje izkušnje pri reševanju nalog z vzorci *(Dejavnost 2: Z zastavljenimi cilji do znanja o vzorcih)*. Razmislijo, kako jih bodo dosegli. Pregledajo cilje in kriterije uspešnosti za veščino raziskovanja in sodelovanja. V manjših skupinah si predstavijo cilje učenja in kriterije uspešnosti, o njih razpravljajo ter jih dopolnijo. Učenci v razpravi, ki jo vodi učitelj s celotnim razredom, dopolnijo cilje, povezane z vsebino o vzorcih, in kriterije uspešnosti z idejami drugih skupin in cilji obravnavane vsebine, ki jih posreduje učitelj. Svoj izdelek oddajo v zavihku Moje učenje – postavljanje ciljev.	Zapisani lastni osebni cilji učenja, cilji v povezavi z vzorci in kriteriji uspešnosti (poslikajo, prepišejo, objava v Moje učenje – postavljanje ciljev).
V tem koraku učenci: • izboljšujejo svojo raziskavo, • *predstavijo sošolcem raziskavo,* • primerjajo in vrednotijo različne raziskave, • oblikujejo predstavitev raziskave,	**(C) DEJAVNOSTI (več): ZBIRANJE DOKAZOV O UČENJU** (druga ura): Učenci individualno razmišljajo o izboljšavah svojega dela glede na povratno informacijo učitelja, ki so jo dobili za svoj prvi izdelek (glede na *dejavnost 1c*) in ga izboljšujejo. Dopolnjen izdelek oddajo v zavihek Moje učenje – dokazi. Učitelj združi učence, ki so oblikovali podoben vzorec. V manjših skupinah ali parih si predstavijo, katera raziskovalna vprašanja so si zastavili, katere strategije so uporabili in kako so reševali. Primerjajo in ovrednotijo različne izdelke. Nato se skupaj odločijo, na katera raziskovalna vprašanja bodo odgovorili, izberejo strategijo, rešijo oz. po potrebi dopolnijo rešitev. Izberejo način predstavitve naloge. Končni izdelek skupina oz. par fotografira in odda v zavihek Moje učenje – dokazi. *(Dejavnost 3: Predstavitev raziskave o vzorcih z olimpijskimi krogi)*	Dopolnjen izdelek oddan v zavihek Moje učenje – dokazi. Prestavitev v obliki plakata, e-predstavitev, poročila. Za konkretno ponazoritev vzorca lahko uporabijo elastike, obročke …, grafično predstavijo s programi dinamične geometrije, načrtovanje s šestilom in ravnilom.

CILJI Vpišite tako vsebinske kot procesne cilje, z *ležečo pisano označite transverzalne veščine*	**DEJAVNOSTI UČENCEV** Predstavitev strategije oz. metod in oblik dela	**PRIČAKOVANI REZULTATI**
• razpravljajo o prednostih in pomanjkljivostih različnih pristopov k raziskovanju.	(tretja ura) Ob predstavitvi dveh različnih strategij/pristopov k raziskavi, ki jih izbere učitelj (če učenci izberejo različne poti reševanja), se pogovarjajo o prednostih in pomanjkljivostih ene in druge strategije ter primerjajo z njihovim delom v paru oz. skupini. *(Dejavnost 4: Z različnimi potmi do cilja)*	Primerjalna tabela, oddana v zavihek Moje učenje – strategije.
V tem koraku učenci: • podajo povratno informacijo sošolcu oz. sošolcem o zastavljenih ciljih in kriterijih uspešnosti in o kakovosti raziskave o vzorcih, • glede na povratne informacije sošolca (in učitelja) dopolnijo cilje in kriterije uspešnosti ter izboljšajo svoj izdelek.	**(D) POVRATNA INFORAMCIJA (sošolca ali učitelja)** Povratna informacija je predvidena večkrat in se vključuje v ostale zgoraj opisane dejavnosti. Povratna informacija učitelja: – O zastavljenih ciljih in kriterijih uspešnosti. V razredni razpravi učitelj s podpornimi vprašanji podaja povratno informacijo učencem. – O začetnem reševanju naloge o vzorcih. Učitelj pregleda reševanje in individualno poda povratno informacijo učencu (v Maharo, pisno na izdelek). – Med delom posameznih skupin o skupinski predstavitvi raziskave. Povratna informacija učenca: – O zastavljenih ciljih in kriterijih uspešnosti. Učenci si v manjših skupinah izmenjajo povratno informacijo. – O dopolnjenih raziskovalnih nalogah. Ob povratnih informacijah izboljšujejo svoj izdelek, ki ga ob zaključku oddajo v pregled učitelju v Maharo.	Podana povratna informacija o prvem osnutku raziskovalne naloge o vzorcih → dopolnjena raziskovalna naloga. Na podlagi podanih povratnih informacij dopolnjeni cilji in kriteriji uspešnosti ter izdelki.
V tem koraku učenci: • *ugotavljajo, ali so dosegli cilje in kriterije uspešnosti v povezavi z veščino raziskovanja in veščino sodelovanja* • ugotavljajo, kje so šibki in kakšno pomoč potrebujejo, • predvidijo težave, na katere lahko naletijo novi učenci pri reševanju enake naloge	**(E) SAMOREFLEKSIJA/SAMOEVALVACIJA** Ob zaključku naloge/raziskovanja učenci izpolnijo vprašalnik, ki je v elektronski ali papirnati obliki. *(Dejavnost 5: Kako sem delal?)*	Izpolnjen vprašalnik oddajo v zavihek Moje učenje – samoevalvacija.

Gradivo Vzorci z olimpijskimi krogi je bilo predstavljeno:

1. Primer pripravljen in uporabljen za usposabljanje sodelujočih učiteljev matematike v projektu ATS2020 ter v ta namen tudi integriran v okolje Mahara. Predloga za zapis primera je bila razvita v strateškem timu projekta ATS2020.
2. Primer pripravljen in objavljen kot reprezentativni slovenski primer v mednarodnem repozitoriju gradiv projekta ATS2020 https://resources.ats2020.eu/resource-details/LEDE/patterns
3. Primer uporabljen kot primer, ki omogoča individualizacijo in diferenciacijo. Predstavljen sodelujočim učiteljem v projektu MIND+ (Model individualizacije+).
4. Objavljen na spletni strani http://spreminjamsolo.si/, na kateri so zbrani kratki razumljivi opisi ključnih dejavnikov uspešnega učenja in mnogi primeri dobrih praks v podporo celovitemu uvajanju individualizacije na šolah.

Sledijo učni list za učence (integrirani tudi v e-učno okolje, npr. v Maharo, 0365).

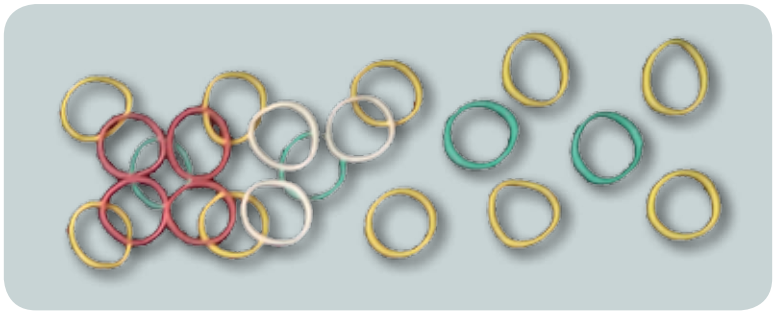
Opomba: **učilnica Moodle ne zadostuje**, saj v njej učenec nima osebnega prostora za načrtovanje, spremljanje in vrednotenje lastnega učenja.

ATS2020
Assessment of Transversal Skills

Dejavnost 1: Vzorci z olimpijskimi krogi

V tej dejavnosti boš preverjal svoje predznanje in ugotavljal, kaj že veš o načinih reševanja nalog z vzorci.

1. a) Na spletu poišči sliko olimpijskih krogov (navedi vir) in jo shrani v Maharo v zavihek Moje učenje – predznanje.
1. b) V besedilih v povezavi z olimpijskimi igrami večkrat zasledimo besedno zvezo »olimpijski krogi«. Razmisli, ali je to matematično pravilno. Svoj odgovor utemelji in ga zapiši v Maharo v zavihek Moje učenje – predznanje. V nadaljevanju bo sledila krajša razprava v razredu.
1. c) Slika olimpijskih krogov naj bo izhodišče za oblikovanje vzorca. Samostojno oblikuj vzorec in si zastavi eno ali več raziskovalnih vprašanj. Predvidi način reševanja, s katerim boš poskušal priti do odgovorov. Začni z reševanjem. Zapisuj na list papirja. Ob zaključku boš svoj izdelek fotografiral in ga oddal v zavihek Moje učenje – predznanje, izvirnik pa shranil v mapo.



ATS2020
Assessment of Transversal Skills

Dejavnost 2: Z zastavljenimi cilji do znanja o vzorcih

V tej dejavnosti boš razmišljal o osebnih ciljih, ki jih želiš doseči pri tej nalogi, o ciljih, povezanih z vzorci, ter o kriterijih uspešnosti. Svoje zapise v povezavi s cilji, ki so povezani z vzorci in kriteriji uspešnosti, boš dopolnjeval v skupini sošolcev in nato ob razpravi s celotnim razredom. Ponovno preglej cilje in kriterije uspešnosti za veščini raziskovanja in sodelovanja (Priloga 1 in 2).

Cilje in kriterije uspešnosti ter razmislek, kako jih boš dosegel, zapiši v zavihek Moje učenje – postavljanje ciljev.

Osebni cilji	Kriteriji uspešnosti	Kako jih bom dosegel/-la?

Cilji, ki so povezani z vzorci	Kriteriji uspešnosti	Kako jih bom dosegel/-la?

ATS2020
Assessment of Transversal Skills

Dejavnost 3: Predstavitev raziskave

3. a) Sam razmišljaj o izboljšavi svojega izdelka glede na povratno informacijo, ki ti jo je podal učitelj. Dopolni svoj izdelek. Dopolnjen izdelek oddajo v zavihek Moje učenje – dokazi. V pomoč so ti lahko vprašanja v Prilogi 3.

3. b) Učenci, ki ste imeli enak ali zelo podoben vzorec, se boste po navodilih učitelja združili v pare ali manjše skupine. V manjših skupinah oz. parih si predstavite, kakšen vzorec ste oblikovali, katera raziskovalna vprašanja ste si zastavili, katere načine reševanja ste uporabili in kako ste reševali. Primerjajte in ovrednotite različne izdelke. Nato se skupaj odločite, na katera raziskovalna vprašanja boste odgovorili, izberite način reševanja, rešite oz. po potrebi dopolnite rešitev. Izberite način predstavitve vzorca in naloge. Končni izdelek skupine fotografirajte in oddajte v zavihek Moje učenje – dokazi. V pomoč so vam lahko vprašanja pri Prilogi 3. Za pogovor v skupini pa uporabite Prilogo 4.

Dejavnost 4: Z različnimi potmi do cilja

V tej dejavnosti boste primerjali primere raziskav (skupine A in skupine B) z raziskavo vaše skupine. Razmišljajte o prednostih in pomanjkljivostih posameznega pristopa. Pomagajte si s Prilogo 4. Zapišite oz. oddajte izpolnjeno datoteko v zavihek Moje učenje – strategije.

	Prednosti	**Pomanjkljivosti**
Reševanje skupine A		
Reševanje skupine B		
Reševanje naše skupine		

ATS2020
Assessment of Transversal Skills

Dejavnost 5: Kako sem delal?

Poglej na svoje opravljeno delo pri nalogi Vzorci v olimpijskih krogih.

a) V spodnji preglednici označi, ali znaš oz. ali potrebuješ pomoč, in poskušaj zapisati zelo natančno, kje in kakšno pomoč bi potreboval. Pomagaj si s cilji in kriteriji uspešnosti, vezanimi na vzorce in veščino raziskovanja. Preglednico lahko dopolniš. Datoteko oddaj v zavihek Moje učenje – samoevalvacija.

	Znam	**Potrebujem pomoč**
Oblikovati vzorec.		
Zastaviti raziskovalno vprašanje.		
Poiskati strategije reševanja.		
Rešiti problem/odgovoriti na zastavljeno vprašanje.		
Predstaviti raziskovalno nalogo.		

b) Ovrednoti svoje delo v skupini. Poglej cilje in kriterije uspešnosti veščine sodelovanja. Izpostavi, s čim se lahko pohvališ in kaj boš pri naslednjem delu v skupini izboljšal. Prosim, pojasni svoj razlog.

c) Kakšne težave predvidevaš, da bo imel nekdo, ki se bo prvič srečal z nalogo Vzorci v olimpijskih krogih?

Kriteriji uspešnosti za integracijo veščine SODELOVANJE IN KOMUNICIRANJE

KOMUNIKACIJA

SPREJEMANJE	• Uporabljam različne načine komunikacije s sošolci in učiteljem (pisno, ustno, osebno, na daljavo …). • Poslušam ostale in sprejmem njihovo mnenje. • Poslušam stališča drugih, ki se razlikujejo od mojih. O njih premislim. Sogovornika ne prekinjam.
VKLJUČEVANJE	• Svoje trditve argumentiram. • Podam konstruktivno povratno informacijo. • V komunikacijo se vključujem tudi s postavljanjem vprašanj. • Nestrinjanje s sogovornikom izrazim z ustrezno izbiro besede, pri tem nisem žaljiv. • V komunikaciji sem odkrit in neposreden.

SODELOVANJE

SPREJEMANJE	• Sprejemam ideje ostalih in jih povežem v z idejami skupine. • V okviru skupine sprejmem strateško odločitev, ko so vsi predstavili svoje ideje. • Se zavedam, da je za uspeh skupine pomemben vsak član. • Svoje mnenje spremenim, če sem deležen tehtnih utemeljitev članov skupine.
VKLJUČEVANJE	• V skupini ustvarjalno sodelujem, izpostavim svoja stališča in prisluhnem stališčem drugih, četudi so nasprotna. • V konfliktni situaciji z dogovarjanjem rešujem nastale težave. • V sodelovanju upoštevam, da mora vsak član prispevati svoj delež. • V skupini prevzamem vlogo in jo opravim odgovorno. • Zavedam se pomena dobrega počutja vseh članov skupine. • V razpravi se držim dogovorjene teme. • Prevzamem odgovornost za posledice svojih dejanj v skupini.

Povzeto po: Izzivi razvijanja in vrednotenja znanja v gimnazijski praksi. Psihologija.
Pripravili Saša Kregar in dr. Leonida Novak, za delavnico ATS2020.

Dosegljivo na http://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/Izzivi%20razvijanja%20in%20vrednotenja%20znanja%20v%20gimnazijski%20praksi%20PSIHOLOGIJA/

Pregled raziskovalnih veščin in nabor kriterijev uspešnosti

RAZISKOVALNE VEŠČINE	KRITERIJI USPEŠNOSTI	
	1. stopnja	**2. stopnja**
Zastavljanje raziskovalnih vprašanj in opredelitev (raziskovalnega) problema.	• Prepoznam vprašanja, ki zahtevajo izvedbo raziskave. • Zastavljam vprašanja, ki so povezana s spremenljivkami (npr. Kaj se zgodi, če spremenimo …?).	• Prepoznam problemsko situacijo, ki jo je mogoče razrešiti z izvedbo raziskave. • Zastavljam raziskovalna vprašanja, ki temeljijo na usvojenem znanju in jih je mogoče preveriti z raziskavo.
Sposobnost napovedovanja in postavljanja hipotez.	• Razlikujem med ugibanjem in napovedovanjem. • Napovem, kaj se bo zgodilo oz. kakšen bo rezultat raziskave, in pojasnim, zakaj tako menim.	• Razlikujem med hipotezo in napovedjo rezultata. • Napovem rezultat na osnovi predhodnih izkušenj in znanja (npr. Predvidevam, da _____, zato ker _____). • Na osnovi predhodnega znanja zastavim hipotezo, ki mi pomaga pri zasnovi raziskave.
Načrtovanje poteka raziskave -kaj in kako bomo zbirali podatke (opazovali, merili, anketirali …).	• Predlagam poti in načine, kako do odgovora na raziskovalno vprašanje. • Predvidim, katere vire informacij bi uporabil pri Iskanju odgovora na raziskovalno vprašanje. • Predvidim, katere podatke bi zbiral za razrešitev raziskovalnega vprašanja in kaj bi pri tem uporabil. • Izberem ustrezen vzorec za raziskavo (npr. anketiranih oseb).	• Uporabim znanje za opredelitev raziskovalne ideje ali problema na takšen način, da omogoča zasnovo raziskave in izbor ustreznega pristopa. • Predvidim in preučim /primerjam/ ovrednotim različne načine in poti, kako do odgovora na zastavljeno raziskovalno vprašanje. • Oblikujem načrt za izvedbo raziskave. • Odločim se o obsegu in načinu urejanja zbranih podatkov ter samostojno izberem pripomočke (opremo) in materiale, ki jih bom uporabil pri raziskavi.
Opredelitev spremenljivk in njihovih vrednosti ter zagotavljanje poštene raziskave/poskusa s kontrolo spremenljivk.	• Prepoznam zvezo oz. relacijo med spremenljivkama (npr. Z večanjem/ manjšanjem *x*, se *y* _____). • Razumem, kdaj je poskus »pošten«. • Spreminjam en faktor (spremenljivko) pri poskusu in ostale ohranim nespremenjene. • Razumem, zakaj mora imeti kontroliran poskus primerljive rezultate ob ponovitvi.	• Opredelim ključne spremenljivke, ki jih je treba upoštevati pri izvedbi raziskave. • Zberem podatke, ki omogočajo testiranje relacij med spremenljivkami. • Določim, kaj bom pri raziskavi spreminjal (neodvisno spremenljivko), kaj bom ohranili nespremenjeno (kontrolirane spremenljivke) ter način merjenja učinkov (opredelitev odvisne spremenljivke). • Opredelim način zbiranja dokazov v primeru, ko je spremenljivke težko kontrolirati.

RAZISKOVALNE VEŠČINE	KRITERIJI USPEŠNOSTI	
	1. stopnja	**2. stopnja**
Izvajanje raziskave – zbiranje in beleženje podatkov (z opazovanjem, izvajanjem meritev, proučevanjem virov, anketiranjem, izvajanjem intervjujev…). Izbor in uporaba ustreznih pripomočkov, gradiv, virov, instrumentarijev, računalniških programov, naprav …	• Sledim navodilom za izvedbo raziskave. • Varno uporabim pripomočke, opremo in tehnologijo za izvajanje meritev in pridobivanje podatkov. • Natančno in sistematično opazujem. • Podatke zbiram v različnih virih.	• Natančno zbiram kvalitativne in kvantitativne podatke, jih ustrezno beležim (besedilno, shematsko …). • Pri raziskavi spretno uporabljam pripomočke in tehnologijo. • Izvedem ustrezno število meritev s ciljem zmanjšanja napak in pridobitve zanesljivih rezultatov. • Verodostojnost podatkov preverim v različnih virih.
Delo s podatki – urejanje, primerjanje, razvrščanje, prikaz z uporabo preglednic in grafov …	• Podatke beležim v preglednico. • Podatke prikažem grafično. • Preglednico in graf ustrezno opremim in označim. • Sistematično primerjam (podatke, pojme, predmete, živa bitja, dogodke …) in navedem podobnosti in razlike. • Uvrščam in razvrščam podatke po izbranem kriteriju.	• Samostojno izberem način za prikaz podatkov (preglednice, grafi). • Sistematično primerjam pojave, zakonitosti in pojme, ki zahtevajo določeno stopnjo abstrakcije (niso na konkretni ravni). • Samostojno opredelijo kriterije za uvrščanje in razvrščanje podatkov.
Analiza rezultatov in oblikovanje zaključkov; opredelitev vzročno-posledičnih povezav; prepoznavanje vzorcev in zakonitosti iz podatkov; preverjanje veljavnosti hipotez. Povezovanje rezultatov in zaključkov raziskave s teoretičnim znanjem	• Primerjam zbrane podatke in prepoznam preproste vzorce in povezave. • Po analizi podatkov oblikujem zaključke raziskave. • Ugotovim, ali se zaključki ujemajo z napovedmi.	• Uporabim preglednice, grafe, diagrame … za določanje in opis vzorcev ali relacij med podatki. • Oblikujem zaključke raziskave na osnovi analize pridobljenih podatkov v raziskavi in meritve in uporabe teoretičnega znanja. • Odgovorim na raziskovalno vprašanje. • Ugotovim, ali zaključki podpirajo napovedi oz. postavljene hipoteze, in če vodijo k postavljanju novih napovedi/raziskovanja.
Ocena smiselnosti rezultatov; opredelitev možni napak (kot osnova za predlagane spremembe, dopolnitve ali nadgradnjo raziskave), samovrednotenje	• Primerjam svoje rezultate z ostalimi in ugotavljam možne vzroke za odstopanja. • Ocenim svoje delo in delo drugih ter navedem, katere omejitve pri delu so vplivale na rezultat. • Predstavim vprašanja, ki so se mi porajala med in po raziskavi. • Predstavim, kaj sem se novega naučil pri izvajanju raziskave.	• Ocenim in pojasnim nastale nepravilnosti oz. napake pri izvajanju raziskave. • Presodim, ali so bili dokazi, ki so osnova za oblikovanje zaključkov ali interpretacij, zadostni in ustrezni. • Predlagam izpopolnitve/izboljšave raziskave. • Ovrednotim svoje delo in napredek na področju raziskovalnih spretnosti.

Pripravile mag. Mariza Skvarč, Simona Slavič Kumer, mag. Andreja Bačnik in Jerneja Bone, za delavnico ATS2020; Formativno spremljanje veščine raziskovanja.

PRILOGA 3

Vprašanja, ki ti lahko pomagajo izboljšati tvojo raziskavo

Ali je zapisano raziskovalno vprašanje smiselno in problemsko?
Ali vprašanje sledi iz postavljenega vzorca?
Je vprašanje povezano z matematiko?

Kje boš našel manjkajoče podatke?

Si razmišljal, ali lahko po zastavljenem raziskovalnem vprašanju postaviš hipotezo?

Razmisli o predstavitvi vzorca.
Izbiraš lahko med konkretnim, slikovnim, grafičnim … prikazom … Spomni se, na katere načine smo že prikazali vzorce?
Ti morda tehnologija pomaga pri predstavitvi?

Tvoj način reševanja je zanimiv, vendar razmisli o načinu predstavitve podatkov.
Podatke imaš zbrane. Bi ti jih uspelo sistematično predstaviti?

Bi znal napisati posplošitev?
Razmisli o uporabi algebrskih izrazov. Kako bi lahko z uporabo algebrskih izrazov zapisal posplošitev?

Preveri vprašanje, ki si ga zastavil in tvoj odgovor. Sta povezana? Je odgovor na vprašanje smiseln?

Razmisli, kako bi preveril in utemeljil svojo rešitev.

Razmisli, kako bi lahko problem razširil.

Preveri, ali si uporabil matematični jezik in terminologijo v zapisih.

PRILOGA 4

Pogovor pri matematiki

Strinjam se /se ne strinjam s tabo, ker …
Prosim, razloži mi …
Katere ključne besede so ti pomagale?
Znaš rešiti nalogo še na drug način?
Kateri način reševanja si uporabil? Zakaj?
Zakaj si izbral to računsko operacijo/strategijo?
Kako bi pokazal/dokazal, da je tvoj odgovor pravilen?
S čim boš dokazal, da to vsebino znaš?
Lahko uporabiš sliko za reševanje problema/naloge …?
Ali je reševanje tega problema/naloge enako nalogi, ki smo jo že reševali? Kateri?
Pokaži mi drugo pot (drug način).
Imava oba prav! Kako to? Razloži mi.
Kaj si mislil tukaj?

Razloži: »To je moja strategija/rešitev …«
- Razloži svoje razmišljanje
- Pokaži svoje razmišljanje, zapise, reševanje.

»Strinjam se z …, ker ….«
- Razloži, zakaj se strinjaš s sošolcem.

»Ne strinjam se, ker …«
- Razloži, zakaj se ne strinjaš s sošolcem.
- Ponudi drugo rešitev.

Preseganje: »To me je napeljalo k razmišljanju …«
- Razširi idejo sošolca s povezovanjem drugih znanj.
- Postavi dobro vprašanje:
  - »Zakaj si …?«
  - »Kako si …?«
  - »Bi lahko imeli …?«
  - »Kako je to mogoče …?«
  - »Kaj, če …?«

IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

Formativno spremljanje pri MATEMATIKI

Priročnik za učitelje

mag. Mojca Suban, mag. Melita Gorše Pihler, Jerneja Bone, Karmen Debenjak, Loreta Hebar, Špela Jenko, Tatjana Kerin, Silva Kmetič, Rok Lipnik, Mojca Novoselec, Mateja Peršolja, mag. Sonja Rajh, Amela Sambolić Beganović, mag. Mateja Sirnik, Karmen Škafar, Jana Šturm, Andreja Verbinc

V priročniku so opisana različna preizkušena ORODJA V PODPORO UČENJU IN POUČEVANJU MATEMATIKE skupaj z naborom učnih ur, v katerih orodja zaživijo v vsej svoji funkcionalni vrednosti.

V ospredje je postavljen učenec in njegova vloga pri oblikovanju lastne učne poti.

152 strani, A4 format, 11,90 €

Nabor učnih ur

7. razred

Številski izrazi z ulomki
Vrste trikotnikov
Deltoid in načrtovanje deltoida

8. razred

Obseg kroga
Ploščina kroga
Zbiranje, urejanje in predstavitev podatkov
Diagonale večkotnika I
Diagonale večkotnika II

6. razred

Merske enote

1. letnik

Linearna funkcija I (gimnazija)
Linearna funkcija II (program srednjega strokovnega izobraževanja)

9. razred

Podobni trikotniki

Naročila:
P Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana **T** 01 300 51 00 **F** 01 300 51 99 **E** zalozba@zrss.si **S** www.zrss.si

Razvijanje in spremljanje problemskih znanj v povezavi s pojmi krivulja, funkcija, premica in stožnica

Sonja Ivančič
Gimnazija in ekonomska šola
Šolski center Srečka Kosovela Sežana

Povzetek

V prispevku je predstavljen primer razvoja in spremljanja problemskih znanj pri dijakih na primeru obravnave stožnic. Dijaki spoznavajo matematiko kot proces, znajo postavljati ključna vprašanja, ki so vezana na raziskovanje matematičnih problemov, razvijajo ustvarjalnost ter zaupajo v lastne matematične sposobnosti, spoznavajo in uporabljajo informacijsko-komunikacijsko tehnologijo ter pripomočke iz vsakdanjega življenja kot pomoč za učinkovitejše učenje in reševanje problemov ter povezujejo znanje znotraj matematike in tudi širše (medpredmetno s fiziko).

Ključne besede: stožnice, problemska znanja, IKT, povezovanje znanj

Developing and Monitoring Problem-Solving Knowledge Relating to the Terms Curve, Function, Line and Conic Section

Abstract

The article presents an example of developing and monitoring problem-solving knowledge among secondary school students on the example of a discussion of conic sections. The students learn about mathematics as a process; are able to ask the key questions related to the investigation of mathematical problems; develop creativity and trust in their own mathematical abilities; get to know and use information and communication technology and tools from everyday life in order to learn more efficiently and to solve problems; integrate their knowledge within Mathematics and broader (cross-curricularly with Physics).

Keywords: conic sections, problem-solving knowledge, ICT, knowledge integration

Uvod

V današnji družbi je pomembno, da znamo znanje uporabiti v novih problemskih situacijah. Dijakom problemske učne zmožnosti niso dane same po sebi, temveč jih je treba nenehno in sistematično razvijati. Kot za vsako učno dejavnost je priprava učencev za ustvarjalno problemsko učenje odvisna od njihove samopodobe, razvojne stopnje ter motiviranosti. Zato moramo pri izbiri nalog izhajati iz izkušenj, učnih zmožnosti, interesov in potreb dijakov. Tako delo zahteva več časa za učiteljevo pripravo, delo v razredu poteka počasneje od frontalnega pouka. Problemski pouk je uspešnejši, če je v razredu manj dijakov, da lahko učitelj pouk tudi diferencira in individualizira.

Pri obravnavi učne teme stožnice lahko na zanimiv način razvijamo in spremljamo razvoj problemskih znanj v povezavi z drugimi pojmi, kot so npr. krivulja, funkcija in premica. Obravnavo stožnic povežemo z vsakdanjim življenjem, kar pri dijakih poveča motivacijo. Tako pridobljeno znanje je trajnejše in bolj prenosljivo na druga področja, kar pa je tudi eden pomembnejših ciljev pouka matematike. Večina dijakov je zadovoljna s takim načinom dela. Manj zadovoljni so tisti, ki želijo v delo pri pouku vložiti čim manj truda. Pri takih se mora učitelj še posebej potruditi z motivacijo. Pozoren mora biti tudi na učno šibkejše dijake, da jih s pravo mero pomoči vodi skozi reševanje problemov, da se na poti ne izgubijo in obupajo ter da do nekaterih ugotovitev vseeno pridejo sami. Tako izkusijo uspešnost pri pouku matematike, kar pa je tako dijakom kot tudi učitelju v pomoč pri nadaljnjem delu. Učitelj ima s takim načinom poučevanja in ob prevelikem številu dijakov v razredu polne roke dela.

Tema in učni načrt

Z razvijanjem problemskega znanja sledimo osnovnemu vodilu učnega načrta za matematiko za razvoj matematične kompetence, ki med drugim vključuje sposobnost uporabe matematičnega

načina razmišljanja za reševanje matematičnih in interdisciplinarnih problemov, sklepanje, posploševanje, abstrahiranje in reflektiranje na konkretni in splošni ravni, raziskovanje, uporabo informacijsko-komunikacijske tehnologije pri usvajanju novih matematičnih pojmov, preiskovanju in reševanju matematičnih problemov. Učitelj naj bi v skladu s tem razvoj in spremljanje problemskega znanja pri dijakih premišljeno načrtoval.

Pri učni temi stožnice o obravnavanih primerih v učnem načrtu za gimnazije najdemo spodaj zapisane predloge, ki jih lahko obravnavamo tako, da razvijamo problemsko znanje pri dijakih:

- Pokažite, da ni vsaka krivulja graf neke funkcije.
- Obravnavajte posamezne primere presečišč ravnine s stožcem(a) in razložite izvor imena stožnic.
- Izvedite vrtnarsko konstrukcijo elipse tudi v praksi.
- Poleg običajnih geometrijskih konstrukcij stožnic pokažite še konstrukcije s prepogibanjem papirja.
- Obravnavo in izvedbo ure lahko načrtujete medpredmetno s fiziko.

1. Stožnice kot preseki dvojne stožčaste ploskve z ravnino

Cilji: Dijaki samostojno pridejo do razlage izvora imena stožnica, poiščejo modele iz realnega življenja, s katerimi lahko ponazorimo stožnice.

Kdaj lahko uporabimo aktivnost: Aktivnost uporabimo na začetku obravnave učne teme stožnice, da razložimo ime stožnica in dijake usmerimo v ustvarjanje in iskanje modelov za ponazoritev stožnic.

Zastavitev problema

Dijakom damo nekaj minut, da narišejo različne krivulje.

Potem jim razdelimo delovne liste, na katerih so narisani (dvojni) krožni stožci. Dijaki raziskujejo preseke plašča (dvojnega) krožnega stožca z različnimi ravninami pod različnimi naklonskimi koti. Postavljajo hipoteze, kaj so preseki ravnine s stožcem, in posplošujejo. Uspešnejši dijaki lahko na slike stožcev skicirajo preseke stožcev z ravninami. Da bodo uspešni tudi dijaki s slabšo prostorsko predstavo, jim predlagamo, da k uri prinesejo stožce, izdelane iz plastelina. Na razpolago pa imajo tudi modele lesenih stožcev, ki prikazujejo preseke stožcev z ravninami (modele lahko izdelajo dijaki). Pravilnost postavljenih hipotez, narisanih krivulj in posplošitev dijaki preverijo z ogledom filma http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=GDHNoQHQmtQ.

Potem jim ponudimo različne pripomočke: lesen svinčnik z mnogokotnim prerezom, svetilko, stožčast kozarec in zaprto stožčasto steklenico. Dijaki sami raziskujejo, s katerimi pripomočki, kdaj in na kakšen način lahko dobimo posamezne stožnice (elipso, krožnico, hiperbolo in parabolo).

Razvoj aktivnosti

Dijaki narišejo različne krivulje. Spodbujamo jih, da povedo definicijo funkcije in se spomnijo, da ni vsaka krivulja graf neke funkcije. Narišejo še premice in parabole, ki niso grafi funkcij. Usmerjamo jih k risanju čim bolj različnih krivulj, sklenjenih in nesklenjenih.

Usmerjanje dijakov pri risanju presekov

Upoštevamo predznanje dijakov o osnem preseku stožca. Začnemo s preseki plašča stožca:

- z ravnino, ki vsebuje os stožca,
- z ravnino, ki je pravokotna na os stožca.

Dijake pri risanju presečnih krivulj plašča dvojnega stožca z ravnino usmerjamo od lažjih k težjim primerom.

Dijaki narišejo:

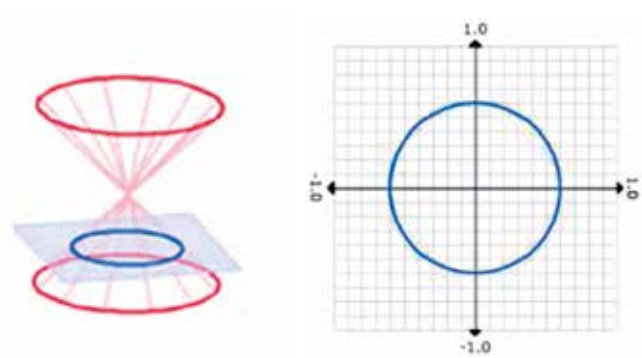
- preseke plašča dvojnega stožca z ravnino, ki ne gre skozi vrh stožca in je pravokotna na os stožca. (Slika 2);
- preseke plašča dvojnega stožca z ravnino, ki gre skozi vrh stožca (Slika 6, Slika 7);
- preseke plašča dvojnega stožca z ravnino, ki ne gre skozi vrh stožca in ni pravokotna na os dvojnega stožca (Slika 3, Slika 4, Slika 5).

Spodbujamo jih, naj raziščejo, kako so od naklonskega kota presečne ravnine odvisni preseki ravnine s plaščem dvojnega stožca. Dijaki, ki imajo težave, si pomagajo z lesenimi modeli presekov stožcev (Slika 1) ali z modeli stožcev iz plastelina.

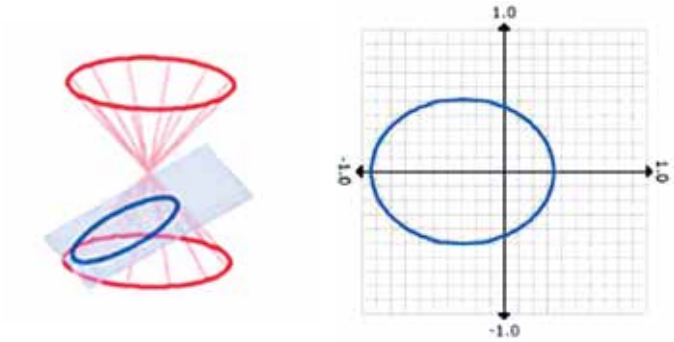
Slika 1: Leseni modeli presekov stožcev.

Ogled filma

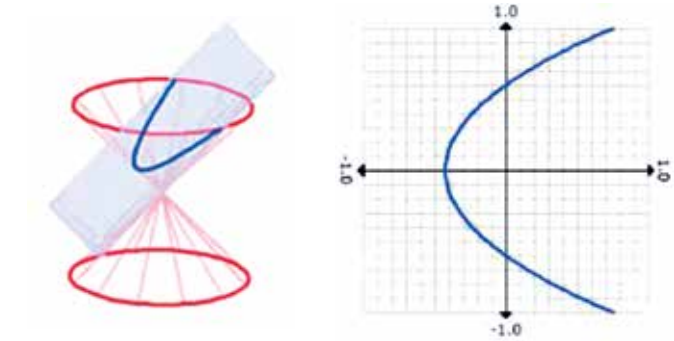
Po uvodnih dejavnostih si dijaki ogledajo film, ki prikazuje preseke stožca z različnimi ravninami, in na ta način preverijo pravilnost postavljenih hipotez in posplošitev.



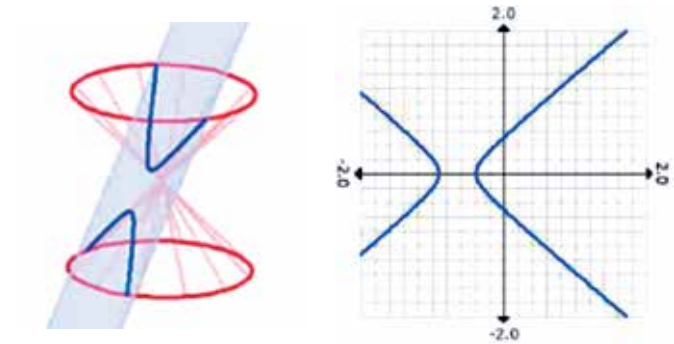
Slika 2: Presek je krožnica.



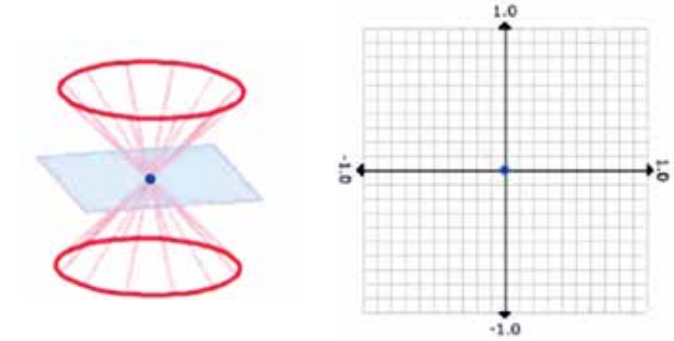
Slika 3: Presek je elipsa.



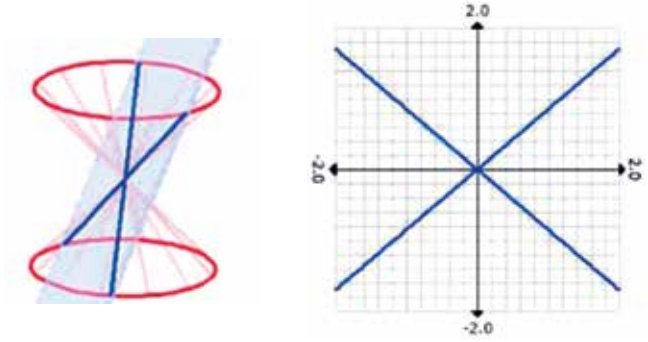
Slika 4: Presek je parabola.



Slika 5: Presek je hiperbola.



Slika 6: Presek je točka.



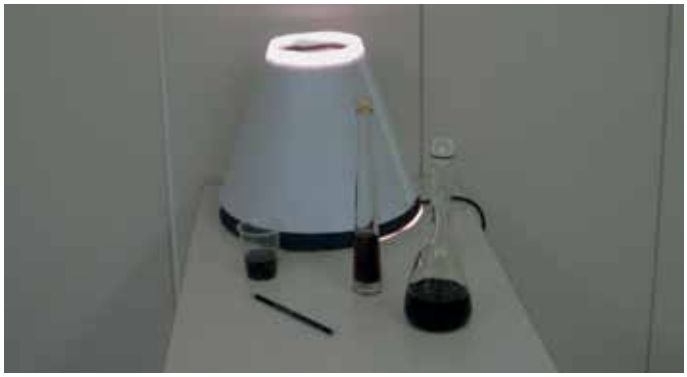
Slika 7: Presek sta dve premici.

Vir: http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=GDHNoQHQmtQ (5. 11. 2019)

Raziskovanje z modeli iz realnega življenja

Dijake razdelimo v skupine. Vsaka skupina dobi različne modele: lesen svinčnik z mnogokotnim prerezom, svetilko, stožčast kozarec in zaprto stožčasto steklenico (Slika 8).

Skupine raziskujejo, s katerimi modeli in na kakšen način dobimo posamezne stožnice: elipso, krožnico, hiperbolo in parabolo.



Slika 8: Različni pripomočki.

Na koncu ure skupine poročajo. Nekateri rezultati so prikazani na slikah (Slika 9, Slika 10, Slika 11, Slika 12).

Slika 9: Svetilka – rob sence je hiperbola.

Slika 10: Svinčnik z mnogokotnim prerezom – robovi so hiperbole.

Slika 11: Zaprta stožčasta steklenica – rob gladine tekočine je parabola.

Slika 12: Stožčast kozarec – rob gladine tekočine je elipsa.

Vprašanja za razvoj aktivnosti

- Kaj je krivulja? Katere krivulje smo že spoznali?
- Ali je krog krivulja?
- Ali je krožnica krivulja?
- Narišite graf funkcije $f(x) = x^{-1}$. Ali je graf funkcije $f(x) = x^{-1}$ krivulja? Ali je vsaka krivulja graf neke funkcije?
- Kaj je osni presek stožca?
- Kaj je presek plašča stožca z ravnino, ki je pravokotna na os stožca?
- Kaj je presek plašča stožca z ravnino, ki vsebuje os stožca?
- Kaj je presek plašča neskončnega (dvojnega) stožca z ravnino, ki gre skozi vrh stožca in vsebuje os stožca?
- Kako se spreminjajo preseki plašča neskončnega (dvojnega) stožca v odvisnosti od naklonskega kota presečne ravnine?
- Ali z vsakim modelom, ki ga imate na razpolago, lahko dobite samo eno stožnico ali jih lahko dobite več?
- Opiši, s katerim modelom dobimo katere stožnice in kako.

Dijake usmerjamo k risanju različnih krivulj, sklenjenih in nesklenjenih. Pričakujemo, da bodo nekateri dijaki narisali tudi elipso, krožnico, parabolo ali hiperbolo.

Sprotno spremljanje dejavnosti in dosežkov

Dijaki so različno spretni pri reševanju danih nalog. Nekateri dijaki zelo hitro postavijo hipoteze o obliki presečnih krivulj.

Pri dijakih spremljamo, ali so postavili hipoteze in ali so te pravilne, ali so izbrali ustrezno metodo za reševanje problema, ali je predstavljena rešitev ustrezna, ali so našli vse rešitve in kako znajo svoje ugotovitve argumentirati.

Razumevanje dijakov preverjamo in vodimo z različnimi vprašanji: Ali so presečne krivulje sklenjene ali nesklenjene? Kako je to odvisno od naklonskega kota ravnine? Kdaj je presečna krivulja ena premica? Kdaj sta v preseku dve premici? Razumevanje preverjamo tudi s pozornim poslušanjem komentarjev in vprašanj dijakov.

Nekateri dijaki si zelo sistematično zapisujejo ugotovitve in tudi napovedujejo rezultate, ki jih ustrezno argumentirajo.

Pri nalogah, ki jih dijaki rešujejo v skupinah z danimi modeli, preverimo, na kateri stopnji razumevanja so posamezni dijaki. Najnižjo stopnjo dosežejo tisti, ki ne znajo postaviti nobene hipoteze in ne izberejo ustrezne metode reševanja ter z danimi modeli ne najdejo nobene stožnice, najvišjo stopnjo pa dosežejo tisti, ki povežejo in razumejo razne vidike problema ter jih prenesejo na druge situacije, saj razumejo zakonitosti na abstraktni ravni.

Dosežki dijakov pri ugotovljenem in predpostavljenem predznanju

Dijaki samostojno in s pomočjo učitelja dosežejo zastavljene cilje. Povezujejo obstoječe znanje o presekih stožca z ravninami z novim znanjem. To nadgradijo s samostojnim odkrivanjem stož-

nic v novih situacijah z različnimi pripomočki. Dijaki z vsakim pripomočkom najdejo vsaj eno stožnico.

Vir: http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=GDHNoQHQmtQ (5. 11. 2019)

2. Geometrijska definicija stožnic

Cilji: Dijaki izvajajo matematična preiskovanja z uporabo IKT, samostojno izpeljejo geometrijske definicije stožnic z uporabo programa GeoGebra; samostojno raziščejo potek konstrukcij stožnic, rešijo problemsko nalogo v nematematičnem kontekstu – valovanje pri fiziki.

Kdaj lahko uporabimo aktivnost: Aktivnost uporabimo po uvodnem spoznavanju stožnic.

Zastavitev problema

Dijaki naj z raziskovanjem z uporabo IKT pridejo do geometrijskih definicij stožnic. S programom GeoGebra narišejo različne stožnice: krožnico, elipso, hiperbolo in parabolo. Vsako od teh krivulj lahko poljubno spreminjajo. Najprej opazujejo krožnico. Geometrijsko definicijo krožnice že poznajo. Spodbudimo jih, da jo zapišejo. Spomnijo se, da je krožnica množica točk v ravnini, ki zadoščajo nekemu pogoju.

Ali lahko najdemo tak pogoj, kateremu bodo zadoščale vse točke, ki ležijo na elipsi?

Če je potrebno, jih pri raziskovanju usmerjamo, kaj naj pri posamezni krivulji opazujejo.

Na koncu najuspešnejši dijaki sami pridejo do geometrijskih definicij stožnic, ostalim dijakom pomagamo z dodatnimi namigi in nasveti.

Razvoj aktivnosti

Dijaki delajo v parih. Spodbudimo jih, da zapišejo geometrijsko definicijo krožnice (to že poznajo).

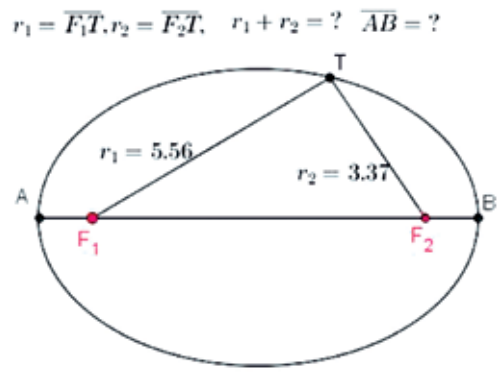
Raziskovanje z uporabo matematičnega programa GeoGebra poteka vodeno:

S programom GeoGebra narišite elipso. Za krožnico velja, da so vse točke, ki ležijo na krožnici, enako oddaljene od središča krožnice. Pri elipsi imamo dve točki – gorišči. Kaj bi lahko opazovali za točke na elipsi? Dijakom damo nekaj minut časa, da raziskujejo s programom GeoGebra. Najuspešnejši dijaki hitro postavijo hipotezo, ki jo z različnimi primeri elips potrdijo.

Ostalim dijakom pomagamo z namigi:

Izberite več različnih točk na elipsi. Za vsako točko izračunajte vsoto razdalj do gorišč F_1 in F_2 elipse (Slika 13). Kaj opazite? Dobljeno vsoto primerjajte z dolžino daljice AB, kjer sta temeni elipse, ki ležita na nosilki daljice F_1F_2. Kaj opazite?

Postopek ponovite za različne elipse.



Slika 13: Geometrijska definicija elipse.

Pri hiperboli in paraboli spodbujamo učno šibkejše dijake, da tudi oni postavijo hipoteze. Če niso uspešni, jim z dodatnimi namigi pomagajo dijaki, ki so nalogo rešili.

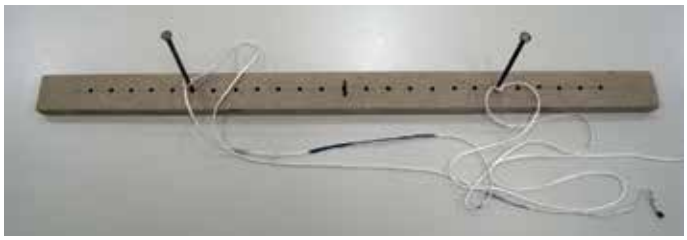
Na koncu na podlagi ugotovitev dijakov zapišemo geometrijske definicije stožnic.

Vprašanja za razvoj aktivnosti

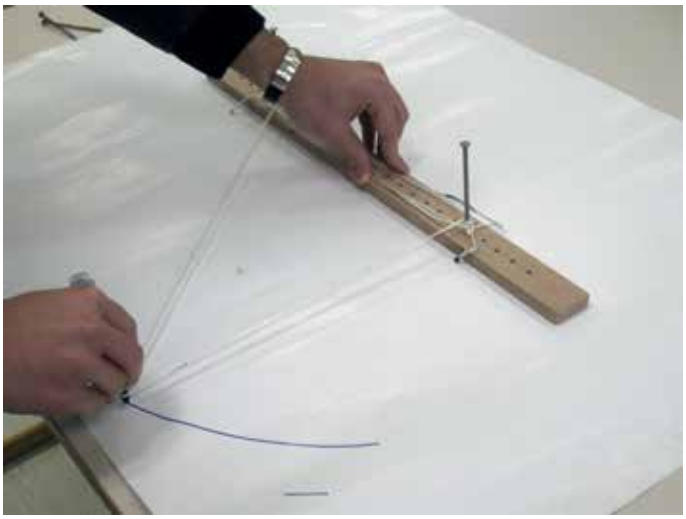
- S čim je krožnica natanko določena?
- Katere tri točke v programu GeoGebra morate izbrati, da nariše elipso? Ali ste že slišali za gorišče? Kje in v povezavi s čim?
- S čim je elipsa natanko določena?
- Kaj naj opazujemo za točke na elipsi? Kateremu pogoju morajo zadoščati?
- Primerjajte $\overline{F_1T} + \overline{TF_2}$ in $\overline{AB}$. Kaj opazite? Svojo hipotezo dokažite.
- Katere tri točke v programu GeoGebra morate izbrati, da narišete hiperbolo?
- Kaj naj opazujemo pri točkah na hiperboli? Kateremu pogoju morajo zadoščati?
- Primerjajte $|\overline{F_1T} - \overline{TF_2}|$ in $\overline{AB}$, A in B sta temeni hiperbole. Kaj opazite? Svojo hipotezo dokažite.
- Kaj morate izbrati v programu GeoGebra, da narišete parabolo?
- Kaj naj opazujemo za točke na paraboli? Kateremu pogoju morajo zadoščati?

Možne razširitve aktivnosti

1. Nekateri dijaki za domačo nalogo izdelajo mehanske pripomočke za načrtovanje stožnic (Slika 14).

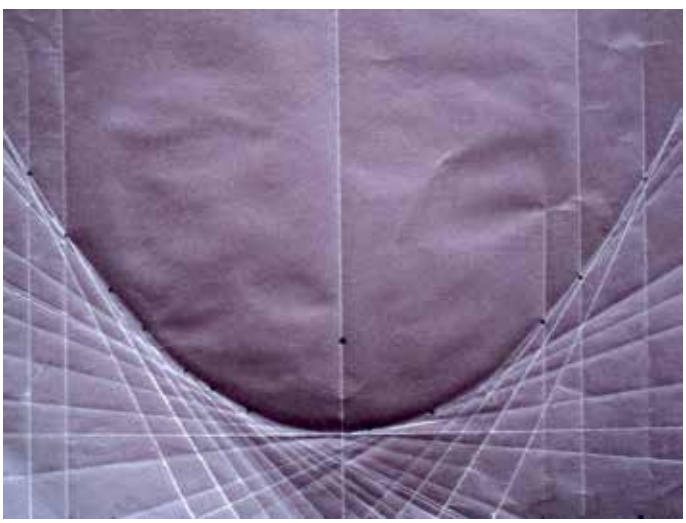


Slika 14: Mehanski pripomoček za vrtnarsko konstrukcijo elipse.



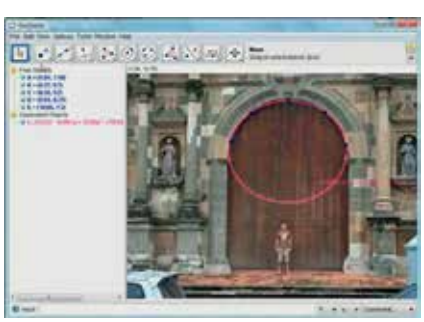
Slika 15: Vrtnarska konstrukcija elipse.

2. Dijaki doma konstruirajo stožnice s prepogibanjem papirja (Slika 16) in konstrukcije stožnic utemeljijo. Svojo nalogo pri učni uri predstavijo sošolcem in kritično analizirajo svoje delo.



Slika 16: Parabola s prepogibanjem papirja.

3. Z učenci se dogovorimo, da naredijo nekaj fotografij objektov iz realnega življenja, kjer predpostavljajo, da nastopajo stožnice. Te fotografije uvozimo v program GeoGebra in potem s programom poiščemo ustrezne stožnice (Slika 17).



Slika 17: Elipsa skozi pet izbranih točk (modra barva) na oboku vrat.

Spremljanje dosežkov

Vprašanja za spremljanje:
Kako bi narisali mejo vrta v obliki elipse?
Kako s šestilom in ravnilom konstruiramo točke, ki ležijo na paraboli?
Kako s šestilom konstruiramo točke, ki ležijo na hiperboli?

Dosežke dijakov lahko spremljamo tudi z dodatno nalogo (učni list UL_Valovanje in stožnice). S to nalogo obravnavano snov povežemo tudi z valovanjem pri fiziki.

Dijaki dobijo učni list, na katerem sta narisani dve družini koncentričnih krožnic z enakomerno naraščajočimi polmeri krožnic. Na slikah poiščejo hiperbole in elipse, na katerih ležijo presečišča krožnic. Tako spremljamo, na kateri stopnji razumevanja obravnavane učne snovi so posamezni dijaki in na kateri stopnji razvoja problemskih znanj so.

Dosežki učencev pri ugotovljenem in predpostavljenem predznanju

Dijaki samostojno ali vodeno pridejo do geometrijske definicije stožnic. Pridobljeno znanje večina dijakov zna uporabiti v novi situaciji, ko rešujejo nalogo iz učnega lista.

Gradivo

Učni list: Valovanje in stožnice
Rešitev učnega lista: Valovanje in stožnice

3. Višinska točka trikotnika in parabola

Cilji: Dijaki raziščejo, katero krivuljo opiše višinska točka trikotnika *ABC* z negibno stranico *AB*, ko oglišče *C* premikamo po negibni premici *p*, ki je vzporedna s stranico *AB*. Zapišejo enačbo krivulje (parabole), ki jo opiše višinska točka, koordinati gorišča in enačbo premice vodnice parabole.

Kdaj lahko uporabimo aktivnost: Aktivnost uporabimo po analitični in geometrijski definiciji stožnic**;** lahko jo uporabimo kadarkoli po predelanem sklopu stožnice za utrjevanje in povezovanje vsebinskih znanj skozi reševanje problemov.

Zastavitev problema

Dijaki raziskujejo s programom GeoGebra. Navodila za delo dobijo na učnem listu.

UL_Geometrijsko mesto višinske točke trikotnika

Učitelj spremlja in vodi delo dijakov, z majhnimi namigi pomaga le tistim, ki se jim na določeni stopnji delo ustavi. Čim več aktivnosti, odkritij in sklepov pustimo dijakom.

Naloga

Podan je trikotnik *ABC* z višinsko točko *V*. Točki *A* in *B* sta negibni. Razišči, po kateri krivulji se giblje višinska točka *V*, če oglišče *C* premikamo po negibni premici *p*, ki je vzporedna daljici *AB*.

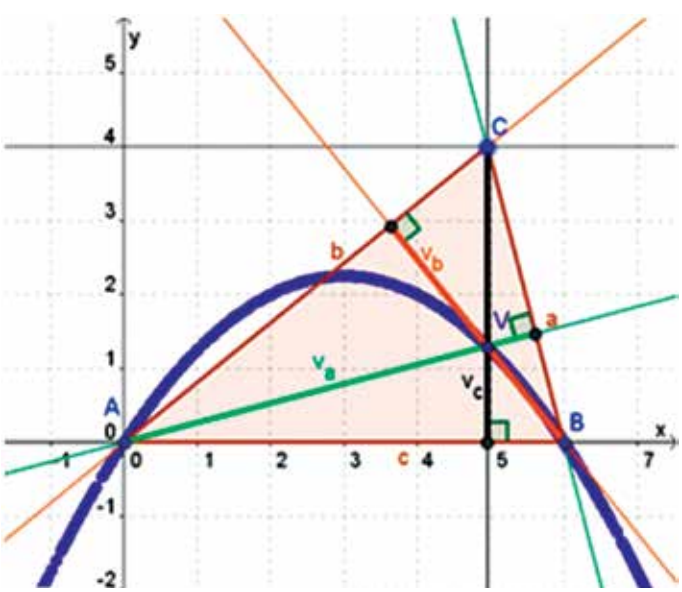
Reševanje naloge poteka v več fazah:

- Izberemo konkreten primer: oglišča trikotnika $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(x, 4)$ in premico p: $y = 4$ ter narišemo trikotnik ABC s programom Geogebra.
- Dijaki raziskujejo s programom GeoGebra in postavijo hipotezo.
- Konkreten primer rešijo še analitično.
- Rešujejo splošen primer, najprej s programom Geogebra in nato še analitično.

Razvoj aktivnosti:
Dijaki delajo v parih. Dobijo učni list z nalogo in navodili za delo. Le-ta so skromna z namenom, da dijakom z navodili ne sugeriramo preveč vmesnih korakov pri reševanju zastavljenega problema. Če je v navodilih zapisanih preveč vmesnih korakov, potem to ni več problemska naloga.

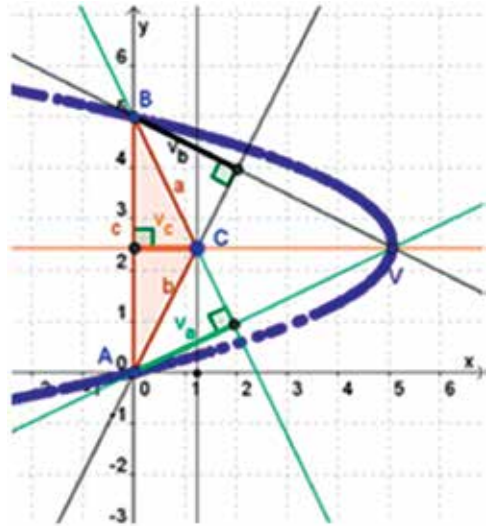
S programom GeoGebra konstruirajo trikotnik ABC: $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(t, 4)$, t je parameter, višinsko točko V in premico $y = 4$. Potem raziskujejo, katero krivuljo opiše višinska točka trikotnika – vklopijo funkcijo ***Sled*** (Slika 18). Do enačbe nastale krivulje pridejo z uporabo ukaza ***PolinomskaTrendnaČrta***. Pri konstrukciji s programom GeoGebra učitelj opozarja manj spretne dijake na pravilen vrstni red konstrukcijskih korakov, da bodo potem lahko izvedli ustrezno animacijo.

Sami si izberejo še druge primere trikotnikov in premice p. Ugotovijo, da je geometrijsko mesto višinske točke vedno parabola (Slika 19).



Slika 18: Geometrijsko mesto višinske točke.

Potem nalogo rešijo še analitično. Zapišejo enačbi nosilk višine na npr. stranico in stranico ter izračunajo njuno presečišče. Tako dobijo koordinati točke in s tem tudi enačbo parabole. Izračunajo še teme, gorišče in enačbo premice vodnice parabole.



Slika 19: Geometrijsko mesto višinske točke.

Vprašanja za razvoj aktivnosti:

- Katere znamenite točke trikotnika poznaš?
- Kaj je višina trikotnika?
- Opredeli pojem višinske točke trikotnika?
- Kakšna je lega višinske točke glede na različne trikotnike?
- Po kateri krivulji se po tvojem mnenju giblje višinska točka, ko točko C premikamo po premici p?
- Kako izračunamo smerni koeficient premice?
- Kako izračunamo smerni koeficient pravokotnice?
- Kakšno enačbo ima premica, ki je pravokotna na abscisno os?
- Kako izračunamo koordinati gorišča?
- Kakšna je temenska oblika enačbe parabole?

Možne razširitve aktivnosti

Dijaki lahko s programom GeoGebra raziskujejo, katere krivulje opiše višinska točka, če spremenimo lego premice p, po kateri premikamo točko C (npr. premica p je pravokotna na stranico AB, stranico AB seka pod kotom, ki ni 90°).

Sprotno spremljanje dejavnosti in dosežkov

Predpostavimo, da v vseh primerih stranica AB trikotnika ABC leži na eni izmed koordinatnih osi.

Vprašanja za spremljanje:

- Ali je višinska točka trikotnika presečišče višin trikotnika?
- Ali znaš napovedati lego parabole, če leži premica p pod stranico AB, AB pa leži na abscisni osi?
- Ali znaš napovedati lego parabole, če leži stranica AB na ordinatni osi, premica p pa ima enačbo $x = d$, $d < 0$?
- Primerjaj lego temena parabole glede na točko C (je nad, je pod) v odvisnosti od oblike trikotnika ABC oz. velikosti kota γ?

- Naj za oglišča trikotnika ABC velja: A (0, 0), B(b, 0), $C(t, d)$, $d > 0$, t je parameter, premica p pa ima enačbo $y = d$. Zapiši pogoje za d, da bo teme ležalo nad, na oz. pod premico $y = d$.
- V katerem primeru je točka C lahko teme parabole?

Gradivo

UL_Geometrijsko mesto višinske točke trikotnika

RUL_Geometrijsko mesto višinske točke trikotnika

Pri pouku smo poleg opisanih aktivnosti izvedli še naslednje primere [Ivančič, 6, str. 45]:

Primer 1: Učenci so na primeru biljardne mize v obliki elipse ugotavljali odbojno lastnost elipse (Slika 20).

Slika 20: Biljardna miza v obliki elipse.

Primer 2 (Domača naloga): Učenci so poiskali primere, kjer se v vsakdanjem življenju uporabljajo predmeti, ki izkoriščajo odbojno lastnost elipse in parabole.

Primer 3 (Utrjevanje in preverjanje znanja): Na delovnih listih so bile zapisane različne enačbe, formule, točke, narisane krivulje … Dijaki so sestavili čim več različnih problemov in nalog na osnovi danih podatkov. Po omejenem časovnem obdobju so predstavili svoje naloge še ostalim sošolcem.

Primeri iz delovnega lista:

- $A(0,3), B(0,-3)$
- $4x^2 - y^2 = 4, x - y = 0$
- $x^2 + 25y^2 = 25, A(4, \frac{1}{2})$

Primer 4 (Matematična preiskovanja z uporabo IKT): Učenci so z matematičnim programom Geogebra raziskovali, katere množice točk v ravnini lahko predstavljajo enačbe z delovnega lista. Zapisali so tudi ustrezne pogoje za parametre, ki so nastopali v enačbah.

Primeri enačb iz delovnega lista:

- $ax^2 + y^2 = a$
- $x^2 + ay^2 = b$
- $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0.$

Končno spremljanje

Po predelani učni temi stožnice je sledilo pisno preverjanje znanja, kjer je bilo približno 10 % točk namenjenih preverjanju problemskih znanj.

Primer naloge

Dana je enačba elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ in točka $T(2, 1)$.

a) Zapiši polosi in gorišči elipse.

b) Skiciraj elipso.

c) Parabola ima teme v točki T, gorišče pa v desnem gorišču elipse. Skiciraj parabolo, tako da narišeš teme in konstruiraš še dve točki na paraboli. Zapiši enačbo premice vodnice te parabole.

Pri vprašanju c) je treba pokazati razumevanje definicije parabole v novi situaciji.

Pri dijakih sem zaznala velik napredek v osmišljanju matematičnih vsebin, postavljanju ključnih vprašanj za rešitev problema, razumevanju problemskih situacij in zaupanju v lastne matematične sposobnosti.

Načrtovanje

Aktivnosti pod točko 1. in 2. načrtujemo na začetku obravnave učne teme stožnice, aktivnosti pod točko 3. pa na koncu učne teme. Aktivnosti pod točko 3. lahko načrtujemo tudi v četrtem letniku, kot lep primer povezovanja in ponovitve različnih matematičnih učnih vsebin.

Zaključek

Med izvajanjem pouka sem spremljala predvsem didaktične vidike učnega procesa: motiviranost za delo, medsebojno sodelovanje, osmišljanje matematičnih vsebin, reševanje problemskih situacij in aktivno učenje. Znanje dijakov je bolj trajno in uporabno, če je pridobljeno z aktivnim sodelovanjem, ter če lahko pridobljeno znanje povežejo s primeri iz vsakdanjega življenja in medpredmetno. Vsi dijaki niso navdušeni nad takim načinom učenja. Pri marsikom mora učitelj vložiti veliko energije v njegovo motivacijo in aktivno sodelovanje pri pouku. Trud je poplačan ob pogledu na zadovoljne in ponosne dijake, ko so sami rešili problem.

Viri

Legiša, P. (2002). Matematika. Učbenik za 3. letnik gimnazij. Ljubljana: DZS.

Razpet, N. (1996/97): Višinska točka trikotnika in stožnice, Revija Presek II, str. 74–77, Založništvo DMFA, dostopno na http://www.presek.si/24/1295-Razpet.pdf (24. 10. 2019).

Rugelj, M., Šparovec, J., Kavka, D., Pavlič, G. (2004). Prostor: matematika za 3. letnik gimnazij. Ljubljana: Modrijan.

Žakelj, A. (2003). Kako poučevati matematiko: teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Žakelj, A. in drugi (2008). Učni načrt. Matematika: gimnazija: splošna, klasična in strokovna gimnazija: obvezni predmet in matura (560 ur). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Avsec A. [et al.]. Zbornik prispevkov konference NAMA 2012 (2012), Ljubljana, MIZKŠ, http://www.zrss.si/pdf/Zbornik-prispevkov-NAMA2012.pdf

Iz digitalne bralnice ZRSŠ

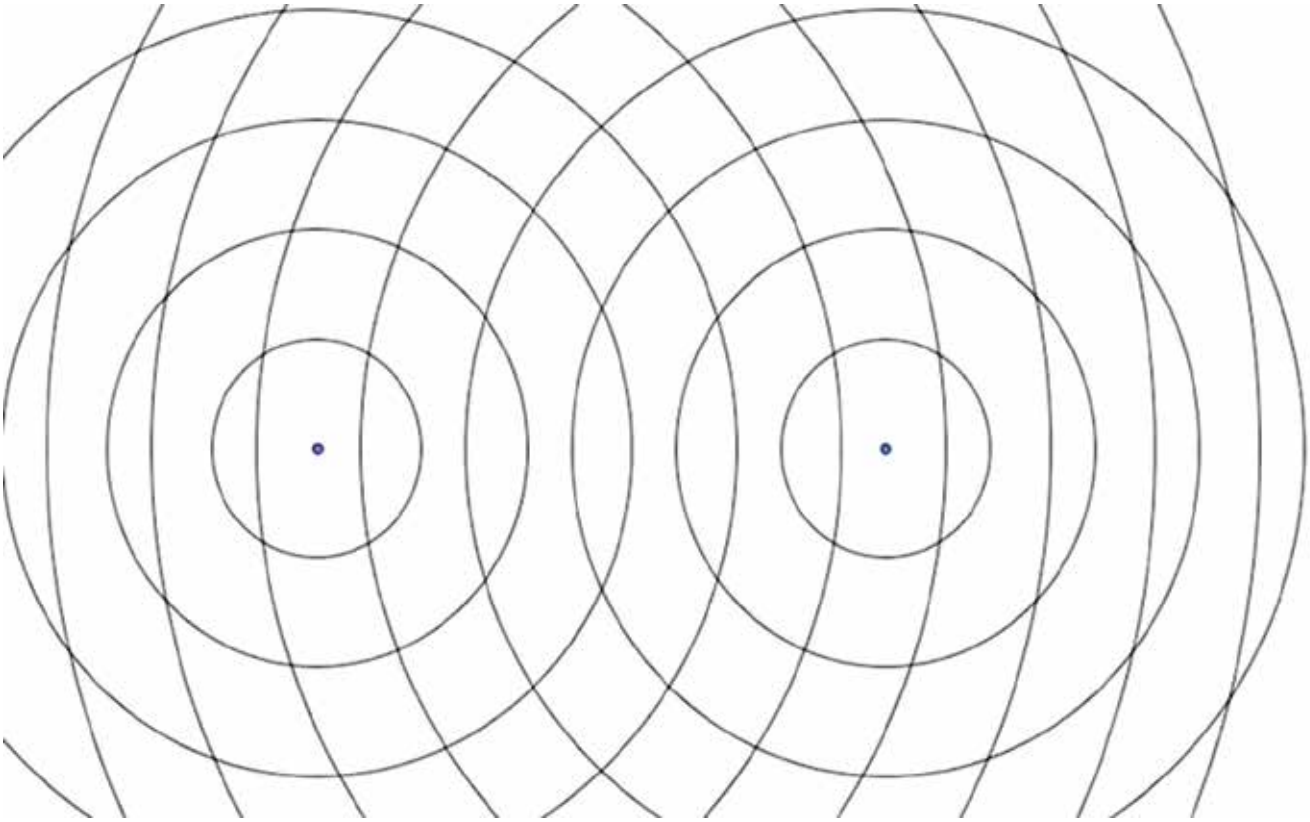
www.zrss.si/strokovne-resitve/digitalna-bralnica

V digitalni bralnici lahko prelistate najrazličnejše strokovne publikacije: monografije in priročnike, ter druge publikacije, ki so izšle na Zavodu RS za šolstvo in so vam BREZPLAČNO dosegljive tudi v PDF obliki.

Valovanje in stožnice

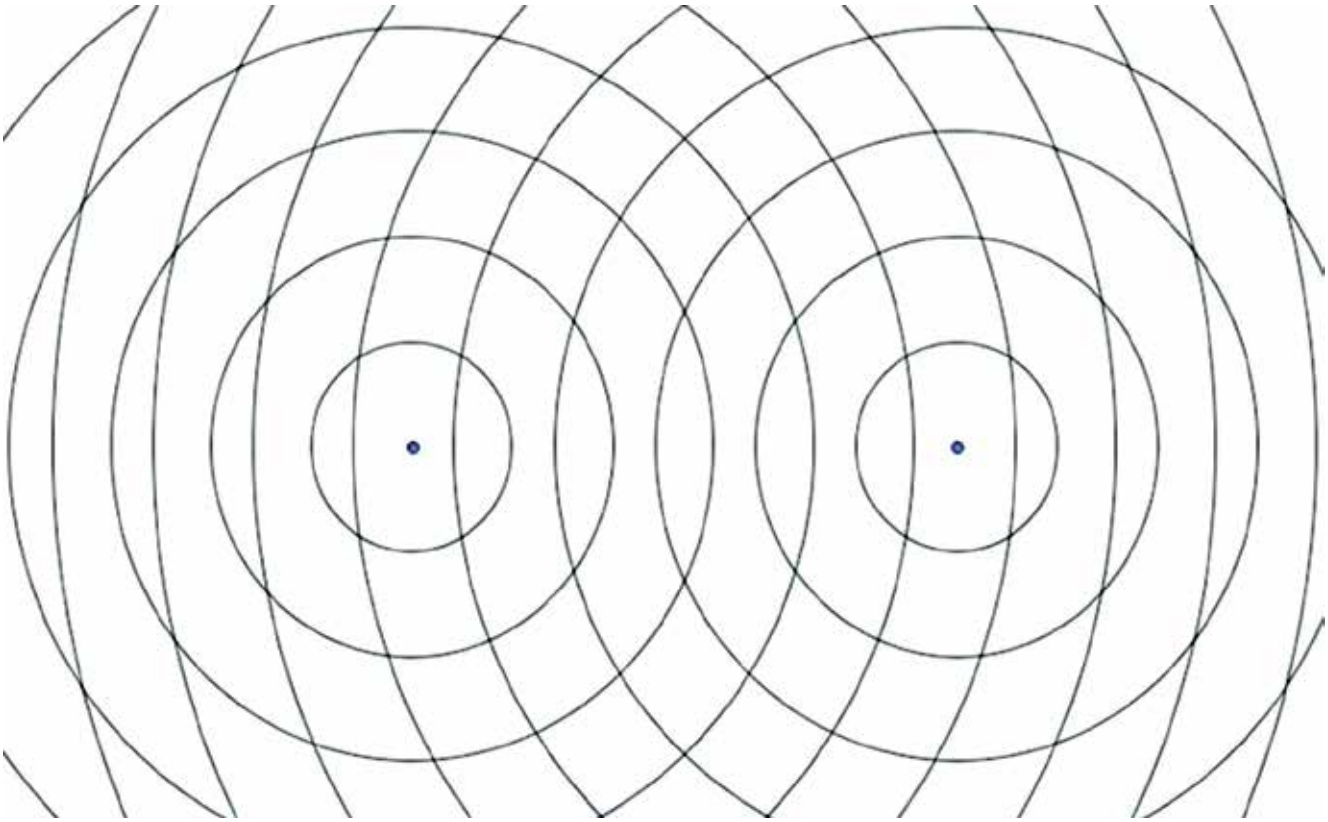
Na učnem listu sta na vsaki sliki narisani dve družini koncentričnih krožnic z enakomerno naraščajočimi polmeri krožnic. Ponazarjata sočasno nihajoča točkasta izvora. Označi vsa presečišča krožnic. Upoštevaj geometrijske definicije stožnic in na vsaki sliki poišči eno družino stožnic, na katerih ležijo presečišča krožnic. Svojo ugotovitev utemelji. Obravnavani primer poveži z znanjem fizike. Kakšno vlogo imata pri nastalih krivuljah točki, ki ponazarjata izvora valovanja?

Primer 1



Odgovori: _____

Primer 2



Odgovori: _____

Geometrijsko mesto višinske točke trikotnika

Podan je trikotnik ABC z višinsko točko V. Razišči, po kateri krivulji se giblje višinska točka V, če oglišče C premikamo po premici p, ki je vzporedna daljici AB, točki A in B pa sta negibni.

1. Reši zastavljeni problem za naslednje podatke

$A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(x, 4)$, premica p: $y = 4$.

i) Reševanje problema z uporabo programa GeoGebra

Ko boš rešil primer za dano premic $y = 4$, izberi še druge premice, ki so vzporedne daljici AB in za vsak primer posebej opazuj geometrijsko mesto višinskih točk. Kaj opaziš?

ii) Analitično reševanje problema

Izračunaj koordinati višinske točke V. Razloži, po kateri krivulji se giblje višinska točka. To krivuljo analitično obravnavaj.

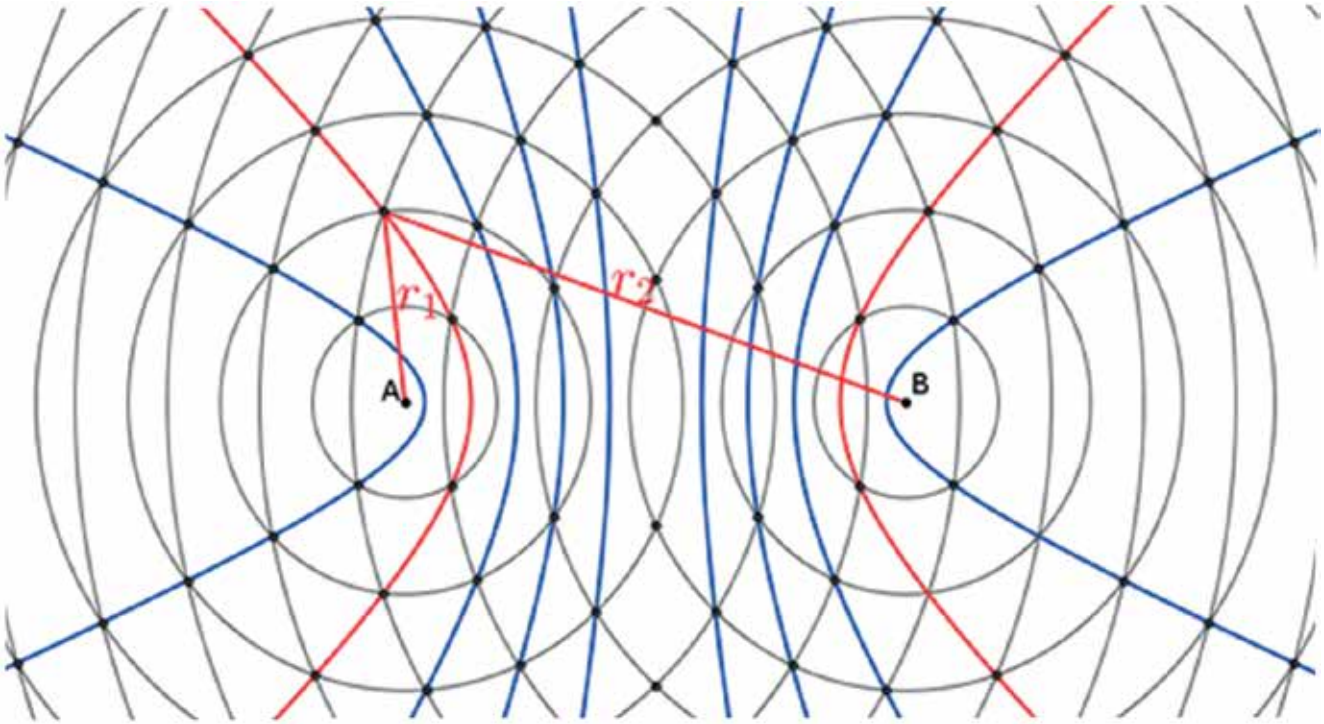
2. Analitično reševanje splošnega problema

Brez škode za splošnost si lahko izberemo koordinatni sistem, tako da je $A(0, 0)$, $B(b, 0)$, $C(t, d)$, t je parameter, enačba premice p je $y = d$, $d \neq 0$. Za tako izbran koordinatni sistem izračunaj koordinati višinske točke V. Nalogo rešuj na podoben način kot 1.ii).

Valovanje in stožnice

Na učnem listu sta na vsaki sliki narisani dve družini koncentričnih krožnic z enakomerno naraščajočimi polmeri krožnic. Ponazarjata sočasno nihajoča točkasta izvora. Označi vsa presečišča krožnic. Upoštevaj geometrijske definicije stožnic in na vsaki sliki poišči eno družino stožnic, na katerih ležijo presečišča krožnic. Svojo ugotovitev utemelji. Obravnavani primer poveži z znanjem fizike. Kakšno vlogo imata pri nastalih krivuljah točki, ki ponazarjata izvora valovanja?

Primer 1



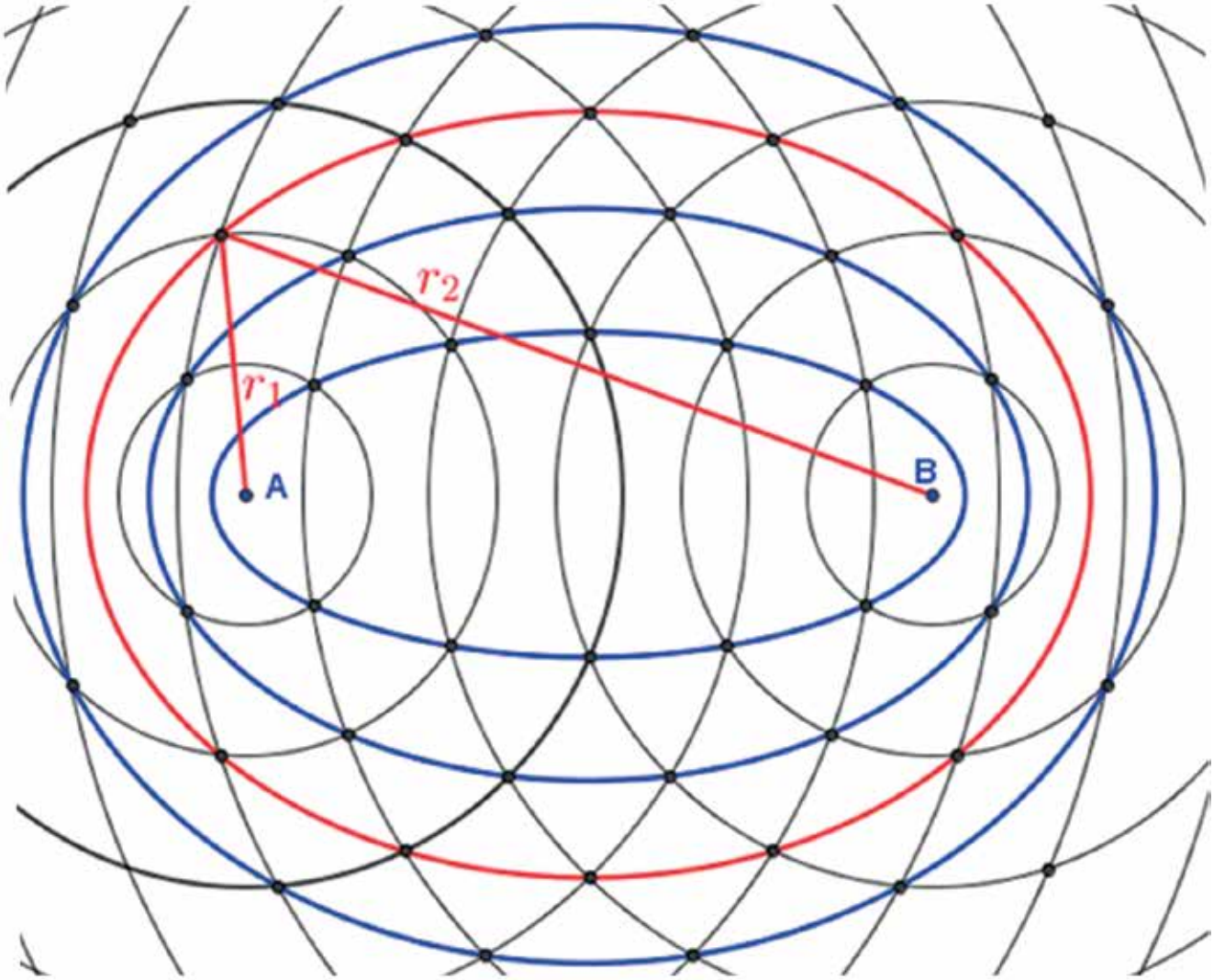
Slika 1: Presečišča krožnic ležijo na hiperbolah

Ugotovitev: Presečišča krožnic ležijo na hiperbolah, razen tistih presečišč, ki ležijo na simetrali daljice *AB*. Točki *A* in *B*, ki ponazarjata izvora valovanja, sta gorišči hiperbol.

Utemeljitev: Izberemo točke, za katere iz slike sklepamo, da ležijo na isti hiperboli. Potem pokažemo, da za vse izbrane točke velja $|r_2 - r_1|$ = konstanta. Upoštevamo, da polmeri krožnic enakomerno naraščajo.

Hiperbole predstavljajo interferenčne pasove valovanja.

Primer 2



Slika 2: Presečišča krožnic ležijo na elipsah.

Ugotovitev: Presečišča krožnic ležijo na elipsah. Točki *A* in *B*, ki ponazarjata izvora valovanja, sta gorišči elips.

Utemeljitev: Izberemo točke, za katere iz slike sklepamo, da ležijo na isti elipsi. Potem pokažemo, da za vse izbrane točke velja $r_1 + r_2 =$ konstanta. Upoštevamo, da polmeri krožnic enakomerno naraščajo.

Geometrijsko mesto višinske točke trikotnika

Podan je trikotnik ABC z višinsko točko *V. Razišči, po kateri krivulji se giblje višinska točka V, če oglišče C premikamo po premici p, ki je vzporedna daljici AB, točki A in B pa sta negibni.*

1. Reši zastavljeni problem za naslednje podatke:

$A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(x, 4)$, premica p: $y = 4$.

i) Reševanje problema z uporabo programa GeoGebra

Ko boš rešil primer za dano premic y = 4, izberi še druge premice, ki so vzporedne daljici AB in za vsak primer posebej opazuj geometrijsko mesto višinskih točk. Kaj opaziš?

Rešitev:

- V orodni vrstici programa GeoGebra izberi ukaz *Pogled* in v meniju izberi *Osi, Koordinatna mreža, Algebrsko okno.*
- Nariši točke *A, B* in *C*.
- Nariši daljice *AB, BC* in *AC*.
- Nariši točko (0, 4) in vzporednico k daljici *AB*. To je premica *p*
- Točko *C* pripni na premico *p* z zaporedjem izbir , .
- Konstruiraj višinsko točko *V* (je presečišče nosilk višin).
- Za točko *V* klopi SLED.
- Točko *C* premikaj po premici *p*.
- Sled točke *V* je parabola.
- Na krivulji si izberi tri točke npr. $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $D(4, 2)$.
- V vnosno vrstico programa zapiši: *PolinomskaTrendnaČrta* [{(0, 0), (6, 0), (4, 2)}, 2].
- S pritiskom na tipko Enter se ti v algebrskem oknu izpiše enačba funkcije, katere graf je parabola – sled višinske točke: $f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x$.

ii) Analitično reševanje problema

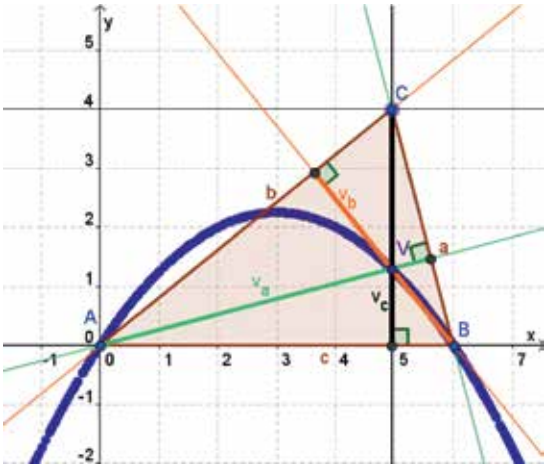
Izračunaj koordinati višinske točke V. Razloži, po kateri krivulji se giblje višinska točka. To krivuljo analitično obravnavaj.

Rešitev:

Nosilka višine na stranico *c* je premica z enačbo $x = t$. Nosilka višine na stranico *a* je premica z enačbo $y = \frac{6-t}{4} \cdot x$. Presečišče premic je višinska točka $V\left(t, -\frac{t^2}{4} + \frac{3t}{2}\right)$.

Ko parameter *t* teče po realnih številih (točka *C* se giblje po premici *p*), se višinska točka giblje po paraboli z enačbo $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}$ oz. $(x-3)^2 = -4\left(y - \frac{9}{4}\right)$ (Slika 1).

Iz enačbe razberemo, da je teme v točki $T\left(3, \frac{9}{4}\right)$. Izračunamo, da je gorišče v točki $F\left(3, \frac{5}{4}\right)$ in enačba premice vodnice je $y = \frac{13}{4}$.



Slika 1: Geometrijsko mesto višinske točke.

2. Analitično reševanje splošnega problema

Koordinatni sistem izberimo tako, da je A(0, 0), B(b, 0), C(t, d), t je parameter, enačba premice p je y = d, d ≠ 0. Za tako izbrani koordinatni sistem izračunaj koordinate višinske točke V in izračunaj še ostale količine po vzoru naloge 1.ii).

Rešitev:

Nosilka višine na stranico *c* je premica z enačbo *x* = *t*. Nosilka stranice *a* ima smerni koeficient $\frac{d}{b-t}$. Nosilka višine na stranico *a* je zato premica z enačbo $y = \frac{b-t}{d} \cdot x$. Presečišče premic *x* = *t* in $y = \frac{b-t}{d} \cdot x$ je višinska točka $V(t, \frac{bt-t^2}{d})$.

Ko parameter *t* teče po realnih številih (točka *C* se giblje po premici *p*), se višinska točka giblje po paraboli z enačbo $y = -\frac{x^2}{d} + \frac{bx}{d}$ oz. $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = -d\left(y - \frac{b^2}{4d}\right)$.

Iz enačbe razberemo, da je teme v točki $T\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{4d}\right)$. Izračunamo, da je gorišče v točki $F\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2-d^2}{4d}\right)$ in enačba premice vodnice je $y = \frac{b^2+d^2}{4d}$.

Dapoma – didaktična igra za utrjevanje poštevanke

Julija Viličnjak in dr. Alenka Lipovec
Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta Maribor

Izvleček

V prispevku je predstavljena igra dapoma, ki je didaktična igra za utrjevanje poštevanke, zasnovana na tradicionalni igri dama. Natančneje so predstavljeni cilji, ki jim sledi dapoma, potek izdelave te didaktične igre, njena pravila in uporabnost. Vse to je predstavljeno z namenom, da učitelji in drugi spoznajo, kako lahko s prilagoditvijo že znanih tradicionalnih iger in s pomočjo preprostih materialov tudi sami izdelajo didaktične igre.

Ključne besede: matematika, didaktična igra, poštevanka, strateško mišljenje, dama

Dapoma – Didactic Game for Consolidating Knowledge of the Multiplication Table

Abstract

The article presents the game dapoma, which is a didactic game for consolidating the knowledge of the multiplication table and is based on the traditional game of draughts. It presents in detail the objectives pursued by dapoma, how this didactic game is made, its rules and application. All of that is presented with the intention of showing teachers and others how they can make their own didactic games by adapting traditional games and using simple materials.

Keywords: Mathematics, didactic game, multiplication table, strategic thinking, draughts

Uvod

Uporaba kognitivnih strategij spodbuja učenje. Žal učenci (in odrasli) pri reševanju problemov večkrat ne izberejo strateškega ravnanja. Garner (1990) navaja pet možnih razlogov za ta fenomen: slabša metakognicija, primitivne rutine, šibka baza znanja, minimalni transfer in učni cilji, ki ne spodbujajo razvoja strategij. Pri matematiki učni načrt spodbuja strateško mišljenje, zato menimo, da je uvajanje strateških iger v pouk matematike nujno.

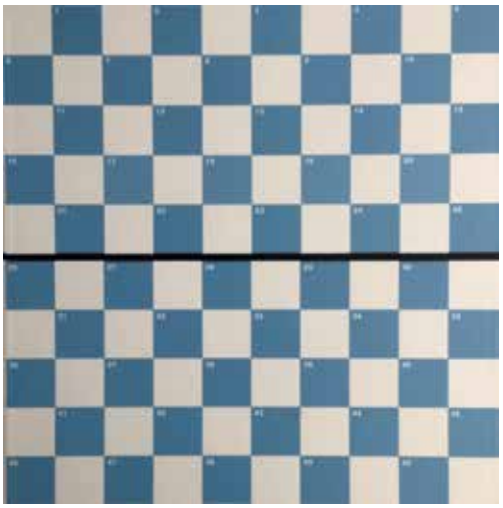
Ob razmisleku, kako lahko učencem popestrimo neko snov pri matematiki, ki jo je treba veliko in dlje časa utrjevati, je nastala ideja za nastanek didaktične igre za utrjevanje poštevanke, poimenovane dapoma. Ime dapoma izhaja iz besede dama (igra, po kateri se dapoma zgleduje), med zloga te besede pa je vrinjen še zlog po, ki je prvi zlog besede poštevanka (dapoma je namenjena utrjevanju poštevanke). Nekatere didaktične igre so lahko precej kompleksne, saj z njimi uresničujemo tudi več ciljev in prav to dejstvo je prevladovalo tudi pri izbiri vrste didaktične igre za to novonastalo dapomo. Vemo namreč, da so v izobraževanju in vzgajanju mladih danes zelo izpostavljene kompetence 21. stoletja, med katere sodi tudi razvoj kritičnega mišljenja. Ena izmed metod za razvoj kritičnega mišljenja je lahko tudi strateška igra (Bognar, 1987; Lipovec 2011). Pri strateških igrah je treba razviti določeno strategijo, ob tem pa se igralec sploh ne zaveda, da hkrati razvija tudi kritično mišljenje, saj mora situacijo v igri dobro presoditi, preden naredi naslednjo potezo. Obstajajo empirični podatki, da strateške igre, kot je npr. šah ali Kalah, pozitivno vplivajo na kognitivni razvoj mlajših učencev (Wittman, 2005). Prav zaradi teh dejstev naša igra dapoma izhaja iz strateške igre dama, iz katere izhaja tudi njeno poimenovanje.

Za boljše razumevanje dapome je prav, da jo na začetku opredelimo glede na klasifikacijo didaktičnih iger. Po osnovni opredelitvi didaktičnih iger sodi med igre s pravili, saj potek igranja dapome določajo osnovna pravila, ki jih je med igro treba upoštevati (Bognar, 1987). Glede na odločanje v igri sodi dapoma med strateške igre, saj gre za igro, ki nima nikakršnega elementa naključja ali sreče, pač pa potek igre narekujeta igralca, ki nanj vplivata s svojimi strategijami. Pri strateških igrah je namreč cilj razviti boljšo strategijo kot nasprotnik, da si v igri uspešen. Te strategije pa igralci razvijajo ob večkratnem igranju iste strateške igre, saj v novih igrah strategije vedno znova posodabljajo in izpopolnjujejo (Smith in Golding, 2018). Strateške igre lahko uporabljamo tudi pri urah matematike kot ciljno usmerjeno dejavnost, za katero sta značilni dve vrsti pravil, in sicer osnovna

pravila, ki povedo, katere poteze so v igri možne, in strateški premiki, ki povedo, katere poteze je priporočljivo narediti v danem položaju (Soldano, Arzarello in Robutti, 2015). Dapoma je tudi matematična igra, saj Oldfield (1991) matematično igro opredeli kot »aktivnost«, ki vsebuje izziv (običajno glede na enega ali več nasprotnikov), jo vodi množica pravil in ima jasno strukturo s specifičnimi matematičnimi cilji.

Izdelava igre

Za dapomo potrebujemo igralno desko, ki je enaka kot pri mednarodni različici igre dama. Deska mora biti velika 10 × 10 kvadratov, velikih približno 4 × 4 cm. V vsaki vrstici je izmenično pet belih in pet barvnih (običajno črnih) kvadratov. Do deske lahko pridemo na več načinov. Lahko vzamemo in uporabimo igralno desko mednarodne različice dame, a je to žal najtežje dosegljivo, saj je mednarodno različico dame v splošni prodaji zelo težko dobiti.

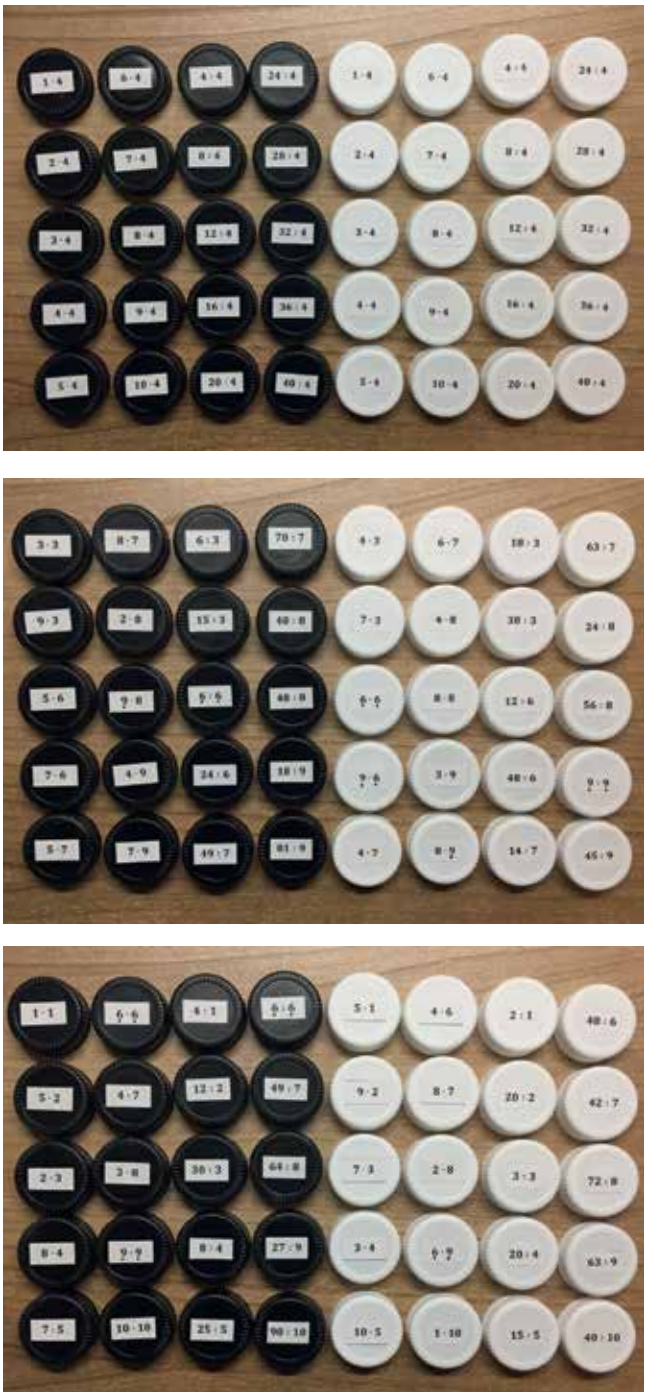


Slika 1: Igralna deska pri mednarodni različici dame.

Drugi način je, da igralno desko izdelamo s pomočjo računalnika, kjer lahko v programu Word, ali katerem podobnem programu, naredimo dve tabeli 10 × 5, s 4 × 4 cm velikimi celicami, pri čemer vsaki drugi celici dodamo črno polnilo. Ti dve tabeli natisnemo na dva A3 bela lista, izrežemo, za večjo obstojnost to še plastificiramo ter oba dela zlepimo skupaj. Igralno desko naredimo iz dveh delov zato, da jo lahko potem zložimo in s tem omogočimo lažje prenašanje ter shranjevanje. Obstaja pa še več načinov izdelave igralne plošče, ki jih prepuščamo kot ustvarjalni izziv bralcem (namige lahko najdete v Viličnjak, 2018).

Poleg igralne deske pri dapomi potrebujemo tudi igralne ploščke. Za igro tako potrebujemo 2 kompleta po 20 igralnih ploščkov, pri čemer je 20 igralnih ploščkov bele barve, 20 pa črne. Premer teh igralnih ploščkov mora biti nekoliko manjši kot je širina polj na igralni deski. Za izdelavo igralnih ploščkov lahko vzamemo nekoliko večje zamaške. Na zamaške nalepimo račune poštevanke in ustrezne rezultate. Pri tem moramo biti pozorni na števili 6 in 9, kadar ti dve nastopata samostojno, saj lahko pride do zamenjave števil in tako do neustreznega rezultata. Natisnjene račune prilepimo na zgornji del zamaška, ustrezne rezultate pa na spodnji oziroma notranji del zamaška.

Slika 2: Primer izdelanih igralnih ploščkov za dapomo.



Slika 3: Igralni ploščki za igre dapoma 1, 2 in 3.

Sami smo izdelali 3 primere igre dapoma, in sicer dapoma 1, ki utrjuje poštevanko (množenje in deljenje) števila 4; dapoma 2 utrjuje poštevanko (množenje in deljenje) števil 3, 6, 7, 8 in 9 ter dapoma 3, ki utrjuje poštevanko (množenje in deljenje) v obsegu 10×10.

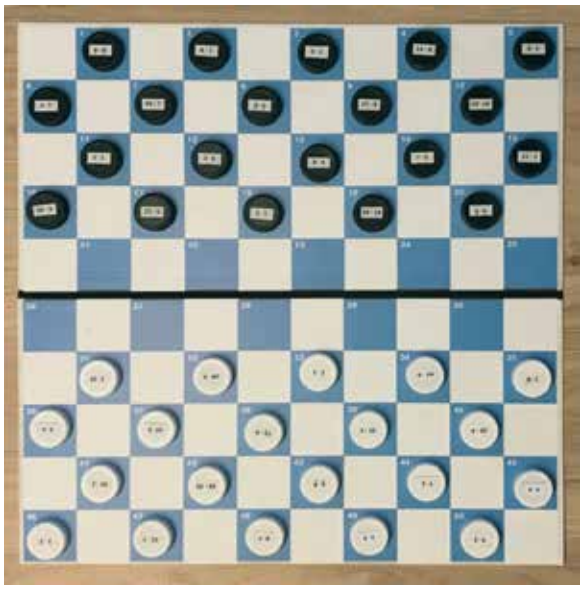
Račune poštevanke na igralnih ploščkih je možno prilagajati glede na potrebe vsakega posameznega razreda ali učenca.

Pravila igre

Dapoma je igra s pravili, kar pomeni, da potek igre določajo pravila, ki jih je treba upoštevati. Ker pa je dapoma tudi strateška igra, jo določata dve vrsti pravil, in sicer osnovna pravila in strateški premiki.

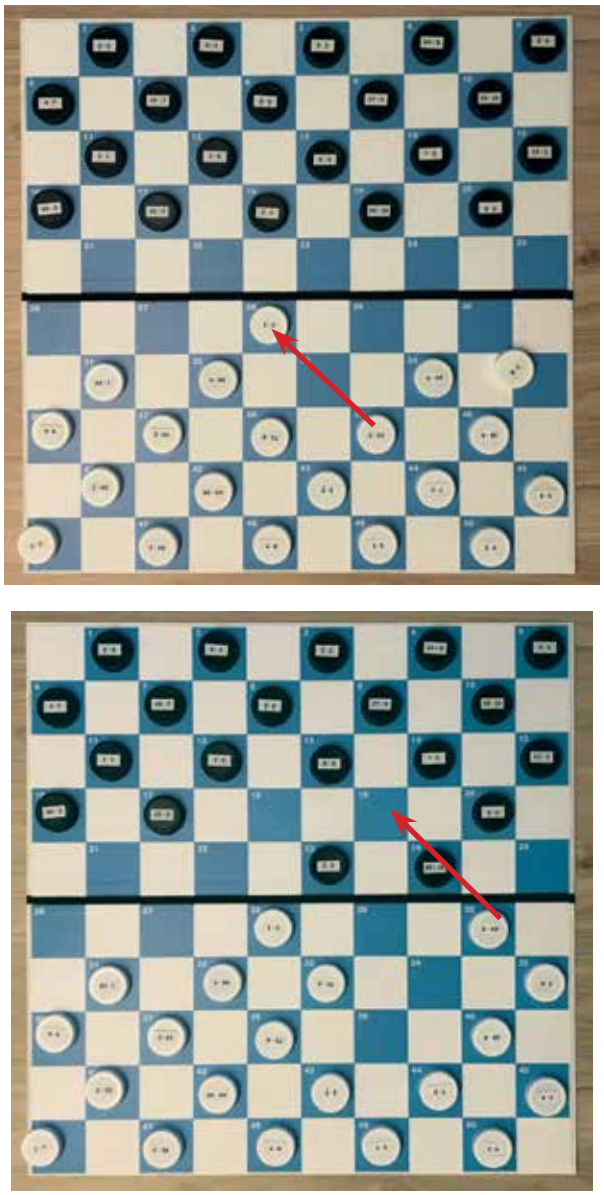
Osnovna pravila

- Dapomo igrata dva igralca hkrati.
- Začetna postavitev: Igralna deska je med igralcema tako, da je spodnji črni kvadrat v kotu na levi strani vsakega igralca. Igralca položita svojih 20 ploščkov, z računom obrnjenim navzgor (rezultat skrit), naključno (ne glede na račune), na črne kvadrate prvih 4 vrst, ki so jima najbližje (dve vrsti v sredi prazni).



Slika 4: Začetna postavitev.

- Polja: Igra poteka zgolj po črnih kvadratih, zato te kvadrate imenujemo polja.
- Premikanje ploščkov: Igro začne igralec z belimi ploščki, v nadaljevanju pa igralca izmenično premikata svoje ploščke in preskakujeta nasprotnikove ploščke z namenom, da iz igre odstranita vse nasprotnikove ploščke ali da nasprotniku onemogočita naslednjo potezo. Pri igri imamo dve vrsti premikov.
  1. Običajen premik (slika 5 zgoraj): Svoje ploščke lahko pomikamo zgolj za eno polje naprej (po diagonali na naslednje črno polje) in pri tem svojih ploščkov ne smemo preskakovati. Pri običajnem premiku računi ne igrajo nobene vloge, pač pa je pri tem pomembna zgolj strategija, kam premakniti svoj plošček, da bo to v dani situaciji ter za nadaljnji potek igre najbolje.

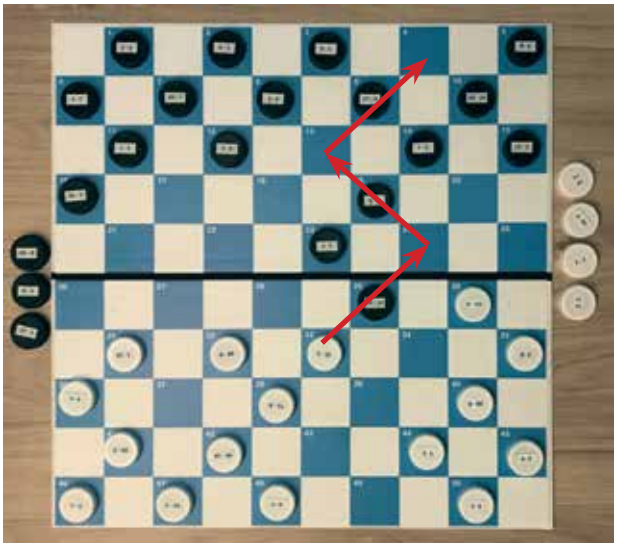


Slika 5: Običajen premik za eno polje naprej in preskok nasprotnikovega ploščka.

  2. Preskakovanje oziroma jemanje nasprotnikovega ploščka (slika 5 spodaj): Ko se igralec v igri znajde pred nasprotnikovim ploščkom in je za tem ploščkom prazno mesto, je treba nasprotnikov plošček preskočiti, saj ima preskakovanje v igri prednost pred običajnim premikom. Pomembno vlogo pri preskakovanju imajo računi, saj mora igralec pravilno izračunati račun na nasprotnikovem ploščku, da lahko ta plošček odstrani iz igre. Pravilnost svoje rešitve preveri tako, da obrne nasprotnikov plošček in prebere rezultat. Če je njegov izračun pravilen, nasprotnikov plošček odstrani z igralne deske in iz igre, če pa je njegov izračun napačen, mora svoj in nasprotnikov plošček vrniti na enako mesto na igralni deski, kot je bilo pred njegovo potezo, igro pa nadaljuje nasprotnik.
- Preskakovanje čim večjega števila ploščkov: Če lahko igralec v eni potezi preskoči več nasprotnikovih ploščkov, mora to tudi narediti, pri tem pa mora pravilno izračunati račune na vseh preskočenih nasprotnikovih ploščkih, da lahko te plošč-

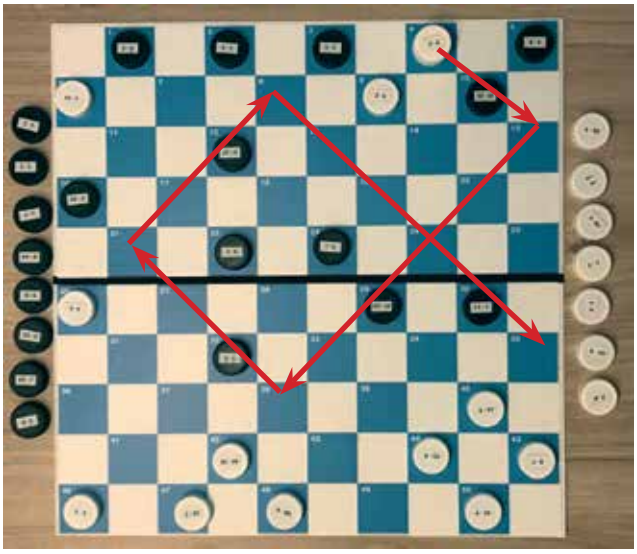
ke odstrani iz igre. Če napačno izračuna zgolj en račun, mora vse ploščke (svojega in nasprotnikove) vrniti na enako mesto na igralni deski, kot je bilo pred njegovo potezo, igro pa nadaljuje nasprotnik.

- Zadnja nasprotnikova vrsta – kraljičina vrsta: Zadnja nasprotnikova vrsta (igralcu najoddaljenejša vrsta) prinese novo moč ploščka. Če se plošček ustavi na tej vrsti in tam tudi ostane, se spremeni v kraljico (Slika 6).



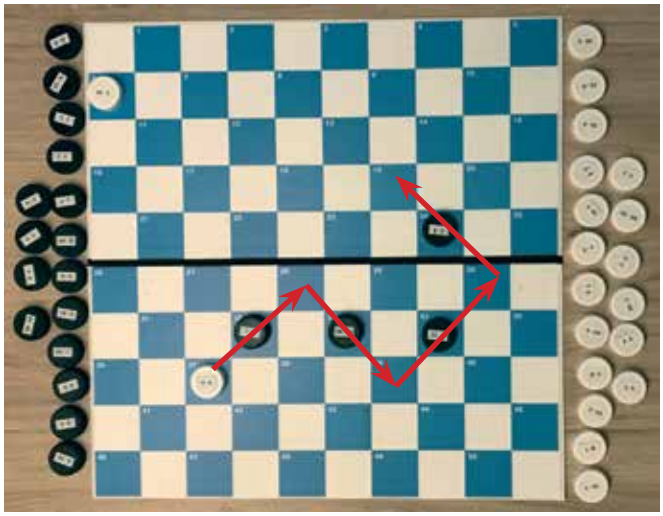
Slika 6: Nastanek kraljice.

- Kraljica: Označimo jo tako, da na plošček, ki se je ustavil na zadnji nasprotnikovi vrsti in je tam tudi ostal, položimo plošček enake barve, ki je bil pred tem že odstranjen iz igre. V eni igri ima lahko en igralec tudi več kraljic. Pomembno pa je, da se zavedamo novih moči, ki jih dobi kraljica – ta se lahko giblje za eno ali več polij naprej in tudi nazaj. Zanjo še vedno veljajo vsa ostala pravila (preskakovanje nasprotnikovih ploščkov in pravilni izračuni, da lahko plošček odstrani iz igre; preskočiti največje možno število nasprotnikovih ploščkov v dani situaciji) (Slika 7).



Slika 7: Premikanje kraljice.

- Jemanje kraljice: Kraljico lahko iz igre ostrani katerikoli nasprotnikov plošček, ki jo preskoči, le da mora pri tem nasprotnik pravilno izračunati oba računa na ploščkih, ki tvorita kraljico. Če nasprotnik napačno izračuna zgolj en račun, mora vse ploščke (svojega in oba nasprotnikova ploščka, ki tvorita kraljico) vrniti na enako mesto na igralni deski, kot so bili pred njegovo potezo, igro pa nadaljuje nasprotnik.
- Zaključek igre – zmaga: Zmago lahko dosežemo na dva načina.
  1. Iz igre odstranimo vse nasprotnikove ploščke, kar pomeni, da smo vse račune na nasprotnikovih ploščkih izračunali pravilno.



Slika 8: Zmaga – odstranitev vseh nasprotnikovih ploščkov iz igre.

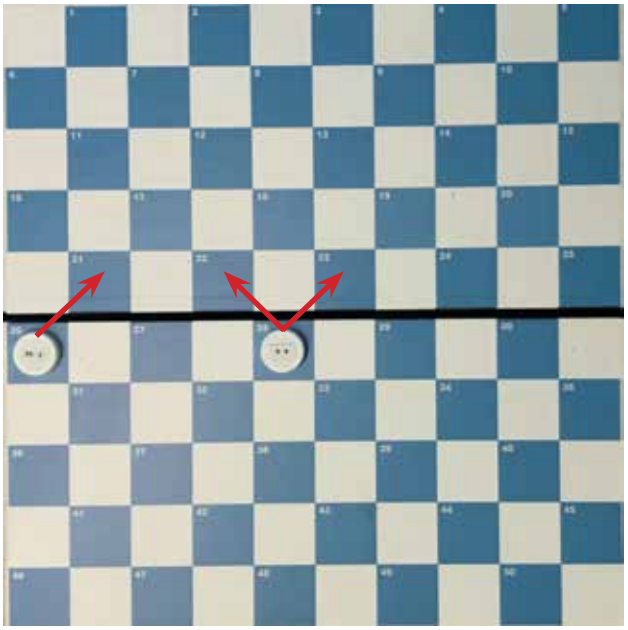
  2. Blokiramo nasprotnikove ploščke tako, da jih nasprotnik ne more več premakniti. Ta način imenujemo blokada (Slika 9).

Slika 9: Zmaga – blokada.

Vse do sedaj opisano o pravilih igre dapoma sodi med osnovna pravila igre, z izjemo zavedanja novih moči ploščka kraljice in zmago s pomočjo blokade, ki pa že sodita med strateške premike.

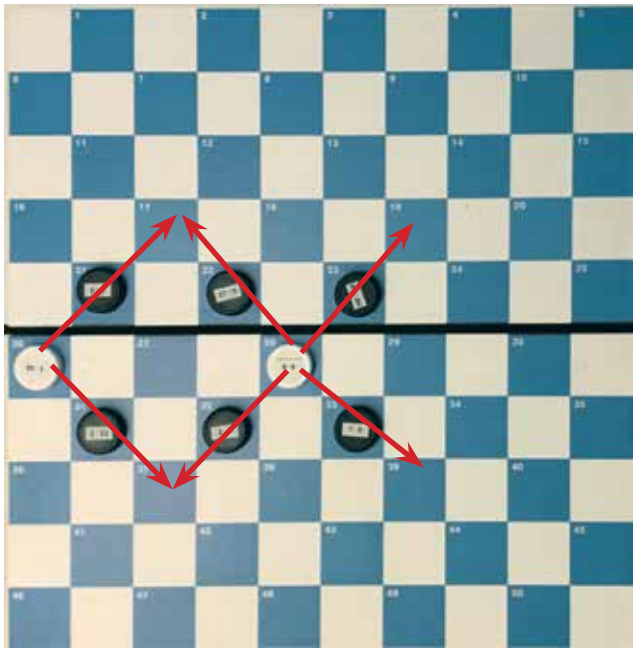
Strateški premiki

- Zavedanje moči različnih polij na igralni deski:
  Pri robnem polju imamo le eno možnost za običajen premik, pri polju v sredini pa imamo za običajen premik dve takšni možnosti (Slika 10).



Slika 10: Primerjava moči polja v sredini in robnega polja – običajen premik.

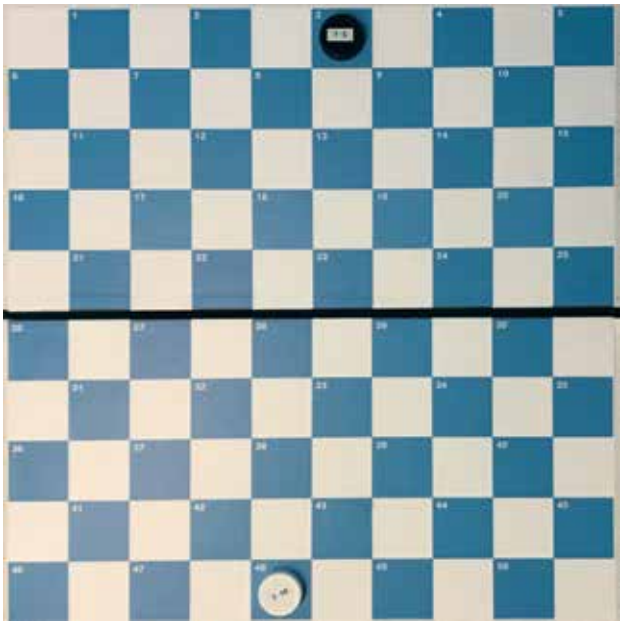
Razlika je tudi pri možnosti za jemanje nasprotnikovih ploščkov, saj imamo pri robnem polju 2 možnosti za preskok in jemanje nasprotnikovih ploščkov, pri polju v sredini igralne deske pa imamo kar 4 takšne možnosti (Slika 11).



Slika 11: Primerjava moči polja v sredini in robnega polja – preskakovanje.

Zavedati pa se moramo tudi, da je plošček, ki je na polju na sredini igralne deske, bolj izpostavljen nasprotniku, kar pomeni, da ga lahko nasprotnik lažje preskoči in odstrani iz igre.

- Zavedanje moči sredinskega polja v igralčevi najbližji vrsti:



Slika 12: Sredinsko polje v igralčevi najbližji vrsti.

Posebnost ploščkov na teh dveh poljih za posamezna igralca je, da je s tega polja dostopnih največ ostalih polij ter da s tega polja vodi največ kombinacijskih poti, pri katerih lahko preskoči nasprotnikove ploščke in jih v primeru pravilnega izračuna računov na preskočenih nasprotnikovih ploščkih tudi odstrani iz igre. Prav tako na to polje vodi tudi največ kombinacijskih poti, pri katerih lahko nasprotnik preskoči ploščke ter jih odstrani iz igre. Zavedanje tega nam pomaga, da svojega ploščka iz tega polja v začetni fazi igre ne premikamo.

Opazimo lahko, da je pravil pri dapomi, tako osnovnih kot strateških premikov, veliko, zato bodo učenci potrebovali nekoliko več časa, da jih usvojijo ter razumejo igro. Vsa pravila izhajajo iz pravil tradicionalne igre dama, po kateri se dapoma zgleduje, le da so ta pravila nekoliko spremenjena in prilagojena. Smiselno je, da zaradi tolikšne podobnosti pravil med tema dvema igrama pri učencih v 1. in 2. razredu osnovne šole uvajamo igro dama, jih s tem pripravljamo na igranje didaktične igre dapoma, hkrati pa že uresničujemo cilj razvoja strateškega mišljenja ter posledično kritičnega mišljenja. Z igranjem igre dama bodo učenci usvojili pravila, ki se bodo pri uvedbi dapome v 3. razredu samo nadgradila z računanjem računa na preskočenem nasprotnikovem ploščku in bo s tem igra ter njeno razumevanje steklo hitreje.

Igro dapoma smo preizkusili v domačem okolju, zgolj z enim otrokom, pri čemer smo lahko izrazito opazili pomembnost uvajanja tradicionalne igre dama pred uporabo dapome. Potrebovali smo namreč precej časa, da smo otroku razložili pravila ter da jih je ta usvojil do te mere, da je lahko igra stekla. Opazili smo, da je otrok, ko je usvojil osnovna pravila, začel s kovanjem vse bolj zahtevnih in premišljenih strategij. Ob ponovnem igranju igre smo lahko opazili napredek, ko je otrok veliko več razmišljal o tem, kaj bi lahko njegova poteza prinesla v nadaljevanju igre, torej je že začel predvidevati v naprej ter med seboj primerjati različne možnosti. Vse to smo lahko opazili, ko je otrok

velikokrat tudi na glas razmišljal, kaj bi lahko storil, to pokazal s premikanjem prsta po igralni deski in se šele zatem odločil, kakšno potezo bo naredil. Ves čas igranja pa je bil tudi precej osredotočen in motiviran za igro, saj si je ves čas prizadeval, da bi zmagal. S tem lahko opazimo še eno dobro stran igre dapoma, saj lahko učence ob igranju naučimo tudi sprejemanja zmage in poraza. Sama igra v otrokovi glavi spodbudi tudi veliko razmišljanja, bistrenja misli, kritičnega presojanja v smislu, kaj je bolje, da naredim, predvidevanja v naprej in podobno, vse to pa otroku pomaga tako na matematičnem področju kot tudi na področju vsakdanjega življenja. Tako lahko rečemo, da ima dapoma številne prednosti ter da jo je vredno uporabljati pri otrocih, pa tudi pri odraslih. Res pa je, da smo sami preverili igro dapoma v praksi zgolj z enim otrokom, bilo pa bi dobro in zanimivo igro preveriti v kakšnem razredu ter tako spremljati napredek na področju poštevanke in strateškega razmišljanja pri vseh učencih. Naj bo to hkrati tudi spodbuda za vse bralce, ki so željni novega raziskovanja.

Sklep

Z dapomo učenci utrjujejo poštevanko, razvijajo strateško načrtovanje in kritično mišljenje, poleg tega pa razvijajo socialne cilje, kot je npr. upoštevanje pravil, pošteno igranje, medsebojno sodelovanje in strpnost. Dodatno urijo finomotoriko prstov, razvijajo verbalno komunikacijo ter mogoče še kaj. Z igro tako rastejo osebnostno, motorično in prav tako dosegajo določene matematične vsebine in cilje. Vemo, da za utrjevanje poštevanke obstaja tudi veliko drugih didaktičnih iger (Lipovec, 2016), vendar bi prav zaradi tega, ker dapoma pripomore k uresničevanju številnih ciljev, za utrjevanje poštevanke raje izbrali ravno to didaktično igro. Dapoma je učinkovita tudi zato, ker pri njej nastaja pomembna komunikacija učenec – učenec, ker je izdelava te igre preprosta in dostopna vsem učiteljem in drugim, ker jo je zelo enostavno prilagajat potrebam razreda ali posameznega učenca ter ker skrbi za ohranitev že skoraj pozabljenih tradicionalnih iger. Uporaba te didaktične igre je uspešna le ob dobri seznanjenosti učitelja z igro, kar pomeni, da mora poznati pravila igre ter jih znati uspešno prenesti tudi na učence. Uporaba je veliko lažja, če pred to igro v razredu uvajamo že igro dama, saj na ta način učenci usvojijo tudi osnovna pravila igre dapoma. Dapoma bi lahko bila uporabna pri pouku v fazi utrjevanja učne snovi od 3. razreda dalje, ko učenci spoznajo določeno poštevanko, ki je potrebna za določeno verzijo dapome (dapoma 1, dapoma 2 in dapoma 3). Prav tako bi lahko bila uporabna pri dopolnilnem pouku (učenci z učnimi težavami), pri dodatnem pouku (nadarjeni učenci), v podaljšanem bivanju ali jutranjem varstvu, v matematičnih kotičkih, pri matematičnih krožkih in podobno, prav tako pa je lahko uporabna tudi za uporabo doma. Igro seveda lahko prilagodimo tudi za urjenje drugih temeljnih dejstev, kot je npr. seštevanje s prehodom. Prav tako pa lahko igro prilagodimo do te mere, da bo uporabna tudi v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju. Sami smo igri dapoma spremenili matematično vsebino, ki jo obravnava, in jo uporabili v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju, o čemer pa bomo pisali v naslednji številki.

Literatura

1. Bognar, L. (1987). *Igra pri pouku na začetku šolanja.* Ljubljana: Državna založba Slovenije.
2. Garner, R. (1990). When Children and Adults Do Not Use Learning Strategies: Toward a Theory of Settings. *Review od Educational Research, 60,* str. 517–529.
3. Kašca, B. (2010). *Dama, kraljica miselnih iger.* Ljubljana: Birografika Bori.
4. Lipovec, A. (2011). How do children play Kalah?. V M. Duh, R. Seebauer in S. Fošnarič (Ur.) *Beiträge zum »Internationalen Jahr der Jugend«* (str. 118–124). Wien, Berlin: Lit. cop.
5. Lipovec, A. (2016). Nekatere igre za utrjevanje poštevanke. *Razredni pouk: revija Zavoda RS za šolstvo.* 18 (2/3). 115–119.
6. Oldfield, B. (1991). Games in the learning od mathematics. A classification. *Mathematics in School.* 20 (1), 41–43.
7. Smith, E. in Golding, L. (2018). Use og board games in higher education literature review. *MSOR Connections. 16* (2). 24–29. Pridobljeno 4. 4. 2018, iz https://journals.gre.ac.uk/index.php/msor/article/view/624
8. Soldano, C., Arzarello, F. in Robutti, O. (2015). Game approach with the use of technology: A possible way to enhance mathematical thinking. *CERME 9.* 2552–2558. Pridobljeno 9. 4. 2018, iz https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289377/document
9. Viličnjak, J. (2018). *Igra dama kot didaktična igra za utrjevanje poštevanke*. Magistrsko delo, Maribor: Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta.
10. Wittmann, E. C. (2005). Mathematics as the Science of Patterns -A Guideline for Developing Mathematics Education from Early Childhood to Adulthood Plenary Lecture presented at the International Colloquium »Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood« organized by the Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiquesin collaboration with the Institut de mathématique de l'Université de Mons-Hainaut, Mons/Belgium, July 7-9, 2005. Retrived 27. September 2010 from http://irem.u-strasbg.fr/php/publi/annales/sommaires/11/WittmannA.pdf

Uporaba pozicijskega računala pri matematiki v podaljšanem bivanju

Jasna Černic
Osnovna šola Milojke Štrukelj Nova Gorica

Izvleček

Pozicijsko računalo je preprosto mehansko računalo, sestavljeno iz lesenega okvirja, in s kroglicami, nanizanimi na žice v več vrsticah. Kljub skokovitemu razvoju informatike je skozi zgodovino do danes obdržalo svojo obliko in namen. V prispevku je pozicijsko računalo predstavljeno kot didaktični pripomoček, ki ga veliko otrok pozna kot igračo iz predšolskega obdobja, njegova prava vrednost pa pride do izraza v 1. vzgojno-izobraževalnem obdobju, ko osmislimo in kasneje nadgradimo njegovo uporabo tudi izven predpisanega šolskega kurikula z metodo Brainobrain. Študija primera je potrdila, da se učenci, ki pri matematiki ne dosegajo minimalnih standardov znanja in še nimajo usvojenih številskih predstav, s pomočjo pozicijskega računala lažje in hitreje naučijo računati z naravnimi števili do 100 s prehodom. Učitelj v času samostojnega učenja v podaljšanem bivanju lahko z uporabo pozicijskega računala pomaga učencem pri prehodu razumevanja števil in številskih predstav iz konkretnega na simbolni nivo.

Ključne besede: matematika, 1. triletje, podaljšano bivanje, pozicijsko računalo

Use of Abacus in Mathematics during After-School Hours

Abstract

Abacus is a simple calculating tool made of a wooden frame with beads sliding on rows of wires. Despite the fast development of information technologies, abacus has retained its form and purpose throughout the history. In the article, it is presented as a didactic tool – many children recognize it as a toy from their preschool period, but its true value comes into focus in the first education period when its function can be applied, and later upgraded, also outside the prescribed curriculum (Brainobrain method). A case study has confirmed that students who fail to achieve the minimal mathematics standards and have not yet assimilated numerical knowledge can use abacus to more easily and quickly learn to calculate the sum of natural numbers from 1 to 100 with regrouping. During after-school hours, when students learn independently, the teacher can use abacus to help them transition from the literal understanding of numbers and numerical concepts to the symbolic one.

Keywords: primary school, mathematics, first triad, after-school hours, abacus

Uvod

Otroci se že v zgodnjem otroštvu srečajo s pozicijskim računalom. Ustrezna velikost, preprosta oblika, barvne kroglice in možnost nadgraditve njegove uporabe so bistvene za obstoj računala kljub hitro razvijajoči se sodobni tehnologiji. V prvem razredu se raba pozicijskega računala načrtno usmeri v spoznavanje seštevanja in odštevanja naravnih števil do 20, v drugem in tretjem razredu pa do 100. Izven predpisanega šolskega kurikula se ob delu z računalom razvijajo tudi različne strategije reševanja računskih problemov, med katerimi izstopa metoda brainobrain.

Razvoj pozicijskega računala (ABAKA)

Po konceptu Razvoja informacijske tehnologije (Wechtersbach, 2005) so bili prsti na rokah prvi pripomoček za računanje. Z njimi je človek sešteval, odšteval in celo množil. Še danes se otroci najprej naučijo štetja in računanja s prsti, šele potem spoznajo druge načine računanja. Od tod izhaja tudi angleška beseda digit (lat.), ki pomeni prst ali število.

»Ko je postalo prstov premalo za tako računanje, so si začeli pomagati na druge načine. Tako so počasi (zelo počasi) razvili prvi pripomoček za računanje - ABAKUS (ali ABAK). To je bilo približno 2400 let p. n. š. Abakus se je razvil iz gladke plošče, posute

s prahom, na katero so s prstom ali trščico pisali števila. Beseda izvira iz grške abax, kar pomeni tabla, pokrita s prahom. Takšne plošče so poznali že okoli 5000 let pr. n. št. v dolini Evfrata in Tigrisa.

Še veliko kasneje so dobili zamisel, da bi prodne kamne preluknjali in jih nanesli na vrvice. To se je zgodilo na Kitajskem v 13. stoletju, kjer je nastala tudi podoba abakusa, kot ga poznamo danes.« (Informatika, 2005).

Če povzamem po spletnem prispevku *Abacus: The brief historiy*, so na Japonskem ta pripomoček poimenovali »soroban« (Slika 1), v Rusiji »schoty« (Slika 2), na Kitajskem »suan pan« (Slika 3), v Evropi pa se je obdržalo ime »abak« (Slika 4). Vsi navedeni pripomočki so izhajali iz istega principa: lesen okvir, v katerega so vpete žice in nanje nanizane lesene kroglice.

Slika 1: Soroban

Slika 2: Schoty

Slika 3: Suan pan

Slika 4: Abak

ABAK danes

V nekaterih delih vzhodne Evrope, Kitajske in Rusije ga zaradi preprostosti uporabljajo še danes. Abake lahko uporabljajo tudi slepi, saj lahko računajo z dotikom. Pred skoraj 40. leti je bilo na Kitajskem ustanovljeno združenje za abake, pred skoraj 30. leti pa so začeli z abaki celo tekmovati. Nepogrešljivi so kot učni pripomoček.

Pri nas se abak uporablja kot didaktični pripomoček, s pomočjo katerega se otrok uči spoznavati števila, si jih predstavljati, uči se zaporedja, spoznava enice, desetice in svojo prvo stotico. Osredotoča se na razvoj otroka v različnih starostnih obdobjih, krepi motorične spretnosti, spodbuja učenje in vpliva na psihološki razvoj.

Priporočena uporaba ABAKA v prvem triletju osnovne šole

Učni načrt za matematiko v osnovni šoli predvideva uporabo pozicijskega računala v 2. razredu. Pri obravnavi aritmetike in algebre v sklopu računskih operacij in njihovih lastnosti naj bi učitelj pri obravnavi učne snovi upošteval didaktična priporočila:

»V prvem obdobju je poudarek na razvoju številskih predstav, ki temeljijo na praktičnih aktivnostih. V procesu oblikovanja pojma število je obvezna uporaba konkretnih materialov, nazornih ponazoril, primernih didaktičnih sredstev itd. Pri pouku uporabljamo različne materiale, ne omejimo se le na slikovne, saj je le njihova uporaba za učenca preveč abstraktna. Poglavitne metode pouka so igra, opazovanje in izkušenjsko učenje.

V 2. razredu seštevamo in odštevamo do 100 z didaktičnimi ponazorili (npr. enotskimi kockami, link kockami, denarjem, ponazorili za desetiške enote, pozicijskim računalom, številskim trakom, stotičnim kvadratom ipd.). V začetni fazi uporabljajmo pripomočke za konkretna ponazorila števila (npr. enotske kocke, link kocke), poudarimo desetiški zapis števila in šele v zaključni fazi prehajamo na uporabo številskega traku in stotičnega kvadrata.« (Učni načrt za matematiko, 2011, str. 16).

Pozicijsko računalo kot pripomoček pri samostojnem učenju v podaljšanem bivanju

Po konceptu »Podaljšano bivanje in različne oblike varstva učencev v devetletni osnovni šoli« (Blaj, 2005) je ena od bistvenih dejavnosti podaljšanega bivanja samostojno učenje. V tem času poteka usmerjanje in navajanje učencev na samostojno opravljanje različnih učnih aktivnosti. Učenci znanje, ki so ga pridobili pri pouku ali zunaj pouka, dodatno utrdijo, razširijo, poglobijo, sistemizirajo in uporabijo v novih situacijah. V okviru te dejavnosti učitelj skrbi za redno, kakovostno in samostojno opravljanje učnih obveznosti. Učenci se skozi izkušnjo učijo razumevati, kakšen učni tip so (vidni, slušni, gibalno-taktilni, kombinirani), se učijo uporabljati učbenike in različne pripomočke, interpretirati rezultate, razumeti napake in jih popraviti; se učijo sodelo-

vati pri reševanju skupnih nalog in s tem razvijati svoje sposobnosti za delo v skupini (organiziranje dela v skupini, integriranje v delo skupine).

Pozicijsko računalo kot pripomoček pri računanju

Učenci se učijo matematiko najprej prek izkustva materialnega sveta, nato prek govornega jezika, ki generalizira to izkustvo, v naslednji fazi prek slike in diagramov ter šele nazadnje na simbolni ravni.

Za študijo primera sem izbrala učenca, ki še ni usvojil minimalnega standarda znanja seštevanja in odštevanja v množici naravnih števil do 100.

Med vsakodnevnim pregledom nalog iz matematike je učenec večkrat prosil za pomoč, si pri računanju pomagal s prsti in kljub temu naredil nekaj napak.

Po posvetu z razredničarko sem se odločila za individualno obravnavo primera.

Glavni cilj raziskovalnega dela je naučiti učenca seštevati in odštevati v množici naravnih števil do 100 s pomočjo pozicijskega računala in dokazati, da je računalo koristen pripomoček pri preskoku računanja iz konkretnega na simbolni nivo.

Potek učne ure po korakih

Ugotavljanje predznanja

Učencu predstavim pozicijsko računalo. To je računalo, pri katerem prestavljamo kroglice iz leve proti desni in obratno ter tako nastavimo in izračunamo vrednost številskega izraza.

Pred računanjem preverim njegove številske predstave.

- Učenec prešteje kroglice v 1. vrstici.
- Učenec prešteje kroglice v 2. vrstici.
- Učenec prešteje kroglice v obeh vrsticah.
- Učenec izvede nekaj primerjav števil po velikosti (>, <, =).

Računanje vrednosti številskih izrazov

Didaktični postopek pri obravnavi seštevanja in odštevanja naravnih števil do 20 oziroma do 100 je bil ves čas enak. Preko demonstracije sem pri učencu spodbudila zanimanje za računanje na konkreten način s postavitvijo kroglic. Izdelala sem učni list, na katerem je nato barval oziroma črtal krogce. Pozorna sem bila na miselni preskok, ko je učenec usvojil postopek reševanja in poskusil priklicati aritmetična dejstva tudi na simbolni ravni.

Prikaz seštevanja naravnih števil do 10

Primer: 4 + 3 = 7

Učencu demonstriram pomik 4 enic v desno (Slika 5), nato pomik še 3 enic v desno (Slika 6) in štetje vseh enic na desni strani, to je končni rezultat (Slika 7).

Slika 5: Pomik 4 enic v desno.

Slika 6: Pomik 3 enic v desno.

Slika 7: Štetje vseh enic na desni strani.

Učenec ponovi predstavljeni postopek z več primeri:

2 + 3 = ____; 6 + 2 = ____; 4 + 5 = ____.

Prikaz odštevanja naravnih števil do 10

Primer: 10 – 3 = 7

Učencu pokažem pomik 10 enic v desno (Slika 8), nato pomik 3 enic v levo in štetje enic na desni, kar je končni rezultat (Slika 9).

Slika 8: Pomik 10 enic v desno.

Slika 9: Pomik 3 enic v levo in štetje preostalih enic na desni strani.

Učenec ponovi predstavljeni postopek z več primeri:

2 + 3 = ____; 6 + 2 = ____; 4 + 5 = ____.

Prikaz seštevanja naravnih števil do 20 s prehodom

Primer: 8 + 7 = 15

Učencu pokažem pomik 8 enic v desno (Slika 10), nato pomik preostalih 2 enic v desno (Slika 11), posebej natančno prikažem zamenjavo vseh 10 enic z desne na levo in pomik 1 desetice na desno stran (Slika 12). Prikaz zaključim s pomikom še 5 enic v desno in štetjem vseh enic in desetic na desni strani. Preberem končni rezultat (Slika 13).

Slika 10: Pomik 8 enic v desno.

Slika 11: Pomik preostalih 2 enic v desno.

Slika 12: Zamenjava vseh 10 enic z desne na levo in pomik 1 desetice na desno stran.

Slika 13: Pomik še 5 enic v desno in štetje vseh enic in desetice na desni strani.

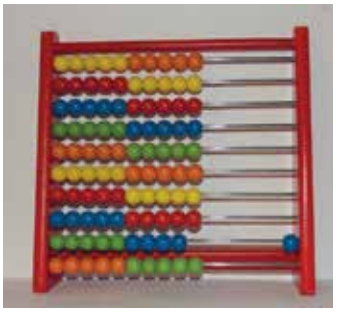
Učenec ponovi predstavljeni postopek z več primeri:

7 + 7 = ____; 6 + 5 = ____; 4 + 10 = ____.

Prikaz odštevanja naravnih števil do 20 s prehodom

Primer: 12 – 5 = 7

Slika 14: Pomik 2 enic in 1 desetice v desno.



Slika 15: Pomik 2 enic v levo.

Učencu prikažem pomik 2 enic in 1 desetice v desno (Slika 14). Nato pomaknem 2 enici v levo (Slika 15), sledi zamenjava 1 desetice v levo z vsemi 10 enicami v desno (Slika 16). Pomaknem še 3 enice v levo in preštejem vse enice na desni strani, kar je končni rezultat (Slika 17).

Slika 16: Zamenjava 1 desetice v levo z vsemi 10 enicami v desno.

Slika 17: Pomik 3 enic v levo in štetje vseh enic na desni strani.

Učenec ponovi predstavljeni postopek z več primeri:

13 – 6 = ____; 16 – 9 = ____; 12 – 10 = ____.

Prikaz seštevanje naravnih števil do 100

Primer: 27 + 32 = 59

Učencu prikažem pomik 7 enic in 2 desetic v desno (Slika 18). Sledi prikaz pomika 2 enic in 3 desetic v desno (Slika 19) in štetje vseh enic in desetic na desni strani, kar je končni rezultat (Slika 20).

Slika 18: Pomik 7 enic in 2 desetic v desno.

Slika 19: Pomik 2 enic in 3 desetic v desno.

Slika 20: Štetje vseh enic in desetic na desni strani.

Učenec ponovi predstavljeni postopek z več primeri:

39 + 17 = ____; 56 + 25 = ____; 84 + 10 = ____.

Prikaz odštevanja naravnih števil do 100

Primer: 67 – 33 = 34

Učencu pokažem pomik 7 enic in 6 desetic v desno (Slika 21). Nato pomaknem 3 enice in 3 desetice v levo (Slika 22). Sledi štetje vseh enic in desetic na desni strani, kar je končni rezultat (Slika 23).

Slika 21: Pomik 7 enic in 6 desetic v desno.

Slika 22: Pomik 3 enic in 3 desetic v levo.

Slika 23: Štetje vseh enic in desetic na desni strani. To je končni rezultat.

Učenec ponovi predstavljeni postopek z več primeri:

85 – 14 = ____; 63 – 32 = ____; 76 – 43 = ____.

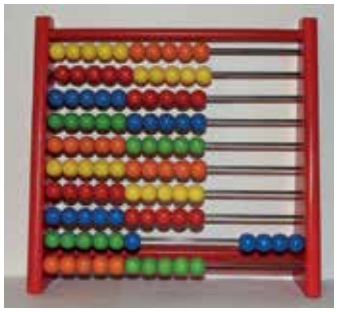
Prikaz seštevanja naravnih števil do 100 s prehodom

Primer: 37 + 5 = 42

Slika 24: Pomik 7 enic in 3 desetic v desno.

Slika 25: Pomik preostalih 3 enic v desno.

Učencu pokažem pomik 7 enic in 3 desetic v desno (Slika 24). Pomaknem v desno še ostale 3 enice (Slika 25). Nato zamenjam vseh 10 enic iz desne na levo s pomikom 1 desetice v desno (Slika 26). Nazadnje pomaknem še 2 enici v desno in preštejem vse enice in desetice na desni strani. To je končni rezultat (Slika 27).



Slika 26: Zamenjava vseh 10 enic z desne na levo s pomikom 1 desetice v desno.

Slika 27: Pomik 2 enic v desno ter štetje vseh enic in desetic na desni strani.

Učenec ponovi predstavljeni postopek z več primeri:

45 + 9 = ____; 77 + 6 = ____; 68 + 5 = ____.

Prikaz odštevanja naravnih števil do 100 s prehodom

Primer: 54 – 8 = 46

Učencu pokažem pomik 4 enic in 5 desetic v desno (Slika 28). Nato pomaknem 4 enice v levo (Slika 29) ter zamenjava vseh 10 enic iz leve v desno s pomikom 1 desetice iz desne v levo (Slika 30). Sledi pomik preostalih 4 enic iz desne v levo (Slika 31). Preštejem vse enice in desetice na desni strani, kar je končni rezultat (Slika 32).

Slika 28: Pomik 4 enic in 5 desetic v desno.

Slika 29: Pomik 4 enic v levo.

Slika 30: Zamenjava vseh 10 enic iz leve v desno s pomikom 1 desetice iz desne v levo.

Slika 31: Pomik preostalih 4 enic iz desne v levo.

Slika 32: Štetje vseh enic in desetic na desni strani.

Učenec ponovi predstavljeni postopek z več primeri:

47 – 9 = ____; 33 – 8 = ____; 82 – 4 = ____.

Ugotovitev

Pri svojem delu sem upoštevala osnovna didaktična priporočila učnega načrta za matematiko v 2. razredu. Učenec je najprej s pomočjo link kock utrdil zaznavanje številskih predstav. Nato sem mu predstavila pozicijsko računalo in postopno delo z njim. Pri razlagi sem več časa namenila odštevanju kot seštevanju, saj je učenec pri seštevanju hitreje dojel postopek premikanja kroglic iz leve v desno in brez večjih težav sešteval do 100 brez prehoda. Več učnih ur in bolj poglobljeno razlago na konkretnem nivoju je potreboval pri odštevanju do 100 s prehodom. Večji izziv je predstavljalo razstavljanje odštevanca, ko je treba odšteti v dveh korakih, torej najprej enice do prve desetice in nato še ostale enice.

Po dveh mesecih je učenec samostojno nadaljeval s pisanjem matematičnih domačih nalog.

Zaključim lahko, da sta postopnost računanja vrednosti številskih izrazov in učenčeva vztrajnost pripomogla k dobrim rezultatom. Učenec je pozicijsko računalo sprejel pozitivno, se z njim na začetku zaigral, nato pa koristno uporabljal pri računanju z naravnimi števili do 100.

Pozicijsko računalo kot osnova metode Brainobrain

Nadgradnja uporabe pozicijskega računala je pripeljala do skokovitega razvoja svetovno znane metode učenja Brainobrain, ki je zadnjih nekaj let prisotna tudi pri nas. V program se vpisujejo predvsem otroci brez večjih učnih težav.

Kot v intervjuju razlaga Tea Grbić, prva izvajalka programa Brainobrain v Sloveniji, »temelji ta metoda predvsem na nevrolingvističnem programiranju, na abakusu kot mentalnem pripomočku in na metodologiji VAK (visual audio kinesthetic), pri kateri otroci prejemajo informacije skozi tri čutne kanale: skozi vidni in slušni kanal ter z dotikom. Dokazano je, da se otroci tako lažje učijo in pomnjenje je dolgotrajnejše. V praksi imajo otroci pred seboj abak in premikajo kroglice, torej hkrati gledajo in čutijo, poleg pa izgovarjajo besede v angleščini. Besed ne prevajamo zaradi ritmičnega tona in otroci si vse skupaj lažje zapomnijo, seveda jim pomen besed razložimo, da razumejo, za kaj gre.«

Na vprašanje, v čem se ta metoda razlikuje od klasičnega poučevanja v šolah, je Tea Grbić odgovorila: »Bistvena razlika je, da se osredotoča na celostni razvoj možganov, ne pa samo na levo ali desno polovico. … Ko otrok vidi število na tabli, ga prepozna leva stran možganov, ko prsti premaknejo kroglici na abakusu, se aktivira desni del možganov in tako se ustvarijo nove sinapse med levim in desnim delom možganov. … Otrokom se izboljša koncentracija, razvijejo vizualizacijo, voditeljske sposobnosti, organizacijo, samozavest, naučijo se kreativno reševati težave, razvijejo empatijo …« (Brainobrain – učna metoda, ki se osredotoča na celostni razvoj možganov, 2014).

Zaključek

V prispevku obravnavam uporabo pozicijskega računala kot didaktičnega pripomočka za pridobivanje številskih predstav in utrjevanje računanja naravnih števil do 100. Na konkretnem primeru ugotavljam, da je računalo primerno predvsem za učence, ki pri matematiki ne dosegajo minimalnih standardov znanja. Način uporabe je uspešen pri individualni obravnavi, kjer lahko učencu vsak premik kroglic na pozicijskem računalu razložim in pojasnim. Kot učiteljica v podaljšanem bivanju imam možnost, da lahko pri matematiki odkrivam vrzeli v dojemanju učne snovi, jo skupaj z učencem zaznavam in pomagam odpraviti. Pri tem imam na razpolago več različnih didaktičnih iger in pripomočkov, ki postajajo nepogrešljivi del učenja in poučevanja. Pozicijsko računalo se je pri tem izkazalo kot zabaven in koristen pripomoček, ki abstraktni svet števil poenostavi in ga na materialnem nivoju približa učencu.

Literatura

Blaj, B., idr. (2005). *Koncept. Podaljšano bivanje in različne oblike varstva učencev v devetletni osnovni šoli*. Ljubljana: MIZŠ in ZRSŠ.

Wechtersbach, R. (2005). *Informatika.* Grosuplje: Saji.

Žakelj, A., idr. (2011). *Učni načrt za osnovno šolo, Matematika*. Ljubljana: MIZŠ in ZRSŠ.

Abak. Abacus: The brief historiy. https://www.ee.ryerson.ca/~elf/abacus/history.html

Abak. https://sl.wikipedia.org/wiki/Abak

Brainobrain. http://www.brainobrain.si/domov.html

Brainobrain. https://liza.aktivni.si/intervju/intervju-brainobrain-ucna-metoda-ki-se-osredotoca-na-celostni-razvoj-mozganov/

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) – 2. del

Mag. Milena Strnad in
Aleksander Simonič, mag. mat.
The University of New South Wales (Canberra), ACT, Australia

Izvleček

Članek v dveh delih prinaša podroben prikaz življenja in dela skrivnostnega indijskega matematičnega genija S. A. Ramanujana, ki vse od leta 1920 dalje navdušuje mlade Indijce za matematiko. Drugi del se osredotoči na obdobje v Angliji, pri čemer se začne z matematiko v pismih, konča pa z zadnjim Ramanujanovim delom v Indiji. Članek obeležuje njegovo minulo 130. obletnico rojstva in prihajajočo 100. obletnico smrti, učiteljem pa ponudi zgodbo, da z njo lahko navdušijo tudi slovensko mladino za učenje in raziskovanje matematike.

Ključne besede: S. A. Ramanujan, G. H. Hardy, biografije

Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) – Part 2

Abstract

The main thrust of this two-part article is a detailed account of the life and work of S. A. Ramanujan. Ever since 1920, this mysterious Indian mathematical genius has inspired young Indians to study mathematics. The second part focuses on the genius' life in England, the novel mathematical ideas he shared in his letters as well as Ramanujan's final work in India. The article marks the recent 130th anniversary of Ramanujan's birth and the forthcoming centennial of his death. In addition, it provides a wealth of information for Slovenian teachers, who can use it to excite future generations of their students to learn and research mathematics.

Keywords: S. A. Ramanujan, G. H. Hardy, Biographies

Glavni matematični poudarki iz dopisovanja Ramanujan-Hardy

Spomnimo, da je Ramanujan v prvem pismu Hardyju 16. januarja 1913 navedel okoli 50 formul s področja teorije števil, integralov, neskončnih vrst, transformacij vrst in integralov, približne integracije in sumacije, neskončnih verižnih ulomkov ter divergentnih vrst. Nekatere formule so bile zelo presenetljive in lepe, npr.

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\cdots=\frac{2}{\pi}, \tag{1}$$

$$1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4+25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4+\cdots=\frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}, \tag{2}$$

$$\frac{\coth\pi}{1^7}+\frac{\coth 2\pi}{2^7}+\frac{\coth 3\pi}{3^7}+\cdots=\frac{19\pi^7}{56700}. \tag{3}$$

Hardy je vrsto (1) prepoznal, saj jo je dokazal že G. Bauer leta 1859, vrsta (2) pa mu je delala težave. Izkazalo se je, da vrsti (1) in (2) spadata v teorijo hipergeometrijskih vrst. S temi vrstami se je Ramanujan precej ukvarjal, npr. v 10. poglavju Druge beležke, glej [3].

Vrsta (3) pa je poseben primer splošnejšega rezultata

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\coth(\pi k)}{k^{4n-1}}=\pi^{4n-1}2^{4n-2}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{B_{2k}B_{4n-2k}}{(2k)!\,(4n-2k)!}, \tag{4}$$

ki ga je prvi odkril in dokazal Lerch leta 1901. Ta izraz je tudi poseben primer *Ramanujanove formule za* $\zeta(2n+1)$:

$$\frac{(-\beta)^{-n}-\alpha^{-n}}{2}\zeta(2n+1)=-(-\beta)^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\beta k}-1}+\alpha^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{-2n-1}}{e^{2\alpha k}-1}$$
$$+2^{2n}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\frac{B_{2k}B_{2n+2-2k}}{(2k)!\,(2n+2-2k)!}\alpha^{n+1-k}\beta^k,$$

kjer sta α *in* β *pozitivni realni števili, za kateri velja* $\alpha\beta=\pi^2$, *in* n *je naravno število*. Formulo (4) dobimo tako, da v Ramanujanovi formuli nadomestimo n z $2n-1$, postavimo $\alpha=\beta=\pi$ in upoštevamo še $2/\left(e^{2x}-1\right)=\coth x-1$. Ramanujan jo je pod 21. vnos zapisal v 14. poglavju Druge beležke, prvi dokaz pa je prispeval Malurkar leta 1925. Prav ta formula je bila »kriva« za to, da se Bruce Berndt z Ramanujanom ukvarja že od leta 1974.

Za mnoge je Ramanujan največji mojster verižnih ulomkov, kar jih je kdaj živelo, zato ni presenetljivo, da je enega izmed kronskih re-

zultatov s tega področja omenil Hardyju že v prvem pismu [4, str. 29]: *Če definiramo*

$$u = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^5}{1+\cfrac{x^{10}}{1+\cfrac{x^{15}}{\ddots}}}} \quad in \quad v = \cfrac{\sqrt[5]{x}}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^3}{\ddots}}}},$$

potem velja

$$v^5 = u \cdot \frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}. \tag{5}$$

Pozorni bralec bo opazil, da levi verižni ulomek dobimo tako, da v desnem verižnem ulomku zamenjamo x z x^5. Desni verižni ulomek danes imenujemo *Rogers-Ramanujanov verižni ulomek* in ga označujemo z $R(x)$. Enakost (5) je dokazal **L. J. Rogers**[1] šele leta 1921. Velikokrat je prikladneje študirati verižni ulomek

$$T(q) = 1 + \cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{\ddots}}}.$$

Seveda velja $R(q) = q^{1/5}/T(q)$. Izkaže se, da je $T(q)$ holomorfna funkcija na enotskem disku $\{q \in \mathbb{C} \colon |q| < 1\}$, za $|q| > 1$ pa verižni ulomek divergira. Za nekatere vrednosti q lahko $T(q)$ izrazimo v zaključeni obliki, npr. $T(1) = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$. V pismu najdemo precej manj trivialna rezultata:

$$T^{-1}\left(e^{-2\pi}\right) = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\sqrt[5]{e^{2\pi}}, \tag{6}$$

$$T^{-1}\left(-e^{-\pi}\right) = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\sqrt[5]{e^{\pi}}. \tag{7}$$

Formule (5), (6) in (7) so Hardyja dobesedno šokirale. Dvajset let po Ramanujanovi smrti je Hardy v [6, str. 9] o svojih občutkih pri branju prvega pisma pisal takole:

> *(Formule so me) popolnoma premagale; nikoli nisem videl niti približno česa takega. En sam pogled je dovolj za uvid, da so lahko napisane le od matematika najvišjega ranga. Morajo biti pravilne, kajti če ne bi bile, nima nihče take domišljije, da bi jih iznašel.*

Raziskovanje teh ulomkov je še vedno zelo aktivno področje. Kot primer navedimo problem, da še vedno ni znan natančen opis množice točk na enotski krožnici, kjer ulomek divergira.

Ramanujan je matematični del prvega pisma začel s citatom iz Hardyjeve knjige *Orders of infinity*, ki se nanaša na praštevilski izrek[2]:

[...] število praštevil, manjših od x, je

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + \rho(x),$$

kjer natančen red funkcije $\rho(x)$ še ni določen.

V nadaljevanju odlomka, ki smo ga citirali v prvem delu, je trdil, da je namesto zgornjega integrala[3] našel več takih izrazov, kjer so pripadajoči ostanki omejeni, izrazov pa ni napisal. To je Hardyja zelo presenetilo, saj bi bil v luči Littlewoodovega izreka to izjemen napredek. Littlewood je ravno v tistem času dokazal, da je $\rho(x)$ lahko poljubno velika količina, tako pozitivna kot negativna. S tem je tudi ovrgel stoletje staro domnevo, da za $x > 8$ vedno velja $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$.

Hardy je v odgovoru prosil Ramanujana, da mu pošlje te izraze in vsaj skice dokazov. Littlewood je v prvi opombi pojasnil, kakšne so znane meje za $\rho(x)$, in med vrsticami navezal problem na *Riemannovo hipotezo*[4].

Ramanujan je v drugem pismu napisal tri približne formule za praštevilsko funkcijo $\pi(x)$, od katerih je bila ena zares nova. Na novo je odkril znameniti Riemannov približek

$$\pi(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \operatorname{li}\left(x^{1/n}\right),$$

ki sledi iz Riemannove eksplicitne formule za praštevilsko funkcijo. Tukaj je $\mu(n)$ Möbiusova funkcija[5], $\mathrm{li}(x)$ pa logaritemski integral, za $x > 1$ definiran kot

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\log t} \right).$$

Seveda velja $\mathrm{Li}(x) = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2)$, kjer je $\mathrm{li}(2) \approx 1,045$. Njegova trditev o omejenosti ostankov pri vseh treh aproksimacijah ne drži, saj bi bilo v nasprotnem to v protislovju z Littlewoodovim izrekom. To, da je treba upoštevati tudi netrivialne ničle funkcije zeta, je Hardy Ramanujanu jasno zapisal v odgovoru, toda Ramanujan se ni dal prepričati in je Hardyju v tretjem pismu 17. aprila 1913 oporekal. Dodal je še prilogo, ki naj bi dokazovala tudi praštevilski izrek. Da ni tako in da »dokaz« vsebuje ogromno lukenj, čeprav ima nekaj zelo dobrih idej, je Hardy obrazložil v pismu, domnevno datiranem na 24. december 1913. Šele v zadnjem pismu Hardyju 22. januarja 1914 je Ramanujan sprevidel nekaj svojih napak in poskušal popraviti dokaze, toda Hardy mu ni odgovoril.

Danes se zdi, da se je pri analitični teoriji števil še najbolj poznala Ramanujanova neformalna matematična izobrazba. To potrdi tudi

1 Leonard James Rogers (1862–1933) je bil dolgo spregledan matematik mnogih talentov, deloma tudi zaradi izrazite osebne skromnosti. Ulomek je uvedel v članku *Second memoir on the expansion of certain infinite products,* Proc. Lond. Math. Soc. 25 (1893/94), 318–343.

2 Ta pravi $\lim_{x\to\infty} \pi(x)x^{-1}\log x = 1$, kjer je $\pi(x)$ število praštevil, ki ne presegajo realnega števila $x > 0$.

3 Označujemo ga z $\mathrm{Li}(x)$, kjer je $x > 1$. Gauss je bil prvi, ki je ta integral primerjal s $\pi(x)$. Praštevilski izrek je ekvivalenten trditvi $\lim_{x\to\infty} \pi(x)/\mathrm{Li}(x) = 1$.

4 Riemannova hipoteza je domneva, da imajo vse ničle $\rho \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ Riemannove funkcije zeta (netrivialne ničle) realni del 1/2. Ta problem spada med najpomembnejše odprte probleme matematike.

5 Za $n = p_1 \cdots p_k$ je $\mu(n) = (-1)^k$ in $\mu(1) = 1$, sicer $\mu(n) = 0$.

Hardyjev citat v [10, str. xxiv], kjer je več let po Ramanujanovi smrti zapisal:

> *Ramanujanova teorija praštevil je bila zaradi njegove nevednosti o teoriji funkcij kompleksne spremenljivke obsojena na propad. Lahko bi rekli, da bi bila teorija morda taka, če funkcija zeta ne bi imela kompleksnih ničel. Njegova metoda temelji na pretirani uporabi divergentnih vrst [...] Pričakovati je bilo, da bodo dokazi nepravilni, toda napake so bile še globlje in mnogo dejanskih izsledkov je bilo napačnih. Dobil je vodilne člene klasične formule, čeprav z nepravilnimi metodami, toda nobeden izmed njih ni tako dober približek, kot je domneval. Lahko rečemo, da je bil to Ramanujanov velik neuspeh.*

Več kot deset let pozneje je Hardy v [6, str. 22–47] podrobno analiziral Ramanujanove napake iz pisem in po tej poti skiciral pravilen dokaz praštevilskega izreka.

Dodajmo, da netrivialne ničle Riemannove funkcije zeta pomembno vplivajo na teorijo praštevil, kar je Ramanujanu postalo jasno šele pozneje pri neposrednem sodelovanju s Hardyjem v Angliji. V članku [13] lahko bralec spozna nekatere prijeme pri študiju povezave med netrivialnimi ničlami in praštevili.

Vrenje okrog Ramanujana

Hardy je takoj po prejemu Ramanujanovega prvega pisma (ne da bi mu prej odgovoril in ga o svoji nameri vsaj obvestil, če ga že ni nameraval vprašati za njegovo mnenje) stopil v akcijo. Že 3. 2. 1913 je napisal pismo gospodu Malletu, sekretarju Svetovalnega komiteja za indijske študente v Madrasu, s prošnjo, da naj v Indiji omogočijo čimprejšnji prihod Ramanujana na Cambridge, kjer se bo razvil v matematika svetovnega formata. S tem je sprožil živahno polemiko med uradniki, profesorji in predstavniki študentov. O tem pričajo številna pisma. Olje na ogenj je prililo pismo spoštovanega meteorologa, direktorja Indijskega observatorija v Simli, G. T. Walkerja[6]. Walker je upravi madraške univerze napisal pismo naslednji dan po svojem obisku madraškega pristanišča 25. februarja 1913, kjer ga je Sir Spring seznanil z delom Ramanujana. V pismu jih je seznanil z Ramanujanovim izjemnim talentom in jih pozval, da naj Ramanujanu izdajo status izrednega študenta in raziskovalca matematike, da bo materialno neodvisen, in mu pozneje omogočijo tudi večletno bivanje na Cambridgeu, kjer bo lahko končal in izpopolnil svoje dosedanje delo. Dodal je [4, str. 51]:

> *Čeprav sam nisem ekspert na področju čiste matematike, ne dvomim, da se iz njegovih zapiskov da razbrati, da gre za delo, ki je primerljivo z deli najboljših matematikov s Cambridgea.*

S tem pismom je Walker dosegel, da so Ramanujanu dodelili štipendijo 75 rupij mesečno za dve leti in mu omogočili dostop do predavanj in knjižnice na madraški univerzi. V zameno so od njega zahtevali četrtletna poročila o njegovem delu. V letu 1913 je napisal tri in enega v začetku leta 1914. V poročilih je opisal več svojih korenov iz nabora 180 strani iz Prve beležke in jih največ izračunal s pomočjo določenih integralov, ki jih povezuje »*Master Theorem*«. Ta izrek je predstavil tudi v prvem pismu Hardyju, in to že v posplošeni obliki, v kateri je postal bolj uporaben. Kot zanimivost dodajmo, da se je leta 1902 s tem integralom veliko manj uspešno ukvarjal tudi Hardy in o tem napisal članek.

Vse to je Ramanujanu dvignilo samozavest, kar veje tudi iz njegove nadaljnje korespondence s Hardyjem, v kateri je občasno uporabil tudi dele svojih poročil madraški univerzi. Konec leta 1913 je tako postal Ramanujan osrednja oseba madraškega intelektualnega in političnega življenja. Septembra 1913 je njegov prijatelj, nekdanji šef, Narayana Aiyar izdal nekaj Ramanujanovih izrekov o vrstah v indijski reviji s pripisom [8, str. 182]:

> *Ti izreki so delo gospoda S. Ramanujana, matematičnega raziskovalca, študenta madraške univerze.*

Ob blišču domačega vzdušja se je nadaljevalo za Ramanujana mučno dopisovanje s Hardyjem. To, da je Hardy brez njegovega privoljenja začel pripravljati njegovo pot v Anglijo, je Ramanujana zelo prizadelo. Bolelo ga je tudi to, da ga je Hardy s svojimi odgovori puščal čakati vse dlje in da je ton njegovega pisanja postajal vse ostrejši in celo žaljiv. Za Ramanujana ni bil pravi obliž niti to, da je Hardy svoj ponižujoči nastop na koncu pisma vedno omilil z opravičilom, da upa, da mu njegova kritika ne bo vzela poleta, ampak ga bo opogumila, da bo svoje trditve dokazal in s tem morda naredil največje mojstrsko delo v vsej zgodovini matematike.

Kljub vedenju, da Ramanujan odklanja prihod v Anglijo, si je Hardy še naprej prizadeval, da bi ga pripeljal na Cambridge. Problem je bil denar. Po Angliji in Madrasu je iskal poti, da bi za Ramanujanovo potovanje in življenje na Cambridgeu pridobil potrebna sredstva. Za svoj načrt je pridobil tudi mladega kolega, profesorja **E. H. Nevilla**[7], ki je bil konec leta 1913 poslan s Trinityja v Madras, kjer je imel serijo predavanj. Hardyjeva želja je bila, da naj bi osebno pritiskal na Ramanujana tako, da bi končno le privolil v odhod v Anglijo.

Slika 1: E. H. Neville

6 Sir Gilbert Thomas Walker (1868–1958), Senior Wrangler (1889) in FRS (1904), je bil leta 1904 poslan v Indijo, da bi razrešil tamkajšnje slabe napovedi monsumov, kar mu je tudi uspelo.

7 Eric Harold Neville (1889–1961) je bil odličen, a neambiciozen matematik. Ukvarjal se je z diferencialno geometrijo, eliptičnimi funkcijami in funkcijami theta. Diplomiral je kot Drugi Wranger na zadnjem Triposu. Nanj sta imela velik vpliv Hardy in Russell. Leta 1911 je prejel Smithovo nagrado in leto kasneje je bil izvoljen za člana kolidža Trinity. Članstvo je sedem let kasneje izgubil zaradi svoje pacifistične drže do 1. svetovne vojne. Odigral je pomembno vlogo v Ramanujanovem življenju.

V Madrasu sta se Ramanujan in Neville srečala vsaj trikrat. Neville je bil zelo navdušen nad Ramanujanovima beležkama in si s tem pridobil njegovo zaupanje, saj mu ju je Ramanujan že kmalu dal za večdnevni ogled. To Ramanujanovo dejanje je pozneje Neville opisal takole [8, str. 187]:

> *To ponudbo Ramanujana sem smatral za največji kompliment, ki sem ga kdajkoli dobil. Zdelo se mi je, da Ramanujan svoji beležki sploh ni dal nikoli iz rok. Noben Indijec vsebine namreč ni razumel, noben Anglež pa doslej ni bil vreden njegovega zaupanja.*

Med njima se je rodilo prijateljstvo, ki pa pri Nevillu ni bilo povsem iskreno. Res je, da Neville ni izpolnil Hardyjevih navodil v celoti in na Ramanujana ni pritiskal neposredno, a ga je opazoval in Hardyju o njem poročal [8, str. 187]:

> *To ni človek, neotesan, neolikan, zaraščen in nečist kot Ramachandra Rao[8], ampak mož, ki deluje povsem nesamozavestno in željno, angleščino pa, čeprav je bil vseskozi zelo reven in nešolan, uporablja odlično, ima izjemen besednjak, kot ga zlepa nisem zasledil pri nobenem drugem.*

Ob tem se je Ramanujan znašel v ponovnih težavah. Komaj je v Indiji svobodno zadihal in se končno začel ukvarjati samo z matematiko, že bi se moral vsemu temu odreči in odpotovati v mrzlo in neznano Anglijo s povsem drugo kulturo. Ob tem pa bi moral prekršiti tudi strog brahmanski predpis, ki mu je kot predanemu brahmanu prepovedal potovanje čez morje. Bal se je tudi, da ga v Angliji ponovno čakajo izpiti, s katerimi je imel že v Indiji travmatične izkušnje, zato se je skupaj z materjo temu vabilu upiral in vztrajal, da ostane v Indiji.

Da je bila situacija še težja, so Ramanujanov odhod v Anglijo podpirali veljaki in njegovi pravi prijatelji, saj so mu privoščili priznanje, indijski matematiki pa razcvet. Med njimi je bil tudi njegov največji podpornik Aiyar. Ramanujanov odhod je sicer podpiral, a ker je razumel vso njegovo stisko, nanj ni pritiskal, ampak mu je kot pravoveren brahman svetoval, da naj težko odločitev za morebitni odhod prepusti boginji Namagiri. Ramanujan je namreč v Indiji trdil, da mu formule prišepetava boginja Namagiri, saj je matematični jezik pravzaprav jezik bogov.

Slika 2: Boginja Namagiri iz templja Narasimhaswami v Namakkalu

Ramanujan je nasvet prijatelja matematika sprejel in tako se je skupaj z njim, njegovim sinom in svojo materjo konec decembra 1913 odpravil po odgovor v Namakkal, v ločeno majhno svetišče družinske boginje Namagiri znotraj templja Lorda Narasimha. Tam sta prijatelja v molitvi prebila tri dni. Tretjo noč pa je Ramanujan zbudil Aiyarja, rekoč, da je od zaslepljujoče, briljantne svetlobe sprejel *adesh*, to je ukaz, da lahko obide prepoved glede potovanja v tujino. Aiyar je pozneje dejal, da se je v Ramanujanovi notranjosti in psihi, povsem podrejeni boginji Namagiri, to zares zgodilo, saj si je podzavestno tudi sam želel te poti, da bi svet spoznal njegovo delo. Ovira je ostala samo še mama, a je tudi ta kmalu zatem Ramanujanu dovolila odhod. Baje se je tudi njej sanjalo, da vidi Ramanujana obkroženega z zahodnjaki in je slišala Namagirin ukaz, da naj svojemu sinu ne stoji več na poti.

Novico, da je Ramanujan privolil v svoj odhod iz Indije, je v pismu Hardyju 22. decembra 1913 sporočil Neville, pred tem pa je Ramanujanu razblinil vse strahove. Zagotovil mu je, da ga v Angliji ne čaka noben izpit in da tudi vegetarijanski način življenja tam ne bo problem. Do potovanja z ladjo S. S. Nevasa, kamor so Ramanujana, potem ko se od njega slovesno poslovili, pospremili najpomembnejši indijski veljaki, je zaradi finančnih težav prišlo šele 17. marca 1914. V tem času je Hardy ob Nevillovi pomoči s pretiranim hvaljenjem Ramanujana sprožil več nabiralnih akcij v Indiji in s tem za Ramanujanov odhod in za dve leti bivanja v Angliji pridobil dovolj finančnih sredstev. Največ je doniral Sir Francis Spring, nekaj pa tudi Hardy in Littlewood osebno.

Ramanujanov razcvet v Angliji

V prepričanju, da potuje v novi svet le za dve leti, ne da bi tvegal izločitev iz svoje kaste, se je Ramanujan 14. aprila 1914 izkrcal v londonskem pristanišču. Dolgo tritedensko pot od Madrasa do Londona je po začetnih težavah z morsko boleznijo prestal kar dobro. Na ladji je užival udobje, dobro vegetarijansko hrano, bil je v družbi prijetnih sopotnikov in pod okriljem samega kapitana, vse to po zaslugi Springa. V londonskem s soncem obsijanem pristanišču, ga je pričakal njegov prijatelj Neville s svojim bratom. Z avtom sta ga odpeljala skozi živahni London, ki je že takrat štel 5 milijonov prebivalcev, v dom za tuje študente na Cromwelski cesti. Neville pa ga je kmalu zatem vzel pod svojo streho v dvonadstropni hiši na cesti Chestertown v bližnjem manjšem londonskem predmestju, ki je bil le z reko Cam ločen od njegove univerze. Namestitev v udobni lepi hiši z velikim vrtom ob reki in s prelepimi razgledi na vse strani je Ramanujanu prvič v življenju dala občutek zasebnosti. Ob gostoljubju Nevillove žene Alice, ki je skrbela za njegovo vegetarijansko prehrano, in ob veliki količini papirja, ki ga je končno imel na voljo, se je počutil dobro.

Vse to je odtehtalo hladen prvi sprejem Ramanujana pri Hardyju 18. aprila in zadržano držo, ki jo je Hardy obdržal vsa leta njunega druženja. Z Littlewoodom, ki je bil vseskozi naklonjen Ramanujanu in je v njem vedno videl velikega matematika, mu je Hardy namenil srečanje enkrat tedensko, glede obiskovanja predavanj pa mu je prepustil svobodno izbiro. Ramanujan, ki je poslušal tudi nekatera

8 Spomnimo, da je bil R. Rao vpliven politik in pobiralec davkov, ki je že leta 1910 dodelil Ramanujanu prvo enoletno državno štipendijo in mu tudi pozneje pomagal. Glej 1. del članka.

Hardyjeva predavanja, je bil nad vsem navdušen in se je z veliko vnemo lotil dela. Domov je med drugim sporočil [8, str. 201]:

> *Gospodje Hardy, Neville in drugi so zelo nezahtevni, prijazni in vljudni.*

Te idile je bilo hitro konec. Veselje do predavanj mu je kmalu vzel prof. Berry, ko je na svojem predavanju o eliptičnih funkcijah opazil, da Ramanujan ne piše, ampak ga gleda in kar žari od vznemirjenja. Prepričan, da se mu Ramanujan posmehuje, ga je osorno vprašal, če sledi predavanju. Ramanujan je samo nemo prikimal, šel do table, vzel kredo in izpeljal formulo do takega zaključka, ki ga niti Berry ni poznal. To je še bolj razkačilo profesorja, ki ga je po predavanju strogo okrcal in mu v bodoče prepovedal tako predrzno vedenje. Ta nenavadni dogodek je imel dvojni učinek. Berry je Ramanujanu vzel veselje do predavanj, pri študentih pa je sprožil govorice, da je tujec Ramanujan izjemen matematik, ki mu ni uspelo narediti izpitov, ker se je uprl terorju profesorjev.

Veselje do bivanja v Angliji pa mu je že po šestih tednih vzel Hardy s tem, da ga je preselil iz toplega Nevillovega doma v svojo neposredno bližino, v kamniti, temačni in mrzli Cambridge. S tem ga je osamil in nehote prisilil, da si je moral začeti kuhati sam, saj v skupni menzi zanj ni bilo primerne vegetarijanske hrane.

Od te selitve dalje sta se Hardy in Ramanujan dobivala skoraj vsak dan. Ramanujan, ki je prezebal v svojem mrzlem domovanju, ker dolgo časa ni znal uporabljati odej, mu je razlagal svoje metode, izreke in enačbe, ki mu jih prej ni želel pošiljati po pošti. Poleg tega je Hardyju dal v preučevanje tudi svoji beležki, v kateri v teh letih ni dopisal ničesar več. V vsebinsko zelo obsežnih beležkah je Hardy našel tudi vse izreke, ki mu jih je pred tem poslal po pošti. Počasi je Hardy dojel, da mu je Ramanujan v pismih poslal zelo dober izbor enačb iz beležk, največkrat brez dokazov. Od Ramanujana, ki si je želel čimprejšnje objave svojih del, pa je zahteval tako kot prej le dokaze, do katerih se niti njemu samemu niti skupaj z Littlewoodom ni uspelo dokopati.

Kmalu po preselitvi v Cambridge se je začelo slabo, deževno in hladno vreme, ki ga je Ramanujan slabo prenašal. V avgustu so tudi že na Cambridgeu občutili grozote prve svetovne vojne. Cambriško dvorišče in park pred znamenito Wrensko knjižnjico in del nje so spremenili v veliko vojno bolnišnico. V vojsko je bilo vpoklicanih 3600 študentov, saj jih je bilo le okoli 1700 prepoznanih za nesposobne. Vpoklicali so več profesorjev, med njimi tudi Littlewooda. To se je Ramanujana osebno dotaknilo, prav tako pa tudi hudo pomanjkanje sadja in zelenjave, kar je pomenilo zanj še več težav pri prehranjevanju.

V takem ozračju sta zavzeto delala Hardy, nasprotnik vojne, neizprosni zagovornik rigoroznosti v matematiki, ateist in mojster dokazovanja, ter verni Ramanujan, katerega najmočnejša gonilna sila je bila njegova čarobna intuicija. Ta ga je sem in tja sicer pustila na cedilu predvsem zato, ker ni poznal sodobne analize.

Prvo leto tujine Ramanujanu ni dalo pravega zadoščenja. Profesorji so v njem videli posebnega formalista, ta pristop pa je bil takrat v nemilosti, nastajajočega novega Ramanujanovega dela pa niso poznali. Hardy je namreč več kot leto dni zadrževal objavo Ramanujanovih del, ki jih je ta zavzeto pripravljal. O njunih zdaj skupnih temah je pisal predvsem on sam. Celo prvi Ramanujanov članek[9], ki je nastal na angleških tleh, je Hardy 11. junija 1914 brez navzočnosti Ramanujana predstavil na enem od običajnih četrtkovih srečanj članov Londonskega matematičnega društva. V tem članku je Ramanujan dokazal znamenito formulo

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}},$$

ki se zaradi izjemne hitrosti konvergence še danes uporablja pri računanju števila π na veliko število decimalk. V članku je opisal tudi eno izmed dveh konstrukcij približne kvadrature kroga, kar sta verjetno njegova najbolj znana prispevka s področja geometrije, glej [14]. Naslednje leto je bilo, glede na število objav, najplodnejše Ramanujanovo leto, saj je objavil kar devet člankov in si pridobil ugled tako na Cambridgeu kot med študenti, za katere je bil matematični genij.

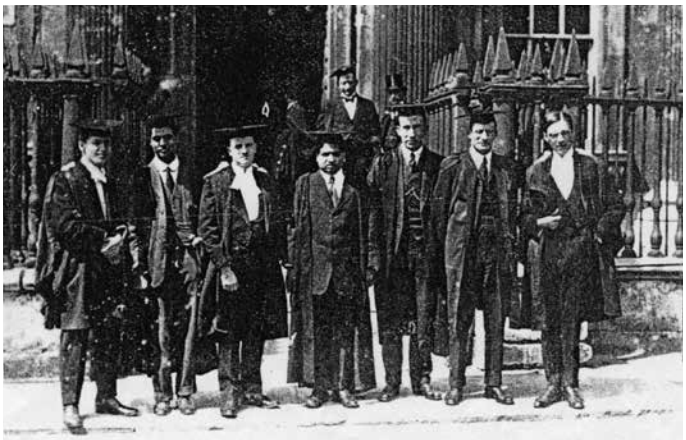
Te objave so dale Ramanujanu nov zagon kljub občutku osame, ker od svoje žene Janaki v tem času ni prejel nobenega pisma, čeprav je sam sprva pisal domov mesečno po štiri pisma in se javljal tudi prijateljem v Indiji. Počasi je začel verjeti, da ga je žena pozabila, kar pa je bilo daleč od resnice. Janaki je namreč Ramanujanu s pomočjo pisarjev napisala v vseh letih njegovega bivanja v Angliji ogromno pisem, ljubosumna mati pa jih ni odposlala.

Slika 3: Ramanujan v evropski obleki in s kratkimi lasmi

O svojih stiskah ni govoril, njegova pisma domov pa so postajala vse redkejša, od leta 1916 dalje pa ni poslal niti enega več. Pravijo, da je prav žarel od radosti ob poslušanju duhovitih šal, vključeval se je v filozofske razprave, razpravljal je tudi o politiki. Znan je bil po simpatični prijaznosti, skromnosti in uglajenem vedenju, kljub temu pa ga Hardy ni vključil v intelektualna združenja raznih vrst, kamor je zahajal sam.

Vse to je Ramanujanu ugajalo, ni pa mu zadoščalo. Želel si je predvsem kakšno uradno priznanje, ki bi ga bolj umestilo v krog, v katerem je deloval, in to toliko bolj, ker je mati od njega pričakovala, da se bo v Indijo vrnil z diplomo BA. Bližal se je čas vrnitve v Indijo,

9 S. Ramanujan, *Modular equations and approximations to* π, Q. J. Math. **45** (1914), 350–372.



Slika 4: Ramanujan (na sredini) ob podelitvi diplome BA. Hardy stoji skrajno desno

kar ni ugajalo niti Hardyju. Da bi vrnitev preprečili, so Hardy, Barnes (Ramanujanu dodeljeni osebni tutor) in od Hardyja naprošeni Spring v Indiji začeli z invazijo pisem v Madras. Gospoda Dewsburyja so želeli prepričati, da bi se Ramanujanova štipendija podaljšala vsaj še za eno leto. Hardy, ki je v pismu zelo hvalil Ramanujanov napredek, govoril o njegovih odmevnih objavah v evropskih revijah, je v pismu navajal nujno potrebno podaljšanje Ramanujanovega študija predvsem zaradi vojne, ki je Ramanujana prikrajšala za sodelovanje z Littlewoodom in na splošno ohromila študij na Cambridgeu. Prof. Barnes pa mu je v pismu, v katerem je napovedal, da bo v letu 1917 Ramanujan izvoljen tudi za člana Trinityja, zapisal [4, str. 129]:

> *Delo in napredek g. S. Ramanujana sta odlična. Povsem upravičuje pričakovanja, ki so se gojila z njegovim prihodom. Nobenega dvoma ni, da mora biti njegova štipendija podaljšana do izvolitve za člana Trinityja, o čemer sem prepričan. To izvolitev pričakujem v oktobru 1917.*

Prošnjam so v Indiji ugodili in Ramanujanu podaljšali štipendijo še za leto dni.

Podaljšano leto se je začelo dobro. 16. marca 1916 so Ramanujanu končno podelili diplomo BA za članek o visoko sestavljenih številih[10]. S to temo se je Ramanujan veliko ukvarjal že v Indiji, v Messenger of Mathematics in v Transactions of Cambridge Philosophical Society pa sta izšla še dva njegova članka.

Mednarodni uspeh znamenite dvojice Hardy-Ramanujan

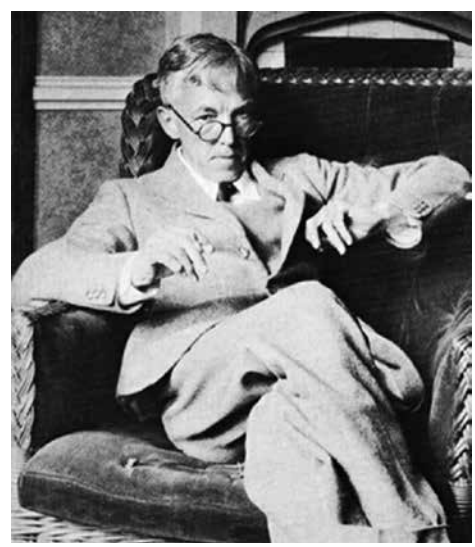
Leta 1918 je Ramanujanu in Hardyju uspelo rešiti problem s področja particij, ki je begal matematike od Eulerja dalje. Ta dosežek lahko štejemo za največji uspeh njunega sodelovanja, s čimer je tudi Ramanujan postal svetovno znan matematik. Ker njune metode močno presegajo raven tega članka, je priporočljivo prebrati pregledni članek [12].

Postavitev problema je preprosta. Particijsko funkcijo $p(n)$ definiramo na domeni naravnih števil tako, da je $p(n)$ število vseh možnih različnih predstavitev števila n kot vsote naravnih števil. Podajmo primer za $n = 5$. Ker lahko to število zapišemo kot $5,\ 4+1,\ 3+2,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1$ in $1+1+1+1+1$, imamo $p(5) = 7$. Z večanjem števila se zelo hitro poveča tudi število njegovih particij, npr. $p(50) = 204226$ in $p(200) = 3972999029388$, kar je izjemen računski podvig, postavljena naloga *Poišči splošno formulo za* $p(n)$ pa je bila izjemen izziv. Že šibkejši problem *Poišči asimptotično formulo za* $p(n)$ se je izkazal za težkega. To pomeni, da iščemo funkcijo $f(n)$, ki je lažje izračunljiva kot $p(n)$, da bo veljalo $p(n) \sim f(n)$, kar je krajši zapis za $\lim_{n\to\infty} p(n)/f(n) = 1$.

Euler je našel rodovno funkcijo za particijsko funkcijo:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}.$$

Ideja je bila, da bi $p(n)$ prek te formule in Cauchyjevega izreka izrazili z integralom po krožnici. Z vprašanjem, kako pravilno integrirati, da bodo določeni ostanki šli proti nič pri $n \to \infty$, se je Ramanujan ukvarjal že v Indiji, toda uspelo mu je šele v sodelovanju s Hardyjem. Njuna metoda je danes znana pod imenom *krožna metoda* (angl. circle method) zaradi izvirnega načina integriranja po lokih in radijih izbranih krožnic.



Slika 5: G. H. Hardy (okoli leta 1927)

Dokazala sta obstoj take funkcije $C(m)$, da je

$$\left| p(n) - \sum_{j=1}^{m} A_j(n)\phi_j(n) \right| \leq \frac{C(m)}{\sqrt[4]{n}}, \tag{8}$$

kjer sta $A_j(n)$ in $\phi_j(n)$ določljivi funkciji, ki pa ju zaradi zapletenosti na tem mestu ne bomo zapisali. To pomeni, da pri izbranem številu m iz $n \to \infty$ sledi $p(n) \to \sum_{j=1}^{m} A_j(n)\phi_j(n)$. Za $m = 1$ bi iz (8) lahko sklepali

10 S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) 14 (1915), 347–409.

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

To je znamenita Hardy-Ramanujanova asimptotična formula za $p(n)$, ki pa jo lahko izpeljemo tudi brez poznavanja neenakosti (8). Dokaz ocene (8) sta objavila v 40-stranskem članku[11], pred tem pa najavila najpomembnejše izsledke[12] v reviji Comptes Rendus. Vse to se je dogajalo v času, ko so ugodili Hardyjevi ponovni prošnji za podaljšanje Ramanujanovega bivanja v Angliji zaradi njegove bolezni, ki se je pojavila v začetku leta 1917.

Seveda se Hardy in Ramanujan nista ustavila pri teoriji, temveč sta želela uporabiti (8) na konkretnih primerih. To je bila vse prej kot lahka naloga, saj nista poznala vrednosti funkcije $C(m)$. Kljub temu sta poskušala oceniti število $p(200)$ tako, da sta upoštevala prvih osem členov formule:

$$\sum_{j=1}^{8} A_j(200)\phi_j(200) \approx 3972998993185,896 + 36282,978 - 87,584 + 5,147 + 1,424 + 0,071 + 0 + 0,044 = 3972999029387,976.$$

Rezultat se neverjetno dobro ujema s pravo vrednostjo. To ju je spodbudilo, da sta na tak način izračunala vrednosti particijske funkcije za vsa naravna števila od 1 do 200. Prave vrednosti jima je izračunal **P. A. MacMahon**[13], ki je takrat veljal za vodilnega matematika na prodročju kombinatorične analize in se je zato izjemno zanimal za njuno delo. Pravi pomen MacMahonovega prispevka k Hardy-Ramanujanovi metodi morda najbolje opiše njuna zahvala na koncu uvoda v članek:

> *Še posebej sva dolžna zahvalo majorju MacMahonu zaradi obilice težav, ki so mu jih delali dolgovezni izračuni. Zagotovo je, da brez spodbude, ki nama je bila dana s temi izračuni, ne bi nikoli poskušala dokazati teoretičnih izsledkov, primerljivih v natančnosti s tistimi, ki sva jih predstavila.*

Problema, kako najti splošno formulo za $p(n)$, pa nista razrešila. Domnevala sta, da je vrsta, ki jo dobimo iz njune vsote pri $m \to \infty$, konvergentna, toda to se je kasneje izkazalo za napačno. Hardy je trdno verjel, da taka formula ne obstaja. Morda je bil to glavni razlog, poleg Ramanujanove bolezni, da v problem nista več vrtala. Veljalo je, da je njuno delo največ, kar je možno narediti, zato je bil matematični svet leta 1937 precej presenečen, ko je Hans Rademacher (1892–1969) med pripravo predavanj o tej temi za podiplomske študente odkril eksaktno formulo. Še več, njegova formula se od Hardy-Ramanujanove le malenkostno razlikuje v funkciji $\phi_j(n)$, glavni koraki v dokazu pa so identični. S tem je bil problem dokončno rešen.

O velikem pomenu krožne metode so se razpisali številni matematiki, npr. Littlewood, ki je zapisal [8, str. 253]:

> *Za ta izrek moramo biti hvaležni enkratni srečni povezavi dveh mož povsem različnih sposobnosti in darov, ki sta v svojo povezavo vložila vse svoje najboljše sposobnosti in svoja najboljša, srečna leta, Ramanujanova genialnost pa je njuno zvezo oplemenitila.*

Slika 6: Major MacMahon

Béla Bollobás (1943–) pa je glede Hardyjevega deleža v tem odkritju dodal [8, str. 253]:

> *Verjamem, da Hardy ni edini matematik, ki bi lahko to naredil. Verjetno bi to lahko storil Mordell, pa tudi Polya. Prepričan sem, da je zagotovo še kar nekaj ljudi, ki bi pri tem lahko odigrali Hardyjevo vlogo, toda Ramanujanove vloge v tem izjemnem partnerstvu in v tem času, mislim, da ne bi mogel odigrati nihče drug.*

Slika 7: Fotografija J. E. Littlewooda za bilten Londonskega matematičnega društva

Krožno metodo sta po Ramanujanovi smrti Hardy in Littlewood v letih 1920–1928 nadalje razvijala, tako da danes zaseda pomembno mesto v aditivni teoriji števil. Dokaz Rademacherjeve formule in nekaj uporab krožne metode lahko bralec poišče v [7, Poglavje 20].

Ramanujan je med prebiranjem MacMahonove monografije empirično odkril kongruence

$$p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5, \; p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7,$$

$$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

11 G. H. Hardy, S. Ramanujan, *Asymptotic formulæ in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc. **17** (1918), 75–115.
12 G. H. Hardy, S. Ramanujan, *Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n*, Comptes Rendus, 1917.
13 Percy Alexander MacMahon (1854–1929), ki si je zaradi vojaških uspehov prislužil čin majorja, je danes znan po izreku iz preštevalne kombinatorike, monografijah *Combinatory analysis* (1915/16) in *An introduction to combinatory analysis* (1920) ter knjigi *New Mathematical Pastimes* (1921) o razvedrilni matematiki.

Kasneje je podal dokaze[14]. Prva kongruenca sledi iz enakosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)q^n = 5\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{5n}\right)^5}{\left(1-q^n\right)^6},$$

ki jo imajo mnogi za najlepšo Ramanujanovo formulo. Izkaže se, da so te kongruence tesno povezane z Rogers-Ramanujanovim verižnim ulomkom, glej npr. [5].

Ramanujanov vzpon na matematični Olimp

Od tega prelomnega članka dalje sta se po Hardyjevi zaslugi ugled in statusni položaj Ramanujana kljub bolezni samo še strmo dvigala. Hardy se je ob težki Ramanujanovi bolezni, ki so jo v začetku leta 1917 napačno opredelili kot tuberkulozo[15] in ga sprva hospitalizirali za krajši čas v bližnji bolnišnici, pozneje pa še štirikrat po raznih sanatorijih, javno boril za njegovo pravilno umestitev v zgodovino matematike. Dosegel je, da je bil Ramanujan 6. decembra 1917 imenovan za člana Londonskega matematičnega društva, 18. februarja 1918 za člana Filozofskega društva Cambridge, 28. februarja 1918 pa za člana Kraljevega društva. To veliko čast, ki mu je kot doslej najmlajšemu matematiku prinesla še 250 funtov letno za šest let, je pred njim dosegel samo še en Indijec. Hardy je ob tem dogodku v oktobru 1918 pisal na upravo madraške univerze [4, str. 200]:

> *[...] Vrnil se bo v Indijo z znanstvenim uspehom in ugledom, ki ga doslej ni dosegel še noben Indijec. Prepričan sem, da bo Indija odslej nanj gledala kot na poseben zaklad, kar on tudi je [...]*

Hardy jim je tudi priporočil, da naj pripravijo za Ramanujana permanentno finančno pomoč, da se bo lahko še naprej posvetil samo raziskovanju. Priporočilo je padlo na plodna tla. Madraška univerza se je namreč zavezala, da bo prispevala finančna sredstva za Ramanujanovo varno vrnitev domov, Ramanujanu pa bo od 1. aprila 1919, ko mu bo potekla prejšnja štipendija, letno še pet let nakazovala vsoto 250 funtov. Pripravili so mu tudi profesorsko mesto. To so mu sporočili v pismu, odposlanem 9. decembra 1918. Ramanujan se jim je za to radodarnost iskreno zahvalil v pismu 11. januarja 1919, ki ga je naslovil na upravno enoto madraške univerze. V njem se je tudi zavezal, da bo s tem lahko sam poravnal vse stroške svojega bivanja v Angliji, dostojno poskrbel za svojo družino in prispeval tudi kaj denarja bodisi za revne študente bodisi za njihove knjige.

Zasluge za izvolitev Ramanujana tudi za člana kolidža Trinity 13. oktobra 1918 pa ima Littlewood, ki se je samo zato, da je izpeljal to proceduro, vrnil iz vojske. To doseči ni bilo lahko, saj je imel Ramanujan med nekaterimi profesorji na Trinityju veliko nasprotnikov, ker je bil Indijec.

Ramanujan je bil po izbruhu bolezni od leta 1917 dalje še bolj osamljen in se je želel vrniti domov. Med krajšim odpustom iz bolnišnice v začetku leta 1917 je celo poskusil narediti samomor s skokom pod vlak. Svoje bede ni sporočil svojim domačim, Hardy pa je o njegovem slabem zdravstvenem stanju poročal v uradni Madras šele v maju leta 1917. Hardy, ki je pri prvi hospitalizaciji celo osebno stregel Ramanujanu, je pozneje vsakodnevno prihajal k njemu predvsem zaradi želje, da bi razrešila čim več problemov.

V bolnišnicah, zlasti v Matlocku, je Ramanujana stalno zelo zeblo, zato je pogosto delal na stranišču kot edinem toplejšem prostoru, kar je osebje preganjalo. O tej težavi je Ramanujan potožil Hardyju in se mu v pismu celo opravičil, da zato naredi manj. Iz tega obdobja izhajajo številni zanimivi Ramanujanovi izreki. Znana je tudi anekdota o taksiju številka 1729, s katerim se je Hardy pripeljal na obisk k Ramanujanu. Ramanujan je na Hardyjevo opombo, da je to število čudno, odgovoril, da je to zelo zanimivo naravno število, saj se da na dva načina izraziti kot vsota kubov: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Zanimivo je tudi to, da ta primer najdemo v Drugi beležki. Na 221. strani je zapisal enakost

$$\left(x^7 - 3x^4(1+y) + x\left(3(1+y)^2 - 1\right)\right)^3 +$$
$$+ \left(2x^6 - 3x^3(1+2y) + 1 + 3y + 3y^2\right)^3 =$$
$$\left(1 + 3y + 3y^2 - x^6\right)^3 + \left(x^7 - 3x^4y + x\left(3y^2 - 1\right)\right)^3.$$

Če v to enakost vstavimo $x = 2$ in $y = 3$, dobimo $30^3 + (-3)^3 = (-27)^3 + 36^3$, od koder po deljenju s 27 sledi zgornja predstavitev števila 1729.

V teh najtežjih mesecih svojega bivanja v Angliji se je Ramanujan, misleč, da bo umrl, Hardyju prvič odprl tudi kot človek. Šele takrat je Hardy uvidel, da z Ramanujanom sploh nista spletla pravega prijateljstva, temveč le strog »poslovni« odnos, v katerem je on, Hardy, odigral glavno vlogo, Ramanujan pa se mu je stalno osebno podrejal. Hardy je izvedel, da Ramanujan ni njegov priimek, ampak edino ime, ki ga ima, da je poročen in da mu žena dolgo časa sploh ni pisala. Ko pa je po dolgih letih dobil od nje pismo, mu je v njem samo sporočila, da je zapustila njegov dom in se je preselila k bratu. Veliko let pozneje je 88-letna Janaki, ki je zadnja leta svojega življenja preživela na Tripicanu v Madrasu skupaj s svojim 45-letnim posvojencem Narayanom, njegovo ženo in njunimi tremi otroki, prijateljem povedala, da je od Ramanujanove matere zbežala, najprej k bratu in potem domov, zaradi njenega neizmernega pritiska nanjo. V znak zahvale, da jo je izbrala za Ramanujanovo ženo, tašči tega ravnanja javno ni nikoli očitala.

Vrnitev v ljubljeno Indijo

Po končani vojni se je 27. februarja 1919 močno oslabljen, suh in bledičen Ramanujan vkrcal na ladjo Nagoya, podobno tisti, s katero je priplul v Anglijo. V Bombay je prispel 27. marca, v Madras pa 2. aprila. Ob vrnitvi v Indijo ga je pričakala družina z materjo na čelu. Žene Janaki ni bilo, kar je godilo materi, ki vsa ta leta sploh ni vedela, kje in kako Janaki živi. Na Ramanujanovo vprašanje, kje je, je odgovorila izmikajoče, češ, naj se s tem ne obremenjuje. To je v Ramanujanu povzročilo prvi zavestni odklon od matere.

Janaki, ki je za Ramanujanovo vrnitev v Indijo izvedela iz časopisov, se po nasvetu brata Srinivasa Iyengarja ni samoiniciativno pridružila družini v Madrasu, pač pa je prišla k Ramanujanu šele, ko ji

14 S. Ramanujan, *Some properties of $p(n)$, the number of partitions of n*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **19** (1919), 207–210.

15 Šele več let po smrti so ugotovili, da so Ramanujana tako v Angliji kot pozneje tudi v Indiji zdravili napačno. Ni bolehal za tuberkulozo, pač pa za posledicami amebne griže, ki jo je prebolel v Indiji leta 1906 in se je ob težkih fizičnih in psihičnih naporih ter pomanjkanju ustrezne zdrave hrane ponovno aktivirala.

je prijatelj sporočil, da si Ramanujan to želi. Z bratom sta obiskala Ramanujana teden dni po njegovi nastanitvi v Madrasu in od takrat je ostala pri njem.

Slika 8: Ramanujanova mati Komalattammal

V tem bungalovu je Ramanujan bival samo tri mesece ob materi in skupaj z ženo, takrat 18-letno Janaki. V tem času se je med njima spletla močna čustvena vez. Končno sta se začela pogovarjati in odstirati vse tančice iz zapletov, ki jih je napletla gospodovalna in ljubosumna mati. Vsi so pri njem opazili veliko spremembo. To ni bil več stari, vedri in klepetavi Ramanujan, ampak zagrenjen, razdražljiv in nestrpen mož, ki je samo delal in komaj kaj spregovoril.

Slika 9: 78-letna Janaki Amal

Ramanujanovo zdravje je bilo kljub prizadevanju zdravnikov vse slabše. Pestile so ga hude bolečine, zato so mu ves čas bivanja v Madrasu nudili najboljšo zdravniško oskrbo. Zdravniki so mu svetovali, da naj se za nekaj časa umakne v kraj Coimbatore, a to selitev je preprečila mati in dosegla, da so ga za dva meseca premestili v zanj manj ugodno vasico Kodomudi, blizu obale svete reke Kaveri (Cauvery), v neposredno bližino njegovega rojstnega mesta. Tam je prišlo 11. avgusta 1919 do prvega in to javnega spora med Ramanujanom in materjo, ker ni dovolila, da se Janaki pridruži družini pri verskem obredu ob reki. Ramanujan materi ni popustil in Janaki je ostala ob njem. V tem sporu[16] je Ramanujan mirno, jasno in preudarno javno očital materi vse grdobije, ki jih je počela Janaki, od skrivanja pisem do vseh njenih izživljanj nad njo. S tem je Janaki dobila v družini nov status, vez med njima pa se je še poglobila.

Žal tudi v Indiji zdravniki niso postavili prave diagnoze za vse Ramanujanove težave in so ga še naprej obravnavali kot tuberkuloznega bolnika. Ko se mu je stanje stabiliziralo, je prekinil zdravljenje v Kodomudi in se 3. septembra 1919 vrnil v Kumbakonam. Toda zdravstveno zatišje je hitro minilo. V januarju 1920 je spet odšel na zdravljenje v Madras, kjer sta ga finančno podprla Srinivasa Aiyangar in **T. Namberumal Chetty**[17], delno pa je kril stroške zdravljenja tudi sindikat madraške univerze.

Vsa prizadevanja številnih najboljših zdravnikov pa so bila zaman. Ramanujan, ki mu je v zadnjih mesecih življenja nesebično stala ob strani Janaki kot ljubeča žena, prijateljica in negovalka, je umrl 26. 4. 1920 v Chetputu, pristanišču Madrasa, v Chettyjevi palači Gometra, ki mu jo je lastnik dal v brezplačno uporabo. Ramanujan je v tem obdobju tudi izjavil, da zelo verjetno sploh ne bi zbolel, če bi bila v Angliji ob njem Janaki.

S tem se je izjemna naveza med Ramanujanom in Hardyjem prekinila. Zdi se, da je Hardy v naslednjih letih želel prikazati svoj odnos do Ramanujana v boljši luči. Leta 1940 je izdal knjigo *Ramanujan*, glej [6], ki je bila dolgo časa edini vir o Ramanujanovem delu in življenju. Istega leta je izšla tudi Hardyjeva zelo popularna knjiga *A mathematician's apology*, v kateri je uporabil svoj veliki dar za pisanje nematematičnih vsebin in ki je navdihnila tudi druge znamenite matematike, da so se »odprli« splošni javnosti. Po njegovi smrti je leta 1949 izšla še knjiga *Divergent series*, v kateri je omenil in razvil tudi Ramanujanov pogled na sumacijo divergentnih vrst. Zaključimo z znamenitim Hardyjevim citatom iz njegove knjige *Ramanujan*:

> *Ramanujan je moje odkritje. Nisem ga izumil, izumil se je sam, toda bil sem prva kompetentna oseba, ki je imela možnost videti njegovo delo. Misel na to, da sem v njem prepoznal izjemno bogastvo, me navdaja z zadovoljstvom.*

Ramanujanova zapuščina

Kljub bolezni je Ramanujan vneto delal tudi ves čas v Indiji. Svoje pero je odložil le štiri dni pred smrtjo. Hardyju se je iz Indije oglasil samo enkrat in to s pismom 12. januarja 1920, v katerem je omenil lažne (angl. mock) funkcije theta [4, str. 220]:

> *Zelo mi je žal, da vam do sedaj nisem nič pisal [...] Nedavno sem odkril zelo zanimive funkcije, ki jih imenujem »lažne« ϑ-funkcije. V nasprotju z »napačnimi« ϑ-funkcijami (deloma študiranimi s strani prof. Rogersa v njegovem zanimivem članku) te funkcije vstopijo v matematiko tako lepo kakor navadne funkcije theta. S pismom vam pošiljam nekaj primerov.*

16 O Ramanujanovih sporih z materjo zaradi Janaki in o njenem nasprotovanju donacijam denarja v dobrodelne namene je več let po njegovi smrti večkrat zelo nejasno in tudi kontradiktorno pisal njegov brat.

17 Thaticonda Namberumal Chetty (1856–1925) je bil indijski mogočnež, podjetnik, gradbeni inženir in poslovnež, ki je v Madrasu zgradil več pomembnih javnih zgradb in imel v osebni lasti 99 palač. Zaradi zaslug je bil leta 1923 odlikovan z visokim častnim nazivom *Dewan Bahadur*.

Napisal je 17 primerov, navedimo le enega:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(1+q)^2\,(1+q^2)^2\cdots(1+q^n)^2}.$$

Ramanujan v pismu ni pustil nobenega namiga, kako je dobil te primere. Osnovno vprašanje prvih raziskovalcev je bilo: *Kaj je lažna funkcija theta?* Trudili so se poiskati teorijo, ki bi pokrila vse Ramanujanove primere. Te funkcije zasedajo pomembno mesto[18] v znameniti *Izgubljeni beležki*, ki je nastala v tem času. Ime je zavajajoče. V nasprotju z beležkami ne gre za zvezek, temveč za 138 enostransko popisanih listov, prav tako so bili listi *založeni* in ne izgubljeni. Kot lahko razberemo iz uvodov v knjigah [1] in [4] ter [8], se je z Ramanujanovo matematično zapuščino po smrti dogajalo marsikaj.

Ramanujan je v Indijo prinesel Drugo in Tretjo beležko, Prvo beležko pa je pustil pri Hardyju. Janaki je leta 1920 vse rokopise, skupaj z avtorskimi pravicami, podarila Univerzi v Madrasu, ki ji je pozneje zanje dodelila mesečno rento 25 rupij[19]. Tri leta kasneje je F. Dewsbury poslal Hardyju ročno narejeno kopijo Druge beležke (v štirih delih) in nekaj originalnih rokopisov, saj je Hardy želel vse neobjavljene zapise objaviti v posebni izdaji o Ramanujanovem življenju in delu. Kasneje je na Dewsburyjevo prošnjo Hardy poslal nazaj le originalno Prvo beležko, ostalih rokopisov pa ne. S tem je knjižnica Univerze v Madrasu dobila vse originalne beležke, ki so tam shranjene še danes. Leta 1934 je Hardy predal precejšen del rokopisov **G. N. Watsonu**[20], ki si je za osebno rabo naredil dve kopiji Druge beležke. Ni znano, ali je Watson takrat imel tudi vse rokopise, ki danes sestavljajo Izgubljeno beležko, zagotovo pa je vse liste dobil enkrat med letoma 1934 in 1947. Watson je dobrih deset let raziskovanja posvetil beležkam in Ramanujanovim pismom Hardyju. Napisal je več kot trideset člankov na to temo, tudi nekaj o lažnih funkcijah theta, toda v poznih tridesetih letih prejšnjega stoletja mu je zaradi bolezni zanimanje za Ramanujana močno upadlo. Po njegovi smrti je **R. A. Rankin**[21] dobil nalogo napisati nekrolog za Londonsko matematično društvo, zato je 12. julija 1965 obiskal gospo Watson, ki ga je pospremila do Watsonove sobe, polne popisanega papirja, kjer je odkril del Ramanujanovih rokopisov. Te je 2. novembra 1965 poslal knjižnici na kolidž Trinity. 19. novembra 1965 pa je **J. M. Whittaker**[22], prav tako z nalogo napisati nekrolog Watsonu za Kraljevo družbo, tudi obiskal Watsonov dom. Po naključju je med goro rokopisov našel prav Izgubljeno beležko, ki jo je predal Rankinu, ta pa jo je 26. decembra 1968 poslal knjižnici na kolidž Trinity. Tretjo pošiljko preostanka Ramanujanovih rokopisov, ki jih je dobil od gospe Watson aprila 1969, je odposlal 30. decembra 1969. Ne Rankin ne Whittaker nista v nekrologih omenila Ramanujanovih rokopisov. Tako so skoraj osem let ležali v knjižnici na Trinityju, za njihov obstoj pa je vedela le majhna skupina ljudi. Spomladi 1976 je rokopise ponovno »odkril« **G. E. Andrews**[23] in jih javno predstavil. Širša javnost je vzdušje tega dogodka primerjala s hipotetičnim odkritjem Beethovnove desete simfonije, matematiki pa so končno dobili nekaj namigov za zgraditev teorije lažnih funkcij theta. Najpomembnejši je bil ta, da te funkcije spadajo v teorijo modularnih form. Preboj je dosegel S. Zwegers, ki je v doktoratu leta 2002 pokazal, kako se dobijo prek posebnih realno analitičnih modularnih form, ki so se malo kasneje izkazale za primere harmoničnih Maassovih form. Ta teorija je zapletena in sega tudi na druga področja, npr. na umeritveno teorijo v matematični fiziki. Zainteresirani bralec lahko dobi dober pregled nad tem področjem v članku [9], ki ga je napisal Ken Ono, eden od vodilnih ekspertov, ki je svojo kariero začel tudi zaradi navdušenosti nad Ramanujanom.

Hardyjeva prizadevanja, da bi izdali beležke, so zaradi pomanjkanja denarja spodletela. Skupaj z P. V. Seshu Aiyarjem in **B. M. Wilsonom**[24] so leta 1927 uredili in izdali Ramanujanove članke, glej [10], v uvodu pa navedli nekaj izsekov iz pisem. Dve leti kasneje sta Watson in Wilson začela z urejanjem beležk, vendar zaradi Wilsonove tragične smrti dela nista nikoli dokončala. Leta 1949 je Univerza v Madrasu izdala samo tri izvode faksimil beležk. Šele leta 1957 je na pobudo K. Chandrasekharana Inštitut osnovnih raziskav Tata[25] v Bombayu v sodelovanju z Univerzo v Madrasu in Fundacijo Tata[26] izdal fotokopije beležk z naslovom *Notebooks of Srinivasa Ramanujan*[27] v nakladi 1000 izvodov. S tem so beležke prvič postale dostopne širši matematični javnosti, vendar je minilo še sedemnajst let, preden so začeli s sistematičnim pregledom. Najbolj zaslužen za to je B. C. Berndt. Med študijskim obiskom Inštituta za napredne študije v Princetonu leta 1974 je opazil, da lahko dokaže nekaj formul iz Druge beležke, med drugim tudi Ramanujanovo formulo za $\zeta(2n+1)$. Tri leta kasneje se je odločil, da bo dokazal vse formule v 14. poglavju Druge beležke. Andrews mu je povedal, da sta na tem delala že Watson in Wilson. Na srečo so bili njuni rokopisi shranjeni v knjižnici na kolidžu Trinity. S tem se je pričelo sistematično dokazovanje formul in izrekov iz beležk (glej 2. opombo v prvem delu). Podobno sta se urejanja Izgubljene beležke lotila Andrews in Berndt. Izsledke sta strnila v pet knjig, zadnja je izšla leta 2018.

Zaključimo članek s Hardyjevim citatom, ki lepo opiše Ramanujanovo veličino [6, str. 14]:

> *Možno je, da je velik čas formul minil in bi se Ramanujan moral roditi pred 100 leti, toda do sedaj je bil največji formalist svojega časa. V zadnjih petdesetih letih so živeli mnogo pomembnejši matematiki kot Ramanujan, toda nobeden se ne bi mogel pomeriti z njim na njegovem področju. Z igranjem igre po njegovih pravilih bi vsakega matematika na svetu naredil za petnajstletnika.*

18 Glede na količino zasedajo le okoli 5 % vsebine. Večina vsebine spada v teorijo q-vrst, med katere prištevamo tudi modularne enačbe in Rogers-Ramanujanov verižni ulomek.

19 Janaki se je težko preživljala s šivanjem oblačil, poučevanjem krojenja in tamilščine, ker ji Ramanujanova mati in sinova niso izročili Ramanujanovega denarja, s katerim je poskrbel zanjo.

20 George Neville Watson (1886–1965), Senior Wrangler (1907) in FRS (1919), je bil Masonov profesor čiste matematike na Univerzi v Birminghamu. Najbolj znan je po soavtorstvu z E. T. Whittakerjem pri učbeniku *A course of modern analysis*.

21 Robert Alexander Rankin (1915–2001), škotski matematik, ki je deloval na področju analitične teorije števil.

22 John Macnaghten Whittaker (1905–1984), FRS (1949), je bil sin E. T. Whittakerja.

23 George Eyre Andrews (1938–) je ameriški matematik, ki deluje na področju matematične analize in kombinatorike.

24 Bertram Martin Wilson (1896–1935) je bil profesor matematike na University College Dundee, Škotska.

25 Tata Institute of Fundamental Research

26 Tata Trust

27 Ker izvodov sčasoma ni bilo mogoče več dobiti, pa tudi zaradi slabega stanja originalnih beležk, so ob pomoči najnovejše tehnologije za obdelavo slik pripravili drugo izdajo faksimil [11].

Zahvala

Avtorja se zahvaljujeta članom seminarja za zgodovino matematičnih znanosti za spodbudo in razumevanje med predavanji ob Ramanujanovi 130. obletnici rojstva. Članek v dveh delih je nastal na podlagi teh predavanj. Zahvala gre tudi veleposlaniku Indije, gospodu *Param Jit Mannu,* ki je za namene seminarja samoiniciativno priskrbel indijski film in literaturo o Ramanujanu iz Indije. Hvaležna sva tudi *Danijeli Čibej, prof.,* za lektorski pregled in *Metodu Bošku* za pomoč pri urejanju avtorizacije fotografij.

Fotografije

Slika 1: E. H. Neville
http://www.icmihistory.unito.it/portrait/neville.php
Pravice proste.

Slika 2: Svetišče Namakkal
Vir: Namakkal Narasimhaswami Temple Navarathri, pravice proste.

Slika 3: S. A. Ramanujan
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c1/Srinivasa_Ramanujan_-_OPC_-_1.jpg
Vir: Wikipedija, pravice proste.

Slika 4: Ramanujan ob podelitvi diplome BA
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:RamanujanCambridge.jpg
Vir: Wikipedija, pravice proste.

Slika 5: G. H. Hardy
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ghhardy@72.jpg
Vir: Wikipedija, pravice proste.

Slika 6: P. A. MacMahon
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Percy_MacMahon.jpg
Vir: Wikipedija, pravice proste.

Sklika 7: J. E. Littlewood
Vir: London Mathematical Society, pravice proste.

Slika 8: Komalattammal
https://www.indiatoday.in/education-today/gk-current-affairs/story/srinivasa-ramanujan-life-story-973662-2017-04-26
Pravice proste.

Slika 9: Janaki Amal
https://www.findagrave.com/memorial/168829173/srimathi-janaki-ramanujan
Vir: www.findagrave.com, pravice proste.

Literatura

[1] G. E. Andrews, B. C. Berndt, *Ramanujan's lost notebook, Part I*, Springer, New York, 2005.

[2] K. Alladi, *Ramanujan's place in the world of mathematics*, Springer, New Delhi, 2013.

[3] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part II*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[4] B. C. Berndt, R. A. Rankin, *Ramanujan: Letters and commentary*, History of Mathematics 9, AMS, London Mathematical Society, 1995.

[5] H.-C. Chan, *An invitation to q-series: From Jacobi's triple product identity to Ramanujan's »most beautiful identity«*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2011.

[6] G. H. Hardy, *Ramanujan: Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940.

[7] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications 53, AMS, Providence, RI, 2004.

[8] R. Kanigel, *The man who knew infinity: a life of the genius Ramanujan*, Washington Square Press, 1991.

[9] K. Ono, *Unearthing the visions of a master: harmonic Maass forms and number theory*, Current developments in mathematics, 2008, Int. Press, Somerville, MA, 2009, pp. 347–454.

[10] S. Ramanujan, *Collected papers*, University Press, Cambridge, 1927.

[11] S. Ramanujan, *Notebooks of Srinivasa Ramanujan*, 2nd ed., Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, 2012.

[12] A. Rice, *Partnership, partition, and proof: The path to the Hardy-Ramanujan partition formula*, Amer. Math. Monthly **125** (2018), 3–15.

[13] A. Simonič, *Riemannove ničle in praštevila*, Obzornik Mat. Fiz. **64** (2017), 201–215.

[14] A. Simonič, M. Strnad, *Ramanujanova kvadratura kroga*, sprejeto v Presek 46 (2018/2019), št. 6, 8–12.

Raziskovalne naloge iz matematike na Srečanju mladih raziskovalcev Slovenije 2019

Dr. Borut Jurčič Zlobec
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko

Državno Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije organizira Zveza za tehnično kulturo Slovenije. Namen srečanja je čim zgodnejše uvajanje mladih v znanost, popularizacija znanosti in tehnike, odkrivanje nadarjenih učencev in dijakov na posameznih področjih in njihovo spodbujanje k poglabljanju znanja in raziskovalne dejavnosti.

Na to državno srečanje prispejo naloge, ki so bile izbrane na regijskih srečanjih. Vse prispele naloge iz regijskih srečanj dobijo na državnem izboru eno od priznanj.

V letu 2019 je potekalo že 53. državno srečanje v Murski Soboti. Organizator je dobil v pregled 19 nalog, ki so prišle v končni izbor za priznanja, od teh jih je osem določil za bronasto priznanje.

Ostale naloge so bile predstavljene pred državno komisijo. Komisijo so sestavljali izr. prof. dr. Dominik Benkovič, dr. Borut Jurčič Zlobec, izr. prof. dr. Marko Jakovac in doc. dr. Janja Jerebic.

Komisija je izbrala sedem nalog za srebrno priznanje, štiri naloge pa so dobile zlato priznanje.

Odločili smo se, da bomo vsako leto objavili recenzijo nalog, ki so dosegle zlata priznanja. Po eni strani, da povemo širši javnosti, kaj delajo naši mladi raziskovalci, po drugi strani pa, da spodbudimo druge, da bi jim sledili. Morda bomo z opisom dela najboljših dali kakšno idejo tudi drugim in jih spodbudili, da še oni zapišejo svoje misli, ki so se jim ob tem porodile. Seveda imajo tu mentorji pomembno vlogo in enako velja seveda tudi zanje.

S tem ko so mladi raziskovalci dobili zlato priznanje, so dobili pohvalo za svoje dosežke. Na tem mestu pa jim želimo sporočiti, kaj bi lahko popravili, izboljšali, da bi bili še bolj uspešni.

Pojdimo k nalogam. Teme nalog, ki so bile predstavljene, so bile predvsem geometrijske (devet nalog), potem iz teorije števil (tri naloge), anketne (tri naloge), aritmetične (dve nalogi), nato ena algebrska in ena čisto statistična.

Anketne naloge so privlačne, ker ustrezajo napotkom, da je treba v raziskovalni nalogi narediti kaj izvirnega, kar pa v matematiki ni tako lahko. Zato stalno poudarjamo, da taka inovativnost za matematične naloge ne pride v poštev, in vsakokrat na žalost izločimo vse anketne naloge iz zadnjega kroga, vendar pa nam izbor na lokalni ravni znova in znova pošilja take naloge. Tudi kakovost teh nalog je vprašljiva. Vprašljive so tudi statistične metode, ki jih uporabljajo. Zato priporočam mentorjem, naj se izogibajo takim temam. Pri matematičnih raziskovalnih nalogah je pomembno, da se učenci naučijo nekaj novega iz matematike in da znajo to lepo predstaviti. Če pa jim uspe kakšen izviren problem opisati matematično in ga tako rešiti, so dosegli največ, kar se od njih pričakuje. Veliko je odvisno od mentorjev. Prav je, da ti pustijo učencem, da delajo samostojno, vendar pa pričakujemo, da je končni izdelek narejen matematično korektno in da mentor svetuje, kako bi se določene stvari izboljšale in poenostavile. Pomembno je tudi, da mentorji opozarjajo na lep in razumljiv jezik.

Raziskovalne naloge, nagrajene z zlatim priznanjem za leto 2019

Nagrajene so bile štiri raziskovalne naloge, dve osnovnošolski in dve srednješolski. Sledi kratek opis, najprej za osnovnošolski, nato pa za srednješolski nalogi.

1. Aritmetični biljard

Avtorici: Ela Habjanič, Nika Ornik
Mentor: Alenka Repnik
Šola: Osnovna šola borcev za severno mejo, Maribor

2. Skrivnost babilonske ploščice PLIMPTON 322

Avtorji: David Demšar, David Ficko, Peter Mašič
Mentor: Igor Blažič, dipl. ing.
Somentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.
Šola: Osnovna šola montessori, Ljubljana

3. Dopolnjujoči se skutoidi

Avtorji: Eva Brumat, Samo Fučka, Domen Vovk
Mentor: mag. Alojz Grahor, prof. mat.
Šola: Škofijska gimnazija Vipava

4. Mandelbrotova in Juliajeve množice

Avtorica: Eva Sreš
Mentor: Samo Hajdinjak
Somentor: Boštjan Žnidaršič
Šola: Gimnazija Poljane, Ljubljana

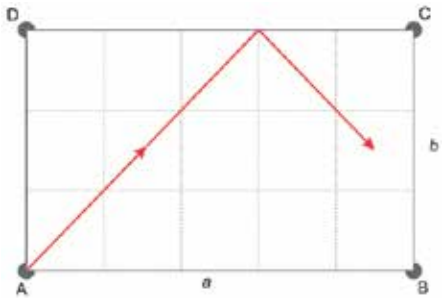
Kratek opis nagrajenih nalog

1. Naloga z naslovom: Aritmetični biljard

Predstavimo nalogo z nekoliko skrajšanim povzetkom k nalogi.

Obravnavamo pot krogle po pravokotni mizi za biljard, ki ima luknje le v vogalih. Krogla začne pot v spodnjem levem vogalu pod kotom 45 stopinj. Giblje se s konstantno hitrostjo, dokler ne konča poti v eni od lukenj. Vprašali smo se, ali lahko napovemo, v kateri luknji konča krogla pri različnih dimenzijah mize. Dimenzije mize so stalno celoštevilčne. Zanimalo nas je tudi število odbojev krogle na njeni poti in dolžina poti. Opazovali smo tudi poti krogle po mizi.

Mizo razdelimo na enotske kvadrate, kot prikazuje slika. Krogla prečka tak kvadratek vedno po diagonali. Če sta



Slika 1: Biljardna miza, razdeljena na enotne kvadrate in pot krogle.

dolžini stranic tuji števili, potem krogla vedno prepotuje skozi vse kvadratke. Če števili nista tuji, potem lahko kvadratke združimo v večje kvadratke z dolžino stranice enako največji skupni meri in tako prevedemo problem na prejšnji primer. Število kvadratkov, ki jih prečka krogla, pa je enako najmanjšemu skupnemu večkratniku dimenzij mize. Število odbojev na mizi z dimenzijama a in b, ki sta tuji števili, je enako $K = a + b - 2$. Izvora in ponora ne štejemo, zato je -2. Če števili nista tuji, potem združimo kvadratke, kot smo povedali zgoraj. Če je $m = D(a, b)$, je število odbojev enako $K = (a + b)/m - 2$. V nadaljevanju naloge se spreminja začetna točka, ta ni nujno v vogalu mize, ampak v ogliščih enotskega kvadrata, ki ležijo na stranici mize.

Ne upam si reči, da sem pogrešal jasne dokaze, ker gre za osnovnošolsko nalogo. Naj bo to izziv za v prihodnje. Takih nalog si lahko le želimo. Avtorici in avtorjema iskrene čestitke.

2. Naloga z naslovom: **Skrivnost babilonske ploščice PLIMPTON 322**

Sledi ena od izjemno dobrih nalog, ki si tudi v najsplošnejšem pomenu zasluži naziv raziskovalna.

Plimpton 322 je glinena ploščica iz babilonske civilizacije, ki je nastala okrog 1800 pr. n. š. Na njej so zapisana naravna števila v štirih stolpcih in petnajstih vrsticah. Danes je shranjena na univerzi Columbia, ZDA. Števila so zapisana v klinopisni pisavi. Imenuje se po publicistu in zbiralcu Arthurju Pilmptonu (1855–1936).

Nalogo bomo predstavili z njenim povzetkom.

V raziskovalni nalogi obravnavamo babilonsko matematično ploščico Plimpton 322. Znano je, da so matematiki v babilonski civilizaciji uporabljali šestdesetiški sestav za zapis števil, besedila in podatke pa so zapisovali s klinopisno pisavo na glinene ploščice. Med veliko ohranjenimi matematičnimi ploščicami je tudi ploščica z oznako Plimpton 322. Na njej so v 15 vrsticah in v štirih stolpcih zapisana števila. Raziskovalci so si enotni, da so na tej ploščici zapisane hipotenuze in ena izmed katet petnajstih pravokotnih trikotnikov s celoštevilčnimi dolžinami stranic. V levem stolpcu je zapisano racionalno število. Menijo, da gre za zapis razmerij med stranicami pravokotnega trikotnika. Z današnjega zornega kota naj bi šlo za prve tabele kotnih funkcij. Nekateri menijo, da je ploščica Plimpton 322 le del večje plošče, nekateri, da bi morala imeti 16 vrstic. V raziskovalni nalogi postavimo hipotezo o tem, na kakšen način so izbrali ravno teh petnajst pravokotnih trikotnikov. Svoje trditve računsko utemeljimo.

Pitagorejska trojica je trojica naravnih števil (a, b, c), za katera velja, da je $a^2 + b^2 = c^2$. O pitagorejskih trojicah in njihovih posplošitvah smo na tem mestu slišali že večkrat.

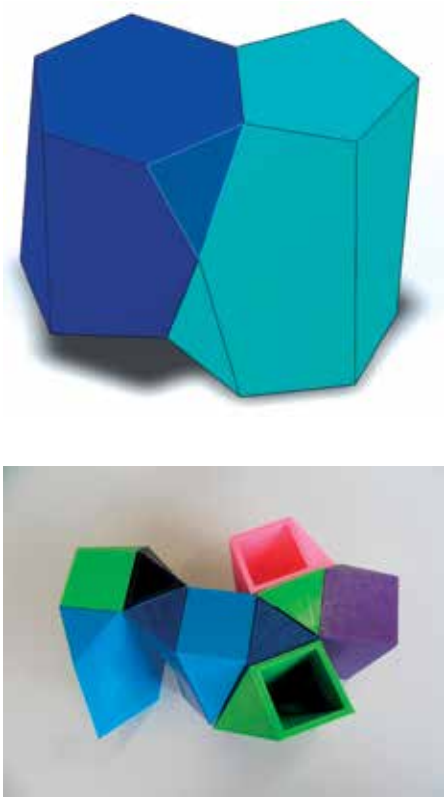
Ta naloga je nekoliko drugačna. Govori o babilonski tablici, kjer so zapisane pitagorejske trojice.

Na ploščici Plimpton 322 so vsa števila pretvorili iz šestdesetiškega v desetiški sistem. Osredotočili so se na iskanje pomena v drugem in tretjem stolpcu. Že prvi raziskovalci so ugotovili, da gre za dolžino katete in hipotenuze pravokotnega trikotnika, izražene z naravnimi števili, ki so del pitagorejske trojice. Zakaj je na ploščici zapisanih ravno teh 15 trojic? Raziskovalci so si enotni, da so Babilonci poznali formule, kako s pomočjo dveh naravnih števil (u, v) dobimo pitagorejske trojice (a, b, c). Vedno lahko izberemo *taki* tuji števili $u > v$, *da je* $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ in $c = u^2 + v^2$. Parom števil (u, v) pravimo tudi generatorji pitagorejskih trojic. Za vsako vrstico na ploščici so izračunali števili u in v. V 15. vrstici je zapisano 56 in 53, ki ne ustrezata pravilu. Očitno je šlo za napako prepisa. Pravilno bi bilo 56 in 106, kar so ugotovili tudi drugi raziskovalci. Z opazovanjem so ugotovili, da so vsa števila u in v večkratniki števil 2, 3 in 5. Postavili so hipotezo, da so sestavljavci ploščice Plimpton 322 izbrali samo tista števila u in v, pri katerih je količnik u/v med 9/5 in 12/5, kjer je $v < 60$.

3. Naloga z naslovom: **Dopolnjujoči se skutoidi**

Iz Škofijske gimnazije Vipava prihajajo že kar nekaj let naloge, ki so med najboljšimi in se odlikujejo tudi po izbrušenem jeziku, kar sicer ni nujno, tudi ne med najboljšimi nalogami. Zato bom prepustil besedo avtorici in avtorjema in ponovil to, kar so zapisali v povzetku.

Konec julija 2018 so raziskovalci z Univerze v Sevilli in z Univerze Lehigh (ZDA) objavili članek z naslovom »Skutoidi so geometrijska rešitev trodimenzionalne zapolnitve krovnega



Slika 2: Na sliki so primeri skutoidov. Spodaj so 3D modeli skutoidov, ki so jih avtorji sami načrtali in jih ustvarili na tiskalniku 3D.

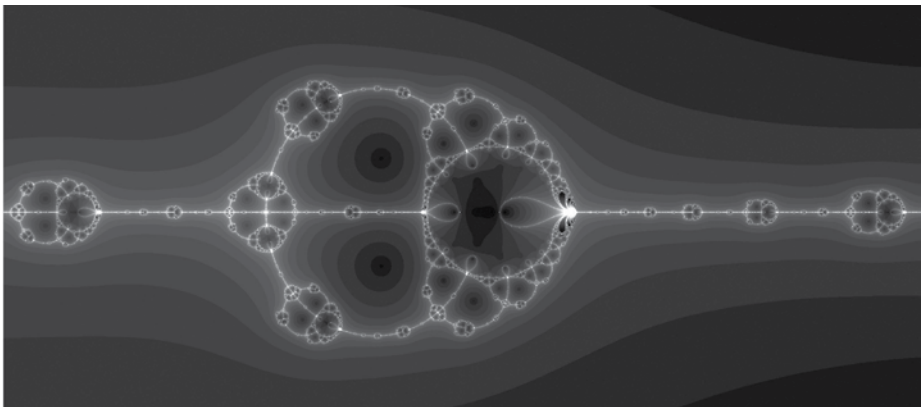
tkiva« (Scutoids are a geometrical solution to three-dimensional packing of epithelia). Ključno vlogo pri rešitvi tega problema je odigralo odkritje novega geometrijskega telesa, ki so ga poimenovali skutoid (ang. scutoid). Skutoid je telo, podobno prizmi, ki ima za osnovni ploskvi različna n-kotnika na vzporednih ravninah, stranski robovi so daljice ali kakšna druga krivulja, vsaj ena povezava pa je v obliki črke Y. Ploskve so lahko ukrivljene.

Omenjeni raziskovalci uporabljajo skutoide za modeliranje povezovanja celic v krovnem tkivu. V raziskovalni nalogi smo opazovali skutoide v prostoru med dvema vzporednima ravninama in jih obravnavali z matematičnega vidika. Pri definiciji smo se omejili na takšne skutoide, pri katerih sta osnovni ploskvi n in n+1 pravilna večkotnika, povezave oglišč pa so daljice. Iskali smo tiste skutoide, ki se v paru dopolnjujeta v ploskvah ob Y. V dostopnih virih opisujejo le skutoid, ki ima za osnovni ploskvi pravilni petkotnik in pravilni šestkotnik. Imenovali smo ga dopolnjujoči se skutoid 5-6. Cilj raziskovalne naloge je bil konstruirati ta skutoid in opisati njegove geometrijske lastnosti. Poleg tega pa smo konstruirali in opisali lastnosti dopolnjujočih se skutoidov 4-5 ter 3-4 in raziskovali, kako se med seboj povezujejo.

4. Naloga z naslovom: **Mandelbrotova in Juliajeve množice**

Cilji, ki si jih je zastavila avtorica:
Cilj raziskovanja je bil spoznati in predstaviti Mandelbrotovo in Juliajeve množice. V nadaljevanju si je zamislila, da bi napisala lasten program za izris Mandelbrotove množice. Zanimajo jo lastnosti Mandelbrotove in Juliajevih množic. Pravi, da v slovenščini ni našla ustrezne literature. Slike je naredila s pomočjo programa Xaos in ugotavljala, kako sprememba iteracijskega polinoma vpliva na obliko množice. Tu vidi možnost za nadaljnje raziskovanje. Napisala je program za računanje iteracij v kompleksnem. Pravi, da na spletu ni našla podobnega programa, enostavnega za uporabo.

Tu ne bi dosti dodal, ker gre za temo, ki je bila že večkrat obravnavana. Literature je dovolj tudi v slovenščini. Programje vseh zahtevnosti in oblik je dostopno na spletu. Tu bi na srednješolski ravni težko dodali kaj izvirnega. Ta moja pripomba je namenjena predvsem mentorjema.



Slika 3: Območja privlačnosti transcendentne funkcije $f(z) = z^3 - 3^z$.
(Iteracije in fraktali, Gustavo Rubiano 0. in Borut Jurčič Z., ZOTKS, 2015)

IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

TAKSONOMIJA ZA UČENJE, POUČEVANJE IN VREDNOTENJE ZNANJA

- Revidirana BLOOMova taksonomija izobraževalnih ciljev.
- Utemeljitev taksonomije, predstavitev taksonomske preglednice in prikaz uporabe taksonomske preglednice v praksi.
- Temeljni priročnik, neprecenljiv vir in orodje za vse, ki se na neposreden ali posreden način ukvarjajo z izobraževanjem.
- Okvir, ki omogoča učiteljem organizirati učne cilje tako, da bodo lahko razumljivi in uresničljivi.

Avtorji: Lorin W. Anderson, David R. Kathwohl idr.
Prevod: Sonja Sentočnik

Cena: 34,50 €

Naročila:
P Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana **T** 01 300 51 00 **F** 01 300 51 99 **E** zalozba@zrss.si **S** www.zrss.si

Mathematics in school

2 2019, Volume 25

CONTENTS

mag. Mateja Sirnik
What si geometry

FROM THE THEORY FOR PRACTICE

Marko Razpet
Lemniscate of Bernoulli 2

Mateja Sirnik
ATS 2020 Project through Learning Mathematics 7

Jerneja Bone
Patterns with Olympic Rings 11

FROM THE CLASSROOM

Sonja Ivančič
Developing and Monitoring Problem-Solving Knowledge Relating to the Terms Curve, Function, Line and Conic Section 23

Julija Viličnjak and Alenka Lipovec
Dapoma – Didactic Game for Consolidating Knowlwdge of the Multiplication Table 39

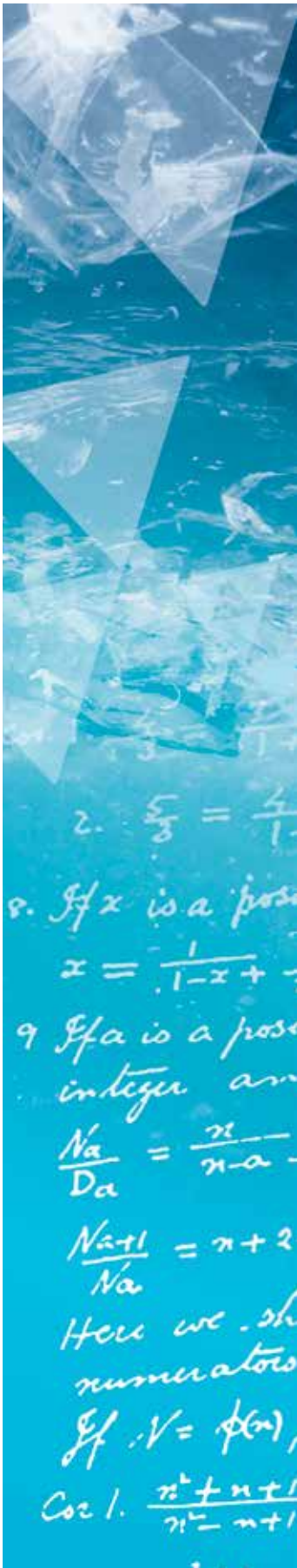
Jasna Černic
Use of Abacus in Mathematics durng After-School Hours 45

MATHEMATICS THROUGH HISTORY

Milena Strnad and Aleksander Simonič
Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) – Part 2 51

NEWS

Borut Jurčič Zlobec
Research papers in mathematics at the 2019 Meeting of Early-Stage Researchers of Slovenia 62



IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

Formativno spremljanje v podporo učenju

Priročnik za učitelje in druge strokovne sodelavce

Priročnik obsega **7 zvezkov**, zbranih v mapi, cena 12,40 €

- **Zakaj formativno spremljati**
- **Nameni učenja in kriteriji uspešnosti**
- **Dokazi**
- **Povratna informacija**
- **Vprašanja v podporo učenju**
- **Samovrednotenje, vrstniško vrednotenje**
- **Formativno spremljanje v vrtcu**

Že 6. ponatis!

Priročniki po predmetih in področjih

Formativno spremljanje kot podpora učencem s POSEBNIMI POTREBAMI

Formativno spremljanje na RAZREDNI STOPNJI

Formativno spremljanje pri MATEMATIKI

Formativno spremljanje pri ZGODOVINI

Formativno spremljanje pri delu SVETOVALNIH DELAVCEV

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Naročanje:
- po pošti (Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana)
- po faksu (01/3005-199)
- po elektronski pošti (zalozba@zrss.si)
- na spletni strani (http://www.zrss.si)

revije ZRSŠ facebook ZRSŠ twitter ZRSŠ

ISSN 1318-010X