PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **29** (2001/2002)
Številka 6
Strani 328–332

Peter Legiša:

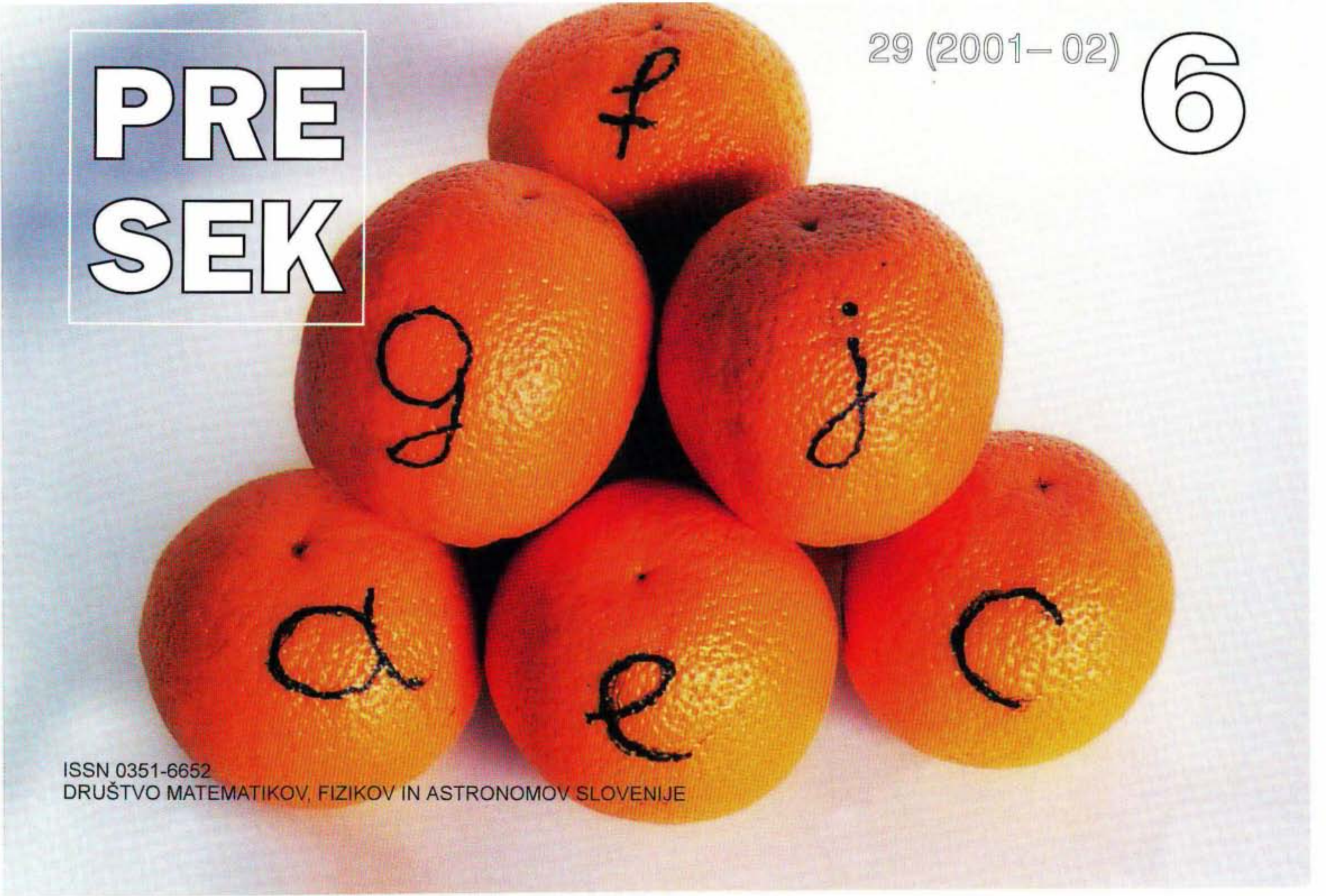
KRISTALNE MREŽE – 2. del, zlaganje krogel

Ključne besede: matematika, geometrija, mreže, razdelitve prostora, kubično najgostejši sklad.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/29/1495-Legisa.pdf

PRESEK

29 (2001– 02) 6



ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

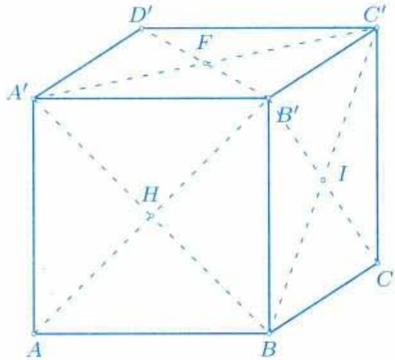
KRISTALNE MREŽE – 2. del
Zlaganje krogel

V prejšnji številki Preseka smo si v članku *Kristalne mreže, 1. del*, ogledali dva načina zlaganja skladnih krogel. Tu bomo predstavili še enega.

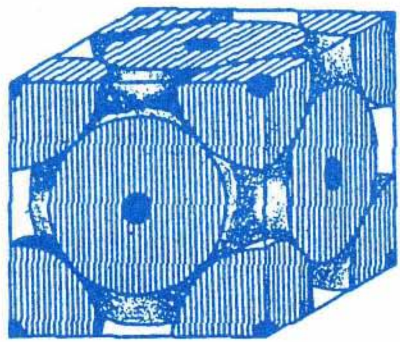
Narišimo kocko $ABCDA'B'C'D'$ z robom a. Na njej označimo vsa oglišča in vsa središča osnovnih ter stranskih ploskev (slika 1), to je skupaj $8+6=14$ točk.

Nato zlagamo skladne kopije te "*osnovne celice*", ki ji pravimo "*ploskovno centrirana kocka*", tako da imata sosednji kocki skupna štiri oglišča.

Oglišča in središča mejnih ploskev tako zloženih kock sestavljajo množico točk v prostoru. Kot je razvidno iz vprašanja 3 na koncu tega članka, je ta množica točk *trirazsežna mreža*, kakršno smo opisali v prvem delu članka o kristalnih mrežah.



Slika 1.



Slika 2.

Vsaka točka te mreže naj bo središče krogle s polmerom

$$R=\frac{1}{4}a\sqrt{2}\,.$$

Na sliki 1 se potem krogla s središčem v H dotika krogel s središči v točkah A, B, A' in B'.

Izračunajmo delež prostora, ki ga zavzemajo krogle. V osnovni celici imamo osemkrat po eno osmino krogle in šestkrat po polovico krogle (slika 2), skupaj štiri prostornine krogle, kar je

$$4\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

Delež dobimo, če to delimo s prostornino kocke, torej z

$$a^3 = 16\sqrt{2}R^3 .$$

Količnik je

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \doteq 74{,}0\,\% .$$

To je več kot pri "*telesno centrirani kocki*" iz prejšnjega članka.

Veliki nemški matematik Carl Friedrich Gauss je že pred dvema stoletjema dokazal tole: Če središča krogel sestavljajo trirazsežno mrežo, ni mogoče doseči večje zapolnjenosti prostora. Zato temu načinu zlaganja krogel pravimo *kubično najgostejši sklad.*

V letu 1998 je bil predstavljen izredno dolg dokaz, da tudi sicer ni mogoče zložiti krogel učinkoviteje. Dokaz je oprt na obsežna preverjanja z računalnikom.

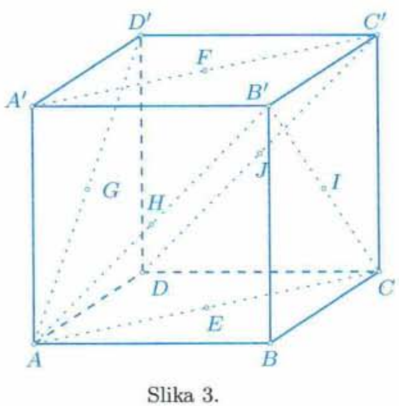
Opozorimo pa, da obstajajo še drugi načini zlaganja krogel, ki so enako učinkoviti kot kubično najgostejši sklad.

— — —

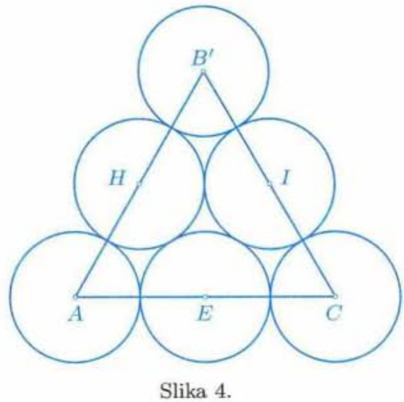
Iz osnovne celice ni takoj jasno, kako bi v praksi zložili krogle v kubično najgostejši sklad. Zato še enkrat narišimo osnovno celico (slika 3).

Točke A, E, C, I, B', H ležijo vse v isti ravnini in so središča krogel. Z malo črko označimo kroglo, ki ima središče v točki, označeni z ustrezno veliko črko. Paroma se dotikajo krogle a, h in e (saj je $|HE| = |AH| = |AE|$). Še pravi, vsak par krogel iz množice $\{a, h, e\}$ se dotika. Podobno velja za krogle iz množic $\{e, c, i\}$, $\{b', h, i\}$ in $\{e, h, i\}$.

Če krogle a, e, c, i, b', h pravokotno projiciramo na ravnino trikotnika ACB', dobimo sliko 4.



Slika 3.

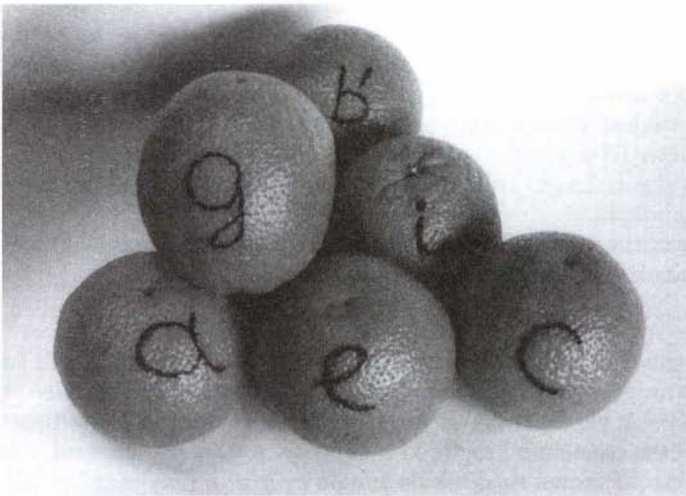


Slika 4.

Ker je $|GH| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, se g in h dotikata. Enako vidimo, da se

g dotika krogel a, h, e,
j dotika krogel i, e, c,
f dotika krogel b', h, i.

Zdaj vemo, kam moramo položiti krogle g, j, f. Oglejte si tudi sliko 5 in fotografijo na naslovnici.



Slika 5.

Vprašanje 1. Kje na sliki 4 je projekcija točke B? (Namig: Katerih označenih krogel se dotika krogla b?)

— — —

Uporabimo zdaj pridobljeno znanje za reševanje zanimivega problema.

Relativna atomska masa aluminija je 26,98, zato ima 1 mol atomov aluminija maso $m = 26{,}98\,\mathrm{g}$. Gostota aluminija je $2{,}70\,\mathrm{kg/dm^3}$. Aluminij kristalizira v kubično najgostejšem skladu. Določi polmer atoma aluminija.

Rešitev. V 1 molu je Avogadrovo število $N_A \doteq 6{,}02 \cdot 10^{23}$ atomov aluminija, vsak ima torej maso $m \cdot (N_A)^{-1}$.

Če je R polmer atoma aluminija, ima osnovna celica rob $a = 2\sqrt{2}R$. Na osnovno celico odpadejo, kot smo ugotovili, 4 atomi, torej masa $\frac{4m}{N_A}$.

Gostota je

$$\rho = \frac{4m}{N_A \cdot a^3} = \frac{4m}{N_A \cdot 16\sqrt{2}R^3}\,.$$

Od tod je

$$R^3 = \frac{m}{4\sqrt{2}N_A\rho} = \frac{26{,}98}{4\sqrt{2}\cdot 6{,}02\cdot 2{,}70}\cdot 10^{-29}\,\mathrm{m}^3 = \frac{269{,}8}{4\sqrt{2}\cdot 6{,}02\cdot 2{,}70}\cdot 10^{-30}\,\mathrm{m}^3$$

in

$$R = \sqrt[3]{\frac{269{,}8}{4\sqrt{2}\cdot 6{,}02\cdot 2{,}70}}\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \doteq 1{,}43\cdot 10^{-10}\mathrm{m}\,.$$

— — —

V nadaljevanju zahtevamo od bralca več samostojnega dela.

Vprašanje 2. Svinec ima gostoto $11{,}34\,\mathrm{g/cm}^3$ in relativno atomsko maso 207,2. Kristalizira v kubično najgostejšem skladu. Določite polmer atoma svinca.

Opomba. V staljenem svincu so atomi bolj neurejeni kot v kristalu in prostora ne zapolnjujejo tako učinkovito. Zato se pri strjevanju svinec skrči.

Kovine, ki kristalizirajo v manj gostih skladih, pa pri strjevanju lahko zvečajo prostornino. Take kovine niso najbolj primerne za vlivanje.

Poseben primer je kositer, ki pri nizkih temperaturah kristalizira v manj gostem skladu kot pri sobni temperaturi. To je vzrok t.i. "kositrove kuge", ki je povzročila mnogo škode.

Vprašanje 3. Vrnimo se k sliki 3. Naj bo $\mathcal{P}$ paralelepiped z osnovno ploskvijo$B'HEI$ in s stranskim robom $B'F$.

a) Določite preostala oglišča paralelepipeda.
b) Če ima kocka rob a, določite robove paralelepipeda.
c) Določite kota, ki ju $B'F$ oklepa z $B'H$ in $B'I$.
d) Iz tršega papirja naredite nekaj modelov za $\mathcal{P}$, če rob paralelepipeda $\mathcal{P}$ meri 6 cm. Zložite modele tako, da imata sosednja modela skupna 4 oglišča. Oglišča zloženih paralelepipedov sestavljajo mrežo središč krogel kubično najgostejšega sklada. Primerjajte s sliko 3. Da je to res prava mreža, je razvidno iz naslednje točke.
e) Naj bo $\overrightarrow{B'I} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B'H} = \vec{b}$, $\overrightarrow{B'F} = \vec{c}$. Če za izhodišče vzamemo točko B', izrazite krajevne vektorje vseh oglišč kocke in vseh središč mejnih ploskev v bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Vprašanje 4. Na sliki 3 postavimo pravokotni koordinatni sistem tako, da bo A izhodišče O, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OD} = 2\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OA'} = 2\vec{k}$.

Kaj je množica vseh točk T, za katere je

$$\overrightarrow{OT} = m\vec{\imath} + n\vec{\jmath} + p\vec{k}\,,$$

kjer so $m, n, p \in \mathbb{Z}$ in je vsota $m + n + p$ sodo število?

— — —

Odgovori na vprašanja:

1. Projekcija točke B je v središču trikotnika ACB'.
2. $1,75 \cdot 10^{-10}$ m.
3. a) G, D, J
   b) $\frac{1}{\sqrt{2}}a$
   c) 60°
   e) $\overrightarrow{OA} = 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{OA'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{OB'} = 0$, $\overrightarrow{OC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{OD'} = 2\vec{c}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{OF} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OG} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{OH} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OI} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{a} + \vec{c}$.
4. To je mreža kubično najgostejšega sklada, katerega osnovna celica je kocka $ABCDA'B'C'D'$.

Peter Legiša