Bl. Matek:

Geometrija

Geometrija

za

šesti, sedmi in osmi razred srednjih šol.

Spisal

profesor Bl. Matek.

Izpopolnil

ravnatelj Jakob Zupančič.

Drugi natis,

pregledal profesor Fr. Jeran.

1920.

Založila „Jugoslovanska knjigarna“ v Ljubljani.

Natisnila „Jugoslovanska tiskarna“.

21390/2, 2. 17d.

Vsebina.

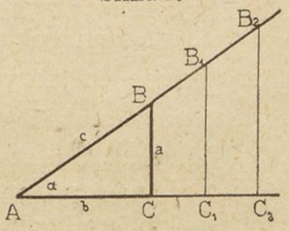
I. Ravninska trigonometrija.

§ 1. Funkcije ostrih kotov in njih medsebojne odvisnosti.

Ako sta količini A in B odvisni druga od druge tako, da pripada vsaki posebni vrednosti količine A popolnoma določena vrednost količine B, pravimo: količina B je funkcija količine A. Funkcija.

Ako načrtamo pri ostrem kotu $BAC = \alpha$ (slika 1.) iz katerekoli točke B enega kraka pravokotnico na drugi krak, stvorimo pravokotni trikotnik ACB, ki ga imenujemo projekcijski trikotnik kota α; kateta $BC = a$ leži kotu α nasproti, kateta $AC = b$ pa je kotu α priležna. Projekcijski trikotnik določenega kota.

Slika 1.



Določenemu kotu α (slika 1.) pripada neskončno mnogo projekcijskih trikotnikov ACB, AC_1B_1, AC_2B_2 i. t. d., ki so podobni drug drugemu. Ker so razmerja (kvocijenti) stranic enega teh trikotnikov enaka razmerjem (kvocijentom) istoležnih stranic ostalih trikotnikov, si smemo izbrati za preiskavanje kateregakoli izmed projekcijskih trikotnikov.

Razmerja (kvocijenti) stranic projekcijskega trikotnika ACB (slika 1.), t. j. v znakih Kotne funkcije.

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$$

so odvisna od kolikosti kota α. Če izpremeni kot α svojo kolikost, izpremenijo tudi navedena razmerja (kvocijenti) svoje vrednosti. Ta razmerja (ti kvocijenti) so torej funkcije kota α. Vsaka teh kotnih funkcij ima svoje posebno ime, in sicer:

Sinus. 1. sinus kota α je razmerje (kvocijent) nasprotne katete in hipotenuze projekcijskega trikotnika, v znakih $\sin \alpha = \frac{a}{c}$;

Kosinus. 2. kosinus kota α je razmerje (kvocijent) priležne katete in hipotenuze projekcijskega trikotnika, v znakih $\cos \alpha = \frac{b}{c}$;

Tangenta. 3. tangenta kota α je razmerje (kvocijent) nasprotne in priležne katete projekcijskega trikotnika, v znakih $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$;

Kotangenta. 4. kotangenta kota α je razmerje (kvocijent) priležne in nasprotne katete projekcijskega trikotnika, v znakih $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$;

Sekanta. 5. sekanta kota α je razmerje (kvocijent) hipotenuze in priležne katete projekcijskega trikotnika, v znakih $\sec \alpha = \frac{c}{b}$;

Kosekanta. 6. kosekanta kota α je razmerje (kvocijent) hipotenuze in nasprotne katete projekcijskega trikotnika, v znakih $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$.

Glavna funkcija. Kofunkcija. Sinus, tangenta in sekanta se imenujejo glavne funkcije; kosinus, kotangenta in kosekanta pa se zovejo kofunkcije.

Medsebojne odvisnosti kotnih funkcij enega in istega kota. Iz navedenih pojasnil o kotnih funkcijah sledi, da sta funkciji sinus in kosekanta, oziroma kosinus in sekanta, tangenta in kotangenta med seboj obratni (recipročni) vrednosti, v znakih

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1,$$
$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1,$$
$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1.$$

V projekcijskem trikotniku ACB (slika 1.) je po Pitagorovem izreku $a^2 + b^2 = c^2$. Ako delimo to enačbo s c^2, oziroma z b^2 ali a^2, najdemo

1. . . . . . $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$

2. . . . . . $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2,$

3. . . . . . $1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2,$

t. j. z ozirom na pojasnila o kotnih funkcijah

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,^*$$
$$\mathrm{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha,$$
$$1 + \mathrm{cotg}^2 \alpha = \mathrm{cosec}^2 \alpha.$$

Ker ulomek ne izpremeni svoje vrednosti, ako deliš števec in imenovalec z enakim številom, najdeš iz pojasnil o kotnih funkcijah

$$4. \quad \mathrm{tg}\, \alpha = \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

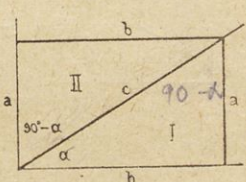
$$5. \quad \mathrm{cotg}\, \alpha = \frac{b}{a} = \frac{b:c}{a:c} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Povej z besedami zavisnosti kotnih funkcij, izraženih v enačbah 1 do 5!

Funkcije komplementarnih kotov.

Ako načrtamo komplementarnima kotoma α in $90 - \alpha$ (slika 2.) projekcijska trikotnika I in II, spoznamo takoj iz slike, da se n. pr. razmerje $\frac{a}{c}$ nahaja v obeh projekcijskih trikotnikih; v trikotniku I pomeni razmerje $\frac{a}{c}$ sinus kota α, v trikotniku II pa kosinus kota $(90 - \alpha)$. Torej sta sinus kota α in kosinus kota $(90 - \alpha)$ enaka. Istotako najdemo, da je razmerje $\frac{b}{c}$ kosinus kota α in sinus kota $(90 - \alpha)$, razmerje $\frac{a}{b}$ tangenta kota α in kotangenta kota $(90 - \alpha)$, razmerje $\frac{b}{a}$ kotangenta kota α in tangenta kota $(90 - \alpha)$ itd. O funkcijah komplementarnih kotov smemo torej reči:

Slika 2.



F u n k c i j a   o s t r e g a   k o t a   j e   e n a k a   k o f u n k c i j i   k o m p l e m e n t a r n e g a   k o t a, v znakih

$$\sin \alpha = \cos (90 - \alpha), \qquad \cos \alpha = \sin (90 - \alpha),$$
$$\mathrm{tg}\, \alpha = \mathrm{cotg}\, (90 - \alpha), \qquad \mathrm{cotg}\, \alpha = \mathrm{tg}\, (90 - \alpha),$$
$$\sec \alpha = \mathrm{cosec}\, (90 - \alpha), \qquad \mathrm{cosec}\, \alpha = \sec (90 - \alpha).$$

---

* Namesto $(\sin \alpha)^2$ se piše navadno $\sin^2 \alpha$ (čitaj: sinus α na kvadrat); istotako je tudi pri drugih funkcijah.

Naloge.

1. Načrtaj funkcijama *a)* $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, *b)* $\operatorname{tg} \beta = 2$ pripadajoča kota!

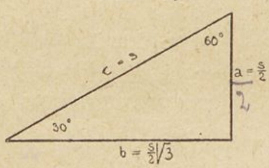
a) Nariši pravokoten trikotnik, v katerem meri ena kateta 3 enote, hipotenuza pa 5 enot. Kot, ki leži določeni kateti nasproti, je kot, ki ga iščeš.

b) Načrtaj pravokoten trikotnik, v katerem meri ena kateta 2 enoti, druga pa 1 enoto. Kot, ki leži večji kateti nasproti, je kot β, ki ga iščeš.

2. Izračunaj kotom *a)* 30^0, *b)* 60^0, *c)* 45^0 funkcije: sinus, kosinus, tangenta, kotangenta!

Ako razpoloviš enakostraničen trikotnik, najdeš kota 30^0 in 60^0 (slika 3.). Po pojasnilih o kotnih funkcijah je

Slika 3.



$$a)\ \sin 30^0 = \frac{a}{c} = \frac{\frac{s}{2}}{s} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^0 = \frac{b}{c} = \frac{\frac{s}{2}\sqrt{3}}{s} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{a}{b} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{s}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

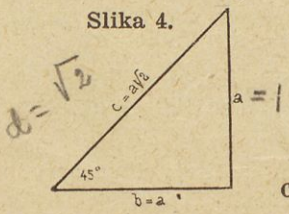
$$\operatorname{cotg} 30^0 = \frac{b}{a} = \frac{\frac{s}{2}\sqrt{3}}{\frac{s}{2}} = \sqrt{3}.$$

b) Po izreku o funkcijah komplementarnih kotov je

$$\sin 60^0 = \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$\cos 60^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2},$$
$$\operatorname{tg} 60^0 = \operatorname{cotg} 30^0 = \sqrt{3},$$
$$\operatorname{cotg} 60^0 = \operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

c) Ako načrtaš pravokoten trikotnik z enakima katetama, najdeš kot 45^0 (slika 4.). Po pojasnilih o kotnih funkcijah je:

Slika 4.



$$\sin 45^0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\cos 45^0 = \frac{b}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\operatorname{cotg} 45^0 = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

b=a =1

3. Izračunaj iz podatkov *a)* $\sin \alpha = \frac{m}{n}$, *b)* $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{m^2-n}{n}}$ ostale funkcije!

S pomočjo navedenih odvisnosti kotnih funkcij enega in istega kota (enačbe 1 do 5, § 1.) najdeš

$$a)\ \frac{m^2}{n^2} + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-m^2}}{n},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{m}{\sqrt{n^2-m^2}},$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{n^2-m^2}}{m}.$$

$$b)\ \frac{m^2-n}{n} + 1 = \sec^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta} = \frac{m^2}{n},$$

$$\cos \beta = \sqrt{\frac{n}{m^2}} = \frac{\sqrt{n}}{m},$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{\sqrt{m^2-n}}{m},$$

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \sqrt{\frac{n}{m^2-n}}.$$

Razreši še naslednje naloge:

4. Načrtaj funkcijam *a)* $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, *b)* $\operatorname{cotg} \beta = \frac{5}{6}$, *c)* $\sec \gamma = 3$, *č)* $\operatorname{cosec} \delta = \frac{8}{3}$ pripadajoče kote!

5. Izračunaj iz naslednjih podatkov ostale kotne funkcije:

a) $\sin \alpha = 0{\cdot}8$, *b)* $\sin \alpha = \frac{m}{m+3}$,

c) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, *č)* $\cos \alpha = \sqrt{\frac{n-1}{n+2}}$,

d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a+b}{a}$, *e)* $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$,

f) $\operatorname{cotg} \alpha = 2{\cdot}4$, *g)* $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$,

h) $\sec \alpha = \frac{29}{20}$, *i)* $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2-4}}$.

§ 2. Vrednosti funkcij ostrih kotov.

Vsaka funkcija ostrega kota se da v sliki predočiti kot daljica. Če primerjamo potem te daljice med seboj, najdemo meje, med katerimi ležijo vrednosti kotnih funkcij.

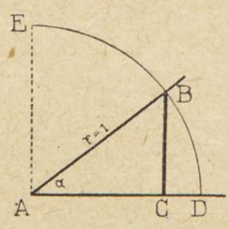
Predočevanje sinusa in kosinusa z daljicami.

1. *Sinus in kosinus.* Ako načrtamo določenemu kotu α pripadajoči lok s polmerom $r = 1$ in v zvezi s tem lokom narišemo projekcijski trikotnik ACB (slika 5.) tako, da je hipotenuza $= r$, predočujeta kateti CB in AC sinus in kosinus kota α; zakaj po pojasnilih o kotnih funkcijah je

$$\sin \alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{CB}{1} = CB \text{ in } \cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{1} = AC.$$

Vrednosti sinusa in kosinusa.

Slika 5.



Ako vrtimo krak AB (slika 5.) na levo do lege AE, postaja kot α vedno večji, istotako tudi kateta CB (ki predstavlja sinus kota α), kateta AC pa (t. j. $\cos \alpha$) se manjša. Ko je $\alpha = 90^0$, preide kateta BC v polmer $AE = 1$, kateta AC pa v točko in je zato $= 0$. Če pa vrtimo krak AB na desno do lege AD, se manjša kot α, istotako tudi kateta CB ($\sin \alpha$), kateta AC pa ($\cos \alpha$) se veča. Ko pride AB do lege AD, je $\alpha = 0^0$, kateta $BC = 0$ in kateta $AC = AD = 1$. Iz navedenega izvajamo:

Sinus ostrega kota se veča, če se veča kot; ko meri kot 0^0, je sinus $= 0$; ko meri kot 90^0, je sinus $= 1$. Vrednosti sinusa torej ležijo med 0 in 1.

$$\sin 0^0 = 0, \sin 90^0 = 1.$$

Kosinus ostrega kota se manjša, če se veča kot; ko meri kot 0^0, je kosinus $= 1$; ko meri kot 90^0, je kosinus $= 0$. Vrednosti kosinusa torej ležijo med 1 in 0.

$$\cos 0^0 = 1, \cos 90^0 = 0.$$

Predočevanje tangente in sekante z daljicami.

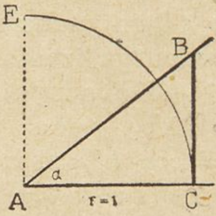
2. *Tangenta in sekanta.* Ako načrtamo določenemu kotu α pripadajoči lok s polmerom $r = 1$ in v zvezi s tem lokom narišemo projekcijski trikotnik ACB (slika 6.) tako, da je kotu α priležna kateta $= r$, predočuje nasprotna kateta CB tangento in hipotenuza AB sekanto kota α; zakaj po pojasnilih o kotnih funkcijah je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{CB}{1} = CB \text{ in } \sec \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{1} = AB.$$

Ako vrtimo krak AB (slika 6.) na levo do lege AE, se veča kot α, istotako tudi kateta CB (tg α) in hipotenuza AB (sec α). Ko je $\alpha = 90^0$, je CB vzporedna z AE in vsaka izmed njiju neizmerno velika. Če pa vrtimo krak AB na desno, se manjša kot α in istotako tudi kateta CB (tg α) in hipotenuza AB (sec α). Ko je $\alpha = 0^0$, preide kateta CB v točko in hipotenuza AB v polmer AC. Iz navedenega izvajamo:

Vrednosti tangente in sekante.

Slika 6.



Tangenta ostrega kota se veča, če se veča kot; ko meri kot 0^0, je tangenta $= 0$; ko meri kot 90^0, je tangenta $= \infty$. Vrednosti tangente torej ležijo med 0 in ∞.

$$\text{tg } 0^0 = 0, \text{ tg } 90^0 = \infty.$$

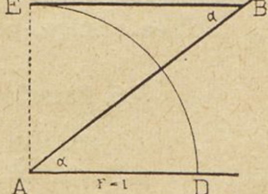
Sekanta ostrega kota se veča, če se veča kot; ko meri kot 0^0, je sekanta $= 1$; ko meri kot 90^0, je sekanta $= \infty$. Vrednosti sekante torej ležijo med 1 in ∞.

$$\sec 0^0 = 1, \sec 90^0 = \infty.$$

3. Kotangenta in kosekanta. Ako načrtamo komplementarnemu kotu $BAE = 90 - \alpha$ (slika 7.) pripadajoči lok s polmerom $r = 1$ in v zvezi s tem lokom projekcijski trikotnik AEB tako, da je kotu $(90 - \alpha)$ priležna kateta $= r$, je projekcijski trikotnik kota $(90 - \alpha)$ obenem tudi projekcijski trikotnik kota α; zakaj kot pri B je kakor izmenični kot $= \alpha$. V projekcijskem trikotniku AEB predstavlja potem priležna kateta EB kotangento in hipotenuza AB kosekanto kota α; zakaj po pojasnilih o kotnih funkcijah je $\text{cotg } \alpha = \frac{EB}{AE} = \frac{EB}{1} = EB$ in $\text{cosec } \alpha = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{1} = AB$.

Predočevanje kotangente in kosekante z daljicami.

Slika 7.



Ako vrtimo krak AB (slika 7.) na levo do lege AE, se veča kot α, kateta EB (cotg α) in hipotenuza AB (cosec α) pa se manjšata. Ko

Vrednosti kotangente in kosekante.

je $\alpha = 90^0$, postane kateta $EB = 0$ in hipotenuza $AB = AE = 1$. Če pa vrtimo krak AB na desno, se manjša kot α, kateta EB (cotg α) in hipotenuza AB (cosec α) pa se večata. Ko je $\alpha = 0^0$, je EB vzporedna z AD in vsaka izmed njiju neizmerno velika. Iz navedenega izvajamo:

Kotangenta ostrega kota se manjša, če se kot veča; ko meri kot 0^0, je kotangenta $= \infty$; ko meri kot 90^0, je kotangenta $= 0$. Vrednosti kotangente torej ležijo med ∞ in 0.

$$\text{cotg } 0^0 = \infty, \text{ cotg } 90^0 = 0.$$

Kosekanta ostrega kota se manjša, če se kot veča; ko meri kot 0^0, je kosekanta $= \infty$; ko meri kot 90^0, je kosekanta $= 1$. Vrednosti kosekante torej ležijo med ∞ in 1.

$$\text{cosec } 0^0 = \infty, \text{ cosec } 90^0 = 1.$$

S pomočjo višje matematike so izračunali funkcije kotov od 0^0 do 45^0 in pregledno sestavili v tablice, ki se imenujejo trigonometrijske tablice. Funkcije kotov od 45^0 do 90^0 se ujemajo po prejšnjem paragrafu s kofunkcijami dotičnih komplementarnih kotov. Sekanta in kosekanta se navadno izpuščata v trigonometrijskih tablicah, ker se rabita prav redkokdaj.

S pomočjo trigonometrijskih tablic se da vsakemu ostremu kotu poiskati dotična kotna funkcija in obratno se da najti vsaki določeni kotni funkciji pripadajoči kot. Za porabno računanje so najpripravnejše takšne trigonometrijske tablice, v katerih se nahajajo logaritmi kotnih funkcij. Kako se te tablice rabijo, pove navodilo, ki se nahaja v njih.

§ 3. Razreševanje pravokotnih trikotnikov.

Izreki o razreševanju pravokotnih trikotnikov.

Po pojasnilih o kotnih funkcijah je v pravokotnem trikotniku CAB (slika 8.):

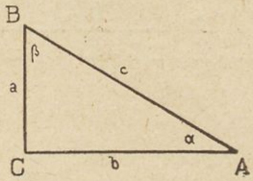
$$\frac{a}{c} = \sin \alpha = \cos \beta,$$

$$\frac{a}{b} = \text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta.$$

Ako odpravimo v teh pojasnilnih enačbah ulomke, najdemo:

$$\left.\begin{aligned} a &= c \sin \alpha = c \cos \beta \\ a &= b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{cotg} \beta \end{aligned}\right\} \text{t. j.}$$

Slika 8.



Kateta pravokotnega trikotnika je enaka produktu hipotenuze in sinusa nasprotnega kota, ali pa enaka produktu hipotenuze in kosinusa priležnega (ostrega) kota.

Kateta pravokotnega trikotnika je enaka produktu iz druge katete in tangente nasprotnega kota, ali pa enaka produktu iz druge katete in kotangente priležnega (ostrega) kota.

Nasprotni in priležni (ostri) kot se določujeta po kateti, o kateri se govori.

Pravokotni trikotnik razrešiti se pravi, iz dveh znanih trikotnikovih sestavin, med katerima je vsaj ena stranica, določiti ostale sestavine. V to svrho rabiš razen zgoraj navedenih izrekov tudi izrek o vsoti trikotnikovih kotov in Pitagorov izrek.

Naloge.*

1. Izračunaj iz hipotenuze $c = 346$ in iz kota $\alpha = 38^0 45'$ ostale sestavine in ploščino pravokotnega trikotnika!

Razrešitev. (Glej sliko 8.)!

$$\beta = 90 - \alpha;\ a = c \sin \alpha,\ b = c \cos \alpha$$

$c = 346$

$\alpha = 38^0 45'$

$$p = \frac{ab}{2} = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2}$$

$\beta = 51^0 15'$

$a = 216{\cdot}57$

$b = 269{\cdot}84$

$p = 29220$

$$\boxed{a = c \sin \alpha}$$

c	2·53908	+
$\sin \alpha$	9·79652 — 10	
a	2·33560	

* Preizkusi računske rezultate tudi potom načrtovanja.

$\boxed{b = c \cos \alpha}$ $\boxed{p = \frac{c^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2}}$

c	2·53908	+
$\cos \alpha$	9·89203 — 10	
b	2·43111	

c^2	5·07816	+
$\sin \alpha$	9·79652 — 10	
$\cos \alpha$	9·89203 — 10	
števec	4·76671	—
2	0·30103	
p	4·46568	

2. Izračunaj iz katete $a = 75{\cdot}8$ in iz kota $\beta = 49^0\,18'$ ostale sestavine pravokotnega trikotnika!

Razrešitev. Kot $\alpha = 90^0 - \beta$. Iz enačbe $a = c \cos \beta$ najdeš hipotenuzo $c = \frac{a}{\cos \beta}$; druga kateta je $b = a \operatorname{tg} \beta$. Poišči posebne vrednosti za navedene zneske!

3. Izračunaj iz katet $a = 18$ in $b = 13$ ostale sestavine pravokotnega trikotnika!

Razrešitev. Iz enačbe $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ najdeš kot α; potem je $\beta = 90^0 - \alpha$. Hipotenuzo najdeš po Pitagorovem izreku, če sta kateti maloštevilčni števili; če pa sta kateti mnogoštevilčni števili, najdeš iz enačbe $a = c \sin \alpha$ ($b = c \cos \alpha$) hipotenuzo $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ $\left(c = \frac{b}{\cos \alpha}\right)$.

4. Izračunaj iz katete $b = 23$ in iz hipotenuze $c = 35{\cdot}6$ ostale sestavine pravokotnega trikotnika!

Razrešitev. Iz slike najdeš: $\sin \beta = \frac{b}{c}$; potem je $\alpha = 90^0 - \beta$ in $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ ali pa $a = c \cos \beta$.

5. Diagonali pravokotnika, ki ima 100 m^2 ploščine, tvorita kot $\gamma = 20^0\,32'\,10''$; koliki sta pravokotnikovi stranici?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Pravokotnikova osnovnica je a in višina b. Diagonali sta enaki in se razpolavljata. Kot α, katerega tvori ena diagonala z višino, leži na osnovnici enakokrakega trikotnika in je zato $= \frac{180^0 - \gamma}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$. Potem je osnovnica

$$a = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = b \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$$

in ploščina

$$p = ab = b^2 \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}.$$

Iz te enačbe najdeš $b = \sqrt{\frac{p}{\operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}}} = \sqrt{p \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}$. Končno je osnovnica $a = \frac{p}{b}$.

6. Trapezovi nevzporednici $b = 105$ in $d = 88$ stojita pravokotno ena na drugi; koliki so trapezovi koti?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Ker so koti na trapezovih nevzporednicah suplementarni, je treba določiti samo kota na daljši vzporednici. Ako razdeliš trapez na paralelogram in trikotnik, je pri navedeni nalogi trikotnik pravokoten. Njegova ostra kota β in δ sta obenem trapezova kota. Iz slike najdeš $\operatorname{tg} \beta = \frac{d}{b}$; potem je $\delta = 90^0 - \beta$.

7. Značilni paralelogram poševnega valja je romb, ki ima 50 dm^2 ploščine in v katerem je en kot $\alpha = 57^0\, 28'\, 22''$; kolika je valjeva prostornina?

Razrešitev. Rombova višina je $v = 2\, r \sin \alpha$ in ploščina $p = 2\, r \cdot v = 4\, r^2 \sin \alpha$. Iz zadnje enačbe najdeš $r = \sqrt{\frac{p}{4 \sin \alpha}}$. Valjeva prostornina je

$$k = \pi\, r^2 \cdot v = 2\, \pi\, r^3 \cdot \sin \alpha = 2\, \pi \sqrt{\left(\frac{p}{4 \sin \alpha}\right)^3} \cdot \sin \alpha.$$

Reši še naslednje naloge:

8. Razreši pravokoten trikotnik, če je:

a) $c = 54{\cdot}986$, $\beta = 63^0\, 42'\, 27''$;
b) $a = 128{\cdot}74$, $\alpha = 49^0\, 36'\, 18''$;
c) $a = 18{\cdot}135$, $b = 32{\cdot}945$;
č) $a = 24$, $c = 51$.

9. Razreši pravokoten trikotnik, v katerem je v hipotenuzi pripadajoča višina, p ploščina, a_1 projekcija katete a in b_1 projekcija katete b na hipotenuzo:

a) $v = 76{\cdot}623$, $\beta = 24^0\,11'\,22''$;
b) $p = 4287{\cdot}3$, $\alpha = 40^0\,8'$;
c) $v = 38{\cdot}4$, $a_1 : b_1 = 9 : 16$;
č) $c = 68$, $a : b = 6 : 5$.

10. Pravokotnikovi diagonali tvorita kot $142^0\,46'$; stranica, ki leži temu kotu nasproti, meri 120·5 *cm*; kolika je druga pravokotnikova stranica?

11. Iz točke, ki ima središčno razdaljo $c = 13$ *dm*, se narišeta tangenti na krog s polmerom $r = 5$ *dm*; kolik je kot, ki ga oklepata tangenti?

12. Kolika je tangenta, ki jo narišeš iz 2·382 *km* visoke gore na zemeljsko površje, če meri zemeljski polmer $r = 6367$ *km*?

13. Os poševnega valja meri 13·7 *cm* in je $67^0\,28'\,35''$ naklonjena proti osnovni ploskvi; kolika je prostornina, če meri polmer osnovne ploskve 3·8 *cm*?

14. Kolik kot tvori stranica pokončnega stožca z osnovno ploskvijo, če meri polmer 2·5 *dm* in prostornina 15 dm^3?

15. Polmer pokončnega stožca meri 2·34 *dm* in kot na vrhu osjega preseka $37^0\,28'\,25''$; kolik je *a)* plašč, *b)* prostornina?

16. Kolik je plašč pokončnega stožca, ki meri 179·04 dm^3 in čigar stranica je $67^0\,5'\,18''$ naklonjena proti osnovni ploskvi?

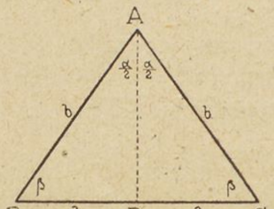
17. Pravokoten trikotnik, čigar hipotenuza meri 13 *dm* in eden ostrih kotov $48^0\,12'\,36''$, se zavrti okoli hipotenuze; kolika je *a)* površina, *b)* prostornina nastalega telesa?

18. Polmera pokončnega prisekanega stožca merita 20 in 8 *dm* in naklonski kot stranice proti osnovni ploskvi meri $50^0\,13'\,42''$; kolik je polmer krogle, ki ima s prisekanim stožcem enako prostornino?

19. Krogla ima 120 dm^3 prostornine; kolik je krogelni izsek, pri katerem meri kot na vrhu osjega preseka $64^0\,44'$?

§ 4. Razreševanje enakokrakih trikotnikov.

Slika 9.



Enakokraki trikotnik razrešiš po istih izrekih kakor pravokotnega; zakaj osnovnici pripadajoča višina razdeli vsak enakokraki trikotnik na dva skladna pravokotna trikotnika, in eden teh trikotnikov se porabi za določevanje neznanih trikotnikovih sestavin. Primerjaj sliko 9.!

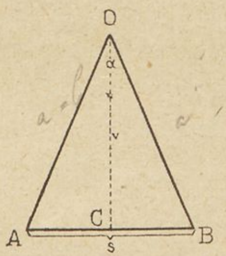
Naloge.

1. V enakokrakem trikotniku sta osnovnica in krak v razmerju 5:8; ploščina meri 84·4 dm^2. Koliki so *a)* koti, *b)* stranice?

Razrešitev. *a)* Po pogoju naloge je $a:b = 5:8$. Ker je $\frac{a}{2} = b \cos \beta$ ali $a = 2b \cos \beta$, najdeš iz navedenega sorazmerja $\cos \beta = \frac{5}{16}$. Potem je $\alpha = 180^0 - 2\beta$.

b) Trikotnikovo ploščino določa obrazec $p = \frac{a}{2} \cdot v$; ker je $v = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta$, se izpremeni navedeni obrazec v $p = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg} \beta$. Iz te enačbe najdeš $a = \sqrt{\frac{4p}{\operatorname{tg} \beta}} = \sqrt{4p \operatorname{cotg} \beta}$. Krak b izračunaš iz enačbe $\frac{a}{2} = b \cos \beta$; torej je $b = \frac{a}{2 \cos \beta}$.

Slika 10.



2. Stranica pravilnega šestnajsterokotnika je $s = 9·36$ cm; kolika je *a)* ploščina, *b)* polmer včrtanega in očrtanega kroga?

Razrešitev. *a)* Pravilni šestnajsterokotnik je sestavljen iz 16 skladnih enakokrakih trikotnikov. Slika 10. predstavlja enega teh trikotnikov. Kot na vrhu trikotnika *ABO* je $\alpha = \frac{360^0}{16} = 22^0\, 30'$. Ploščina pravilnega šestnajsterokotnika je 16 krat tolika kakor ploščina trikotnika *ABO*, v znakih $p = 16 \frac{s}{2} \cdot v$. Ker je $v = \frac{s}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$, se izpremeni navedeni obrazec v $p = 4 s^2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$.

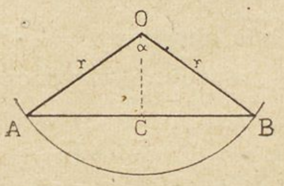
b) Polmer včrtanega kroga je $\varrho = OC = \frac{s}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$. Polmer očrtanega kroga ($r = OA$) najdeš iz enačbe $\frac{s}{2} = r \sin \frac{\alpha}{2}$; torej je $r = \frac{s}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

3. Kolik je polmer kroga, v katerem pripada središčnemu kotu $\alpha = 100^0$ izsek $p = 31·416$ dm^2?

Razrešitev. Krogov izsek in krožnina sta si kakor pripadajoča središčna kota, v znakih $p : \pi r^2 = \alpha : 360^0$. Iz tega sorazmerja najdeš $r = \sqrt{\frac{p}{\pi} \cdot \frac{360}{\alpha}}$.

4. Kolik je krogov odsek, čigar lok meri v dolgostni meri 40 *cm* in v ločni meri $108^0\ 30'$?

Slika 11.



Razrešitev. Ploščino krogovega odseka najdeš, ako odšteješ od izsekove ploščine ploščino pripadajočega trikotnika (slika 11.). Mersko število loka v ločni meri se ujema z merskim številom pripadajočega središčnega kota. Lok in polkrog sta si kakor pripadajoča središčna kota, v znakih $l : \pi r = \alpha : 180^0$. Iz tega sorazmerja najdeš $r = \frac{l}{\pi} \cdot \frac{180}{\alpha}$. Izsekova ploščina je potem $p_1 = \frac{1}{2} lr$. Ploščino pripadajočega trikotnika ABO najdeš po obrazcu $p_2 = \frac{AB}{2} \cdot OC$; ker je $\frac{AB}{2} = r \sin \frac{\alpha}{2}$ in $OC = r \cos \frac{\alpha}{2}$, se izpremeni navedeni obrazec v $p_2 = r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$. Končno je odsekova ploščina $p = p_1 - p_2$.

Razreši še naslednje naloge:

5. Razreši enakokrak trikotnik, če je:

a) $a = 80{\cdot}6$, $\beta = 44^0\ 12'\ 8''$;
b) $b = 835$, $\alpha = 154^0\ 59'\ 22''$;
c) $a = 168$, $b = 124$;
č) $a = 147$, $h_a = 70$;
d) $b = 25{\cdot}02$, $h_a = 23{\cdot}7$;
e) $a = 36{\cdot}4$, $h_b = 28{\cdot}5$;
f) $p = 525$, $\alpha = 91^0\ 3'\ 20''$;
g) $p = 27{\cdot}783$, $a = 12{\cdot}69$.

6. V krogu s polmerom r pripada središčnemu kotu α lok l in tetiva t; izračunaj iz dveh teh količin ostale:

a) $r = 18$, $\alpha = 63^0\ 17'$; b) $t = 92{\cdot}85$, $\alpha = 157^0\ 32'$;
c) $r = 12$, $t = 14{\cdot}04$; č) $r = 78$, $l = 91{\cdot}728$;
d) $l = 17$, $\alpha = 17^0\ 3'$.

7. Krogu s polmerom $r = 6{\cdot}28$ *dm* se a) včrta pravilni deveterokotnik, b) očrta pravilni dvanajsterokotnik; kolika je ploščina vsakega teh mnogokotnikov?

8. Stranica pravilnega peterokotnika je $s = 4{\cdot}32\ dm$; kolika je ploščina?

9. Ploščina pravilnega deseterokotnika je $p = 123{\cdot}45\ cm^2$; kolik je polmer *a)* včrtanega, *b)* očrtanega kroga?

10. Pravilni osemnajsterokotnik ima $197\ dm^2$ ploščine; kolik je njegov obseg?

11. Krogu s polmerom $r = 9{\cdot}65$ se včrta in očrta pravilni osmerokotnik tako, da so njune stranice vzporedne; kolika je ploskev med obsegoma teh mnogokotnikov?

12. Kolika je prostornina pravilne petnajsterostranične piramide, če meri osnovni rob $5{\cdot}78\ dm$ in naklonski kot obstranskega roba proti osnovni ploskvi $64^0\,30'$?

13. Pri pravilni tristranični piramidi je naklonski kot med obstransko in osnovno ploskvijo $\alpha = 75^0$; kolika je prostornina, ako meri osnovni rob $8{\cdot}4\ dm$?

14. Izračunaj prostornino telesa, ki nastane, ako zavrtiš enakokrak trikotnik okoli kraka, če meri osnovnica $7\ dm$ in kot na vrhu $80^0\,25'$!

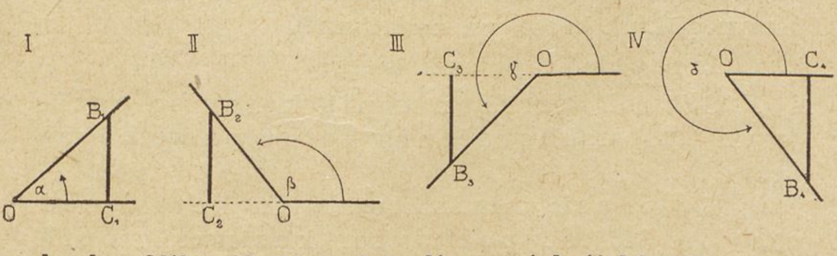
§ 5. Funkcije topih in izbočenih kotov in njih vrednosti.

Pri vsakem kotu ločimo nepremični in premični krak; prvotna poltrakova lega tvori nepremični krak, vsaka druga poltrakova lega pa premični krak.

Projekcijski trikotniki kotov od 0^0 do 360^0.

Določenemu kotu najdemo projekcijski trikotnik, ako načrtamo iz točke premičnega kraka pravokotnico na nepremični krak, oziroma na podaljšek tega

Slika 12.



kraka. Slika 12. I. predstavlja projekcijski trikotnik za ostri kot, slika 12. II. projekcijski trikotnik za topi kot, slika 12. III. projekcijski trikotnik za kot med 180^0 in 270^0, slika 12. IV. pa projekcijski trikotnik za kot med 270^0 in 360^0. Ako primerjamo te projekcijske trikotnike med seboj, vidimo, da imajo pravokotnice B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 in B_4C_4 dve nasprotni legi (smeri) in istotako tudi projekcije OC_1, OC_2, OC_3 in OC_4. Pri kotih od 0^0 do 180^0 se raztezajo omenjene pravokotnice (BC) od zgoraj navzdol, pri kotih od 180^0 do 360^0 pa od spodaj navzgor; v prvi legi so te pravokotnice BC pozitivne, v drugi legi pa negativne. Projekcije OC ležijo pri ostrih kotih in pri kotih med 270^0 in 360^0 na nepremičnem kraku, pri topih kotih in pri kotih med 180^0 in 270^0 pa na podaljšanem nepremičnem kraku; v prvi legi so te daljice OC pozitivne, v drugi pa negativne. Hipotenuze OB projekcijskih trikotnikov smatramo le kot absolutne količine.

Občna pojasnila o kotnih funkcijah.

Razmerja (kvocijenti) $\frac{C_1B_1}{OB_1}$, $\frac{C_2B_2}{OB_2}$, $\frac{C_3B_3}{OB_3}$ in $\frac{C_4B_4}{OB_4}$ so sinusi kotov α, β, γ in δ. Kateri teh razmerji sta pozitivni, kateri pa negativni?

Razmerja (kvocijenti) $\frac{OC_1}{OB_1}$, $\frac{OC_2}{OB_2}$, $\frac{OC_3}{OB_3}$ in $\frac{OC_4}{OB_4}$ so kosinusi kotov α, β, γ in δ. Kateri teh razmerji sta pozitivni, kateri pa negativni?

Razmerja (kvocijenti) $\frac{C_1B_1}{OC_1}$, $\frac{C_2B_2}{OC_2}$, $\frac{C_3B_3}{OC_3}$ in $\frac{C_4B_4}{OC_4}$ so tangente kotov α, β, γ in δ. Kateri teh razmerji sta pozitivni, kateri pa negativni?

Razmerja (kvocijenti) $\frac{OC_1}{C_1B_1}$, $\frac{OC_2}{C_2B_2}$, $\frac{OC_3}{C_3B_3}$ in $\frac{OC_4}{C_4B_4}$ so kotangente kotov α, β, γ in δ. Kateri teh razmerji sta pozitivni, kateri pa negativni?

Iz navedenih pojasnil sledi:

Predznaki kotnih funkcij.

Sinusi ostrih in topih kotov so pozitivni, sinusi izbočenih kotov pa so negativni.

Kosinusi ostrih kotov in kotov med 270^0 in 360^0 so pozitivni, kosinusi topih kotov in kotov med 180^0 in 270^0 pa so negativni.

Tangente in kotangente ostrih kotov in kotov med 180^0 in 270^0 so pozitivne, tangente in kotangente topih kotov in kotov med 270° in 360° pa so negativne.

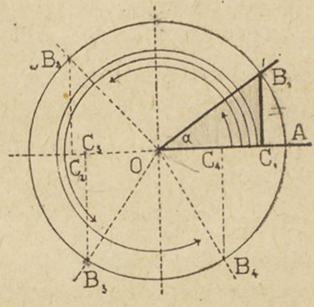
Predočevanje sinusa in kosinusa z daljicami.

Ako načrtamo določenemu kotu α pripadajoči lok s polmerom $r = 1$ in v zvezi s tem lokom narišemo projekcijski trikotnik OC_1B_1 (slika 13.) tako, da je hipotenuza $OB_1 = r = 1$, predočujeta kateti C_1B_1 in OC_1 sinus in kosinus kota α.

Vrednosti sinusa in kosinusa.

Ako vrtimo krak OB_1 (slika 13.) iz prvotne lege OA na levo, se veča kot α in dobi vse vrednosti od 0° do 360°. Pri 0° je sinus = 0 in kosinus = 1. Od 0° do 90° se veča sinus (t. j. C_1B_1) in dobi vse vrednosti od 0 do 1, kosinus (t. j. OC_1) pa se manjša in dobi vse vrednosti od 1 do 0. Pri 90° je sinus = 1 in kosinus = 0. Od 90° do 180° se manjša sinus (C_2B_2) in dobi vse vrednosti od 1 do 0, kosinus (OC_2) pa je negativen in dobi vse vrednosti od 0 do — 1 (se manjša). Pri 180° je sinus = 0 in kosinus = — 1. Od 180° do 270° je sinus (C_3B_3) negativen in dobi vse vrednosti od 0 do — 1 (se manjša), kosinus (OC_3) pa je tudi negativen in dobi vse vrednosti od — 1 do 0 (se veča). Pri 270° je sinus = — 1 in kosinus = 0. Od 270° do 360° je sinus (C_4B_4) negativen in dobi vse vrednosti od — 1 do 0 (se veča), kosinus (OC_4) pa je pozitiven in dobi vse vrednosti od 0 do 1 (se veča).

Slika 13.



Vrednosti sinusa se premikajo med številoma + 1 in — 1. Od 0° do 90° se veča sinus od 0 do 1; od 90° do 180° se manjša sinus od 1 do 0; od 180° do 270° se manjša sinus od 0 do — 1; od 270° do 360° se veča sinus od — 1 do 0.

Vrednosti kosinusa se premikajo med številoma + 1 in — 1. Od 0° do 90° se manjša kosinus od 1 do 0; od 90° do 180° se manjša kosinus od 0 do — 1; od 180° do 270° se veča kosinus od — 1 do 0; od 270^0 do 360^0 se veča kosinus od 0 do 1.

Vrednosti tangente.

Med katerima mejama se premikajo vrednosti tangente kotov od 0^0 do 360^0, se da določiti s pomočjo enačbe $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ki izraža znano odvisnost kotnih funkcij enega in istega kota.

Če je $\alpha = 0^0$, je sinus $= 0$, kosinus pa $= 1$; v tem slučaju je $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$. Če se α veča od 0^0 do 90^0, se veča sinus od 0 do 1, kosinus pa se manjša od 1 do 0; ker se v ulomku $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ veča števec, imenovalec pa manjša, postaja torej tangenta kota α vedno večja. Dokler je $\sin\alpha$ manjši od $\cos\alpha$, je $\text{tg}\,\alpha$ manjša od 1; ko pa postane $\sin\alpha$ večji od $\cos\alpha$, je $\text{tg}\,\alpha$ večja od 1. Če je $\alpha = 90^0$, je $\text{tg}\,\alpha = \infty$; zakaj v tem slučaju je v ulomku $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ imenovalec $= 0$. Tangente kotov od 0^0 do 90^0 ležijo torej med vrednostmi 0 in ∞. Od 90^0 do 180^0 se manjša sinus od 1 do 0, in kosinus se manjša od 0 do — 1; vrednosti za tangento so torej negativne in ležijo med $-\infty$ in 0. Od 180^0 do 360^0 dobijo tangente iste vrednosti, katere imajo od 0^0 do 180^0.

Vrednosti tangente se gibljejo med $+\infty$ in $-\infty$. Od 0^0 do 90^0 se veča tangenta od 0 do ∞, od 90^0 do 180^0 se veča tangenta od $-\infty$ do 0. Od 180^0 do 360^0 velja isto, kar velja o kotih od 0^0 do 180^0.

Vrednosti kotangente.

Kotangenta je obratna vrednost tangente, v znakih $\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$. Vrednosti kotangente se torej premikajo med $+\infty$ in $-\infty$. Od 0^0 do 90^0 se manjša kotangenta od ∞ do 0; od 90^0 do 180^0 pa se manjša od 0 do $-\infty$. Od 180^0 do 360^0 velja isto, kar velja o kotih od 0^0 do 180^0.

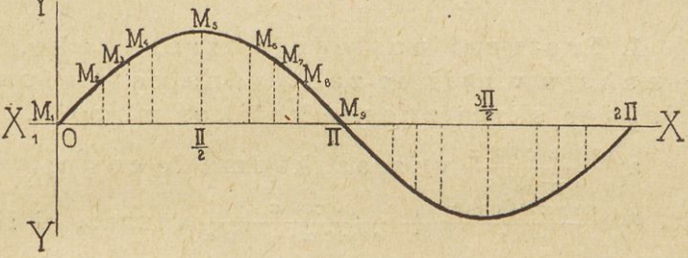
Ako primerjamo vrednosti funkcij pri kotih, ki so istotoliko pod 90^0 in nad 90^0, spoznamo takoj, da so sinusi takih kotov enaki, kosinusi, tangente in kotangente pa nasprotne.

Ako napravi vrteči se poltrak več nego en vrtež, nastajajo koti, ki merijo več ko 360°. Funkcije takih kotov se ujemajo zaporedoma s funkcijami kotov od 0° do 360°.

Načrtavanje sinusove funkcije. Sinusova črta.

Če hočemo vrednosti posameznih kotnih funkcij med seboj primerjati in jih obenem pregledati, je treba te vrednosti predočiti s sliko. Vrednostim si-

Slika 14.



nusove funkcije najdemo n. pr. geometrijsko podobo, ako načrtamo funkcijo $y = \sin x$. Ker merimo kote s pripadajočimi loki in ker meri krogov obod, ki pripada polnemu kotu, v dolgostni meri $2\pi = 6{\cdot}28..$, so kotom 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°... ta-le merska števila $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi...$ Če raste kot x od 0 do $\frac{\pi}{2}$, se veča y od 0 do 1; če raste kot x od $\frac{\pi}{2}$ do π, se manjša y od 1 do 0; če raste kot x od π do $\frac{3\pi}{2}$, se manjša y od 0 do -1; če raste kot x od $\frac{3\pi}{2}$ do 2π, se veča y od -1 do 0. Slika 14. predočuje te odvisnosti. Posamezne točke M_1, M_2, M_3... sinusove črte najdeš iz navedenih podatkov.

x	y	Točke
0	0	M_1
$\frac{\pi}{6} = 0{\cdot}52..$	$\frac{1}{2} = 0{\cdot}5..$	M_2
$\frac{\pi}{4} = 0{\cdot}79..$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{\cdot}71..$	M_3
$\frac{\pi}{3} = 1{\cdot}05..$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{\cdot}87..$	M_4
$\frac{\pi}{2} = 1{\cdot}52..$	1	M_5
$\frac{2\pi}{3} = 2{\cdot}09..$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{\cdot}87..$	M_6
$\frac{3\pi}{4} = 2{\cdot}36..$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{\cdot}71..$	M_7
$\frac{5\pi}{6} = 2{\cdot}62..$	$\frac{1}{2} = 0{\cdot}5$	M_8
$\pi = 3{\cdot}14..$	0	M_9

Za kote od 2π do 4π, oziroma od 4π do 6π i. t. d., se ponavljajo za y iste vrednosti, katere veljajo za kote od 0 do 2π.

Sinusova črta je sestavljena iz neskončno mnogo enakih delov. Prva polovica vsakega teh delov leži nad abscisno osjo, druga polovica pa pod to osjo. Slika 14. kaže prvega teh delov.

Naloge.

1. **Pretvori naslednje izraze tako, da se nahaja v njih le zahtevana kotna funkcija, ter skrči zneske kolikor mogoče.**

a) $\frac{\sin\alpha \operatorname{cotg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ v izraz, ki ima le $\cos\alpha$;

b) $\frac{\sec\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha}$ v izraz, ki ima le $\operatorname{tg}\alpha$.

Razrešitev. S pomočjo enačb, navedenih v § 1., ki izražajo medsebojne odvisnosti kotnih funkcij enega in istega kota, najdemo:

a) $$\frac{\sin\alpha \operatorname{cotg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{\sec^2\alpha \,.\, \sin\alpha} = \cos^3\alpha;$$

b) $$\frac{\sec\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha \sin\alpha} +$$
$$+ \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha \sin\alpha} + \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha =$$
$$= 2\operatorname{tg}\alpha.$$

Razreši še naslednje naloge:

2. Pretvori naslednje izraze tako, da se nahaja v njih le zahtevana kotna funkcija, ter skrči kolikor mogoče:

a) $\cos\alpha + \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sin\alpha}$ v izraz, ki ima le $\sin\alpha$;

b) $(\sec\alpha - \cos\alpha)\operatorname{cotg}\alpha$ v izraz, ki ima le $\sin\alpha$;

c) $\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$ v izraz, ki ima le $\cos\alpha$;

č) $1 - \cos^2\alpha \operatorname{cotg}^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha - 1)$ v izraz, ki ima le $\operatorname{tg}\alpha$;

d) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha - \cos^2\alpha}$ v izraz, ki ima le $\operatorname{cotg}\alpha$;

e) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha(\operatorname{cotg}^2\alpha - 1)$ v izraz, ki ima le $\operatorname{cotg}\alpha$.

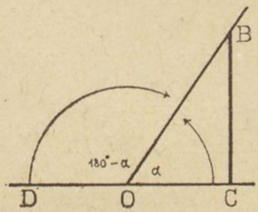
3. Načrtaj naslednje funkcije: *a)* $y = \cos x$, *b)* $y = \operatorname{tg} x$, *c)* $y = \operatorname{cotg} x$.

§ 6. Funkcije suplementarnih in nasprotnih kotov.

Sinusi, kosinusi, tangente in kotangente suplementarnih kotov.

Suplementarna kota α in $180^0 - \alpha$ (slika 15.) imata isti projekcijski trikotnik OCB. Po pojasnilih o kotnih funkcijah je razmerje $\frac{CB}{OB}$ sinus kota α in obenem tudi sinus kota $180^0 - \alpha$. Ker so sinusi ostrih in topih kotov pozitivni, smemo reči, da imajo suplementarni koti enake sinuse, v znakih $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$. Razmerje (kvocijent) $\frac{OC}{OB}$ je kosinus kota α in obenem tudi kosinus kota $180^0 - \alpha$. Ker je navedeno razmerje po pojasnilih prejšnjega paragrafa za kot α pozitivno, za kot $180^0 - \alpha$ pa negativno, t. j. v znakih

Slika 15.



$$\cos\alpha = +\frac{OC}{OB} \text{ in } \cos(180^0 - \alpha) = -\frac{OC}{OB},$$

najdemo iz teh pojasnilnih enačb

$$\cos\alpha + \cos(180^0 - \alpha) = 0$$

ali

$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha.$$

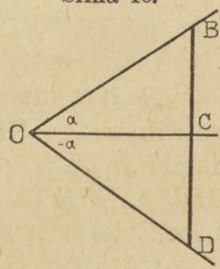
Nadalje je:

$$\operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = \frac{\sin(180^0 - \alpha)}{\cos(180^0 - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}(180^0 - \alpha) = \frac{\cos(180^0 - \alpha)}{\sin(180^0 - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

S i n u s i   s u p l e m e n t a r n i h   k o t o v   s o   e n a k i ;   k o s i n u s i ,   t a n g e n t e   i n   k o t a n g e n t e   s u p l e m e n t a r n i h   k o t o v   s o   p a   n a s p r o t n i .

Slika 16.



Sinusi, kosinusi, tangente in kotangente nasprotnih kotov.

Ako zavrtimo določen poltrak na dve nasprotni strani za istotoliko, nastaneta dva nasprotna kota. Pri vrtenju v zmislu, nasprotnem urnemu kazalcu, nastane pozitiven kot, ki se zaznamuje z $+\alpha$ ali krajše samo z α, pri vrtenju v zmislu urnega kazalca pa negativen kot, ki se zaznamuje z $-\alpha$ (slika 16.). Ako načrtamo kotu α projekcijski trikotnik OCB ter podaljšamo pravokotnico BC do D, stvorimo kotu $-\alpha$ projekcijski trikotnik OCD, ki je skladen s trikotnikom OCB. Po pojasnilih o kotnih funkcijah je $\sin \alpha = + \frac{CB}{OB}$ in $\sin(-\alpha) = \frac{CD}{OD}$. Ker pa je $CD = - CB$ in $OD = OB$, je $\sin(-\alpha) = - \frac{CB}{OB}$, torej:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Nadalje je po pojasnilih o kotnih funkcijah $\cos \alpha = + \frac{OC}{OB}$ in $\cos(-\alpha) = + \frac{OC}{OD}$. Ker sta vrednosti razmerji $\frac{OC}{OB}$ in $\frac{OC}{OD}$ enaki, je torej $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

Potem je:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

Kosinusi nasprotnih kotov so enaki; sinusi, tangente in kotangente nasprotnih kotov pa so nasprotni.

Naloge.

1. Določi funkcije kotov *a)* 120^0, *b)* 135^0, *c)* 150^0!
2. Določi funkcije kotov *a)* -30^0, *b)* -45^0, *c)* -60^0!
3. Dokaži, da je

   a) $\sin(-72^0) = -\cos 18^0$,
   b) $\cos(-72^0) = \sin 18^0$,
   c) $\operatorname{tg}(-72^0) = -\operatorname{cotg} 18^0$.

§ 7. Funkcije kotnih vsot in razlik.

Sinus in kosinus vsote dveh kotov.

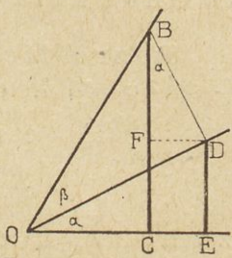
Načrtajmo vsoti kotov α in β projekcijski trikotnik OCB (slika 17.) in v zvezi s tem trikotnikom narišimo tudi kotoma β in α projekcijska trikotnika ODB in OED! Potem sta kota CBD in EOD enaka $= \alpha$. Zakaj? Ako napravimo $DF \parallel EO$, je po pojasnilih o kotnih funkcijah

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{CB}{OB} = \frac{ED+FB}{OB} = \frac{ED}{OB} + \frac{FB}{OB},$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OC}{OB} = \frac{OE-FD}{OB} = \frac{OE}{OB} - \frac{FD}{OB}.$$

Ker se kvocijentova vrednost ne izpremeni, če pomnožimo dividend in divizor z isto količino, in ker ostane produktova vrednost ista, če zamenimo faktorja med seboj, najdemo iz navedenih obrazcev z ozirom na pojasnila o kotnih funkcijah

Slika 17.

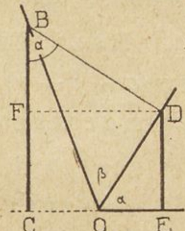


$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{ED}{OB}\cdot\frac{OD}{OD} + \frac{FB}{OB}\cdot\frac{DB}{DB} =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OE}{OB}\cdot\frac{OD}{OD} - \frac{FD}{OB}\cdot\frac{DB}{DB} =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Da veljata navedena obrazca tudi pri topih kotih, se prepričamo s pomočjo slike 18. tako-le:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{CB}{OB} = \frac{ED}{OB} + \frac{FB}{OB} = \frac{ED}{OB}\cdot\frac{OD}{OD} +$$
$$+ \frac{FB}{OB}\cdot\frac{DB}{DB} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$
$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{OC}{OB} = -\frac{FD - OE}{OB} =$$
$$= \frac{OE}{OB} - \frac{FD}{OB} = \frac{OE}{OB}\cdot\frac{OD}{OD} - \frac{FD}{OB}\cdot\frac{DB}{DB} =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Slika 18.



Nadalje je

Tangenta vsote dveh kotov.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta},$$

ali če delimo števec in imenovalec zadnjega ulomka s $\cos\alpha\cos\beta$, najdemo

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Sinus, kosinus in tangenta dvojnega kota.

Ako sta kota α in β enaka, se izpremenijo navedeni obrazci v

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Sinus, kosinus in tangenta razlike dveh kotov.

Če postavimo v zgoraj navedenih obrazcih namesto β nasprotni kot $-\beta$ in se oziramo na odvisnosti funkcij nasprotnih kotov, najdemo

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Naloge.

1. Izračunaj iz funkcij kota α sinus in kosinus kota $\frac{\alpha}{2}$.

Razrešitev. Ako uporabimo obrazca $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ in $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, je

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1.$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Iz teh enačb najdemo

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \text{ in } \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

2. Izrazi funkcijo $\sin(\alpha-\beta-\gamma)$ s funkcijami kotov α, β in γ!

Razrešitev.

$$\sin(\underbrace{\alpha-\beta}-\gamma) = \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma - \cos(\alpha-\beta)\sin\gamma =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma -$$
$$- \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

3. Izrazi funkcijo $\sin 3\alpha$ s funkcijami kota α!

Razrešitev.

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha.$$

Razreši še naslednje naloge:

4. Izračunaj iz $\sin 18^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ naslednje funkcije: $\cos 18^0$, $\operatorname{tg} 18^0$, $\sin 36^0$, $\cos 36^0$, $\operatorname{tg} 36^0$, $\sin 72^0$, $\cos 72^0$, $\operatorname{tg} 72^0$.

5. Izračunaj funkcije kotov *a)* $15^0 = 45^0 - 30^0$, *b)* $22\frac{1}{2}^0 = \frac{45^0}{2}$, *c)* $75^0 = 45^0 + 30^0$.

6. Izrazi naslednje funkcije s funkcijami kotov α, β in γ: *a)* $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, *b)* $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$, *c)* $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, *č)* $\cos(\alpha+\beta-\gamma)$, *d)* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$, *e)* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta-\gamma)$.

7. Izrazi naslednje funkcije s funkcijami kota α: *a)* $\cos 3\alpha$, *b)* $\operatorname{tg} 3\alpha$, *c)* $\sin 4\alpha$.

8. Izrazi $\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta)$ s $\operatorname{cotg}\alpha$ in $\operatorname{cotg}\beta$.

§ 8. Seštevanje in odštevanje kotnih funkcij.

Kako seštevaš, oziroma odštevaš sinusa in kosinusa dveh kotov.

Če seštejemo (odštejemo) obrazce za $\sin(\alpha+\beta)$ in $\sin(\alpha-\beta)$, oziroma obrazce za $\cos(\alpha+\beta)$ in $\cos(\alpha-\beta)$, najdemo:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta.$$

Če zaznamujemo z $\gamma=\alpha+\beta$ in z $\delta=\alpha-\beta$, je $\alpha=\frac{\gamma+\delta}{2}$ in $\beta=\frac{\gamma-\delta}{2}$; potem se izpremenijo navedeni obrazci v

$$\sin\gamma+\sin\delta=2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2},$$
$$\sin\gamma-\sin\delta=2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2},$$
$$\cos\gamma+\cos\delta=2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2},$$
$$\cos\gamma-\cos\delta=-2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}.$$

Naloge.

1. Pretvori naslednje izraze tako, da postanejo uporabni za računanje z logaritmi: *a)* $2-2\sin\alpha$; *b)* $1+2\sin\alpha$; *c)* $2-2\cos\alpha$; *č)* $1+2\cos\alpha$; *d)* $1-\operatorname{tg}\alpha$; *e)* $2+\operatorname{tg}\alpha$; *f)* $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; *g)* $\sin\alpha+\cos\beta$; *h)* $2\sin\alpha+\sin 2\alpha$; *i)* $\cos 3\alpha+3\cos\alpha$; *j)* $1+\sin\alpha+\sin\beta$, če je $\alpha+\beta=90^0$; *k)* $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma$, če je $\alpha+\beta+\gamma=180^0$.

Razrešitev.

a) Ako uporabiš dejstvo, da je $1=\sin 90^0$, najdeš $2-2\sin\alpha=2(1-\sin\alpha)=2(\sin 90^0-\sin\alpha)=$ $=4\cos\frac{90^0+\alpha}{2}\sin\frac{90^0-\alpha}{2}$.

b) Ako uporabiš dejstvo, da je $\frac{1}{2}=\sin 30^0$, najdeš $1+2\sin\alpha=2(\frac{1}{2}+\sin\alpha)=2(\sin 30^0+\sin\alpha)=$ $=4\sin\frac{30^0+\alpha}{2}\cos\frac{30^0-\alpha}{2}$.

c) Ako uporabiš dejstvo, da je $1=\cos 0^0$, najdeš $2-2\cos\alpha=2(1-\cos\alpha)=2(\cos 0^0-\cos\alpha)=$ $=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=4\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

č) Ako uporabiš dejstvo, da je $\frac{1}{2} = \cos 60^0$, najdeš $1 + 2\cos\alpha = 2\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right) = 2\left(\cos 60^0 + \cos\alpha\right) = 4\cos\frac{60^0+\alpha}{2}\cos\frac{60^0-\alpha}{2}$.

d) Ako uporabiš dejstvo, da je $1 = \operatorname{tg} 45^0$, najdeš $1 - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}45^0 - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 45^0}{\cos 45^0} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 45^0\cos\alpha - \cos 45^0\sin\alpha}{\cos 45^0\cos\alpha} = \frac{\sin(45^0-\alpha)}{\cos 45^0\cos\alpha}$.

e) Ako uporabiš dejstvo, da je 2 = tangenti nekega kota δ, ki ga lahko poiščeš v trigonometrijskih tablicah ($2 = \operatorname{tg}\delta$), najdeš $2 + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\delta\cos\alpha + \cos\delta\sin\alpha}{\cos\delta\cos\alpha} = \frac{\sin(\delta+\alpha)}{\cos\delta\cos\alpha}$.

f) $1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

g) Ako uporabiš dejstvo, da je $\cos\beta = \sin(90^0 - \beta)$, najdeš $\sin\alpha + \cos\beta = \sin\alpha + \sin(90^0-\beta) = 2\sin\frac{\alpha+90^0-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-90^0+\beta}{2}$.

h) $2\sin\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha(1+\cos\alpha) = 2\sin\alpha(\cos 0^0 + \cos\alpha) = 4\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

i) $\cos 3\alpha + 3\cos\alpha = \underbrace{\cos 3\alpha + \cos\alpha} + 2\cos\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha + 2\cos\alpha = 2\cos\alpha(\cos 2\alpha + 1) = 4\cos^3\alpha$.

j) Ako uporabiš dejstvo, da je $1 = \sin 90^0 = \sin(\alpha+\beta)$, najdeš $1 + \sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) + \underbrace{\sin\alpha + \sin\beta} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 4\sin 45^0\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.

k) Iz $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ najdeš $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(180^0 - \gamma)$ in $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma$. Če v tej enačbi odpraviš ulomek in jo urediš, dobiš $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

2. Pretvori še naslednje izraze tako, da postanejo uporabni za računanje z logaritmi:

a) $1 \pm \sin\alpha$; *b)* $1 \pm \cos\alpha$; *c)* $1 + \operatorname{tg}\alpha$;

č) $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$; *d)* $1 \mp 2\operatorname{tg}\alpha$;

e) $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \pm \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$; *f)* $\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$;

g) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$; *h)* $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

i) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$; *j)* $\frac{\sin 3\alpha - 3\sin\alpha}{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}$;

k) $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$; *l)* $\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}$;

m) $\sin\alpha + \sin\beta - 1$, če je $\alpha + \beta = 90^0$;

n) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, če je $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$;

o) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma$, če je $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$;

p) $\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}$, če je $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$;

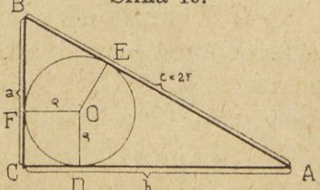
r) $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$, če je $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

§ 9. Razreševanje pravokotnih in enakokrakih trikotnikov iz sestavljenih sestavin.

Pravokotnemu trikotniku očrtani in včrtani krog.

Ostra kota pravokotnega trikotnika sta komplementarna. Ako poznamo enega teh kotov, je znan tudi drugi. Krog, ki je pravokotnemu trikotniku očrtan, ima hipotenuzo za premer, v znakih $2r = c$. Polmer kroga, ki je pravokotnemu trikotniku včrtan, je določen po obrazcu $2p = \varrho\,(a + b + c)$ ali krajše $p = \varrho s$, kjer pomeni p trikotnikovo ploščino in s polovico trikotnikovega obsega. V kakšni medsebojni zvezi sta premera krogov, ki sta pravokotnemu trikotniku včrtana in očrtana, spoznamo iz naslednjega. Ker sta tangenti načrtani iz določene točke na določeni krog enaki in ker je v sliki 19. četverokotnik $CDOF$ kvadrat, najdemo

Slika 19.



$$\left.\begin{array}{l} CD = \varrho \\ \left\{\begin{array}{l} CF = \varrho \\ BF = BE \end{array}\right. \\ AD = AE \end{array}\right\}\ \text{sešteto}$$

$$a + b = 2\varrho + c = 2\varrho + 2r.$$

Ako je eden notranjih kotov enakokrakega trikotnika določen, sta znana tudi ostala notranja kota.

Naloge.

1. V pravokotnem trikotniku je vsota ene katete in hipotenuze $s = 17\,dm$ in drugi kateti nasprotni kot $\beta = 42^0$; kolika je hipotenuza?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Ker je po nalognem pogoju $a + c = s$ in po trigonometrijskih izrekih o pravokotnem trikotniku $a = c \sin \alpha$, najdemo iz navedenih enačb

$$c = \frac{s}{1 + \sin \alpha} = \frac{s}{2 \sin \frac{90^0 + \alpha}{2} \cos \frac{90^0 - \alpha}{2}}.$$

2. Vsota obeh katet pravokotnega trikotnika je $s = 25\,dm$ in večji kateti nasprotni kot $\alpha = 50^0$; kolika je daljša kateta?

Razrešitev. Daljša kateta je a. Iz enačb $a + b = s$ in $b = a \operatorname{tg} \beta$ najdeš

$$a = \frac{s}{1 + \operatorname{tg} \beta} = \frac{s \cos 45^0 \cos \beta}{\sin (45^0 + \beta)}.$$

3. Obseg pravokotnega trikotnika je $2s = 36\,dm$ in eden ostrih kotov $\beta = 33^0$; kolika je hipotenuza?

Razrešitev. Ker je po nalognem pogoju $a + b + c = 2s$ in po trigonometrijskih izrekih o pravokotnem trikotniku $a = c \sin \alpha$ in $b = c \sin \beta$, najdemo (§ 8 nal. 1. j.)

$$c = \frac{2s}{\sin \alpha + \sin \beta + 1} = \frac{s}{2 \sin 45^0 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}.$$

4. V pravokotnem trikotniku je vsota ene katete in hipotenuzi pripadajoče višine $s = 8{\cdot}7\,m$ in drugi kateti nasprotni kot $\alpha = 48^0$; kolika je daljša kateta?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Daljša kateta je a. Po nalognem pogoju je $b + v_c = s$, po trigonometrijskih izrekih o pravokotnem trikotniku pa $b = a \operatorname{tg} \beta$ in $v_c = a \sin \beta$. Iz teh enačb najdemo

$$a = \frac{s \cos \beta}{\sin \beta (1 + \cos \beta)} = \frac{s \operatorname{cotg} \beta}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

5. Kolike so stranice pravokotnega trikotnika, če je $p_\alpha = 1\,m$ razpolovnica kota $\alpha = 38^0\,25'$?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! $b = p_\alpha \cos \frac{\alpha}{2}$,

$$a = b \operatorname{tg} \alpha = p_\alpha \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha,\ c = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{p_\alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

6. V pravokotnem trikotniku je hipotenuzi pripadajoča višina $v_c = 4\,dm$ in razpolovnica pravega kota $p_\gamma = 5\,dm$; koliki so koti in kolike so stranice?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Kot δ, ki ga oklepata razpolovnica in višina, je določen po enačbi $\cos \delta = \frac{v_c}{p_\gamma}$. Ako je $\alpha > \beta$, najdeš $\alpha = 90^0 - (45^0 - \delta) = 45^0 + \delta$, $\beta = 90^0 - (45^0 + \delta) = 45^0 - \delta$, $a = \frac{v_c}{\sin \beta}$, $b = \frac{v_c}{\sin \alpha}$ in $c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{v_c}{\sin \alpha \sin \beta}$.

7. Kolika je hipotenuza pravokotnega trikotnika, če je polmer včrtanega kroga $\varrho = 1\frac{1}{2}\,dm$ in eden ostrih kotov 37^0?

Razrešitev. Središče včrtanega kroga leži v presečišču kotovih somernic. Ako načrtaš iz krogovega središča pravokotnico na hipotenuzo AB (slika 19.) ter spojiš hipotenuzni krajišči s krogovim središčem, stvoriš pravokotna trikotnika AEO in BEO, iz katerih najdeš

$AE = \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ in $BE = \varrho \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$; torej $c = AE + EB =$

$$= \varrho \left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\varrho \sin \frac{\beta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} = \frac{\varrho \sin 45^0}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}.$$

8. Koliki so koti pravokotnega trikotnika, v katerem meri ena kateta $a = 12\,dm$

in projekcija druge katete na hipotenuzo $b_1 = 10\,dm$?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Ker je kateta $a = 12$ srednja geometrijska sorazmernica med njeno projekcijo $a_1 = c - b_1 = c - 10$ in med hipotenuzo c, najdeš iz enačbe $a^2 = (c - 10)\,c$ hipotenuzo $c = 18$. Potem je $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{2}{3}$ in ta enačba določa kota α in β.

9. Koliki so koti in stranice pravokotnega trikotnika, če meri njegova ploščina $30\,dm^2$ in polmer včrtanega kroga $2\,dm$?

Razrešitev. Iz enačb $2p = \varrho\,(a + b + c)$ in $a + b = c + 2\varrho$ najdeš $c = 13$; potem najdeš s pomočjo Pitagorovega izreka $a = 5$ in $b = 12$. Kota α in β določa enačba $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta = \frac{5}{12}$.

10. Koliki so koti pravokotnega trikotnika, pri katerem merita polmera včrtanega in očrtanega kroga po $2\,dm$ in $5\,dm$?

Razrešitev. Iz enačb $a + b = 2r + 2\varrho$ in $a^2 + b^2 = 4r^2$ najdeš $a = 8$ in $b = 6$. Potem je $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$.

11. V enakokrakem trikotniku ($a = b$) znaša vsota iz osnovnice in enega kraka $s = 2\,m$ in kot na osnovnici $\beta = 72^0$; kolik je krak?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Iz enačb $c + b = s$ in $\frac{c}{2} = b \cos \beta$ najdeš

$$b = \frac{s}{2\,(\cos \beta + \frac{1}{2})} = \frac{s}{4 \cos \frac{\beta + 60^0}{2} \cos \frac{\beta - 60^0}{2}}$$

12. V enakokrakem trikotniku je vsota iz kraka in osnovnici pripadajoče višine $s = 3\frac{1}{2}\,m$ in kot na vrhu $\gamma = 63^0$; kolik je krak?

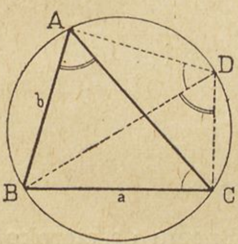
Razrešitev. Po nalognem pogoju je $b + v_c = s$, po trigonometrijskih izrekih o pravokotnem trikotniku pa $v_c = b \cos \frac{\gamma}{2}$. Iz teh enačb najdeš

$$b = \frac{s}{1 + \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{s}{2 \cos^2 \frac{\gamma}{4}}.$$

13. Kolika je osnovnica enakokrakega trikotnika, če je vsota iz osnovnice in njej pripadajoče višine $s = \frac{3}{4} m$ in kot na osnovnici $\beta = 55^0$?

Razrešitev. Po nalognem pogoju je $c + v_c = s$, po trigonometrijskih izrekih o pravokotnem trikotniku pa $v_c = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \beta$. Iz teh enačb najdeš $c = \frac{2s}{2 + \operatorname{tg} \beta} = \frac{2 s \cos \delta \cos \beta}{\sin (\delta + \beta)}$, kjer določa kot δ enačba $2 = \operatorname{tg} \delta$ (§ 8. nal. 1. e).

Slika 20.



14. Kolike so stranice enakokrakega trikotnika, če je polmer očrtanega kroga $r = 3\,dm$ in kot na vrhu $\gamma = 75^0$?

Razrešitev. Ako načrtaš skoz trikotnikovo oglišče B (slika 20.) krogov premer ter spojiš točko D s trikotnikovima ogliščema A in C, stvoriš pravokotna trikotnika BCD in DAB, iz katerih najdeš $c = 2r \sin \gamma$ in $b = 2r \sin \beta$.

Razreši še naslednje naloge:

15. Razreši pravokoten trikotnik ($\gamma = 90^0$) iz naslednjih podatkov:

a) $a + c = 96,\ \alpha = 61^0\,55'$;
b) $a + b = 31{\cdot}84,\ \beta = 32^0\,47'$;
c) $c - b = 255{\cdot}48,\ \alpha = 29^0\,36'\,57''$;
č) $a - b = 161,\ \beta = 26^0\,18'\,33''$;
d) $a + b + c = 234,\ \alpha = 42^0\,4'\,52''$;
e) $a + b - c = 156,\ \beta = 53^0\,16'\,29''$;
f) $a + v_c = 85{\cdot}347,\ \alpha = 55^0\,19'\,26''$;
g) $b - v_c = 6{\cdot}378,\ \alpha = 40^0\,9'\,17''$;

h) $c = 12\ (125)$, $v_c = 4\ (41\cdot185)$;
i) $p_\alpha = 1\cdot85$, $\alpha = 35^0\ 43'\ 28''$;
j) $v_c = 15\ (12)$, $p_\gamma = 17\ (13)$;
k) $p = 125\cdot46$, $\beta = 28^0\ 51'\ 44''$;
l) $p = 840$, $c = 58$;
m) $\varrho = 6$, $\alpha = 30^0\ 30'\ 37''$;
n) $\varrho = 28\ (70)$, $a = 105\ (340)$;
o) $p = 546\ (54)$, $\varrho = 6\ (3)$;
p) $a_1 = 4\ (1)$, $b_1 = 5\ (3)$;
r) $a_1 = 6\cdot5$, $\alpha = 53^0\ 43'\ 34''$;
s) $a = 5$, $b_1 = 7\cdot5$;
š) $r = 12\cdot5$, $\varrho = 3$.

16. Razreši enakokrak trikotnik $(a = b)$ iz naslednjih podatkov:

a) $c + b = 36$, $\beta = 52^0\ 8'\ 43''$;
b) $b - c = 16$, $\gamma = 41^0\ 37'$;
c) $c + 2b = 135$, $\beta = 64^0$;
č) $2b - c = 27$, $\gamma = 75^0$;
d) $c + v_c = 33\cdot8$, $\beta = 72^0$;
e) $c + v_b = 44\cdot5$, $\gamma = 66^0$;
f) $b + v_c = 52\cdot6$, $\gamma = 54^0$;
g) $p = 23\cdot45$, $\gamma = 63^0$;
h) $\varrho = 2\cdot5$, $\beta = 56^0$;
i) $r = 3\cdot6$, $\beta = 54^0$.

17. Polmera krogov, ki sta pravilnemu deseterokotniku včrtana in očrtana, merita skupaj 24·5 *dm*; kolika je stranica pravilnega deseterokotnika?

18. Vsota rombovih diagonal meri 383 *dm* in eden njegovih kotov meri $47^0\ 22'\ 16''$; kolika je *a)* rombova stranica, b*)* rombova ploščina?

19. Kolika je površina pokončnega stožca, če meri *a)* stranica 13 *dm* in njen naklonski kot proti osnovni ploskvi 72^0, *b)* višina 25 *dm* in kot na vrhu osjega preseka 56^0, *c)* polmer 3·8 *dm* in kot med stranico in osnovno ploskvijo $47^0\ 30'$?

§ 10. Razreševanje goniometrijskih enačb.

Goniometrijska enačba. Kako se razrešujejo goniometrijske enačbe.

Določilne enačbe, v katerih se nahajajo kotne funkcije kakor neznanke, se imenujejo goniometrijske enačbe. Take enačbe se razrešujejo po pravilih, ki veljajo za razreševanje določilnih enačb sploh. Ako se nahajajo v goniometrijski enačbi razne funkcije enega in istega kota, je navadno najprimerneje, da izraziš najprej s pomočjo goniometrijskih obrazcev dotične kotne funkcije z eno in isto funkcijo. Ker se vrednosti sinusove funkcije vedno ponavljajo, kadar vzraste kot za 360^0 (stopinjska mera) oziroma za 2π (ločna mera) [glej § 5], pravimo, da je sinusova funkcija periodična funkcija s periodo 360^0 ali 2π, n. pr.

$$\sin 30^0 = \tfrac{1}{2};\ \sin(30^0 + 360^0) = \tfrac{1}{2};\ \sin(30^0 + n.\,360^0) = \tfrac{1}{2}$$

ali splošno

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + n.\,360^0) = \sin(\alpha + n.\,2\pi),$$

kjer pomeni n katerokoli celo število.

Tudi kosinusova funkcija je periodična funkcija s periodo 360^0 ali 2π v znakih:

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + n.\,360^0) = \cos(\alpha + n.\,2\pi).$$

Istotako sta tangentna in kotangentna funkcija periodični funkciji, toda s periodo 180^0 ali π, v znakih:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + n.\,180^0) = \operatorname{tg}(\alpha + n.\,\pi),$$
$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg}(\alpha + n.\,180^0) = \operatorname{cotg}(\alpha + n.\,\pi).$$

(Glej nal. 3. str. 20.)

Kako razrešuješ posamezne goniometrijske enačbe, kažejo nasledhje naloge.

Naloge.

1. $\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Razrešitev. Navedeno enačbo razrešiš, ako postaviš $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ in $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ter potem razstaviš enačbo na faktorja.

$$\frac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin x \cos x = 0,$$
$$\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 2 \cos x\right) = 0;$$

torej je

$$\sin x = 0 \text{ ali pa } \frac{1}{\cos x} - 2 \cos x = 0.$$

Iz teh enačb sledi:

$$\sin x = 0 \qquad\qquad \cos x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$x_1' = 0^0 \pm n.\, 2\pi \qquad\qquad x_2' = 45^0 + n.\, 2\pi$$

$$x_1'' = 180^0 \pm n.\, 2\pi \qquad\qquad x_2'' = 135^0 + n.\, 2\pi.$$

2. $2\,\mathrm{tg}\, x + 3\,\mathrm{cotg}\, x = 5.$

Razrešitev. Ako postaviš $\mathrm{cotg}\, x = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$ in urediš enačbo, najdeš

$$\mathrm{tg}^2 x - \tfrac{5}{2}\,\mathrm{tg}\, x = -\tfrac{3}{2}$$

$$\mathrm{tg}\, x = \tfrac{3}{2},\ 1$$

$$x_1 = 56^0\, 18'\, 36'' + n.\, 180^0;\ x_2 = 45^0 + n.\, 180^0.$$

3. $2 \sin x + 3 \cos x = 3.$

Razrešitev. Ako postaviš $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, potem urediš in razstaviš enačbo na faktorja, najdeš

$$\sin x.\, (13 \sin x - 12) = 0;$$

torej je

$$\sin x = 0 \text{ ali pa } \sin x = \tfrac{12}{13}$$

$$x_1 = 0^0,\ x_1' = 0^0 + n.\, 360^0.\ x_1'' = 180^0 + n.\, 360^0,$$

$$x_2 = 67^0\, 22'\, 50'' + n.\, 360^0.$$

4. $\mathrm{cotg}\, x - \cos x = 1 - \sin x.$

Razrešitev. Ako postaviš $\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ter razstaviš enačbo na faktorja, najdeš

$$(1 - \sin x)\left(\frac{\cos x}{\sin x} - 1\right) = 0;$$

torej je

$$1 - \sin x = 0 \qquad \text{ali pa } \mathrm{cotg}\, x - 1 = 0;$$

$$x_1 = 90^0 + n.\, 360^0 \qquad\qquad x_2 = 45^0 + n.\, 180^0.$$

5. $(\cos x - \sin x)^2 = \sin 2x.$

Razrešitev. Ako zvršiš kvadrovanje ter porabiš goniometrijska obrazca $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ in $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, najdeš $\sin 2x = \frac{1}{2}$ in $x = 15^0 + n.\, 180^0$.

6. $\sin(\alpha - x) = \cos(\beta + x).$

Razrešitev. Ako porabiš goniometrijska obrazca za $\sin(\alpha - \beta)$ in $\cos(\alpha + \beta)$ ter deliš potem oba enačbna dela s $\cos x$, najdeš

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\cos\beta - \sin\alpha}{\sin\beta - \cos\alpha}.$$

7. $11 \sin^2 x - 32 \sin x \cos x + 10 \cos^2 x = -5.$

Razrešitev. Ako pišeš mesto $-5 = -5 \cdot 1 = -5 (\sin^2 x + \cos^2 x)$ ter deliš vse enačbne dele s $\cos^2 x$, najdeš

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = -\tfrac{15}{16}$$
$$\operatorname{tg} x = \tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{4}.$$
$$x_1 = 51^0\, 20'\, 25'' + n\pi,$$
$$x_2 = 36^0\, 52'\, 12'' + n\pi.$$

8. $x + y = \alpha$, $\cos x + \cos y = m.$

Razrešitev. Ako porabiš pri drugi navedeni enačbi goniometrijski obrazec za seštevanje dveh kosinusov, najdeš z ozirom na prvo enačbo

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{m}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Iz vrednosti za $x + y$ in $x - y$ najdeš neznanki x in y.

9. $\sin x + \sin y = a$, $\cos x + \cos y = b.$

Razrešitev. Ako porabiš goniometrijska obrazca za seštevanje sinusov in kosinusov ter deliš prvo enačbo z drugo, najdeš

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{a}{b}.$$

Potem je iz prve enačbe

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2 \sin \frac{x+y}{2}}.$$

Iz navedenega najdeš vrednosti za $\frac{x+y}{2}$ in $\frac{x-y}{2}$.

10. $x + y = 45^0$, $2 \operatorname{tg} x = 3 \operatorname{tg} y.$

Razrešitev. Ako porabiš goniometrijski obrazec za $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, najdeš po zamenjalnem načinu $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ in $\operatorname{tg} y = \frac{1}{3}$.

11. $x + y = 120^0$, $\sin x \sin y = \frac{1}{2}.$

Razrešitev. Ako porabiš goniometrijska obrazca za $\cos(\alpha + \beta)$ in za kosinus suplementarnega kota ter seštejeƨ enačbi, najdeš

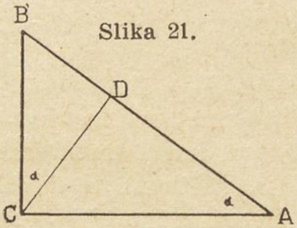
$$\cos x \cos y = 0;$$

torej je

$$\cos x = 0 \text{ ali pa } \cos y = 0,$$
$$x = 90^0, 30^0; \quad y = 30^0, 90^0.$$

12. Kolika sta ostra kota pravokotnega trikotnika, ki ga razdeli hipotenuzi pripadajoča višina v razmerju 1:2?

Razrešitev. Trikotnika BDC in ADC (slika 21.) imata isto višino in sta si kakor njuni osnovnici BD in DA, po nalognem pogoju pa kakor 1:2; torej je $BD:DA = 1:2$. Ako izraziš BD in DA po izrekih o pravokotnem trikotniku z višino CD in ako postaviš te vrednosti v zgoraj navedeno sorazmerje, najdeš $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ in $\alpha = 35^0\, 15'\, 52''$.



Slika 21.

13. V enakokrakem trikotniku je vsota iz osnovnice in višine dvakrat tolika kakor krak; koliki so koti?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Po nalognem pogoju je $c + v_c = 2b$. Ako zamenjaš $c = 2b \cos \beta$ in $v_c = b \sin \beta$, stvoriš goniometrijsko enačbo $2 \cos \beta + \sin \beta = 2$, iz katere najdeš $\sin \beta = \frac{4}{5}$. Da določiš kot β kolikor mogoče natanko, izračunaš tangento kota β. Tako najdeš $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$ in $\beta = 53^0\, 7'\, 48''$.

Razreši še naslednje goniometrijske enačbe:

14. $2 \sin x = \operatorname{tg} x$.
15. $\cos x = \operatorname{tg} x$.
16. $\sin x = \cos^2 x$.
17. $\cos x = \sin 2x$.
18. $\sin 2x = 3 \sin^2 x$.
19. $5 \sin 2x = 3 \operatorname{tg} x$.
20. $2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{cotg} x = 5$.
21. $5 \operatorname{tg} x + 7 \operatorname{cotg} x = 12$.
22. $\operatorname{cosec} x - 12 \operatorname{cotg} x = 5$.
23. $4 \sec^2 x + 7 \operatorname{tg}^2 x = 15$.
24. $\sin x + \cos x = 1$.
25. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 4 \sin 2x$.
26. $\sin x + \operatorname{tg} x = 1 + \cos x$.
27. $\sin x + \cos 2x = 1$.
28. $\operatorname{tg} 2x + \cos^2 x = \sin^2 x$.

29. $5 \sin x + 12 \cos x = 13$.
30. $\sin (\varphi - x) = \cos (\varphi - x)$.
31. $9 \cos (34^0 + x) = 14 \cos (61^0 - x)$.
32. $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 1$.
33. $\sin^2 x - 6 \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$.

34. $x + y = 120^0$
$\sin x + \sin y = 1\frac{1}{2}$.

35. $x - y = 60^0$
$\cos x - \cos y = \frac{1}{2}$.

36. $x + y = 30^0$
$\sin x : \sin y = 2$.

37. $x + y = 135^0$
$\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = 1\frac{1}{2}$.

38. $\sin x + \sin y = 1$
$\cos x + \cos y = \sqrt{2}$.

39. $x + y = 45^0$
$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{1}{2}$.

40. $\sin x = a \sin y$
$\operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y$.

41. $x - y = 12^0$
$\cos x \cos y = 0{\cdot}0458$.

42. Razdeli pravi kot na dva dela tako, da je razlika njunih sinusov $= \frac{1}{3}$.

43. Kolika sta ostra kota pravokotnega trikotnika, v katerem je ena kateta *a)* aritmetična, *b)* geometrijska sorazmernica med drugo kateto in hipotenuzo?

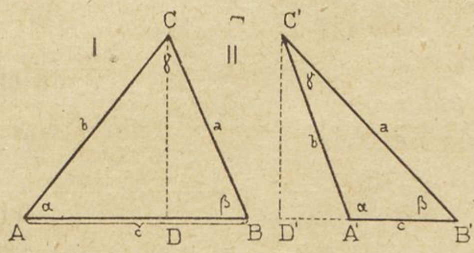
§ 11. Trigonometrijski izreki o poševnokotnem trikotniku.

1. V vsakem trikotniku so si stranice kakor sinusi nasprotnih kotov, v znakih $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$.

Izrek o sinusih trikotnikovih kotov.

Dokaz. Ako načrtaš v ostrokotnem trikotniku ABC (slika 22. I.) višino CD, stvoriš pravokotna trikotnika ADC in BDC, iz katerih najdeš $CD = a \sin \beta = b \sin \alpha$. Iz te enačbe sledi $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$. — Na isti način najdeš tudi $b : c = \sin \beta : \sin \gamma$ in $c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$. Iz navedenih sorazmerij sledi zaporedno sorazmerje $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$.

Slika 22.



Da velja izrek o sinusih tudi pri topokotnem trikotniku (slika 22. II.), se prepričaš tako-le: Iz pravokotnih trikotnikov $D'A'C'$ in $D'B'C'$, katera stvori višina $C'D'$, najdeš $C'D' = b \sin(180^0 - \alpha) = b \sin\alpha = a \sin\beta$; torej $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$, i. t. d.

Izrek o kosinusih trikotnikovih kotov.

2. V vsakem trikotniku najdeš kvadrat ene stranice, ako odšteješ od vsote kvadratov ostalih dveh stranic dvojni produkt teh stranic, pomnožen s kosinusom kota, katerega oklepata te stranici, v znakih $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$.

Dokaz. Ako načrtaš v ostrokotnem trikotniku ABC (slika 22. I.) višino CD, je po Pitagorovem izreku $a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$ in po trigonometrijskih izrekih o pravokotnem trikotniku $CD = b \sin\alpha$ in $DB = c - AD = c - b\cos\alpha$. Če postaviš zadnji vrednosti v prvo enačbo, najdeš

$$a^2 = (b \sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2,$$
$$a^2 = b^2 \sin^2\alpha + c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Da velja izrek o kosinusih tudi pri topokotnem trikotniku (slika 22. II.), se prepričaš tako-le. Ako postaviš v enačbo $a^2 = \overline{C'D'}^2 + \overline{D'B'}^2$ vrednosti $C'D' = b\sin(180^0 - \alpha) = b\sin\alpha$ in $D'B' = A'B' + D'A' = c + b\cos(180^0 - \alpha) = c - b\cos\alpha$, najdeš $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Izreki o polovicah trikotnikovih kotov.

Iz izreka o kosinusih se dado izvesti izreki o polovicah trikotnikovih kotov, in sicer tako-le. Iz obrazca $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ je

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Ako prišteješ obema deloma te enačbe 1, najdeš

$$\cos\alpha + 1 = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc},$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}.$$

Če zaznamuješ trikotnikov obseg $a + b + c = 2s$, je $b + c - a = 2(s - a)$, in zadnji obrazec se potem izpremeni v

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Ako pa odšteješ od enačbe $1 = 1$ vrednost $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, najdeš

$$1 - \cos\alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc},$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}.$$

Če zaznamuješ trikotnikov obseg $a + b + c = 2s$, je $a + b - c = 2(s - c)$ in $a - b + c = 2(s - b)$, in zadnji obrazec se potem izpremeni v

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Ako deliš vrednost za $\sin\frac{\alpha}{2}$ z vrednostjo za $\cos\frac{\alpha}{2}$, najdeš

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Na isti način najdeš tudi obrazce o polovicah trikotnikovih kotov β in γ.

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}. \qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

3. V vsakem trikotniku sta si vsota in razlika dveh stranic kakor tangenti razpolovljene vsote in razlike nasprotnih kotov, v znakih $(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$. Izrek o tangentah trikotnikovih kotov.

Dokaz. Po izreku o sinusih je

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Ako prišteješ, oziroma odšteješ obema deloma te enačbe 1, najdeš

$$\left.\begin{aligned}\frac{a+b}{b} &= \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta}\\ \frac{a-b}{b} &= \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\beta}\end{aligned}\right\} \text{deljeno}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

torej

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Mollweidejevi enačbi.

4. V vsakem trikotniku je vsota (razlika) dveh stranic, pomnožena s sinusom (kosinusom) razpolovljenega kota, katerega oklepata te stranici, enaka tretji stranici, pomnoženi s kosinusom (sinusom) razpolovljene razlike kotov, ki sta tej stranici priležna, v znakih $(a+b)\sin\frac{\gamma}{2} = c.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ in $(a-b)\cos\frac{\gamma}{2} = c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Dokaz. Po izreku o sinusih je

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} \text{ in } b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Ako sešteješ te enačbi, najdeš

$$a+b = \frac{c(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\gamma} = \frac{2c\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$a+b = \frac{c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ ali } (a+b)\sin\frac{\gamma}{2} = c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Če pa odšteješ od prve zgoraj navedene enačbe drugo, najdeš

$$a - b = \frac{c\,(\sin\alpha - \sin\beta)}{\sin\gamma} = \frac{2c\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$a - b = \frac{c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad \text{ali} \quad (a-b)\cos\frac{\gamma}{2} = c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

5. Trikotnikovo ploščino najdeš, ako pomnožiš polovico produkta dveh stranic s sinusom kota, katerega oklepata te stranici, v znakih $p = \frac{bc}{2}\sin\alpha$. Izrek o trikotnikovi ploščini.

Dokaz. Ploščina trikotnika ABC (slika 22. I.) je po planimetrijskem izreku $p = \frac{c}{2}\cdot CD$. Ker je $CD = b\sin\alpha$, se izpremeni navedeni obrazec za ploščino v $p = \frac{bc}{2}\sin\alpha$. — Pri topokotnem trikotniku $A'B'C'$ (slika 22. II.) je $p = \frac{c}{2}\cdot C'D'$ in $C'D' = b\sin(180^0 - \alpha) = b\sin\alpha$; torej $p = \frac{bc}{2}\sin\alpha$.

§ 12. Razreševanje poševnokotnih trikotnikov.

Poševnokotni trikotnik razrešiš, ako izračunaš iz določenih podatkov njegove neznane kote in stranice. Kako to izvršiš v posameznih slučajih, kažejo naslednje naloge.

1. Razreši trikotnik, v katerem je stranica $c = 78{\cdot}2\ cm$ in kota $\alpha = 102^0 5' 40''$ in $\beta = 18^0 19' 20''$ (I. izrek o skladnosti)!

Razrešitev. Tretji kot je $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Stranici a in b najdeš po izreku o sinusih: $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$ in $b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$. Pri izvrševanju teh računov se je ozirati na goniometrijsko odvisnost $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$.

2. Razreši trikotnik, v katerem sta stranici $a = 48\ cm$ in $b = 55\ cm$ in kot $\gamma = 73^0 12' 15''$ (II. izrek o skladnosti)!

Razrešitev. Po izreku o vsoti trikotnikovih kotov je $\frac{\beta+\alpha}{2} = \frac{180^0 - \gamma}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$. Po izreku o tangentah je $\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{(b-a)\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2}}{b+a}$. Ako seštevaš, oziroma odštevaš vrednosti za $\frac{\beta+\alpha}{2}$ in $\frac{\beta-\alpha}{2}$, najdeš kota β in α. Potem je po izreku o sinusih $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Izračunaj stranico c tudi po kosinusovem izreku!

3. Razreši trikotnik, v katerem sta stranici $a = 136{\cdot}5\ m$ in $b = 176{\cdot}31\ m$ in kot $\beta = 74^0 15'$ (III. izrek o skladnosti)!

Razrešitev. Kot α najdeš po izreku o sinusih: $\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b}$. Tretji kot je $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Tretjo stranico določiš po izreku o sinusih: $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

4. Razreši trikotnik, v katerem so stranice $a = 61\ dm$, $b = 106\ dm$ in $c = 151\ dm$ (IV. izrek o skladnosti)!

Razrešitev. Dva kota določiš po izreku o kosinusih, če so merska števila stranic eno- ali dvoštevilčna števila, ki se dado ročno kvadrovati: $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Tretji kot je potem $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Če so pa merska števila stranic večštevilčna, izračunaš dva kota s pomočjo izrekov o polovicah trikotnikovih kotov. Po tretjem teh izrekov najdeš najnatančnejše zneske.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\ \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

5. Razreši trikotnik s stranicama $a = 12\ dm$ in $b = 17\ dm$ in kotom $\alpha = 43^0 35'$!

Razrešitev. Po izreku o sinusih najdeš $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$; tej vrednosti pripadata dva suplementarna kota (en ostri in en topi kot). Tretji kot je $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Stranico c določiš potem po izreku o sinusih: $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Navedena naloga ima vobče dvojno razrešitev, ker najdeš za kota β in γ in za stranico c po dve vrednosti. Kdaj ni razrešljiva, kdaj ima samo eno razrešitev?

6. Razreši trikotnik, v katerem meri stranica $a = 468$ *cm*, razlika ostalih stranic $b - c = 196$ *cm* in prvi stranici nasproten kot $\alpha = 80^0\,43'$!

Razrešitev. S pomočjo druge Mollweidejeve enačbe najdeš

$$\sin\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{(b-c)\cos\frac{\alpha}{2}}{a}.$$

Ako potem seštevaš, oziroma odštevaš vrednosti za $\frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ in $\frac{\beta-\gamma}{2}$, določiš β in γ. Stranico b najdeš po izreku o sinusih: $b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Končno je stranica $c = b - 196$.

7. Razreši trikotnik, v katerem meri vsota dveh stranic $a + b = 171$ *dm* in dva kota $\beta = 53^0\,17'$ in $\gamma = 67^0\,28'$!

Razrešitev. Tretji kot je $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$. Ako razrešiš enačbi $a + b = 171$ in $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$, določiš stranici a in b, in sicer je

$$a = \frac{171\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{171\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \text{ in } b = 171 - a.$$

Tretjo stranico najdeš po izreku o sinusih: $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

8. Izračunaj iz trikotnikove ploščine $p = 5{\cdot}4$ dm^2 in dveh notranjih kotov $\alpha = 48^0$ in $\beta = 66^0$ stranice!

Razrešitev. Ako razrešiš enačbi $p = \frac{ab}{2}\sin\gamma$ in $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$, najdeš $a = \sqrt{\frac{2p\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$ in $b = \sqrt{\frac{2p\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}}$. Tretjo stranico določiš po izreku o sinusih: $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

9. Razreši trikotnik, čigar ploščina je $p = 486$ cm^2, višina $v_a = 27$ *cm* in kot $\beta = 46^0\,53'\,28''$!

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Ker je $p = \frac{1}{2} av_a$, najdeš stranico $a = 2p : v_a$. Iz pravokotnega trikotnika, v katerem se nahaja v_a in β, določiš stranico $c = v_a : \sin \beta$. Potem najdeš kakor pri nalogi pod 2. ostala trikotnikova kota in tretjo stranico.

10. Razreši trikotnik, v katerem je stranica $b = 25\ dm$, višina $v_a = 6{\cdot}22\ dm$ in kot $\beta = 16^0 40' 55''$!

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Iz pravokotnega trikotnika, v katerem se nahajata v_a in β, najdeš $c = v_a : \sin \beta$. Potem poznaš v trikotniku, ki ga je treba razrešiti, dve stranici in enega izmed nasprotnih kotov. Primerjaj nalogi pod 3. in 5.!

11. Razreši trikotnik, v katerem je stranica $a = 12\ dm$ in višini $v_a = 10{\cdot}5\ dm$ in $v_b = 7\ dm$!

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Ker so v vsakem trikotniku produkti iz stranic in pripadajočih višin med seboj enaki, najdeš iz enačbe $av_a = bv_b$ stranico $b = av_a : v_b$. Iz pravokotnega trikotnika, v katerem se nahajata v_b in a, določiš kot γ, in sicer je $\sin \gamma = v_b : a$. Potem poznaš v trikotniku, ki ga je treba razrešiti, dve stranici in kot, ki ga oklepata te stranici. Primerjaj nalogo pod 2.!

12. Kolike so stranice trikotnika, ki ima kota $\alpha = 45^0$ in $\beta = 75^0$ in ki je krogu s polmerom $r = 3{\cdot}6\ m$ včrtan?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Ako načrtaš iz vrha kota α, oziroma kota β, krogov premer ter spojiš drugo premerovo krajišče z ostalima trikotnikovima ogliščema, stvoriš pravokotne trikotnike, iz katerih najdeš $a = 2r \sin \alpha$, $b = 2r \sin \beta$ in $c = 2r \sin \gamma$.

13. Krogu s polmerom $\varrho = 2{\cdot}5\ dm$ je očrtan trikotnik, ki sta mu kota $\alpha = 50^0$ in $\beta = 70^0$; kolike so trikotnikove stranice?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Ako načrtaš kotoma α in β somernici ter narišeš iz njunega presečišča pravokotnico na stranico c, stvoriš pravokotna trikotnika, iz katerih se dasta dela stranice c določiti. Potem je

$$c = \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \varrho \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho \sin \frac{\beta+\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\varrho \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Na isti način najdeš tudi stranici a in b.

14. Trikotnikov obseg je $2s = 65\ dm$ in dva kota sta $\alpha = 52^0$ in $\beta = 77^0$; kolike so stranice?

Razrešitev. Iz enačb $a + b + c = 2s$, $a:b = \sin\alpha : \sin\beta$ in $a:c = \sin\alpha : \sin\gamma$ najdeš

$$a = \frac{2s\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{2s\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{2s\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

$$= \frac{s\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{s\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{s\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Stranici b in c sta potem $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ in $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

15. Stranice poševnokotnega trikotnika so v razmerju 2:4:5 in razpolovnica $p_\gamma = 1\ dm$; koliki so koti in kolike stranice?

Razrešitev. Iz enačb $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 2:4:5$ in $\sin(\alpha+\beta) = \sin(180^0 - \gamma) = \sin\gamma$ najdeš $\sin\alpha = \frac{1}{40}\sqrt{231}$, $\sin\beta = \frac{1}{20}\sqrt{231}$ in $\sin\gamma = \frac{1}{16}\sqrt{231}$. Stranice izračunaš po izreku o sinusih s pomočjo razpolovnice p_γ.

$$a = \frac{p_\gamma \sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\beta},\ b = \frac{p_\gamma \sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\alpha},\ c = \frac{p_\gamma \sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Razreši še naslednje naloge:

Razreši poševnokoten trikotnik iz naslednjih podatkov:

16. $a = 572,\ \alpha = 56^0 23',\ \beta = 44^0 16' 48''.$
17. $b = 6{\cdot}95,\ \alpha = 72^0 27' 45'',\ \gamma = 17^0 12' 6''.$
18. $b = 266{\cdot}08,\ c = 314{\cdot}56,\ \alpha = 57^0 44' 40''.$
19. $b = 8,\ c = 12,\ \alpha = 140^0.$
20. $a = 533,\ b = 317,\ \alpha = 103^0 41' 8''.$
21. $a = 18,\ b = 12,\ \alpha = 47^0 20'.$
22. $a = 12,\ b = 17,\ \alpha = 33^0.$
23. $a = 10,\ b = 13,\ c = 7.$
24. $a = 12{\cdot}34,\ b = 23{\cdot}45,\ c = 31{\cdot}56.$
25. $a + b = 338,\ c = 312,\ \gamma = 131^0 24' 44''.$
26. $a - b = 22,\ c = 28,\ \alpha - \beta = 13^0 45' 18''.$
27. $a + b = 650,\ \alpha = 60^0 30' 46'',\ \beta = 21^0 34' 7''.$
28. $a - b = 23.\ \alpha = 43^0 36' 10'',\ \beta = 22^0 37' 12''.$
29. $b + c = 14{\cdot}8,\ \alpha = 57^0 30',\ \beta = 48^0 25'.$
30. $b - c = 6{\cdot}4,\ \alpha = 72^0 15',\ \beta = 63^0 44'.$
31. $p = 564,\ \alpha = 56^0 19' 33'',\ \beta = 58^0 22' 18''.$
32. $p = 330,\ a = 52,\ \gamma = 36^0 52' 12''.$
33. $p = 28620,\ a = 318,\ b = 181.$
34. $p = 744,\ a : b = 65 : 34,\ \gamma = 137^0 40' 39''.$
35. $p = 1170,\ c = 53,\ v_a = 45.$
36. $p = 150,\ v_b = 12,\ \alpha = 38^0 15'.$
37. $r = 92{\cdot}5,\ \alpha = 71^0 4' 31'',\ \beta = 55^0 47' 46''.$
38. $r = 4{\cdot}325,\ a = 8{\cdot}16,\ b = 2{\cdot}87.$
39. $\varrho = 13{\cdot}4,\ \beta = 34^0,\ \gamma = 68^0.$
40. $a = 10{\cdot}66,\ \varrho = 2{\cdot}31,\ \beta = 35^0 18' 10''.$
41. $v_a = 4{\cdot}8,\ \alpha = 36^0 20' 25'',\ \beta = 24^0 46' 19''.$
42. $v_b = 3,\ a = 9{\cdot}25,\ b = 7{\cdot}5.$
43. $v_c = 14,\ a = 22{\cdot}2,\ b = 14{\cdot}9.$
44. $v_a = 17,\ c = 20,\ \gamma = 49^0 59' 49''.$
45. $v_a = 3{\cdot}758,\ v_b = 9{\cdot}634,\ \gamma = 60^0 55' 12''.$
46. $v_a = 17{\cdot}59,\ v_b = 15{\cdot}739,\ c = 29{\cdot}904.$
47. $v_a = 1{\cdot}68,\ a + c = 9{\cdot}77,\ \beta = 21^0 34' 7''.$
48. $v_a = 12,\ p_\alpha = 15,\ c = 28.$
49. $v_a = 1,\ p_\alpha = \sqrt{2},\ \alpha = 30^0.$
50. $p_\alpha = 17{\cdot}609,\ \alpha = 66^0 24',\ \beta = 74^0 58'.$
51. $a = 25,\ c = 17,\ s_a = 20.$
52. $a = 336,\ b = 190,\ s_c = 193.$

Izračunaj najprej tretjo stranico s pomočjo izreka o kosinusih.

53. $a = 485$, $s_c = 420$, $\gamma = 21^0 31'$.

Ako podaljšaš srednjico s_c za njeno dolžino ter spojiš krajišče tega podaljška s krajiščem stranice a, stvoriš trikotnik, v katerem je en kot suplementaren kotu γ.

54. $a + b - c = 46{\cdot}8$, $\beta = 72^0 30'$, $\gamma = 56^0 45'$.

55. $a:b:c = \sqrt{2} : \sqrt{3} : 2$, $s_a = 9$.

§ 13. Uporabne naloge.

1. Kolika je ploščina paralelograma, v katerem oklepata *a)* stranici a in b kot α, *b)* diagonali d_1 in d_2 kot φ?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! *a)* Če je a osnovnica, je višina $v = b \sin \alpha$ in ploščina $p = ab \sin \alpha$.

b) Diagonali razdelita paralelogram na 4 ploščinsko enake trikotnike (po dva priležna trikotnika imata enaki osnovnici in enaki višini). $p = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$.

2. V trapezu sta vzporednici a in c in kota na daljši vzporednici α in β; kolika sta kraka?

Razrešitev Napravi primerno sliko! Trapez je sestavljen iz paralelograma in trikotnika, katerega osnovnica je enaka razliki trapezovih vzporednic in katerega ostali stranici sta enaki trapezovima krakoma. Iz trikotnika najdeš trapezova kraka $b = \frac{(a - c) \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ in $d = \frac{(a - c) \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

3. Stranice tetivnega četverokotnika so a, b, c in d; koliki so koti?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Po dva nasprotna kota sta suplementarna. Vsaka diagonala razdeli četverokotnik na dva trikotnika. Ako izenačiš izraza, ki ju najdeš za diagonalo po izreku o kosinusih, stvoriš enačbo $a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 +$

$+ 2cd \cos\beta$; stranici a in b oklepata kot β. Iz te enačbe je $\cos\beta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd}$. Ker ta obrazec ni primeren za računanje z logaritmi, najdeš na isti način, kakor smo našli v § 11. obrazce za polovice trikotnikovih kotov, naslednje izraze:

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{ab+cd}},\ \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab+cd}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}},$$

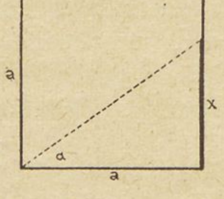
kjer pomeni s polovico četverokotnikovega obsega.

4. Kolike so stranice četverokotnika, ki je krogu s polmerom ϱ očrtan, ako so njegovi koti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Krogovo središče leži v presečišču kotovih somernic. Ako narišeš iz krogovega središča pravokotnico na stranico a ter spojiš krajišči te stranice s krogovim središčem, stvoriš pravokotna trikotnika, iz katerih se dasta dela stranice a določiti. Potem je

$$a = \varrho \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \varrho \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \frac{\rho \sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Slika 23.



5. Kolika kota tvori ravnina, ki gre skoz kockin rob in razdeli kocko v razmerju 2:1, s kocknima ploskvama, ki gresta skoz isti rob?

Razrešitev. Presečna ravnina razdeli kocko na tristranično in četverostranično prizmo, ki imata enaki višini. Te prizmi sta si kakor njuni osnovni ploskvi. Slika 23. predočuje osnovni ploskvi obeh prizem. Kota, ki ju tvori presečna ploskev s sosednjima kocknima ploskvama, sta komplementarna. Iz enačb $x = a \operatorname{tg} \alpha$ in $\frac{a+a-x}{2}. a : \frac{ax}{2} = 2:1$ najdeš manjšega teh kotov. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.

6. Koliko so obstranske ploskve naklonjene proti osnovni ploskvi pri pravilni peterostranični piramidi, če je osnovni rob a in obstranski rob s?

Razrešitev. Napravi primerno sliko (peti del dotične piramide)! Naklonski kot med obstransko in osnovno ploskvijo je tisti kot, ki ga tvori obstranska višina s svojo projekcijo (razdalja med središčem osnovne ploskve in osnovnim robom).

$$\cos\beta = \frac{a \operatorname{cotg} 36^0}{\sqrt{4s^2 - a^2}}.$$

7. Polmer poševnega valja je r, os a in naklonski kot med osjo in osnovno ploskvijo α; kolika je ploščina značilnega paralelograma?

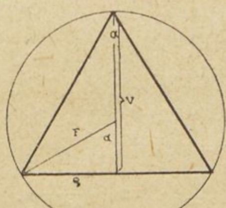
Razrešitev. Napravi primerno sliko! Valjeva višina je $v = a \sin\alpha$. Ploščina značilnega paralelograma je $p = 2\, ra \sin\alpha$.

8. Pokončen prisekani stožec ima prostornino k in polmera R in r; kolika je stranica?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Iz enačb $k = \frac{\pi v}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$ in $v = (R - r)\operatorname{tg}\alpha$ najdeš naklonski kot stranice proti spodnji osnovni ploskvi, in sicer je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3k}{\pi(R^3 - r^3)}$. Potem je stranica $s = \frac{R - r}{\cos\alpha}$.

9. Krogli s prostornino k je včrtan pokončen stožec, čigar osji presek ima ob vrhu kot α; kolika je stožčeva prostornina?

Slika 24.



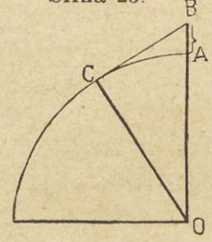
Razrešitev. S pomočjo slike 24., ki kaže presek skoz krogelno središče in stožčev vrh, najdeš $\varrho = r \sin\alpha$ in $v = r + r\cos\alpha = r(1 + \cos\alpha) = 2r\cos^2\frac{\alpha}{2}$; torej je stožčeva prostornina $k_1 = \frac{2}{3} r^3 \pi (\sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2})^2$, ali z ozirom na nalogni pogoj $k = \frac{4}{3} r^3 \pi$ je $k_1 = \frac{1}{2} k \sin^2\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$.

10. Prostornina krogelnega izseka je enaka četrtini pripadajoče krogle; kolik je kot α ob vrhu osjega preseka?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Iz nalognega pogoja $\frac{2}{3} r^2 \pi v = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi$ najdeš $2v = r$. Iz pravokotnega trikotnika, v katerem je kateti $r - v$ priležen kot $\frac{\alpha}{2}$, določiš $r - v = r \cos \frac{\alpha}{2}$. Iz navedenih enačb najdeš $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ in $\alpha = 120^0$.

11. Kolik poldnevnikov lok pregledaš iz višine v nad zemeljskim površjem?

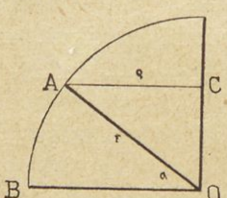
Slika 25.



Razrešitev. Iz točke B nad zemeljskim površjem (slika 25.) pregledaš lok AC. Temu loku pripadajoči središčni kot α najdeš iz enačbe $r = (r + v) \cos \alpha$. Dolgost loka AC določiš potem iz sorazmerja $\widehat{AC} : \pi r = \alpha : 180^0$.

12. Kraj A na zemeljskem površju ima zemljepisno širino α; kolika je ločna stopinja kroga vzporednika, ki gre skoz kraj A?

Slika 26.



Razrešitev. Zemljepisna širina se določuje na krogu poldnevniku. Pri navedeni nalogi je zemljepisna širina kraja A lok BA, oziroma temu loku pripadajoči središčni kot α (slika 26.). Polmer kroga vzporednika, ki gre skoz A, je $\varrho = r \cos \alpha$. Dolgost ločne stopinje na tem vzporedniku je $\frac{\pi \varrho}{180} = \frac{\pi r \cos \alpha}{180}$.

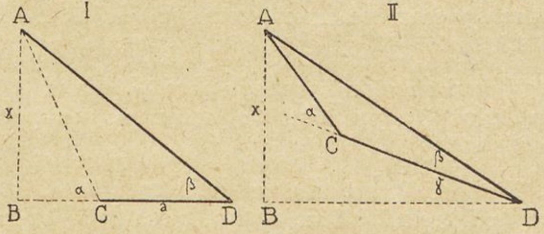
13. Določi višino točke A nad točko B (n. pr. višino gore)!

Razrešitev. *a)* Poišči in izmeri daljico $CD = a$, ki leži z višino $BA = x$ v isti navpični ravnini in s točko B v isti vodoravni ravnini, ter določi kota α in β v krajiščih daljice CD (slika 27. I.). Iz trikotnika

CDA najdeš $AC = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$, iz trikotnika ABC pa $x =$
$= AC \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

b) Poišči in izmeri daljico $CD = a$, ki leži z višino $BA = x$ v isti navpični ravnini in ki tvori z vodoravno ravnino naklonski kot γ, ter določi kota α in β v krajiščih daljice CD (slika 27. II.). Iz trikotnika CDA najdeš $AD = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$, iz trikotnika ABD pa $x = AD \sin(\beta + \gamma) = \frac{a \sin \alpha \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha - \beta)}$.

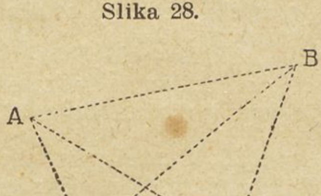
Slika 27.



14. D o l o č i r a z d a l j o d v e h t o č k A in B n a p o l j u!

R a z r e š i t e v. Poišči dve točki C in D, ki ležita s točkama A in B v isti ravnini, ter izmeri daljico $CD = a$ in kote $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (slika 28.). Iz trikotnika CDA najdeš $AC = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$ in $AD = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}$, iz trikotnika CDB pa $BC = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}$ in $BD = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}$. Potem določiš razdaljo AB ali iz trikotnika ACB, ali pa iz trikotnika ADB.

Slika 28.



Razrešitev navedene naloge se dosti skrajša, če moreš n. pr. v trikotniku ACB daljici AC in CB, ali pa daljico CB in kot CBA neposredno izmeriti.

Razreši še naslednje naloge:

15. V krogu s polmerom 13 *dm* meri tetiva 24 *dm*; kolik je *a)* pripadajoči lok, *b)* pripadajoči odsek?

16. Kolik kot tvorita *a)* zunanji, *b)* notranji tangenti dveh krogov, katerih polmera merita 17 *cm* in 10 *cm*, središčnica pa 30 *cm*?

17. Kolike kote tvorita diagonali pravokotnika, čigar stranice merijo 19·5 *dm* in 10·4 *dm*?

18. Koliki so koti romba, čigar diagonali sta v razmerju 2 : 3?

19. V romboidu meri ena stranica 3·71 *dm*, eden priležnih kotov $135^0\,6'\,32''$ in diagonala, ki leži temu kotu nasproti, meri 5·6 *dm*; kolika je *a)* druga stranica, *b)* druga diagonala?

20. Koliki so koti in koliki sta diagonali enakokrakega trapeza, v katerem merita vzporednici 25 *cm* in 10 *cm*, krak pa 13 *cm*?

21. V enakokrakem trapezu merita vzporednici 24 *dm* in 15 *dm*, ploščina pa 65 dm^2; koliki so koti in kolika sta kraka?

22. Trapezovi vzporednici merita 368 *m* in 300 *m*, kraka pa 285 *m* in 293 *m*; *a)* koliki so koti, *b)* koliki sta diagonali?

23. Trapezovi vzporednici merita 80·4 *dm* in 36·8 *dm* in kota, ki sta daljši vzporednici priležna, pa $48^0\,36'$ in 45^0; kolika sta kraka?

24. V deltoidu meri ena stranica 25 *dm* in dva nasprotna (priležna) kota $76^0\,14'$ in $122^0\,16'$; kolika sta *a)* ostala kota, *b)* ostale stranice, *c)* diagonali?

25. Razreši četverokotnik, ki je krogu s polmerom 10 *dm* včrtan in v katerem meri ena stranica 16·345 *dm* in njej priležna kota $72^0\,14'\,26''$ in $103^0\,44'\,33''$.

26. Razreši četverokotnik, ki je krogu s polmerom 24 *dm* očrtan in v katerem merita dve sosednji stranici 89·6 *dm* in 42 *dm* in kot, ki ga oklepata te stranici, meri $73^0\,54'\,28''$.

27. Kolik je naklonski kot daljice 13 *dm* proti projekcijski ravnini, če meri projekcija 9 *dm*?

28. Tristranična prizma ima 122·07 cm^3 prostornine; osnovna ploskev ji je enakostraničen trikotnik s stranico 5 *cm* in obstranski robi merijo po 12 *cm*. Za koliko so obstranski robi naklonjeni proti osnovni ploskvi?

29. Za koliko so obstranske ploskve četverostranične enakorobne piramide naklonjene proti osnovni ploskvi?

30. Kolika je prostornina pravilne deveterostranične piramide, pri kateri meri osnovni rob 2 *dm*; plašč pa 50 dm^2?

31. Osnovni rob pravilne peterostranične piramide meri 1 *dm*, obstranski rob pa 2 *dm*; kolika je *a)* površina, *b)* prostornina?

32. Pri pravilni osmerostranični prisekani piramidi sta dva istoležna osnovna roba $a = 5$ *dm* in $b = 4$ *dm*, obstranski rob pa $s = 2$ *dm*; kolika je *a)* prostornina, *b)* naklonski kot obstranskega roba proti osnovnima ploskvama, *c)* naklonski kot obstranske ploskve proti osnovnima ploskvama?

33. Os poševnega valja je 2·5 *dm* dolga in $78^0\,44'$ naklonjena proti osnovni ploskvi; kolika je valjeva prostornina, če meri ploščina značilnega paralelograma 4·6 dm^2?

34. Prostornina pokončnega stožca meri 78·54 dm^3 in kot ob vrhu osjega preseka $131^0\,25'\,18''$; kolika je površina?

35. Največja in najmanjša stranica poševnega stožca merita 3 *dm* in 2 *dm* ter oklepata kot 120^0; kolika je prostornina?

36. Polmera pokončnega prisekanega stožca merita 12 *dm* in 6 *dm*; stranice so po $70^0\,13'\,52''$ naklonjene proti osnovni ploskvi. Kolika je prostornina?

37. Pri poševnem prisekanem stožcu so stranice značilnega trapeza: $S = 120$, $s = 101$, $2\,R = 129$, $2\,r = 100$; kolika sta naklonska kota največje in najmanjše stranice proti osnovnima ploskvama?

38. Ako zavrtiš lok okoli enega njegovih mejnih polmerov, stvoriš krogelno kapico s ploščino, enako četrtemu delu pripadajoče krogelne ploskve; kolik je središčni kot, ki pripada dotičnemu loku?

39. Ako zavrtiš krogov izsek okoli enega njegovih mejnih polmerov, nastane krogelni izsek, ki je enak trem četrtinam pripadajoče krogle; kolik je središčni kot dotičnega krogovega izseka?

40. Kako visoka mora biti gora ob morju, da se vidi v daljavi 100 *km* njen vrh ($r = 6400$ *km*)?

41. Na katerem vzporedniku meri ločna stopinja 50 *km*?

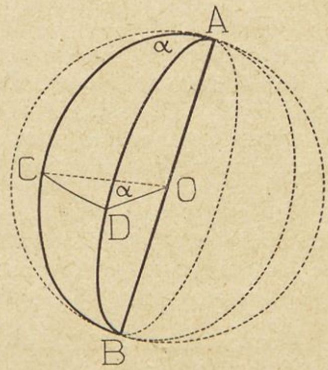
II. Sferična trigonometrija.

§ 14. Sferični dvokotnik.

Sferični dvokotnik.

Sferični geometrijski liki se zovejo oni liki, ki se nahajajo na površini krogle in so omejeni od glavnih krogov. V sliki 29. so narisani trije glavni krogi, ki se sečejo v skupnem premeru AB. Polkroga ADB in ACB omejujeta del krogelne površine, ki se zove **sferični dvokotnik**. Stranici sta mu dva polkroga. Kota pri A in pri B sta **sferična kota** in sta enaka kotu, ki ga tvorita ravnini obeh polkrogov. Ta središčni kot $COD = \alpha$ ima ravno toliko stopinj kakor lok CD. Isti kot dobimo tudi, ako si narišemo pri A ali pri B tangenti na oba polkroga.

Slika 29.



Sferični razstoj.

Ako potegnemo skoz dve točki krogelne površine glavni krog, je lok med tema dvema točkama **sferični razstoj** ali **razdalja**. V sliki 29. je lok CD sferični razstoj točk C in D, ravnotako BD med B in D. Sferični razstoj je najkrajša razdalja dveh točk na površini krogle.

Ploščina dvokotnika.

Ploščina dvokotnika. Sferični dvokotnik je tem večji, čim večji je njegov kot. Ako značita p in p_1 ploščini dveh dvokotnikov in α in α_1 njiju kota, potem velja sorazmerje $p : p_1 = \alpha : \alpha_1$. Ako torej primerjamo dani dvokotnik p s celo ploščino krogle, dobimo $p : 4\pi r^2 = \alpha : 360$ in iz tega

$$p = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{90^0},$$

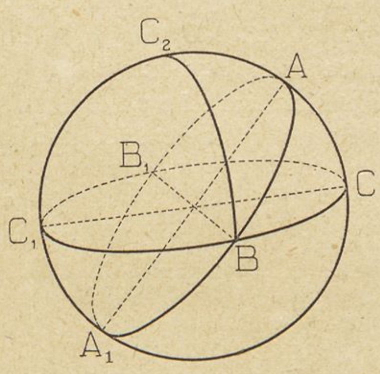
ali z besedami: **Ploščino sferičnega dvokotnika dobimo, ako pomnožimo ploščino glavnega kroga s kvocijentom sferičnega kota in pravega kota.**

§ 15. Sferični trikotnik sploh.

Sferični trikotnik. Protitočka. Sotrikotnik.

Trije glavni krogi, ki se ne sečejo v istem premeru, razdelijo površino krogle v sferične trikotnike. Vsak je omejen od treh lokov, ki pripadajo glavnim krogom. Te loke imenujemo stranice sferičnega trikotnika, sferične kote pri A, B, C pa kote sferičnega trikotnika. Stranice naših sferičnih trikotnikov merijo vsaka manj kot dva prava. Točki, ki ležita na krajiščih istega premera, sta protitočki. V sliki 30. sta protitočki A in A_1, B in B_1, C in C_1. Dva sferična trikotnika, ki tvorita skupaj sferični dvokotnik, se zoveta sotrikotnika, n. pr. ABC in A_1BC, potem ABC in ABC_1 i. t. d. Dva sferična sotrikotnika imata dve oglišči in eno stranico skupno, nasprotna kota pa enaka. Vse druge sestavine se dopolnjujejo na 180^0. Primerjaj sliko 35. na strani 62!

Slika 30.



Sovršni trikotnik.

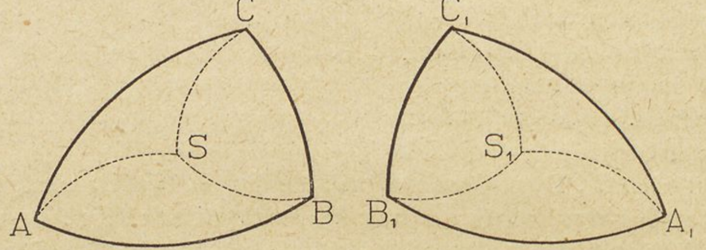
Dva sferična trikotnika, ki imata samo eno skupno oglišče, se zoveta sovršna trikotnika, tako n. pr. ABC in A_1BC_1. Sferična sovršna trikotnika imata kota na skupnem oglišču enaka in nasprotni stranici enaki. Druge sestavine se dopolnjujejo na 180^0.

Protitrikotnik.

Trikotnik, čigar oglišča so protitočke danega trikotnika, zovemo protitrikotnik; n. pr. ABC in $A_1B_1C_1$ ali AB_1C in A_1BC_1. Dva sferična protitrikotnika imata vse stranice in vse kote paroma enake, toda v nasprotnem redu. Taka dva trikotnika se splošno ne dasta pokriti in torej nista skladna, pač pa se dasta spraviti v somerno lego. Treba je le n. pr. trikotnik $A_1B_1C_1$ ob polkrogu A_1B_1A za 180^0 zasukati, da pride A_1 na A in B_1 na B. Potem leži C_1 na C_2 in trikotnika ABC in ABC_2 ležita somerno. Od sferičnih protitrikotnikov se skladajo samo enakostranični in enakokraki. Ako sta n. pr. v sliki 30. pri trikotniku ABC stranici AB in BC enaki, torej tudi A_1B_1 in B_1C_1, potem je treba samo trikotnik $A_1B_1C_1$ zasukati v lego ABC_2 in odtod zavrteti okrog B, da pride A na C in C_2 na A. Trikotnika se potem krijeta.

Izrek: S f e r i č n i t r i k o t n i k i n n j e g o v p r o t i t r i k o t n i k i m a t a i s t o p l o š č i n o.

Slika 31.



Sferično središče.

D o k a z. Pri enakostraničnih in enakokrakih trikotnikih je samo po sebi umevno, ker se dajo pokriti drug na drugega. Raznostranične sferične trikotnike pa je treba prej razdeliti v enakokrake. V to svrho poiščemo s f e r i č n o s r e d i š č e pri obeh trikotnikih, in sicer tako-le! Danemu sferičnemu trikotniku in njegovemu protitrikotniku si načrtajmo pripadajoča telesna ogla, ki sta sovršna ogla. Ravnine, ki pravokotno razpolavljajo stranice obeh oglov, se sečejo v skupni premici, ki tvori enake kote z robovi obeh telesnih oglov. Točka, v kateri seče ta premica sferični trikotnik (oziroma njegov protitrikotnik), je njegovo s f e r i č n o s r e d i š č e in ima torej isto sferično razdaljo od vseh oglišč. V sliki 31. je torej S (oziroma S_1) sferično središče in loki SA, SB, SC ter S_1A_1, S_1B_1, S_1C_1 so enaki. Na ta način razpade trikotnik ABC v same enakokrake trikotnike, ravnotako $A_1B_1C_1$. Vsled tega se dasta pokriti trikotnika ABS in $A_1B_1S_1$, potem ACS in $A_1C_1S_1$

in ravnotako BCS in $B_1 C_1 S_1$. Iz tega pa sledi, da sta trikotnika ABC in $A_1 B_1 C_1$ ploščinsko enaka.

Pravokoten. Pravostraničen.

Sferični trikotnik, ki ima vsaj en pravi kot, se zove pravokoten. Trikotnik je pravostraničen, ako meri vsaj ena stranica 90^0. Ako merita v sferičnem trikotniku dve stranici po 90^0, potem je tretja stranica enaka nasprotnemu kotu, priležna kota pa sta prava.

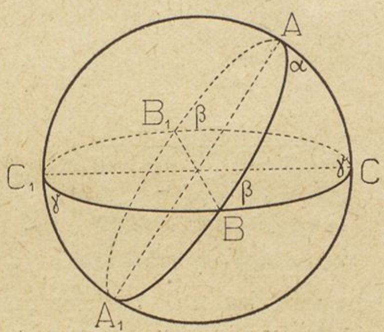
Opomnja: Za trikotnike, ki jih tvorijo n. pr. dva poldnevnika in pa kak vzporednik (ne pa ravnik), ne veljajo računi sferičnih trikotnikov.

§ 16. Ploščina sferičnega trikotnika.

Ploščina sferičnega trikotnika.

Ploščina sferičnega trikotnika je odvisna od polmera krogle in od notranjih kotov ter se izračuna s pomočjo sferičnih dvokotnikov. V sliki 32. je:

Slika 32.



$$\left.\begin{aligned} ABC + BCA_1 &= \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{90^0} \\ ABC + ACB_1 &= \pi r^2 \cdot \frac{\beta}{90^0} \\ ABC + ABC_1 &= \pi r^2 \cdot \frac{\gamma}{90^0} \end{aligned}\right\} \text{sešteto}$$

$$3\, ABC + BCA_1 + ACB_1 + ABC_1 = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{90^0}$$

Ker pa je $ACB_1 = A_1 C_1 B$ (protitrikotnika), zato je $3\, ABC + BCA_1 + A_1 C_1 B + ABC_1 = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{90^0}$ ali pa $2\, ABC + 2\, \pi r^2 = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{90^0}$, ker tvorijo trikotniki $ABC + BCA_1 + A_1 C_1 B + ABC_1 = 2 \pi r^2$ površino sprednje polkrogle. Iz tega pa sledi:

$$ABC = \pi r^2 \cdot \frac{(\alpha + \beta + \gamma - 180^0)}{180^0}.$$

Izraz $e = \alpha + \beta + \gamma - 180^0$ pove, koliko presega vsota trikotnikovih kotov dva prava kota, in se zove sfer i č n i e k s c e s. Ploščino p sferičnega trikotnika dobimo torej po obrazcu:

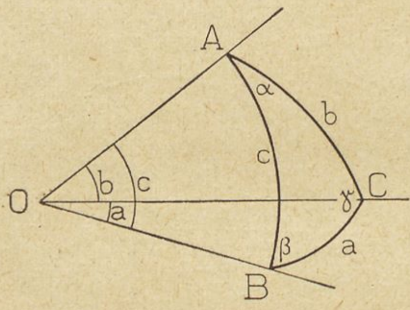
$$p = \pi r^2 \cdot \frac{e}{180^0}$$

ali z besedami: P l o š č i n o s f e r i č n e g a t r i k o t n i k a d o b i m o, a k o m n o ž i m o p l o š č i n o g l a v n e g a k r o g a s k v o c i j e n t o m i z s f e r i č n e g a e k s c e s a i n k o t a 180⁰.

§ 17. Sferični trikotnik v zvezi s trirobnikom.

Ako si mislimo okrog vrha trirobnika O v sliki 33. očrtano kroglo s katerimkoli polmerom r, dobimo piramidasti izsek krogle. Izsekani del površine krogle je sferični trikotnik ABC, čigar stranice so loki glavnih krogov iste krogle. Stranice in koti tega trikotnika se popolnoma ujemajo s stranicami in koti danega trirobnika. Zato prenesemo lahko vse izreke o stranicah in kotih trirobnika na stranice in kote sferičnega trikotnika. Tako veljajo za sferične trikotnike sledeči izreki:

Slika 33.



1. Vsota dveh stranic je večja od tretje stranice.

2. Razlika dveh stranic je manjša od tretje stranice.

3. Vsota vseh stranic je manjša od štirih pravih kotov ali v znakih: $0 < a + b + c < 4R$.

4. Vsota vseh kotov je večja od dveh pravih in manjša od šestih pravih kotov, ali v znakih: $2R < \alpha + \beta + \gamma < 6R$.

5. Ravnine, ki pravokotno razpolavljajo stranice sferičnega trikotnika, se sečejo v skupni premici. Ta premica seče trikotnik v sferičnem središču, ki

ima isto sferično razdaljo od oglišč. Razdalja tega središča od oglišč trikotnika je sferični polmer trikotniku očrtanega kroga.

6. Ravnine razpolovnice kotov sferičnega trikotnika se sečejo v skupni premici. Ta premica seče trikotnik v točki, ki ima isto sferično razdaljo od vseh stranic. Razdaljo te točke od trikotnikovih stranic zovemo sferični polmer trikotniku včrtanega kroga.

7. K vsakemu sferičnemu trikotniku pripada polarni trikotnik. Stranice polarnega trikotnika so suplementarne s koti danega trikotnika in obratno.

Posledica: Polarni trikotnik pravostraničnega trikotnika je pravokoten in obratno.

8. Enakim stranicam ležijo enaki koti nasproti, večji stranici leži večji kot nasproti in obratno.

Posledica: Enakostraničen trikotnik je tudi enakokoten. Če meri vsaka stranica 90^0, meri tudi vsak kot 90^0. Ako pa meri n. pr. vsaka stranica po 30^0, 60^0, 72^0..., potem so pač vsi koti med seboj enaki, pa vendar ne merijo ravno 30^0, 60^0, 72^0...

Ploščina polar. nega trikotnika.

Dostavek. Ploščina polarnega trikotnika. Ako značijo a, b, c in α, β, γ sestavine danega sferičnega trikotnika ter a_1, b_1, c_1 in α_1, β_1, γ_1 sestavine pripadajočega polarnega trikotnika, potem je

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= 2R - a \\ \beta_1 &= 2R - b \\ \gamma_1 &= 2R - c \end{aligned}\right\} \text{sešteto}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 6R - (a + b + c).$$

Iz tega sledi površina p polarnega trikotnika

$$p = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 180^0}{180^0} = \pi r^2 \cdot \frac{4R - (a + b + c)}{180^0}.$$

Sferični defekt.

Izraz $d = 4R - (a + b + c)$ pove, koliko je vsota vseh stranic danega trikotnika manjša od $4R$, ter se zove sferični defekt. Obrazec za ploščino polarnega trikotnika dobi potem sledečo obliko:

$$p = \pi r^2 \cdot \frac{d}{180^0}.$$

§ 18. Naloge o ploščini sferičnega trikotnika.

1. Sferični trikotnik ima kote $\alpha = 40^0$, $\beta = 70^0$, $\gamma = 80^0$; kolika je njegova ploščina, če je polmer pripadajoče krogle $r = 1\ dm$?

2. Ista naloga za kote $\alpha = 67^0 37' 40''$, $\beta = 82^0 14' 31''$, $\gamma = 123^0 50' 49''$ in za polmer $r = 3{\cdot}425\ m$.

3. Kolika je ploščina sferičnega trikotnika, pri katerem meri vsak kot *a)* 70^0, *b)* 85^0, *c)* 90^0, *č)* 111^0 in polmer 1 *dm*?

4. Kako se glasi obrazec za ploščino sferičnega trikotnika, pri katerem je $a = b = 90^0$ in $c \lesseqgtr 90^0$?

5. Kolika je ploščina sferičnega trikotnika, ki ga tvorita poldnevnika Ljubljane in Beograda z ravnikom, ako ima zemlja obliko krogle? (Glej zemljevid.)

6. Neki sferični trikotnik ima stranice 46^0, 75^0, 83^0. Kolika je ploščina polarnega trikotnika, če je polmer $r = 12\ cm$?

§ 19. Pravokotni sferični trikotnik.

V sferičnem trikotniku se dajo iz treh sestavin vse druge izračunati. Dotični izreki se izvajajo s pomočjo trirobnika, ki pripada trikotniku. Krogla, ki jo očrtamo (v sliki 34.) okrog vrha trirobnika O s polmerom $r = OA = OB = OC$, seče trirobnik v sferičnem trikotniku ABC. Mislimo si, da je $\gamma = 90^0$, $\alpha < 90^0$ in $\beta < 90^0$, in trikotnik torej pravokoten. Ako spustimo iz točke B pravokotnico BE na OC in iz E pravokotnico ED na OA, potem je tudi $BE \perp ED$, ker je $\gamma = 90^0$, pa tudi ravnina $BED \perp OA$. Vsled tega nastane pri točki D kot α. (Kot DBE pa ni enak β!) In sedaj lahko s pomočjo znanih enačb ravninske trigonometrije izvajamo izreke za sferični trikotnik.

V trikotniku ODE je $OD = OE \cdot \cos b$ in v trikotniku OBE je $OE = r \cdot \cos a$, torej je $OD = r \cdot \cos a \cdot \cos b$. Isto stranico pa tudi lahko izračunamo iz trikotnika OBD, in sicer je $OD = r \cdot \cos c$. Iz obeh izrazov za OD pa sledi $r \cdot \cos c = r \cdot \cos a \cdot \cos b$ in iz tega obrazec:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1.$$

Na sličen način dobimo iz trikotnikov v sliki 34. sledeče enačbe: $BE = BD \sin \alpha = r \sin c \cdot \sin \alpha$, pa tudi $BE = r \sin a$ in iz obeh enačb novi obrazec:

$$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2.$$

Ker je za izvajanje teh enačb vseeno, katero oglišče smo zaznamovali z A in katero z B, lahko zamenjamo stranici a in b in obenem oba kota α in β. Na ta način dobimo iz enačbe 2. novo enačbo:

$$\sin b = \sin c \cdot \sin \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3$$

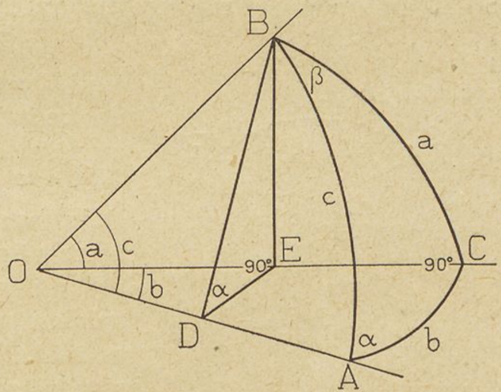
Iz iste slike dobimo nadalje $DE = OE \cdot \sin b = r \cos a \cdot \sin b$, pa tudi $DE = DB \cos \alpha = r \sin c \cdot \cos \alpha$. Iz obeh enačb sledi $\sin c \cdot \cos \alpha = \cos a \cdot \sin b$. Ako pomnožimo to enačbo še z enačbo 3., dobimo obrazec:

$$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4.$$

Po zamenjavi stranic a in b in kotov α in β dobimo:

$$\cos \beta = \cos b \cdot \sin \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5.$$

Slika 34.



S pomočjo tangent in kotangent dobimo še pet obrazcev za razreševanje pravokotnega sferičnega trikotnika. Iz trikotnikov DEB, DEO in OBE sledi namreč $DE = BE \cdot \operatorname{cotg} \alpha$, pa tudi $DE = OE \cdot \sin b = BE \cdot \operatorname{cotg} a \cdot \sin b$. Iz obeh enačb pa sledi $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} a \cdot \sin b$, ali pa

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6.$$

Če zamenjamo zopet stranici a in b in pa kota α in β, dobimo

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} \beta \cdot \sin a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7.$$

Na podoben način sledi iz $DE = BD \cdot \cos \alpha = r \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$ in iz $DE = OE \sin b = r \cdot \cos a \cdot \sin b$ nova enačba $\sin c \cdot \cos \alpha = \cos a \cdot \sin b$. Ako nadalje v tej enačbi zamenjamo $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$ iz enačbe 1., dobimo $\sin c \cdot \cos \alpha = \frac{\cos c}{\cos b} \cdot \sin b$ in potem

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8.$$

Po zamenjavi črk a in b in pa α in β dobimo:

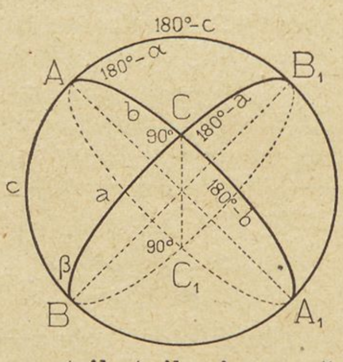
$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cdot \cos \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9.$$

Ako še množimo enačbi 4. in 5. in delimo produkt z enačbo 1., dobimo $\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos c} = \frac{\cos a \cdot \cos b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos a \cdot \cos b}$ in po okrajšavi ulomkov še

$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10.$$

Enačbe 1. do 10. omogočijo hitro razreševanje pravokotnega sferičnega trikotnika. V vsaki teh enačb so tri sestavine. Iz treh enačb, ki imajo vseh pet sestavin a, b, c, α, β, se dajo izvajati vse druge enačbe. Ako so znane n. pr. 4., 5. in 10., dobimo iz njih enačbo 1., ako pomnožimo vse tri enačbe i. t. d.

Slika 35.

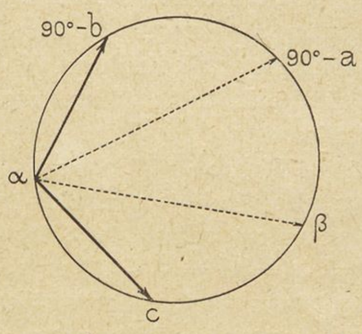


Izpeljava navedenih enačb pa je bila omejena na kote in stranice, ki so manjše od 90^0 (izvzet je $\gamma = 90^0$). Vsekako pa veljajo enačbe tudi splošno, če merijo stranice in koti 90^0 ali več kakor 90^0. O splošni veljavi teh enačb se lahko prepričamo, ako si narišemo k danemu sferičnemu trikotniku njegove sotrikotnike in sovršne trikotnike. Pravokotni trikotnik AB_1C v sliki 35. ima kateti b in $180^0 - a$ in hipotenuzo $180^0 - c$, koti pa so β, $180^0 - \alpha$ in 90^0. Ako vstavimo te količine v enačbe 1. do 10., se iste ne izpremene. Isto se zgodi pri trikotnikih A_1B_1C in A_1BC i. t. d.

Neperjevo pravilo.

Neperjevo pravilo. Enačbe o pravokotnem sferičnem trikotniku se dajo v eno samo pravilo združiti. Ako si mislimo v krogu napisane zaporedne sestavine trikotnikove, izvzemši pravi kot $\gamma = 90^0$, in zamenjamo obe kateti a in b z njiju komplementi $90^0 - a$ in $90^0 - b$, potem je kosinus vsake sestavine enak produktu sinusov nasprotnih sestavin ali pa produktu kotangent priležnih sestavin.

Slika 36.



V sliki 36. je n. pr. $\cos\alpha = \text{cotg}\, c \cdot \text{cotg}\,(90^0 - b)$ ali pa $\cos\alpha = \sin\beta \cdot \sin\,(90^0 - a)$. Iz prve enačbe sledi obrazec 8. in iz druge obrazec 4. Drugi primer: $\cos\,(90^0 - a) = \text{cotg}\,(90^0 - b) \cdot \text{cotg}\,\beta$, kar je istovredno z obrazcem 7., in pa $\cos\,(90^0 - a) = \sin\alpha \cdot \sin c$, kar kaže obrazec 2. i. t. d.

Dostavek. Pri uporabi enačb od 1. do 10. je treba paziti na zvezo goniometrijskih funkcij. V vsakem trikotniku leži namreč večji stranici večji kot nasproti. Če raste stranica, raste tudi nasprotni kot. Vsled tega morata imeti stranica in nasprotni kot v isti enačbi isto funkcijo. To pravilo se kaže v enačbah 2. do 7. Nadalje kaže enačba $\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta$ še posebej, da mora imeti $\cos\alpha$ isti znak kakor $\cos a$, ker je $\sin\beta$ vedno pozitiven, če je $0 < \beta < 180^0$. Slično velja tudi za enačbo $\cos\beta = \cos b \cdot \sin a$. Iz tega pa sledi: V pravokotnem sferičnem trikotniku morata biti kateta in nasprotni kot oba $< 90^0$ ali oba $= 90^0$ ali pa oba $> 90^0$, t. j. oba sta ostra, oba prava ali pa oba topa. Nadalje so v enačbi 2. in 3. trije sinusi in v enačbi 1. trije kosinusi, nikjer pa ni treh tangent ali kotangent.

Enakokraki sferični trikotnik se da razpoloviti z ravnino, ki gre skoz vrh in stoji pravokotno na osnovnici, na dva somerna pravokotna trikotnika. Za enakokraki sferični trikotnik torej ni treba posebnih obrazcev za razreševanje.

§ 20. Zavisnost sferične in ravninske trigonometrije.

Sferični trikotniki, pri katerih raste polmer pripadajoče krogle vedno bolj in bolj, se bližajo ravninskim trikotnikom. V tem slučaju preidejo obrazci sferičnih trikotnikov v slične obrazce ravnih trikotnikov.

Prvo zbližanje. Ako raste polmer krogle neskončno — v znakih $r = \infty$ —, potem se bližajo stranice vedno bolj in bolj ničli — v znakih $a = b = c = 0$ —, ker so to središčni koti krogle, ki postaja neskončno velika. Vsled tega pa je $\sin a = \operatorname{tang} a = 0$ in $\cos a = 1$ in isto velja tudi za b in c. Enačba 1. postane brezpomembna, namreč $1 = 1$, ravnotako enačbe 2., 3., 6., 7., 8., 9., ki dajo $0 = 0$. Enačbi 4. in 5. preideta v $\cos \alpha = \sin \beta$ in $\cos \beta = \sin \alpha$, enačba 10. pa v $1 = \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta$. Vse tri enačbe so samo po sebi umevne, ker sta v ravninskem pravokotnem trikotniku kota α in β komplementarna.

Drugo zbližanje. Pri rastočem polmeru krogle se zmanjšuje središčni kot a (stranica sferičnega trikotnika) vedno bolj in bolj, tako da se približujeta funkciji $\sin a$ in $\operatorname{tg} a$ vedno bolj in bolj loku a samemu, $\cos a$ pa vrednosti 1. Isto velja tudi za stranici b in c. Lahko torej nadomestimo pri neskončno se zmanjšujočih lokih funkciji $\sin a$ in $\operatorname{tg} a$ z lokom a samim, funkcijo $\cos a$ pa z 1; pišemo lahko: $\cos a = \cos b = \cos c = 1$. Na ta način ostane enačba 1 še vedno brezpomembna $(1 = 1)$, enačbe 4, 5. in 10. pa same po sebi umevne. Vse druge enačbe pa preidejo v znane obrazce ravninske trigonometrije.

Obrazec $\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha$ preide v $a = c \cdot \sin \alpha$,
„ $\sin b = \sin c \cdot \sin \beta$ „ „ $b = c \cdot \sin \beta$,
„ $\operatorname{tg} a = \sin b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ „ „ $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$,

Obrazec $\operatorname{tg} b = \sin a \cdot \operatorname{tg} \beta$ preide v $b = a \cdot \operatorname{tg} \beta$,
„ $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cdot \cos \beta$ „ „ $a = c \cdot \cos \beta$,
„ $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha$ „ „ $b = c \cdot \cos \alpha$.

Tretje zbližanje. Tukaj je treba še cos a, cos b, cos c natančneje določiti. Iz goniometričnih obrazcev sledi $\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2r}\right)^2 = 1 - \frac{a^2}{2r^2}$, ako vzamemo $\sin a = \frac{a}{r}$ in pri neskončno se zmanjšujočem kotu $\sin \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2} = \frac{a}{2r}$. Isto velja za b in c. Enačba 1. se izpremeni potem v $1 - \frac{c^2}{2r^2} = \left(1 - \frac{a^2}{2r^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{b^2}{2r^2}\right)$ in potem v $c^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{2r^2}$. Zadnji člen postaja z rastočim r v primeri z drugimi tako majhen, da ga lahko pogrešimo, potem pa ostane še $c^2 = a^2 + b^2$.

§ 21. Naloge o pravokotnem trikotniku.

V sledečih nalogah pomeni c hipotenuzo, a in b kateti, kot $\gamma = 90^0$. Za sestavine, ki so izražene v obrazcih s funkcijo kosinus, tangens, kotangens, dobimo po eno rešitev, ker so te funkcije med 0^0 in 180^0 enotno določene. Pri funkciji sinus sta mogoči dve rešitvi, ker se sinus pri suplementarnih kotih ne izpremeni. Vsekako pa morata biti kateta in nasprotni kot ali oba topa, ali oba ostra. Če je mogoča dvojna razrešitev, potem sta dobljena trikotnika sotrikotnika. Glej v sliki 35. trikotnika ABC in AB_1C!

Poišči neznane sestavine sferičnega trikotnika, ako je dano:

1. $a = 37^0 28'$
   $b = 42^0 30'$.
2. $a = 57^0 39' 42''$
   $b = 122^0 44' 16''$.
3. $a = 108^0 15' 16''$
   $b = 124^0 33' 24''$.
4. $a = 48^0 15'$
   $c = 114^0 0' 26''$.
5. $b = 62^0 37' 15''$
   $c = 106^0 38' 37''$.
6. $a = 38^0 16'$
   $\beta = 52^0 4'$.
7. $b = 23^0 18' 40''$
   $\alpha = 106^0 14' 7''$.
8. $a = 64^0 17'$
   $\alpha = 70^0 18'$
   (dvojna razrešitev).

9. $\alpha = 72^0 6' 12''$
$\beta = 88^0 14' 4''$.

10. $b = 132^0 18' 34''$
$\beta = 118^0 14' 35''$
(dvojna razrešitev).

11. $\alpha = 58^0 37' 25''$
$\beta = 116^0 33' 26''$.

12. $\alpha = 104^0 25' 36''$
$\beta = 49^0 35' 12''$.

13. Ako potegnemo z vrha C pravokotnega sferičnega trikotnika ABC glavni krog pravokotno na hipotenuzo AB, razdelimo hipotenuzo v točki D na dva dela $AD = n$ in $BD = m$, pravokotni trikotnik ABC pa razpade na dva pravokotna trikotnika ADC in BDC s skupno stranico $CD = v$.

Dokaži, da je $\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} m$! (Primerjaj obrazec ravninskih trikotnikov $a^2 = c \cdot m$!)

Navodilo: Izračunaj v trikotniku BCD kot β iz a in m in v trikotniku ABC isti kot iz a in c!

14. Dokaži na podoben način, da je: $\sin^2 v = \operatorname{tg} m \cdot \operatorname{tg} n$! (Primerjaj obrazec ravninskih trikotnikov $v^2 = m \cdot n$!)

Navodilo: Izračunaj v trikotniku ADC in BDC stranico b iz v in n in stranico a iz v in m, pomnoži obe enačbi, nadomesti a in b s stranico c in vstavi $c = m + n$!

§ 22. Naloge o enakokrakem sferičnem trikotniku.

1. V enakokrakem sferičnem trikotniku pomeni c osnovnico, $a = b$ krak, γ kot pri vrhu in $\alpha = \beta$ kot na osnovnici. Izračunaj iz $a = 67^0 15' 54''$ in $\gamma = 90^0$ osnovnico in druga dva kota!

2. V enakokrakem sferičnem trikotniku meri osnovnica $c = 42^0 46' 4''$ in kot pri vrhu $\gamma = 90^0$; koliko merijo krak in kota na osnovnici? Koliko meri višina?

3. V enakokrakem sferičnem trikotniku meri osnovnica $c = 114^0 45'$ in krak $a = 80^0 14'$; koliki so koti?

4. V enakokrakem sferičnem trikotniku meri kot na osnovnici $\alpha = 47^0 15'$ in kot pri vrhu $\gamma = 55^0 17'$; kolike so stranice in kolika je višina?

5. Dokaži, da je v pravokotnem enakokrakem sferičnem trikotniku veljaven obrazec $\cos a = \operatorname{cotg} \alpha$!

6. V enakokrakem trikotniku je $c = 73^0 25'$ in $\gamma = 68^0 44'$; kolik je krak, kolika višina in kot na osnovnici? (Dvojna razrešitev.)

7. V enakokrakem sferičnem trikotniku meri višina $v = 48^0$ in kot na osnovnici $\alpha = 64^0$. Izračunaj ostale sestavine trikotnikove! (Dvojna razrešitev.)

§ 23. Naloge o pravilnem sferičnem mnogokotniku.

V pravilnem sferičnem trikotniku pomeni a stranico, α kot, r sferično razdaljo središča od oglišč in ϱ sferično razdaljo središča od stranic.

1. V pravilnem sferičnem trikotniku je znana ena izmed sestavin a, α, r, ϱ, poišči druge! Primer: $a = 60^0$.

2. V pravilnem sferičnem četverokotniku meri kot $\alpha = 100^0$; poišči a, r, ϱ!

3. V pravilnem sferičnem peterokotniku je znana razdalja $r = 35^0$; koliko merijo a, α, ϱ?

4. V pravilnem sferičnem n-kotniku je dana stranica a. Kolik je kot α in kolika je ploščina p? Primer: $a = 40^0$, $n = 4$ in polmer pripadajoče krogle $R = 1$.

§ 24. Naloge iz stereometrije.

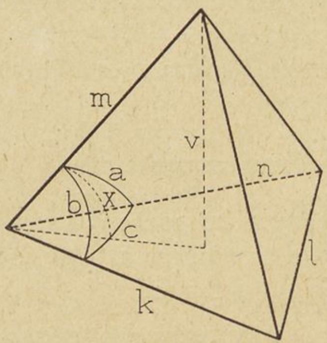
1. Pri tristranični piramidi tvorijo stranske ploskve med seboj zaporedoma kote $\alpha = 60^0$, $\beta = 80^0$, $\gamma = 90^0$. Koliki so robovni koti pri vrhu?

Navodilo: Okrog vrha piramide si očrtaj kroglo s katerimkoli polmerom; tako dobiš pravokoten sferičen trikotnik.

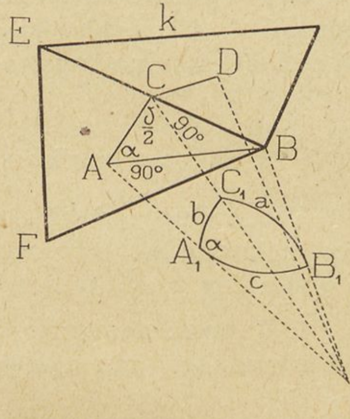
2. Kolik je kot, ki ga tvorita pri enakorobni tristranični piramidi (tetraedru) stranski rob in osnovna ploskev?

Navodilo: Okrog enega oglišča osnovne ploskve si načrtaj kroglo, ki odreže enakostraničen sferičen trikotnik, v katerem je višina x enaka zahtevanemu kotu (slika 37.).

Slika 37.



Slika 38.



3. Pri pokončni tristranični piramidi je osnovna ploskev enakostraničen trikotnik. Kolika je prostornina piramide, če je znan stranski rob m in če tvorita dve stranski ploskvi kot $\gamma = 72^0$?

Navodilo. Na isti način kakor pri prejšnji nalogi dobiš sferičen trikotnik (glej sliko 37.!), pri katerem je $c = 60^0$, $a = b$ in $\gamma = 72^0$. Iskati je treba višino x.

4. V pravilnem poliedru je znan rob k. Izračunaj površino in prostornino poliedrovo (glej sliko 38.!)

Navodilo. Ako pomeni s število ploskev poliedra, n število stranic vsake ploskve, m število robov, ki se sečejo v vsakem oglišču, $\varrho = \overline{OA} = \overline{OD}$ polmer včrtane krogle, $r = \overline{OB} = \overline{OE}$ polmer očrtane krogle in $\delta = \sphericalangle ACD$ naklonski kot dveh ploskev, potem je $\frac{\delta}{2} = \sphericalangle ACO$ in $\alpha = \frac{360^0}{2n} = \frac{180^0}{n}$. Kot med ravnino FBO in EBO je $\frac{360^0}{m}$, torej je kot med ravnino ABO in EBO enak $\frac{180^0}{m} = \beta$. Iz slike razvidiš, da je $\frac{\delta}{2} = 90^0 - b$ in

$\overline{OC} \perp \overline{BE}$, pa tudi $OA \perp BEF$. V trikotniku $A_1B_1C_1$ so torej znani vsi koti, ker je $\gamma = 90^0$; iz teh izračunaš lahko stranice.

Po Neperjevem pravilu je $\cos\beta = \sin(90^0 - b) \cdot \sin\alpha$ ali $\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{180^0}{m}}{\sin\frac{180^0}{n}}$ in na isti način dobiš tudi $\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\frac{180^0}{n}}{\sin\frac{180^0}{m}}$. Ker pa je $\cos b = \cos\left(90^0 - \frac{\delta}{2}\right) = \sin\frac{\delta}{2}$, dobiš iz tega $\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\frac{180^0}{m}}{\sin\frac{180^0}{n}}$.
V trikotniku OBC je $\overline{BC} = \overline{BO} \cdot \sin a$ ali $\frac{k}{2} = r \sin a$ in $r = \frac{k}{2\sin a}$. Nadalje je $\varrho = \overline{OA} = \overline{OC} \cdot \cos b = \overline{OB} \cos a \cdot \cos b = r \cos a \cdot \cos b$ in iz tega $\varrho = \frac{k}{2} \cdot \operatorname{cotg} a \cdot \cos b$.

Površina sestoji iz skladnih pravilnih mnogokotnikov (v sliki 38. so sami trikotniki). Prostornina pa sestoji iz skladnih piramid, ki imajo vrhove v središču poliedra.

5. Poišči prostornino tetraedra, če je znan *a)* rob $k = 1\ dm$, *b)* $k = 3{\cdot}5\ cm$!

6. Ista naloga za oktaeder, dodekaeder in ikosaeder.

7. Kolik je naklonski kot dveh sosednjih ploskev tetraedrovih? (Naloga se izvrši lahko tudi brez sferične trigonometrije.)

8. Ista naloga za oktaeder, dodekaeder ali ikosaeder s pomočjo sferične trigonometrije.

9. Poišči prostornino dodekaedru in ikosaedru včrtane in očrtane krogle, ako je znan rob k! Primer: $k = 4\ cm$.

§ 25. Raznostranični sferični trikotnik.

Raznostranični sferični trikotnik se da z višino razdeliti na dva pravokotna trikotnika. Iz teh dveh izvajamo lahko obrazec za ves trikotnik. Mislimo si najprej, da so v trikotniku ABC stranice in koti manjši od 90^0. Iz trikotnika ADC dobimo enačbo Sinusov izrek.

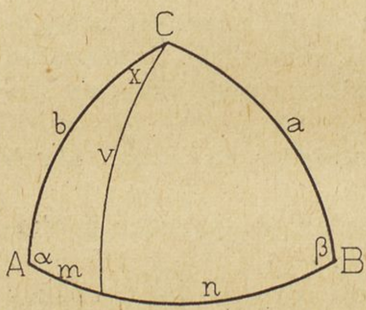
$\sin v = \sin b \cdot \sin \alpha$ in iz trikotnika BDC enačbo $\sin v = \sin a \cdot \sin \beta$. Iz obeh enačb pa sledi: $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$. Če potegnemo višino namesto z vrha C z oglišča A, dobimo na isti način sorazmerje $\sin b : \sin c = \sin \beta : \sin \gamma$. Obe sorazmerji nam dajeta obrazec za sinusov izrek, ki ga pišemo ali v obliki zaporednega sorazmerja:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad . \quad . \quad 11.$$

$$\text{ali pa:} \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

z besedami: V sferičnem trikotniku so sinusi stranic v istem razmerju kakor sinusi nasprotnih kotov.

Slika 39.



Sinusov izrek velja seveda tudi za pravokotne in enakokrake sferične trikotnike in tudi za one trikotnike, pri katerih so stranice in koti večji od 90^0, ker se sinus pri suplementarnih kotih ne izpremeni. (Primerjaj sliko 35.!)

Neposrednja uporaba sinusovega izreka je omejena na dve vrsti nalog: Iz dveh stranic in enega nasprotnega kota je iskati drugi nasprotni kot ali pa iz dveh kotov in ene nasprotne stranice je iskati drugo nasprotno stranico. V obeh slučajih je mogoča dvojna razrešitev.

V sliki 39. je nadalje v trikotniku CBD: $\cos a = \cos v \cdot \cos n = \cos v \cdot \cos (c - m) = \cos v \cdot \cos c \cdot \cos m + \cos v \cdot \sin c \cdot \sin m$. Ker pa je $\cos v \cdot \cos m = \cos b$ in $\sin m = \sin b \cdot \sin x$, oziroma $\cos \alpha = \sin x \cdot \cos v$, zato preide prva enačba v obrazec:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \quad . \quad 12.a$$

Na podoben način dobimo še:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta \quad . \quad 12.b$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \quad . \quad 12.c$$

Obrazci 12 a, b, c nam dajejo kosinusov izrek stranic: Kosinus stranice je enak produktu kosinusov drugih dveh stranic, povečanemu za produkt sinusov istih stranic in kosinusa nasprotnega kota. Kosinusov izrek.

Ako uvedemo trikotniku pripadajoči polarni trikotnik s stranicami $a_1 = 180 - \alpha$, $b_1 = 180 - \beta$ in $c_1 = 180 - \gamma$, dobimo kosinusov izrek kotov. Po obrazcu 12 a je namreč $\cos a_1 = \cos b_1 \cdot \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos \alpha_1$ in po zamenjavi $\cos(180^0 - \alpha) = \cos(180^0 - \beta)\cos(180^0 - \gamma) + \sin(180^0 - \beta) \sin(180^0 - \gamma)\cos(180^0 - a)$, iz tega pa sledi:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma \cdot \cos a \quad . \quad 13.a$$

Na isti način dobimo še:

$$\cos\beta = -\cos\gamma \cdot \cos\alpha + \sin\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos b \quad . \quad 13.b$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos c \quad . \quad 13.c$$

torej z besedami: kosinus kota je enak negativnemu produktu kosinusov drugih dveh kotov, povečanemu za produkt sinusov drugih dveh kotov in kosinusa nasprotne stranice.

Izpeljava obeh kosinusovih izrekov je seveda veljavna tudi pri stranicah in kotih, ki so večji od 90^0. Če je n. pr. $180^0 > b > 90^0$ in $180^0 > c > 90^0$, vzamemo za podlago računa namesto trikotnika ABC njegov sotrikotnik A_1BC, kjer sta stranici $180^0 - b$ in $180^0 - c$ manjši od 90^0. Za trikotnik A_1BC velja torej

$$\cos a = \cos(180^0 - b) \cdot \cos(180^0 - c) + \\ + \sin(180^0 - b) \cdot \sin(180^0 - c) \cdot \cos\alpha,$$

iz tega pa sledi obrazec 12. a za trikotnik ABC.

Neposrednja uporaba kosinusovih izrekov se nanaša na sledeče naloge: 1. Dane so sestavine: dve stranici in kot med njima ali pa dva kota in stranici med njima in išče se tretja stranica, oziroma tretji kot. 2. Dane so stranice in iščejo se koti ali pa obratno.

S i n u s o v i n k o s i n u s o v i z r e k z a d o s t u j e t a p o p o l n o m a z a r a z r e š i t e v s f e r i č n e g a t r i k o t n i k a. Seveda je kosinusov izrek neprikladen za hitro in pregledno logaritmovanje. V to svrho mu damo drugo obliko, in sicer s pomočjo novega pomožnega kota.

Po kosinusovem izreku je namreč:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

ali

$$\cos a = \cos b \cdot (\cos c + \operatorname{tg} b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha).$$

Ako sedaj nadomestimo $\operatorname{tg} b \cdot \cos \alpha = \operatorname{tg} x$, dobimo

$$\cos a = \cos b \, (\cos c + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin c) \text{ in potem}$$

$$\cos a = \cos b \cdot \frac{\cos c \cos x + \sin c \sin x}{\cos x} \text{ ali}$$

$$\cos a = \frac{\cos b \cdot \cos (c - x)}{\cos x}.$$

Iz b in α je treba torej najprej izračunati x in iz tega potem še a.

Na isti način preide kosinusov izrek kotov $\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a$ v obliko $\cos \alpha = \frac{\cos \beta \, \sin (\gamma - x)}{\sin x}$, ako izločimo faktor $\cos \beta$ in uvedemo novi kot x z enačbo $\operatorname{tg} \beta \cdot \cos a = \operatorname{cotg} x$.

Iz kosinusovih izrekov pa izvajamo še druge izreke.

Iz obrazca 12. a dobimo $\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$.

Ako nadomestimo kot α s polovičnim kotom $\frac{\alpha}{2}$ po obrazcu $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, dobimo:

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c} =$$

$$= \frac{-2 \cdot \sin \frac{b - c + a}{2} \sin \frac{b - c - a}{2}}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{2 \cdot \sin \frac{b - c + a}{2} \sin \frac{a + c - b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Ako še uvedemo okrajšave $a + b + c = 2s$ in $a + b - c = 2s - 2c = 2(s - c)$ i. t. d. kakor pri Heronovem izreku za ploščino ravninskega trikotnika, dobimo

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin (s - b) \cdot \sin (s - c)}{\sin b \cdot \sin c}, \text{ iz tega pa sledi}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \cdot \sin c}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 14.a$$

Iz obrazca $1 + \cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ dobimo na isti način

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin (s - a)}{\sin b \cdot \sin c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14.b$$

Ako delimo enačbo 14.*a* z enačbo 14.*b*, dobimo

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \cdot \sin (s - c)}{\sin s \cdot \sin (s - a)}} \quad . \quad . \quad . \quad 14.c$$

Enačbe 14. *a*, *b*, *c* se dajo sestaviti tudi za druga dva kota β in γ, ako se črke *a*, *b*, *c* zaporedoma zamenjajo.

Enačbe 14. *a*, *b*, *c* dajo izrek o polovicah trikotnikovih kotov. Praktično se uporablja najbolj obrazec za tangento, ker se sinus in kosinus v bližini 90⁰, oziroma 0⁰, ne dasta dovolj natančno izračunati.

Iz enačb 14. *a*, *b*, *c* dobimo izrek o polovicah trikotnikovih stranic, ako zamenimo kote in stranice danega trikotnika s sestavinami polarnega trikotnika a_1, b_1, c_1 in $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Obrazci 14. veljajo namreč za vsak sferičen trikotnik in zato veljata tudi enačbi

$$\sin \frac{a_1}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s_1 - b_1) \cdot \sin (s_1 - c_1)}{\sin b_1 \cdot \sin c_1}},$$

$$\cos \frac{a_1}{2} = \sqrt{\frac{\sin s_1 \cdot \sin (s_1 - a_1)}{\sin b_1 \cdot \sin c_1}}.$$

Ako še zamenimo na levi kote s stranicami in na desni stranice s koti danega trikotnika in uporabimo za okrajšavo $a_1 + b_1 + c_1 = 2s_1$ in $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$, dobimo nove obrazce:

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cdot \cos (\sigma - \alpha)}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}} \quad . \quad . \quad . \quad 15.a$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \beta) \cdot \cos (\sigma - \gamma)}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}} \quad . \quad . \quad 15.b$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cdot \cos (\sigma - \alpha)}{\cos (\sigma - \beta) \cdot \cos (\sigma - \gamma)}} \quad . \quad . \quad 15.c$$

Enačbe 15. nam dajo izrek polovičnih stranic.

Opomnja: Ulomek v drugem korenu je pri 15.*a* in 15.*c* le navidezno negativen. Vsota $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$ je večja ko 180⁰ in torej $\sigma > 90^0$ in $\cos \sigma$ negativen, $-\cos \sigma$ pa pozitiven. Enačbe 15. se lahko izvajajo tudi neposredno iz kosinusovega izreka za kote.

Gaußove enačbe.

Gaußove (Delambrejove) enačbe. Ako zamenimo v enačbi $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}$ posamezne funkcije z izrazi v obrazcih 14., potem skupne faktorje izločimo in dobljene izraze skrčimo, dobimo:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.$$

To enačbo pišemo lahko tudi v obliki:

$$\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad \ldots\ldots \quad 16.a$$

Na podoben način dobimo iz izrazov $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ in $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ še sledeče enačbe:

$$\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \ldots\ldots \quad 16.b$$

$$\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad \ldots\ldots \quad 16.c$$

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \ldots\ldots \quad 16.č$$

Obrazci 16. se zovejo Gaußove enačbe. Glede sestave teh enačb je pomniti sledeče: na levi so stranice, na desni nasprotni koti; na levi sta funkciji enaki, na desni stojita kofunkciji. Če je na levi sinus oziroma kosinus, je na desni razlika oziroma vsota. Ako izpremenim na eni strani funkcije v kofunkcije, izpremeni se na drugi strani znak v oklepaju in obratno. Obrazec 16. *a* in 16. *b* se dasta primerjati z Mollweidejevimi enačbami ravninske trigonometrije na strani 40., ako pišemo stranice na eni, kote pa na drugi strani jednačaja.

Neperjeve analogije. Ako delimo enačbo 16. a s 16. b, potem 16. c s 16. $č$, nadalje 16. a s 16. c in 16. b s 16. $č$, dobimo nove obrazce: Neperjeve analogije.

$$\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}} \quad \ldots\ldots \quad 17.a$$

$$\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}} \quad \ldots\ldots \quad 17.b$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} \quad \ldots\ldots \quad 17.c$$

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} \quad \ldots\ldots \quad 17.č$$

Enačbe 17. se zovejo Neperjeve analogije. Glede sestave teh analogij je pomniti sledeče: Kjer je na levi sinus oziroma kosinus, je na desni razlika oziroma vsota. Ako zamenimo na levi strani stranice s koti, zamenijo se na desni koti s stranicami in v imenovalcu nastopi kofunkcija. Primerjaj obrazec 17. a z onim na strani 39. točka 3., ako zamenjaš tam $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ s $\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$!

Uporaba Gaußovih enačb in Neperjevih analogij se vrši lahko pri sledečih nalogah: 1. Dano je v trikotniku a, b, γ in iskati je α, β, c; 2. dano je α, β, c in iskati je a, b, γ; 3. dano je a, b, α in iskati je c in γ; 4. dano je α, β, a in iskati je γ in c.

§ 26. Zavisnost sferične in ravninske trigonometrije.

Ta se zopet lahko izvrši po načinu zbližanja kakor pri pravokotnem trikotniku. Tako preide enačba 11. v drugem zbližanju v obrazec $a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$. Enačba 12. a preide v tretjem zbližanju v enačbo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Enaka izpremememba se vrši pri 12. b in 12. c. Iz enačbe 13. a dobimo v prvem zbližanju $-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$. Ker pa je pri ravninskih trikotnikih

$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$, dobimo iz tega znani obrazec $\cos(\beta + \gamma) = \cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin\beta \cdot \sin\gamma$. Isto velja tudi za enačbe 13. *b* in 13. *c*. Enačbe 14. preidejo v drugem zbližanju v znane obrazce polovičnih kotov. Obrazci 15. nimajo nobene primere v ravninski trigonometriji, ker se v ravninskem trikotniku iz samih kotov ne dajo izračunati stranice. Gaußovi enačbi 16. *a* in 16. *b* preideta v drugem zbližanju v Mollweidejevi enačbi. Enačbi 16. *c* in 16. *č* pa dasta v prvem zbližanju $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$ in $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$, kar je samoposebi umevno, ker sta $\frac{\alpha+\beta}{2}$ in $\frac{\gamma}{2}$ v ravninskih trikotnikih komplementarna. Neperjeva analogija 17.*a* preide v drugem zbližanju v enačbo $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}$ ali pa v $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$. K tej zadnji enačbi ravninske trigonometrije pa dobimo nasprotno analogijo v sferični trigonometriji, ako delimo enačbo 17.*a* s 17.*b*. Enačba 17.*b* da v prvem zbližanju $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$, ker sta $\frac{\alpha+\beta}{2}$ in $\frac{\gamma}{2}$ zopet postala komplementarna. Iz enačb 17. *c* in 17. *č* pa dobimo v drugem zbližanju Mollweidejeve enačbe.

§ 27. Naloge o raznostraničnem sferičnem trikotniku.

Poišči neznane trikotnikove sestavine, ako je dano:

1. $a = 64^0$, $b = 72^0$, $\gamma = 67^0$.	2. $b = 54^0 37'$, $c = 124^0 53'$, $\alpha = 80^0 16'$.
3. $a = 36^0 44' 15''$, $c = 100^0 5' 28''$, $\beta = 84^0 16' 42''$.	4. $a = 38^0 42' 6''$, $b = 105^0 34' 18''$, $\beta = 85^0 44' 20''$.
5. $a = 40^0 15' 26''$, $b = 82^0 4' 38''$, $\alpha = 28^0 14' 32''$.	6. $a = 18^0 44' 15''$, $\beta = 39^0 58' 4''$, $a = 24^0 34' 18''$.

Opomnja: Pri 5. in 6. nalogi sta dve razrešitvi mogoči.

7. $\alpha = 63^0 25' 4''$, $\beta = 124^0 33' 18''$, $b = 121^0 14' 30''$.	8. $a = 84^0$, $b = 122^0$ $c = 54^0$.
9. $a = 48^0 37' 20''$, $b = 124^0 16' 14''$, $c = 103^0 8' 36''$.	10. $\alpha = 106^0$, $\beta = 44^0$, $\gamma = 72^0$.
11. $\alpha = 60^0 40' 20''$, $\beta = 130^0 50' 30''$, $\gamma = 50^0 10' 40''$.	12. $\alpha = 92^0 46'$, $\beta = 16^0 52'$, $c = 164^0 14'$.
13. $a = 54^0 35' 26''$, $\beta = 128^0 15' 38''$, $\gamma = 84^0 17' 48''$.	14. $\alpha = 104^0 20' 52''$, $\gamma = 88^0 15' 6''$, $b = 65^0 46' 30''$.

15. Glavni krogi, ki razpolavljajo kote, se sečejo v točki, ki ima isto sferično razdaljo od vseh stranic. Kolika je ta razdalja ϱ? (Sferični polmer včrtanega kroga.) Rezultat je

$$\operatorname{tg} \varrho = \sqrt{\frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s}}.$$

Primerjaj slično nalogo ravninskih trikotnikov!

16. Glavni krogi, ki stoje pravokotno na stranicah in jih razpolavljajo, se sečejo v sferičnem središču trikotnikovem. Izračúnaj sferično razdaljo r te točke od oglišč trikotnikovih! (Sferični polmer očrtanega kroga.) Rezultat je

$$\operatorname{cotg} r = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \alpha) \cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{- \cos \sigma}}.$$

17. V sferičnem trikotniku je znano: $a + b = s$, c, γ. Izračunaj a, b, α, β!

18. V sferičnem trikotniku je znano $\alpha - \beta = \delta$, c, γ. Izračunaj α, β, a, b!

19. V sferičnem trikotniku je znano a, b, c. Izračunaj višino na stranico c! Rezultat je:

$$\sin v_c = \frac{2}{\sin c} \cdot \sqrt{\sin s \cdot \sin (s-a) \sin (s-b) \cdot \sin (s-c)}.$$

Primerjaj podobno enačbo ravninskih trikotnikov!

20. V sferičnem trikotniku je znano: α, β, γ. Izračunaj višino v_c! Rezultat je:

$$\sin v_c = \frac{2}{\sin\gamma}\sqrt{-\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\alpha)\cdot\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}.$$

§ 28. Naloge iz stereometrije.

1. Pri tristranični piramidi so znani robovi m, n, k, ki se sečejo v skupnem oglišču, in pa koti med njimi a, b, c. Kolika je prostornina?

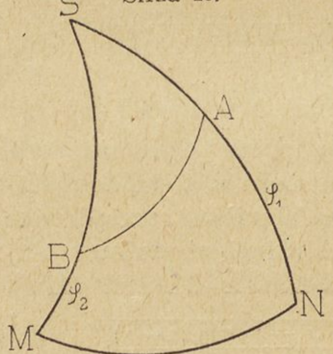
V sliki 37. dobiš $v = m\cdot\sin x$ in $\sin x$ iz enačbe v rezultatu naloge 19. na prejšnji strani.

2. V poševnem paralelepipedu so znani trije robovi enega oglišča m, n, k in pa koti med njimi a, b, c. Poišči prostornino!

3. Ista naloga kakor 2., ako so znani robovi m, n, k in pa ploskovni koti enega oglišča α, β, γ.

4. Ista naloga za tristranično piramido.

§ 29. Naloge iz matematične geografije in astronomije.



Slika 40.

Ako pomeni v sliki 40. S severni tečaj zemlje, MN ekvatorja in SM in SN kvadranta dveh meridianov, ki gresta skoz kraja B in A, potem je $SM = 90^0$, $SN = 90^0$, $MN = \lambda =$ = razlika zemljepisnih dolžin krajev A in B, $AN = \varphi_1$ in $BM = \varphi_2$ zemljepisni širini krajev A in B, AB pa je sferična razdalja ali zračna črta.

1. Kolika je zračna črta med Ljubljano in Beogradom, ako sta zemljepisni širini in dolžini obeh mest znani? Ljubljana ($\varphi_1 = 46^0\,3'$, $\lambda_1 = 14^0\,30'$ vzh. od Greenwicha), Beograd ($\varphi_2 = 44^0\,50'$, $\lambda_2 = 20^0\,27'$ vzh. od Gr.) Polmer zemlje $r = 6370\ km$.

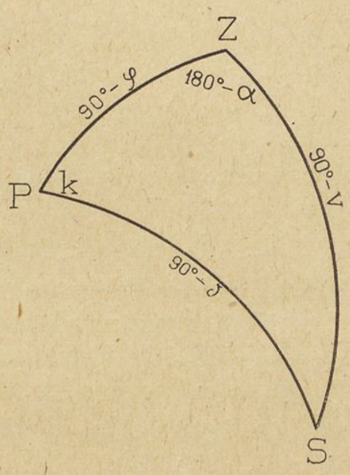
2. Ista naloga za Ljubljano in Paris. (Gl. zemljevid!)

3. Kraj A leži na vzporedniku $+\,44^0\,16'$, kraj B pa na vzporedniku $+\,52^0\,28'$. Kolika je njiju sferična razdalja, ako ima kraj A za $1^h\,24^m$ prej poldne kakor kraj B?

4. Kraj *A* ima $+ 58^0 14'$ zemljepisne širine in 46^m prej poldne kakor *B*. Kolika je zemljepisna širina kraja *B*, ako meri sferična razdalja obeh krajev $1^0 44'$?

5. Kako visoko stoji za opazovalca v Gorici zvezda ob šesti uri zvečer, ki je šla ravno opoldne (srednji čas) skoz meridian in ima deklinacijo $+ 65^0$?

Slika 41.



Navodilo: Iz astronomije so znani sledeči podatki: Ako si mislimo na nebu skoz severni svetovni pol *P* v sliki 41., potem skoz zenit *Z* in skoz zvezdo *S*, katero opazujemo, potegnjene glavne kroge svetovne oble, potem nastane sferični trikotnik, ki se da razrešiti, ako so znane tri sestavine njegove. V sliki pomeni φ zemljepisno širino kraja na zemlji, a acimut zvezde *S* (n. pr. solnca), v višino zvezde nad horizontom, δ deklinacijo zvezde in k časovni kot. — Za Gorico je zemljepisna širina $\varphi = + 45^0 57'$ (torej severna), in zemljepisna dolžina $\lambda = 13^0 37'$ vzhodno od Greenwicha. V nalogi je $k = 90^0$, torej je trikotnik pravokoten pri vrhu *P*. Iskati nam je v.

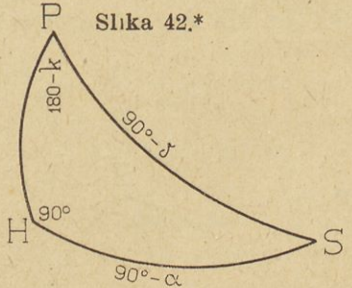
6. Kdaj in kje zaide solnce v Rimu, ko je najdaljši dan? (Deklinacija solnca meri ta dan $23^0 27' 8''$.)

Navodilo: Namesto trikotnika *PZS* v sliki 41. se v tej nalogi vzame trikotnik *PHS* v sliki 42. Ko solnce zahaja, stoji ravno v horizontu *HS*. Trikotnik *PHS* je pri vrhu *H* pravokoten. Iskati je treba časovni kot *k* in pa acimut *a*.

7. Ista naloga za najkrajši dan v Berlinu. Deklinacija solnca meri ta dan $\delta = - 23^0 27' 8''$.

8. Kakšno smer mora imeti ulica v Pragi, da bo dne 1. novembra ob 10^h (srednji čas) dopoldne brez sence? Deklinacija solnca meri — $14^0 18' 30''$, časovna enačba je — $3^m 20^s$. Iskati je treba acimut.

Slika 42.*



9. Kakšno zemljepisno širino ima kraj, kjer je najkrajši dan 6^h dolg?

10. Koliko kaže ura v Olomucu, kadar zahaja solnce 5^0 južno od zahodišča?

11. Ob kateri uri stoji solnce dne 15. aprila v zahodni smeri v Celovcu? Deklinacija solnca meri ta dan $+ 9^0 37' 6''$.

12. Ista naloga za Zagreb dne 20. julija. Deklinacija solnca meri $+ 20^0 45' 30''$.

13. Kje ležita točki na ravniku, ki sta od Beograda ($\varphi = + 44^0 50'$) ravno tako daleč oddaljeni, kakor Beograd od severnega tečaja?

14. Ista naloga za Pernambuco v južni Ameriki ($\varphi = - 8^0 3' 24''$).

15. Kje in v kakem kotu se sekata ravnik in pa glavni krog, ki gre skoz Petrograd in Dunaj? (Podaljšaj v sliki 40. lok *AB* in *NM*, da se sekata!)

16. Dva kraja *A* in *B* imata isto zemljepisno širino φ, razlika zemljepisnih dolžin pa je λ. Za koliko je zračna črta med obema krajema krajša od razdalje na vzporedniku? N. pr. $\varphi = 44^0 50'$ (Beograd in Bordeaux), $\lambda = 20^0 58'$.

17. Kje leži najsevernejša točka zračne črte v prejšnji nalogi?

18. Izračunaj deklinacijo zvezde, če so znane sledeče količine: časovni kot $k = 37^0 30'$, višina $v =$ $= 42^0 10'$ in zemljepisna širina (= višini severnega pola) $\varphi = 64^0 3'$.

---

* Popravek: Stranica *HS* meri $180^0 - \alpha$ in ne $90^0 - \alpha$!

19. Katero zemljepisno širino ima kraj, ako vzhaja tamkaj zvezda Sirius ob $9^h 15^m$ zvečer in stoji najvišje ob 5^h zjutraj? Deklinacija Sirija je $\delta = -16^0 35' 30''$.

Navodilo: V sliki 42. je točka S zahodišče Sirija ter leži simetrično z vzhodiščem. Lok HP je zemljepisna širina dotičnega kraja.

20. Kolika je deklinacija solnca, kadar stoji nad Hamburgom ($\varphi = 53^0 33' 6''$) ob 6^h zvečer $10^0 18'$ visoko? Koliko meri takrat acimut?

21. Kje leži kraj, ki ima isto razdaljo od obeh meridianov, ki gresta skoz Milan in Moskvo, in od ravnika? Primerjaj nalogo 15. v § 27.!

22. Ob katerem času popoldne stoji solnce dne 18. aprila (deklinacija $= +10^0 36'$) v Dubrovniku ($\varphi = 42^0 38' 30''$) ravno 45^0 visoko?

23. Na ravniku imata kraja A in B 10^0 in 40^0 zemljepisne dolžine vzhodno od Greenwicha. Kje leži točka, ki ima od obeh krajev in od severnega tečaja isto razdaljo? Primerjaj nalogo 16. v § 27.!

24. Planet Jupiter je šel dne 1. maja 1910 ob $9^h 51^m$ zvečer skoz dunajski meridian. Ob kateri uri je planet tisto noč zahajal? Deklinacija je merila takrat $-0^0 59'$.

25. Dne 24. aprila 1910 je vzhajal mesec (polna luna) ob $7^h 4^m$ zvečer (dunajske ure). Deklinacija je bila ta dan $-10^0 6'$. Kdaj je tisto noč stal mesec najvišje? Kolik je bil takrat vidni kot mesečevega premera ($2r = 3482$ km), če je merila razdalja od zemlje 63·71 zemeljskih polmerov? Rezultat: $12^h 18^m$; $29' 31''$.

III. Ravninska analitika.

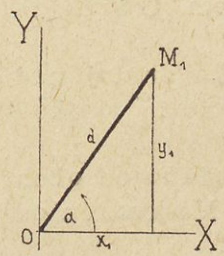
§ 30. Točka.

Vsaka točka v ravnini je popolnoma natanko določena po njenih koordinatah; obratno ima vsaka določena točka tudi določene koordinate. Kako pripišeš določenim točkam koordinate in kako določenim koordinatam pripadajoče točke, je znano.

Smerni koeficient. Razdalja določene točke od koordinatnega izhodišča in smerni koeficijent te daljice.

Koordinati določene točke M_1 (x_1, y_1) tvorita kateti pravokotnega trikotnika, čigar hipotenuza je razdalja d dotične točke od koordinatnega izhodišča, v znakih $d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Primerjaj sliko 43.! Kot α, ki ga tvori razdalja d s pozitivno abscisno osjo, določuje smer, v katero se razteza daljica OM_1. Trigonometrijska tangenta tega kota, t. j. tg $\alpha = \frac{y_1}{x_1}$ se imenuje smerni koeficijent daljice OM_1, in se zaznamuje z A, v znakih $A = \frac{y_1}{x_1}$. Kot α se šteje od pozitivne abscisne osi proti pozitivni ordinatni osi. Če je kot α oster, je smerni koeficijent pozitiven; če je pa kot α top, je smerni koeficijent negativen.

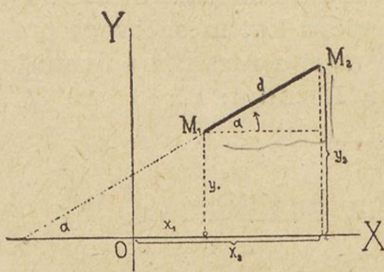
Slika 43.



Razdalja dveh določenih točk in smerni koeficient te daljice.

Razdaljo d dveh določenih točk M_1 (x_1, y_1) in M_2 (x_2, y_2) najdeš s pomočjo Pitagorovega izreka, v znakih $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Primerjaj sliko 44.! Ker se izraza $x_1 - x_2$ in $x_2 - x_1$, oziroma $y_1 - y_2$ in $y_2 - y_1$ razločujeta le v njunih predznakih, smemo obrazec za razdaljo d določenih točk M_1 in M_2 pisati tudi tako-le: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Kot α, ki ga tvori daljica $d = M_1M_2$ s smerjo pozitivne abscisne osi (oziroma podaljšek daljice M_1M_2 s pozitivno abscisno osjo), je določen po enačbi tg $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Vrednost tega izraza imenujemo smerni koeficient (A) daljice M_1M_2, v znakih $A = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Slika 44.



Obrazec za trikotnikovo ploščino.

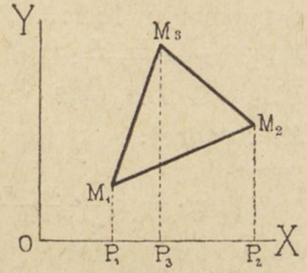
Tri točke M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) in M_3 (x_3, y_3), ki ne leže v eni in isti premici, določujejo trikotnik $M_1M_2M_3$ (slika 45.), čigar ploščino najdeš, ako sešteješ trapeza $M_1P_1P_3M_3$ in $M_3P_3P_2M_2$ ter odšteješ od te vsote trapez $M_1P_1P_2M_2$, v znakih

$$p = \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2}(x_2 - x_3) - \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1).$$

Če odpraviš v tem obrazcu ulomke, razrešiš oklepaje ter skrčiš kolikor mogoče, najdeš

$$2p = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + + x_3(y_1 - y_2).$$

Slika 45.



Pri računanju trikotnikove ploščine po tem obrazcu je treba upoštevati koordinate trikotnikovih oglišč v takšnem redu, kakor bi prehodil trikotnikov obseg v zmislu, ki je vrtenju urnih kazalcev nasproten.

Naloge.

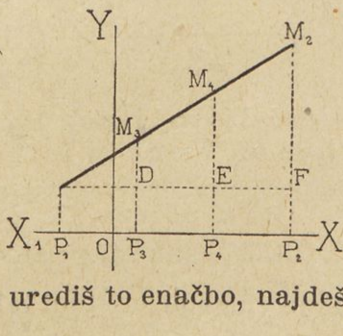
1. D a l j i c a s k r a j i š č e m a M_1 (— 3, 10) in M_2 (2, y_2) i m a d o l ž i n o 13; d o l o č i y_2!

R a z r e š i t e v. Iz enačbe $13 = \sqrt{(-3-2)^2 + (10-y_2)^2}$ najdeš $y_2 = 22, -2$.

2. K a t e r a t o č k a a b s c i s n e o s i i m a o d t o č k e M_1 (4, 6) r a z d a l j o 10?

R a z r e š i t e v. Ordinata vsake točke v abscisni osi je $= 0$. Iz enačbe $10 = \sqrt{(4 - x_2)^2 + 36}$ najdeš $x_2 = 12, -4$.

Slika 46.



3. I z r a z i s p o m o č j o e n a č b e p o g o j, d a j e t o č k a $M(x,y)$ e n a k o o d d a l j e n a o d t o č k M_1 (—1,4) i n M_2 (— 3, 2).

R a z r e š i t e v. Daljici MM_1 in MM_2 morata biti enaki, v znakih

$\sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2} = = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2}$. Ako urediš to enačbo, najdeš $x + y = 1$.

4. R a z d e l i d o l o č e n o d a l j i c o M_1M_2 n a t r i e n a k e d e l e t e r d o l o č i r a z d e l i š č a.

R a z r e š i t e v. Točki M_3 in M_4 razdelita daljico M_1M_2 na tri enake dele (slika 46.). V podobnih trikotnikih M_1DM_3, M_1EM_4 in M_1FM_2 so istoležne stranice v razmerju 1:2:3. Vsaka teh daljic P_1P_3, P_3P_4 in P_4P_2 je $= \frac{x_2-x_1}{3}$; daljica DM_3 je $= \frac{FM_2}{3} = \frac{y_2-y_1}{3}$ in $EM_4 = 2 \cdot DM_3 = 2 \cdot \frac{y_2-y_1}{3}$. Koordinate razdelišč M_3 in M_4 so torej:

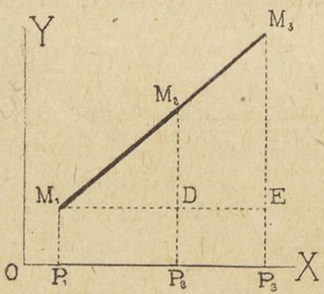
$$x_3 = x_1 + \frac{x_2-x_1}{3} \text{ in } y_3 = y_1 + \frac{y_2-y_1}{3},$$

$$x_4 = x_1 + 2 \cdot \frac{x_2-x_1}{3} \text{ in } y_4 = y_1 + 2 \cdot \frac{y_2-y_1}{3}.$$

Na isti način najdeš tudi, da sta $\frac{x_1+x_2}{2}$ in $\frac{y_1+y_2}{2}$ k o o r d i n a t i r a z p o l o v i š č a d a l j i c e M_1M_2.

5. P o d a l j š a j d a l j i c o s k r a j i š č e m a $M_1(1,2)$ i n M_2 (5, 5) z a š t i r i d o l g o s t n e e n o t e.

Slika 47.



R a z r e š i t e v. Daljica M_1M_2 meri pet dolgostnih enot, podaljšek M_2M_3 meri štiri dolgostne enote (slika 47.). V podobnih trikotnikih M_1DM_2 in M_1EM_3 so istoležne stranice v razmerju 5:9, t. j. v znakih $(x_2 - x_1) : (x_3 - x_1) = 5 : 9$ in $(y_2 - y_1) : (y_3 - y_1) = 5 : 9$. Iz teh pogojev najdeš $x_3 = \frac{41}{5}$ in $y_3 = \frac{37}{5}$.

6. D o l o č i p o g o j, d a l e ž i j o t r i t o č k e M_1, M_2 in M_3 v e n i i n i s t i p r e m i c i.

R a z r e š i t e v. Iz podobnih trikotnikov M_1DM_2 in M_1EM_3 (slika 47.) najdeš sorazmerje $\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1} = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$, ki je smeš pisati tudi tako-le: $\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3} = \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}$, t. j. t r i t o č k e l e ž e v e n i i n i s t i p r e m i c i, č e s o n j i h o r d i n a t n e r a z l i k e s o r a z m e r n e z r a z l i k a m i p r i p a d a j o č i h a b s c i s.

Razreši še naslednje naloge:

7. Načrtaj točke M_1 (3, 0), M_2 (5, 2), M_3 (0, 4), M_4 (— 6, — 2), M_5 (— 4, 7), M_6 (7, — 4) ter določi razdaljo njih projekcij od koordinatnega izhodišča *a)* v abscisni, *b)* v ordinatni osi!

8. Načrtaj točke M_1 (3, 4), M_2 (— 5, 5), M_3 (— 8, 6), M_4 (— 4, $7\frac{1}{2}$) ter določi njih smer in razdaljo od koordinatnega izhodišča!

9. Določi smer in razdaljo točk *a)* M_1 (2, — 10) in M_2 (10, — 4), *b)* M_3 (5, 24) in M_4 (17, 29), *c)* M_5 (23, 20) in M_6 (— 5, — 25)!

10. Katera točka ordinatne osi ima od točke M_1 (— 4, 5) razdaljo 7?

11. Izračunaj obseg in ploščino trikotnika z oglišči A (— 1, 2), B (1, — 5) in C (4, — 2)!

12. Trikotnikova ploščina je = 7 in oglišča so A (— 2, — 1), B (0, 2) in C (4, y_3); izračunaj y_3!

13. Načrtaj četverokotnik z oglišči A (2, 3), B (— 3, 4), C (— 1, — 4) in D (3, — 1) ter določi njega stranice, diagonali in ploščino!

14. Razpolovi stranice trikotnika z oglišči M_1 (3, 5), M_2 (— 3, 3) in M_3 (— 7, 25), spoji razpolovišča med seboj ter določi, kako sta si ploščini prvotnega in včrtanega trikotnika!

15. Točke A (3, 2), B (7, y_2) in C (5, 5) so oglišča enakokrakega trikotnika z vrhom C; izračunaj y_2!

16. Določi točko, ki je enako oddaljena od točk M_1 (2, — 1), M_2 (4, 3) in M_3 (— 2, — 1)!

17. Razdeli daljico s krajiščema *a)* M_1 (2, 2) in M_2 (10, 8) v razmerju 2 : 3, *b)* M_3 (5, 8) in M_4 (— 4, — 10) v razmerju 4 : 5 ter določi razdelišče!

18. Razdeli daljico s krajiščema M_1 (3, — 6) in M_2 (10, 18) na pet enakih delov ter določi razdelišča!

19. Razdeli daljico s krajiščema M_1 (3, 7) in M_2 (2, 5) po stalnem sorazmerju!

20. Podaljšaj daljico s krajiščema A (3, — 6) in B (10, 18) za 15 dolgostnih enot ter določi novo krajišče!

21. Podaljšaj daljico s krajiščema A (— 2, 1) in B (1, 3) za njeno dolžino (za njeno trikratno dolžino) ter določi novo krajišče!

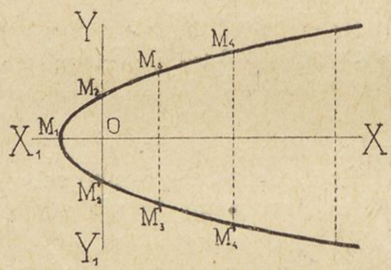
§ 31. Enačbe in črte.

Enačba in njena geometrijska podoba.

Vsaka enačba s premenljivkama (variablama) x in y ima neizrečeno mnogo razrešitev. Vsaka teh razrešitev predočuje v sliki določeno točko; vse razrešitve skupaj predočujejo nepretrgano vrsto točk, ki tvorijo geometrijsko mesto ali funkcijsko črto dotične enačbe; kajti vsaka enačba s premenljivkama x in y se sme smatrati za razvito ali nerazvito funkcijo ene premenljivke.

Ako je treba n. pr. enačbi $y^2 - 2x = 4$ poiskati geometrijsko mesto (funkcijsko sliko), razrešimo to enačbo z ozirom na odvisno premenljivko y. Iz izraza $y = \pm\sqrt{2x + 4}$ sledi, da smeš za neodvisno premenljivko x postaviti vsako vrednost od -2 do $+\infty$; vrednostim za x, ki bi bile manjše od -2, so ordinate, torej tudi pripadajoče točke nemogoče (umišljene, imaginarne). Če se veča vrednost za x, se veča (absolutno) tudi vrednost za y. Ko postane vrednost za x neizrečeno velika, je tudi vrednost za y neizrečeno velika. Razrešitvam: $x = -2$, 0, $2\frac{1}{2}$, 6, $10\frac{1}{2}$ ... $y = 0$, ± 2, ± 3, ± 4, ± 5 ... pripadajo točke M_1, M_2 in M'_2, M_3 in M'_3 i. t. d. (slika 48.), ki leže somerno z ozirom na abscisno os; zakaj vsaki posebni vrednosti za x (izvzemši $x = -2$) pripadata dve nasprotni vrednosti za y. Zgoraj navedena enačba predstavlja torej krivo črto, ki se razteza od določene točke v abscisni osi na desno, je osjesomerna in nima nobenega konca.

Slika 48.



Kakor v navedenem primeru postopamo tudi v drugih sličnih slučajih.

Obratno se da vsaka črta, ki je stvorjena po določenem zakonu, izraziti z enačbo. Kajti značilna lastnost vsake take črte se mora izražati v vsaki točki te črte, torej tudi v koordinatah dotičnih točk.

Ako izbereš v črti premenljivo točko ter izraziš odvisnost med x in y z enačbo, stvoriš enačbo dotične črte. Kako postopamo pri tem v posameznih slučajih, bomo videli v naslednjih odstavkih.

Naloge.

Poišči naslednjim enačbam geometrijska mesta:

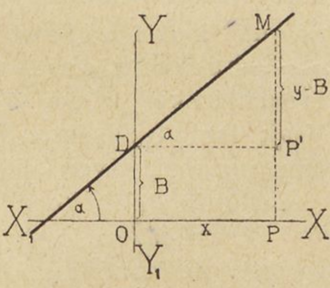
1. $4x + 5y = 0$. 2. $xy = 3$. 3. $y^2 = 2x$.
4. $x^2 + y^2 = 25$. 5. $4x^2 + 9y^2 = 36$. 6. $4x^2 - 9y^2 = 36$.
7. $x^2 = 4y$. 8. $y^2 = -6x$. 9. $y^2 = \frac{16}{x^2} - 4$.

§ 32. Premica.

Lega preme črte je geometrijsko popolnoma določena, ako poznaš kot α, ki ga tvori premica s pozitivno smerjo abscisne osi in odsek $OD = B$, ki ga odreže premica na ordinatni osi. Primerjaj sliko 49.! Enačbo preme črte najdeš, ako poiščeš medsebojno zvezo (zavisnost) med koordinatama premenljive točke M v premici in količinama, ki določujeta prémično lego. Če narišeš skoz D vzporednico z abscisno osjo, stvoriš pravokotni trikotnik $DP'M$, iz katerega sledi trigonometrijskim potem $y - B = x \operatorname{tg} \alpha$. Ta odvisnost velja za vsako lego premenljive točke M v premici. Če zaznamuješ $\operatorname{tg} \alpha = A$ in razrešiš enačbo z ozirom na odvisno premenljivko y, najdeš premično enačbo $y = Ax + B$, v kateri sta količini A in B stalnici, količini x in y pa premenljivki. Količini A se pravi smerni koeficient preme črte.

Prva oblika prémične enačbe in njeni stalnici. Smerni koeficient preme črte in odsek na ordinatni osi.

Slika 49.

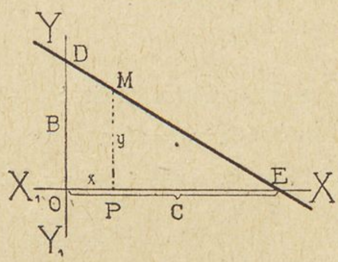


Pri različnih premicah imata stalnici A in B različne vrednosti. Kot α se meri od pozitivne abscisne osi proti pozitivni ordinatni osi. Dokler je kot α oster, je smerni koeficient A pozitiven; če pa postane kot α top, je smerni koeficient A nega-

Enačba preme črte, ki gre skoz koordinatno izhodišče.

tiven. Odsek B na ordinatni osi je pozitiven, oziroma negativen, če leži na pozitivnem, oziroma negativnem delu te osi. Ako je $B = 0$, gre dotična premica skoz koordinatno izhodišče. Enačba take premice je $y = Ax$.

Slika 50.



Druga oblika prémične enačbe in njeni stalnici.

Lega preme črte je na drugi način tudi določena popolnoma, ako poznaš odseka $OD = B$ in $OE = C$, ki ju odreže premica na koordinatnih oseh. Primerjaj sliko 50.!

Odseka na koordinatnih oseh.

Če poiščeš medsebojno zvezo med koordinatama premenljive točke M v premici in med odsekoma na koordinatnih oseh, najdeš prémični enačbi novo obliko. V podobnih trikotnikih MPE in DOE so istoležne stranice sorazmerne, v znakih $\frac{y}{B} = \frac{C-x}{C}$. Ta odvisnost velja za vsako lego premenljive točke M v premici. Navedena enačba se da prav lahko pretvoriti na obliko $\frac{x}{C} + \frac{y}{B} = 1$, v kateri pomeni obratni koeficijent premenljivke x odsek na abscisni osi, obratni koeficient premenljivke y pa odsek na ordinatni osi. Vsak izmed odsekov B in C utegne biti pozitiven, oziroma negativen, če leži na pozitivnih, oziroma negativnih delih koordinatnih osi.

Enačbe premih črt, ki so vzporedne koordinatnima osema.

Premica, ki je vzporedna ordinatni osi, preseče to os v neskončni daljavi. V tem slučaju je $B = \infty$ in $\frac{x}{C} = 1$ ali $x = C$ je enačba take premice. Na isti način najdeš, da je $y = B$ enačba premice, ki je vzporedna abscisni osi in preseče ordinatno os v razdalji B.

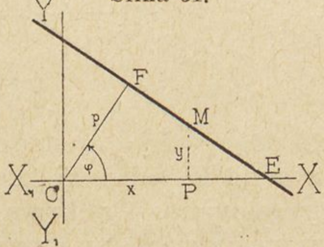
Enačbi koordinatnih osi.

Premica, ki je vzporedna ordinatni osi, se krije s to osjo, če je $C = 0$; enačba ordinatne osi je torej $x = 0$, t. j. abscisa vsake točke v ordinatni osi je $= 0$. Premica, ki je vzporedna abscisni osi, se krije s to osjo, če je $B = 0$; enačba abscisne osi je torej $y = 0$; t. j. ordinata vsake točke v abscisni osi je $= 0$.

Tretja oblika prémične enačbe ali normalna enačba preme črte in njeni stalnici.

Lega preme črte je na tretji način tudi določena popolnoma, ako poznaš razdaljo $OF = p$ koordinatnega izhodišča od premice in kot φ, ki ga tvori daljica OF s smerjo pozitivne abscisne osi. Primerjaj sliko 51.! Iz podobnih trikotnikov MPE in OFE najdeš sorazmerje $\frac{y}{p} = \frac{PE}{FE} = \frac{OE - x}{FE}$, ki velja za vsako lego premenljive točke M v premici. Ker je po

Slika 51.



trigonometrijskem izreku $OE = \frac{p}{\cos\varphi}$ in $FE = p \operatorname{tg} \varphi$, najdeš iz navedenega sorazmerja enačbo $\sin\varphi \cdot y + \cos\varphi \cdot x - p = 0$, v kateri se smatra razdalja p kakor absolutna količina in kot φ se šteje od 0^0 do 360^0. Ta enačba se imenuje **n o r m a l n a o b l i k a e n a č b e p r e m e č r t e**; spoznaš jo na tem, da dobiš 1, če kvadruješ koeficienta premenljivk x in y ter seštevaš ta zneska.

Občna oblika prémične enačbe. Kako pretvoriš občno obliko prémične enačbe na prvo ali drugo obliko.

Urejena enačba prve stopnje z dvema premenljivkama ima vobče obliko $ax + by = c$. Da predočuje ta enačba premico, je jasno; zakaj to enačbo pretvoriš prav lahko ali na prvo ali na drugo zgoraj navedenih oblik. Če razrešiš enačbo $ax + by = c$ z ozirom na premenljivko y, jo pretvoriš na obliko $y = Ax + B$, iz katere izveš **o d s e k n a o r d i n a t n i o s i** in **s m e r n i k o e f i c i e n t**, t. j. tangento tistega kota, ki ga tvori premica s pozitivno smerjo abscisne osi. Če pa deliš vse člene enačbe $ax + by = c$ s količino c, daš enačbi obliko $\frac{x}{C} + \frac{y}{B} = 1$, iz katere izveš **o d s e k a n a k o o r d i n a t n i h o s e h**.

Kako pretvoriš prvo, oziroma občno obliko prémične enačbe na normalno obliko. Faktor pretvornik.

Če hočeš enačbo $y = Ax + B$ pretvoriti na normalno obliko, jo moraš pomnožiti z nekim faktorjem ϱ (pretvornikom). Enačba $\varrho y - A\varrho x - B\varrho = 0$ je v normalni obliki, t. j. v obliki

$$\sin\varphi \cdot y + \cos\varphi \cdot x - p = 0, \text{ kadar je } \varrho = \sin\varphi,$$
$$-A\varrho = \cos\varphi \text{ in } B\varrho = p.$$

Iz prvih dveh pogojev najdeš

$$\left.\begin{aligned} \varrho^2 &= \sin^2\varphi \\ A^2\varrho^2 &= \cos^2\varphi \end{aligned}\right\} \text{sešteto}$$

$$\varrho^2(1+A^2) = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

in

$$\varrho = \pm \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}.$$

Iz pogoja $B\varrho = p$ sledi, da more biti razdalja p pozitivna le tedaj, kadar sta faktorja B in ϱ enako zaznamovana. Pretvornik ϱ se mora torej vzeti v račun z onim predznakom, ki ga ima stalnica B.

Prémično enačbo $y = Ax + B$ pretvoriš v normalno obliko, ako jo pomnožiš s faktorjem $\varrho = \pm \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}$. Ta faktor je pozitiven, oziroma negativen, če preseka premica pozitivni, oziroma negativni del ordinatne osi. Normalna oblika navedene enačbe je torej $\frac{y - Ax - B}{\pm\sqrt{1+A^2}} = 0$.

Če ima prémična enačba obliko $ax + by + c = 0$, najdeš na isti način, da se predznak faktorja pretvornika $\varrho = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ujema s predznakom količine c. Normalna oblika navedene enačbe je torej $\frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$.

Pogoj za vzporednice.

Ako se enačbi dveh premic ujemata v njunih smernih koeficientih ($A = A_1$), oziroma v kotih φ in φ_1, ki ju tvorita pravokotnici p in p_1 s pozitivno smerjo abscisne osi, morata premici biti vzporedni.

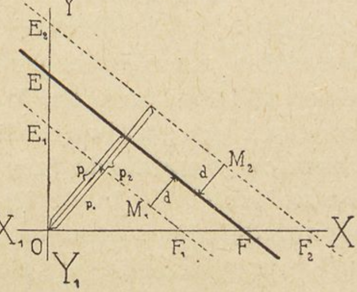
Enačba premih črt skoz določeno točko. Enačba ravninskega trakovja.

Enačba preme črte, ki gre skoz določeno točko $M_1\ (x_1, y_1)$, mora imeti obliko $y = Ax + B$, v kateri sta stalnici A in B nedoločeni. Ker leži točka $M_1\ (x_1, y_1)$ v premi črti, ustrezata koordinati x_1 in y_1 prémični enačbi; torej velja pogojna enačba $y_1 = Ax_1 + B$. Če postaviš vrednost za B iz pogojne enačbe v prejšnjo enačbo, najdeš $y = Ax + y_1 - Ax_1$ ali $y - y_1 = A(x - x_1)$. Ker ostane stalnica A v tej enačbi nedoločena, je le ta enačba premih črt, skoz določeno točko ali ravninskega trakovja s središčem M_1.

Enačba preme črte, ki gre skoz dve določeni točki.

Če pa gre premica skoz dve določeni točki M_1 (x_1, y_1) in M_2 (x_2, y_2), se da njen smerni koeficient A določiti po § 30., in sicer je $A = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Potem pa najdeš z ozirom na prejšnjo enačbo $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ kakor enačbo preme črte, ki gre skoz dve določeni točki.

Slika 52.



Kako določiš razdaljo določene točke od določene premice in kdaj je ta razdalja pozitivna, oziroma negativna.

Razdaljo d določene točke M_1 (x_1, y_1) od določene premice EF (slika 52.), kateri je enačba $\sin\varphi \cdot y + \cos\varphi \cdot x - p = 0$, najdeš tako-le. Premica E_1F_1, ki gre skoz točko M_1 in je vzporedna z EF, ima enačbo $\sin\varphi \cdot y + \cos\varphi \cdot x - p_1 = 0$. Tej enačbi morata ustrezati koordinati točke M_1; torej je $\sin\varphi \cdot y_1 + \cos\varphi \cdot x_1 - p_1 = 0$ ali $p_1 = \sin\varphi\, y_1 + \cos\varphi\, x_1$. Ker leži točka M_1 s koordinatnim izhodiščem na isti strani določene premice EF, ima razdalja točke M_1 od premice EF s pravokotnico p isto smer in je zato pozitivna, v znakih $d = p - p_1$. Če postaviš v ta izraz zgoraj navedeno vrednost za p_1, je

$$d = p - \sin\varphi \cdot y_1 - \cos\varphi \cdot x_1 = -(\sin\varphi \cdot y_1 + \cos\varphi \cdot x_1 - p).$$

Premica E_2F_2, ki gre skoz točko M_2 (x_2, y_2) in je vzporedna z EF, ima enačbo $\sin\varphi \cdot y + \cos\varphi \cdot x - p_2 = 0$. Tej enačbi morata ustrezati koordinati točke M_2; torej je $\sin\varphi \cdot y_2 + \cos\varphi \cdot x_2 - p_2 = 0$ ali $p_2 = \sin\varphi \cdot y_2 + \cos\varphi \cdot x_2$. Ker ležita koordinatno izhodišče in točka M_2 na različnih straneh določene premice EF, ima razdalja točke M_2 od premice EF nasprotno lego (smer) nego pravokotnica p in je zato negativna, v znakih $d = p - p_2$. Če postaviš v ta izraz zgoraj navedeno vrednost za p_2, je

$$d = p - \sin\varphi \cdot y_2 - \cos\varphi \cdot x_2$$

ali

$$d = -(\sin\varphi \cdot y_2 + \cos\varphi \cdot x_2 - p).$$

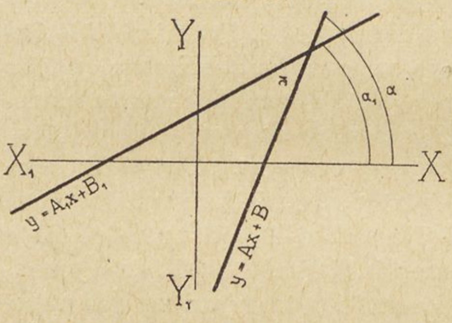
Ako primerjamo navedena rezultata za d z enačbo premicc EF, dobimo pravilo:

Razdaljo določene točke od določene premice najdeš, ako izraziš prémično enačbo v normalni obliki, p'ostaviš v to enačbo namesto premenljivk x in y koordinati dotične točke ter vzameš določeni znesek negativen. Razdalja določene točke od premice je pozitivna (negativna), kadar ležita koordinatno izhodišče in dotična točka na isti (nasprotni) strani določene premice.

Presečišče dveh premic. Koti dveh sekajočih se premic.

Presečišče dveh premic določiš, ako poiščeš enačbama teh premic skupno razrešitev.

Slika 53.



Dve sekajoči se premici tvorita štiri kote, izmed katerih sta po dva nasprotna kota enaka, dva priležna kota pa suplementarna. Eden izmed neenakih kotov se da določiti iz smernih koeficientov prémičnih enačb. Zakaj ako tvorita premici $y = Ax + B$ in $y = A_1x + B_1$ s pozitivno smerjo abscisne osi kota α in α_1, izmed katerih je $\alpha > \alpha_1$, oklepata premici kot $\delta = \alpha - \alpha_1$. Primerjaj sliko 53.!

Ker je po § 7. $\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\alpha-\alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha_1}$ in po zgoraj navedenem $\operatorname{tg}\alpha = A$ in $\operatorname{tg}\alpha_1 = A_1$ najdeš obrazec $\operatorname{tg}\delta = \frac{A - A_1}{1 + AA_1}$, kateri določa enega izmed kotov, ki jih tvorita dve sekajoči se premici.

Pogoj za pravokotnice.

Če stojita premici druga na drugi pravokotno, je $\delta = 90^0$ in $\operatorname{tg}\delta = \infty$; torej mora imenovalec ulomka, ki izraža vrednost za $\operatorname{tg}\delta$, postati $= 0$, t. j. $1 + AA_1 = 0$ Iz te enačbe sledi, da je $A = -\frac{1}{A_1}$ in $A_1 = -\frac{1}{A}$.

Kadar stojita premici pravokotno druga na drugi, je smerni koeficient ene premice negativna obratna vrednost smernega koeficienta druge premice, v znakih $A = -\frac{1}{A_1}$.

Naloge.

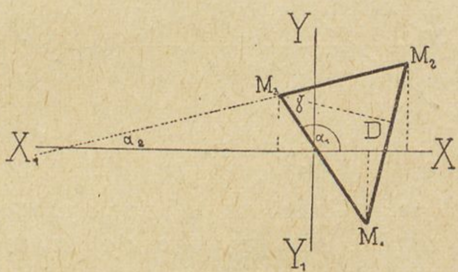
1. Določi razdaljo vzporednih premic $y = 3x + 4$ in $y = 3x - 2$!

Razrešitev. Ako izbereš v prvi premici neko točko, n. pr. M_1 (0, 4), ter načrtaš iz te točke pravokotnico na drugo premico, določiš razdaljo navedenih vzporednic.

$$d = -\frac{y_1 - 3x_1 + 2}{-\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}.$$

2. Določi v trikotniku z oglišči M_1 (3, —4), M_2 (6, 5) in M_3 (— 2, 3) notranji kot γ pri M_3 in podnožišče višine, ki pripada stranici M_1M_2 (slika 54.)!

Slika 54.



Razrešitev. *a)* Smerna koeficienta trikotnikovih stranic M_1M_3 in M_2M_3, ki oklepata kot γ, sta $A_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = -\frac{7}{5}$ in $A_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{1}{4}$.

Ker je kot $\gamma = \alpha_2 + (180^0 - \alpha_1) = 180^0 - (\alpha_1 - \alpha_2)$, najdeš po goniometrijskih pravilih $\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} (\alpha_1 - \alpha_2) = -\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{33}{13}$ in $\gamma = 68^0\, 29'\, 55''$.

b) Podnožišče višine M_3D najdeš, ako poiščeš enačbama daljic M_1M_2 in M_3D skupno razrešitev. Premica M_1M_2 gre skoz določeni točki M_1 in M_2; njena enačba je $y = 3x - 13$. Premica M_3D gre skoz določeno točko M_3 in stoji pravokotno na M_1M_2; enačba višine M_3D je $y - 3 = -\frac{1}{3}(x + 2)$. Iz navedenih enačb najdeš $x = 4{\cdot}6$ in $y = 0{\cdot}8$.

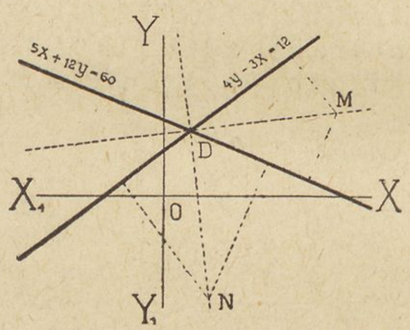
3. Določi enačbo premice, ki gre skoz točko M_1 (3, 4) in tvori s koordinatnima osema trikotnik 24 dm^2 ploščine?

Razrešitev. Če ima prémična enačba obliko $\frac{x}{C}+\frac{y}{B}=1$, je $\frac{B \cdot C}{2}$ ploščina trikotnika, ki ga tvori premica s koordinatnima osema. Po nalognih pogojih je potem $\frac{3}{C}+\frac{4}{B}=1$ in $\frac{B \cdot C}{2}=24$. Iz teh enačb najdeš $B=8$, $C=6$. Prémična enačba je torej $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$.

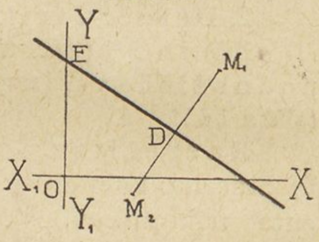
4. Določi kotom, ki jih tvorita premici $4y-3x=12$ in $5x+12y=60$, enačbi njihovih somernic!

Razrešitev. Ako izbereš v kotovih razpolovnicah DM in DN (slika 55.) premenljivi točki M in

Slika 55.



Slika 56.



N ter načrtaš iz teh točk pravokotnice na določeni premici, sta pravokotnici iz točke M nasprotni po svojih vrednostih, pravokotnici iz točke N pa enaki. V prvem slučaju je vsota, v drugem slučaju pa razlika obeh pravokotnic $=0$, v znakih

$$\left(-\frac{4y-3x-12}{5}\right)+\left(-\frac{5x+12y-60}{13}\right)=0,$$

$$\left(-\frac{4y-3x-12}{5}\right)-\left(-\frac{5x+12y-60}{13}\right)=0.$$

Ako urediš te enačbi, najdeš $56y-7x=228$ in $y+8x=18$. Primerjaj smerna koeficienta teh enačb!

5. Katera točka leži somerno s točko M_1 (7, 5) z ozirom na premico $3y+2x=16$?

Razrešitev. Ako načrtaš iz točke M_1 pravokotnico M_1D na določeno premico DE (slika 56.) ter podaljšaš to pravokotnico za njeno dolžino, najdeš somerno ležečo točko M_2 z ozirom na premico DE. Pravokotnica M_1D gre skoz točko M_1 in stoji pravokotno na premici DE; njena enačba je $y - 5 = \frac{3}{2}(x - 7)$. Iz enačb pravokotnice M_1D in premice DE najdeš koordinati točke D, in sicer je $x = 5$ in $y = 2$. Ker je točka D razpolovišče daljice M_1M_2, najdeš iz obrazcev $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ in $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ koordinati $x_2 = 3$ $y_2 = -1$ točke M_2.

Razreši še naslednje naloge:

6. Načrtaj premice: *a)* $y = 3x$, *b)* $y = -2x + 5$, *c)* $4x + 5y = 10$, *č)* $7y - 9x - 63 = 0$.

7. Določi kote, ki jih tvorijo naslednje premice z abscisno osjo: *a)* $y - x = 5$, *b)* $x + y = 1$, *c)* $y = 2x - 1$, *č)* $5x + 4y = 12$.

8. Določi odseke naslednjih premic na koordinatnih oseh: *a)* $4x + 3y = 60$, *b)* $5x - 2y = 6$, *c)* $y = 3x - 5$, *č)* $y - \frac{3}{5}x + 4 = 0$.

9. Pretvori naslednje prémične enačbe na normalno obliko: *a)* $3x - 4y - 8 = 0$, *b)* $12x + 5y = 7$, *c)* $15x + 8y + 30 = 0$, *č)* $2x - y + 3 = 0$.

10. Določi razdaljo koordinatnega izhodišča od premic: *a)* $7x - 24y + 50 = 0$, *b)* $3x + y + 6 = 0$.

11. Določi presečišče premic: *a)* $2y - x = 1$ in $y - 3x + 7 = 0$, *b)* $3x - 5y = 6$ in $15y - 9x + 1 = 0$, *c)* $x - 2 = 0$ in $x + 3y = 0$.

12. Kolik je naklonski kot premic: *a)* $y = 5x + 2$ in $3y - 2x = 0$, *b)* $4y = 9x + 3$ in $13y + 5x + 6 = 0$, *c)* $2x + y + 1 = 0$ in $3y + x - 1 = 0$?

13. Kakšno medsebojno lego imajo premice: $6y + 4x = 3$, $9y + 6x = 4$, $2y - 3x = 6$?

14. Izračunaj razdaljo: *a)* točke M_1 (2, 15) od premice $3y + 4x + 13 = 0$, *b)* točke M_2 (— 4, — 2) od premice $\frac{1}{12}y - \frac{1}{5}x = 1$, *c)* točke M_3 (3, — 6) od premice $y = \frac{2}{3}x - 4$!

15. Odloči, ali ležita točki M_1 (1, — 1), in M_2 (2, 3) na isti strani premice $x - 2y + 2 = 0$, ali na nasprotnih straneh!

16. Odloči, katera sledečih točk M_1 (1, 1), M_2 (2, 1), M_3 (— 1, — 4) in M_4 (0, — 5) leži na isti strani premice $2x - 3y = 3$ kakor koordinatno izhodišče!

17. Določi razdaljo vzporednih premic $4y - 5x - 20 = 0$ in $4y - 5x + 20 = 0$!

18. Kje ležijo točke, ki imajo od premice $8x - 15y + 34 = 0$ razdaljo $d = -5$?

19. Določi enačbo premice, ki gre skoz točki *a)* M_1 (2, 0) in M_2 (8, 5), *b)* M_3 (3, 5) in M_4 (— 4, 2), *c)* M_5 (— 1, — 3) in M_6 (— 5, 2)!

20. Določi enačbo premice, ki gre skoz točko M_1 (2, 0) in je vzporedna premici $3y = 6x + 5$!

21. Določi enačbo premice, ki gre skoz točko M_1 (— 1, 3) in stoji pravokotno na premici $4y - 3x = 4$!

22. Načrtaj skoz točko M_1 (— 2, 5) vzporednico in pravokotnico z ozirom na premico $5x + 2y = 7$ ter določi njuni enačbi!

23. Trikotnikova oglišča so M_1 (1, 2), M_2 (5, 2) in M_3 (3, 6). Določi enačbe *a)* trikotnikovih stranic, *b)* srednjic, *c)* višin!

24. Določi notranje kote trikotnika z oglišči M_1 (3, — 4), M_2 (— 2, — 1) in M_3 (2, — 3)!

25. Enačbe trikotnikovih stranic so: $2x + 7y - 3 = 0$, $y - 5x + 1 = 0$, $3x - 4y + 2 = 0$. Izračunaj ploščino na dva različna načina!

§ 32. Krog.

Občna krogova enačba.

Krog (krožnica) je po legi in velikosti določen, ako poznaš koordinati njegovega središča $S\,(p, q)$ in polmer r (**krogove stalnice**). Razdalja med premenljivo točko $M\,(x, y)$ na krogovem obodu in središčem S (slika 57.) je po pojasnilu o krogu enaka polmeru, v znakih $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = r$ ali $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$. Ta enačba se imenuje **občna krogova enačba**.

Slika 57.

Središčna krogova enačba.

Če leži krogovo središče v izhodišču soredja, je $p = 0$, $q = 0$ in krogova enačba dobi obliko $x^2 + y^2 = r^2$ (**središčna krogova enačba**).

Temenska krogova enačba.

Če leži krogovo središče v pozitivnem delu abscisne osi in se krog dotika ordinatne osi, je $p = r$ in $q = 0$, in krogova enačba dobi obliko $(x - r)^2 + y^2 = r^2$ ali $y^2 = 2rx - x^2$ (temenska krogova enačba).

Temenska krogova enačba izraža geometrijsko dejstvo, da je ordinata y srednja geometrijska sorazmernica med premerovima odsekoma x in $2r - x$, v znakih $y^2 = x.(2r - x)$.

Normalna krogova enačba.

Ako daš občni krogovi enačbi obliko

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1$$

in izvršiš v tej enačbi nakazane operacije ter jo urediš, stvoriš normalno obliko krogove enačbe, ki se glasi:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy - c = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2$$

kjer pomeni $c = r^2 - p^2 - q^2$.

Zapazimo torej, da imata pri urejeni krogovi enačbi drugi potenci premenljivk x in y koeficient $+1$.

Kakor smo pretvorili krogovo enačbo iz oblike 1 na obliko 2, tako tudi obratno lahko pretvorimo krogovo enačbo iz oblike 2 na obliko 1, ki nam neposredno podaja krogove stalnice p, q, r.

Naloga.

Določi krogove stalnice p, q, r iz njegove enačbe $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Razrešitev. V to svrho treba to enačbo, ki ima obliko 2, pretvoriti na enačbo oblike 1 in sicer potom sledeče transformacije (pretvorbe):

$$x^2 + ax + \boxed{\frac{a^2}{4}} + y^2 + by + \boxed{\frac{b^2}{4}} + c = \boxed{\frac{a^2}{4}} + \boxed{\frac{b^2}{4}}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c.$$

Če primerjamo to obliko z občno krogovo enačbo

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2,$$

mora biti:

$$p = -\frac{a}{2}, \; q = -\frac{b}{2} \text{ in } r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}};$$

reelni polmer dobimo le, če je $a^2 + b^2 > 4c$; če pa je $a^2 + b^2 < 4c$, dobimo za polmer umišljeno (imaginarno) število.

Primer: Določi p, q, r, če se glasi krogova enačba:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$$

$$x^2 - 6x + \boxed{9} + y^2 - 4y + \boxed{4} - 3 = \boxed{9} + \boxed{4}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4^2,$$

torej $p = 3$, $q = 2$, $r = 4$.

S pomočjo krogove enačbe $(x-p)^2 + (y-q)^2 - r = 0$ se da določiti lega določene točke $M_1 (x_1, y_1)$ z ozirom na krog. Zakaj izraz $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}$ pomeni razdaljo točke $M (x, y)$ od krogovega središča $S (p, q)$. Če leži točka M znotraj krožnice, je $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} < r$ ali $(x-p)^2 + (y-q)^2 < r^2$; če pa leži točka M zunaj krožnice, je $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} > r$ ali $(x-p)^2 + (y-q)^2 > r^2$. V prvem slučaju je torej izraz $(x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2$ negativen, v drugem pa pozitiven. Ta izraz (t. j. razlika med kvadratoma središčne razdalje in polmera) se imenuje vzmnož ali potenca točke M z ozirom na krog.

Potenca ali vzmnož točke z ozirom na krog.

Potenco določene točke $M_1 (x_1, y_1)$ z ozirom na določeni krog torej določiš, ako postaviš v levi del normalne krogove enačbe namesto premenljivk x in y koordinati točke M_1, v znakih $(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 - r^2$ ali $x_1^2 + y_1^2 - 2px_1 - 2qy_1 - c$.

Kako določiš lego točke z ozirom na krog.

Določena točka M_1 leži znotraj (zunaj) določenega kroga, kadar je njena potenca z ozirom na krog negativna (pozitivna).

Potence tistih točk, ki ležijo na krogovem obodu, so $= 0$.

Tolmačenje (diskusija) središčne krogove enačbe.

Ako raztolmačimo krogovo enačbo, izvemo glavne krožnične lastnosti. Da lažje izvršimo tolmačenje, si izberemo v to svrho najpreprostejšo obliko krogove enačbe, t. j. središčno enačbo. Iz $x^2 + y^2 = r^2$ sledi $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Ker pripadata vsaki krogovi abscisi dve nasprotni ordinati, se krožnica razteza somerno z ozirom na abscisno os. Za $x = 0$ sta ordinati najdaljši, namreč $= \pm r$. Od $x = 0$ do $x = \pm r$ se krajšajo ordinate. Za $x = \pm r$ sta ordinati najkrajši, namreč

= 0. Daljša od polmera ne more biti nobena abscisa, ker bi potem bila ordinata nemogoča (umišljena). Ker pripadajo nasprotnim abscisam iste ordinate, se krožnica razteza tudi somerno z ozirom na ordinatno os. Koordinatni osi razdelita torej krožnico na štiri enake dele.

Kako določiš lego premice z ozirom na krog.

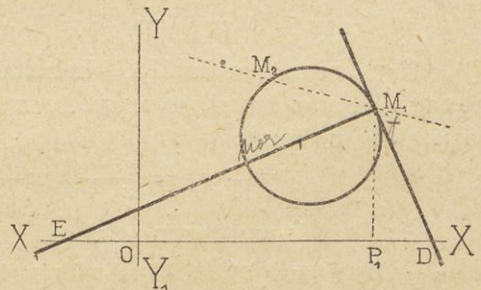
Medsebojno lego premice in krožnice določimo tako-le: Če imata enačbi premice in krožnice eno, oziroma dve skupni realni razrešitvi, ima premica s krožnico eno, oziroma dve skupni točki; premica je torej krogu tangenta, oziroma sekanta. Če pa nimata enačbi premice in krožnice nobene skupne realne razrešitve, nima premica s krogom nobene skupne točke, leži torej popolnoma zunaj kroga.

Lego premice z ozirom na krog določimo tudi, ako poiščemo razdaljo med krogovim središčem in premico ter jo primerjamo polmeru.

Dotikalne količine. Dotikalnica (tangenta). Pravokotnica (normala). Subnormala.

Dotikalnica ali tangenta ima s krogom le eno skupno točko. Tisti del te premice, ki leži med dotikališčem in presečiščem z abscisno osjo (t. j. M_1D v sliki 58.), se imenuje dolžina dotikalnice ali tangente, ali krajše tudi dotikalnica ali tangenta. Pravokotna projekcija tangente M_1D na abscisno os (t. j. P_1D v sliki 58.) se zove subtangenta.

Slika 58.



Premica, ki gre skoz dotikališče in stoji pravokotno na tangenti, je krogova pravokotnica ali normala. Tisti del te pravokotnice, ki leži med dotikališčem in presečiščem z abscisno osjo (t. j. M_1E v sliki 58.), se imenuje dolžina krogove pravokotnice ali normale, ali krajše tudi krogova pravokotnica ali normala. Pravokotni projekciji normale $M_1 E$ na abscisno os (to je $P_1 E$ v sliki 58.) se pravi subnormala. Tangenta, subtangenta, normala in subnormala se zovejo dotikalne količine točke M_1.

Kako najdeš občno tangentno enačbo pri krogu.

Sekanta $M_1 M_2$ (slika 58.) gre skoz točki M_1 (x_1, y_1) in M_2 (x_2, y_2) krogovega oboda; njena enačba je $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$. Ako zavrtiš sekanto $M_1 M_2$ okoli točke M_1 tako daleč, da se točka M_2 snide s točko M_1, preide sekanta $M_1 M_2$ v tangento $M_1 D$ in diferenčni kvocijent $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ preide v diferencijalni kvocijent $\frac{dy_1}{dx_1}$, čigar vrednost najdemo, ako diferencujemo krogovo enačbo v obliki, ki velja za točko M_1. Iz $(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2$ sledi $2(x_1 - p) + 2(y_1 - q)\frac{dy_1}{dx_1} = 0$ in $\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}$. Enačba tangente $M_1 D$ je torej

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1) \text{ ali } y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}(x - x_1).$$

Zadnjo enačbo pretvoriš na obliko, ki je nekoliko podobna obliki občne krogove enačbe, ako ji prišteješ izraz $(y_1 - q)^2 + (x_1 - p)^2 = r^2$ in potem skrčiš kolikor mogoče. Tako najdeš občno tangentno enačbo

$$(y_1 - q)(y - q) + (x_1 - p)(x - p) = r^2.$$

Enačba krogove normale.

Ker gre normala $M_1 E$ skoz točko M_1 (x_1, y_1) krogovega oboda in stoji pravokotno na tangenti $M_1 D$, je njena enačba

$$y - y_1 = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - x_1).$$

Najenostavnejša oblika tangentne enačbe pri krogu. Kako določiš medsebojno lego dveh krogov.

Če leži koordinatno izhodišče v krogovem središču, je $p = q = 0$ in $x_1 x + y_1 y = r^2$ enačba tangente.

Medsebojno lego dveh krogov določiš tako-le. Če imata enačbi obeh krožnic eno, oziroma dve skupni realni razrešitvi, imata kroga eno, oziroma dve skupni točki; kroga se torej dotikata, oziroma sekata drug drugega. Če pa nimata krožnični enačbi nobene skupne realne razrešitve, nimata kroga nobene skupne točke; eden leži torej popolnoma zunaj, oziroma znotraj drugega.

Medsebojno lego dveh krogov določiš tudi, ako poiščeš njuno središčnico ter jo primerjaš z vsoto in razliko krogovih polmerov.

Geometrijsko mesto tistih točk, ki imajo z ozirom na dva določena kroga enaki potenci, je premica (potenčna premica). Zakaj ako določiš potenci točke $M(x, y)$ z ozirom na kroga $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ in $(x-p_1)^2+(y-q_1)^2=r_1^2$ ter ju izenačiš, najdeš Potenčna premica.

$$(x-p)^2+(y-q)^2-r^2=(x-p_1)^2+(y-q_1)^2-r_1^2,$$

ali če urediš

$$2y(q_1-q)+2x(p_1-p)=r^2-p^2-q^2-r_1^2+p_1^2+q_1^2,$$

in to je enačba premice.

Potenčna premica dveh krogov stoji pravokotno na njuni središčnici; zakaj smerni koeficient središčnice je $\frac{q_1-q}{p_1-p}$ in smerni koeficient potenčne premice je $=-\frac{p_1-p}{q_1-q}$. Medsebojna lega potenčne premice in središčnice.

Če imata kroga skupno točko, mora ležati ta točka na potenčni premici, ker ima z ozirom na oba kroga enaki potenci ($=0$).

Naloge.

1. Načrtaj krog, ki mu je enačba $4x^2+4y^2-4x+16y-19=0$!

Razrešitev. Krog moreš načrtati, ako poznaš središčni koordinati p in q in polmer r. Urejeno krogovo enačbo, t. j. $x^2+y^2-x+4y=\frac{19}{4}$ pretvoriš na občno obliko ter najdeš $p=\frac{1}{2}$, $q=-2$, $r=\sqrt{\frac{19}{4}+\frac{1}{4}+4}=3$. Napravi sliko!

2. Načrtaj krog, ki gre skoz točke $M_1(4, -2)$, $M_2(-1, 3)$ in $M_3(-5, -1)$, ter mu določi enačbo!

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Koordinate določenih točk morajo ustrezati občni krogovi enačbi, to je v znakih $(4-p)^2+(-2-q)^2=r^2$, $(-1-p)^2+(3-q)^2=r^2$, $(-5-p)^2+(-1-q)^2=r^2$. Iz teh pogojnih enačb najdeš $p=-\frac{1}{2}$, $q=-\frac{3}{2}$, $r=\frac{1}{2}\sqrt{82}$. Krogova enačba je $x^2+y^2+x+3y=18$.

3. Načrtaj krog, ki gre skoz točko M_1 (6, 8) in se dotika premice $4x+3y+1=0$ v točki M_2 $(x_2, 1)$, ter mu določi enačbo!

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Iz prémične enačbe najdeš absciso točke M_2, namreč $x_2=-1$. Koordinate točk M_1 in M_2 morajo ustrezati občni krogovi enačbi, v znakih $(6-p)^2+(8-q)^2=r^2$ in $(-1-p)^2+(1-q)^2=r^2$, in pravokotnica, ki jo načrtaš iz krogovega središča na določeno premico, mora biti enaka polmeru, v znakih $r=-\frac{4p+3q+1}{-5}$. Iz navedenih pogojnih enačb najdeš $p=3$, $q=4$, $r=5$. Potem je krogova enačba $x^2+y^2-6x-8y=0$.

4. Načrtaj skoz presečišči kroga $x^2+y^2=$ $=100$ in premice $7y+x=50$ tangenti ter določi presečišče in naklonski kot teh tangent!

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Krog in premica imata skupni točki M_1 (— 6, 8) in M_2 (8, 6). Enačbi tangent, ki gresta skoz te točki, sta $-3x+$ $+4y=50$ in $4x+3y=50$. Presečišče tangent je M_3 (2, 14). Tangenti stojita pravokotno druga na drugi; to spoznaš iz njunih smernih koeficientov.

5. Načrtaj iz točke M (23, — 7) tangenti na krog $x^2+y^2=289$ ter določi njuni enačbi!

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Tangentna enačba mora imeti obliko $x_1x+y_1y=r^2=289$. Koordinati določene točke M ustrezata tangentni enačbi, v znakih $23x_1-7y_1=289$, in koordinati dotikališča ustrezata krogovi enačbi, v znakih x_1^2+ $+y_1^2=289$. Iz navedenih pogojnih enačb najdeš dotikališči M_1 (15, 8) in M_2 (8, — 15.) Enačbi tangent, ki gresta skoz te točki, sta $15x+8y=289$ in $8x-$ $-15y=289$.

6. Določi enačbe tistih tangent kroga $x^2+y^2=25$, *a)* ki so vzporedne premici $4y=$ $=3x+48$, *b)* ki stoje pravokotno na tej premici!

Razrešitev. *a)* Smerni koeficient tangente mora biti enak smernemu koeficientu določene premice, v znakih $-\frac{x_1}{y_1}=\frac{3}{4}$, in koordinati dotikališča morata ustrezati krogovi enačbi, v znakih $x_1{}^2+y_1{}^2=25$. Iz teh pogojnih enačb najdeš dotikališči M_1 $(-3, 4)$ in M_2 $(3, -4)$. Enačbi tangent, ki gresta skoz te točki, sta $-3x+4y=25$ in $3x-4y=25$ ali krajše $4y = 3x \pm 25$.

b) Smerni koeficient tangente mora biti enak negativni obratni vrednosti smernega koeficienta določene premice, v znakih $-\frac{x_1}{y_1}=-\frac{4}{3}$, in dotikališčni koordinati morata ustrezati krogovi enačbi, v znakih $x_1{}^2+y_1{}^2=25$. Iz navedenih pogojnih enačb najdeš dotikališči M_1 $(4, 3)$ in M_2 $(-4, -3)$. Enačbi tangent, ki gresta skoz te točki, sta $4x+3y=\pm 25$.

7. Kolike kote tvori premica $x+y=17$ s krogom $x^2+y^2=169$ v njunih presečiščih?

Razrešitev. Smer krožnice v določeni točki se določuje po smeri tangente v tej točki. Koti, ki jih tvori premica s krogom v presečiščih, so oni, ki jih tvori premica s krogovima tangentama v presečiščih. Navedeno nalogo razrešiš, ako določiš naklonska kota δ in δ_1 med premico in omenjenima tangentama. — Premica preseka krog v točkah M_1 $(5, 12)$ in M_2 $(12, 5)$. Enačbi krogovih tangent v teh točkah sta $5x+12y=169$ in $12x+5y=169$. Po obrazcu $\operatorname{tg}\delta=\frac{A-A_1}{1+AA_1}$ najdeš naklonski kot dveh premic, oziroma njegov sokot. V našem slučaju je $\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}\delta_1=\frac{7}{17}$ in $\delta=22^0\,22'\,48''$.

8. Kolik lok odreže premica $2y=14x-25$ od kroga $4x^2+4y^2=25$?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Krogov polmer je $r=\frac{5}{2}$. Premica ima s krogom skupni točki M_1 $(\frac{3}{2}, -2)$ in M_2 $(2, \frac{3}{2})$. Polmera točk M_1 in M_2 oklepata kot $\alpha=90^0$; zakaj njuna smerna koeficienta merita $-\frac{4}{3}$ in $\frac{3}{4}$. Lok, ki pripada središčnemu kotu α, je torej četrti del krogovega oboda, v znakih $\widehat{M_1M_2}=\frac{2\pi r}{4}=\frac{5\pi}{4}=3{\cdot}927\ldots$

9. Kolike so dotikalne količine kroga $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 9$ v točki M_1 (10, 1)?

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Krogove stalnice so $p = 5$, $q = -4$ in $r = 5\sqrt{2}$. Enačbi tangente in normale v točki M_1 sta $x + y = 11$ in $y - x + 9 = 0$. Iz teh enačb najdeš koordinate točk D in E (primerjaj sliko 58.), v katerih sekata tangenta in normala abscisno os, in sicer je D (11, 0) in E (9, 0) S pomočjo koordinat točk M_1, D in E izračunaš dotikalne količine, in sicer je tangenta $= \sqrt{2}$, subtangenta $= 1$, normala $= \sqrt{2}$ in subnormala $= 1$.

Razreši še naslednje naloge:

10. Načrtaj krog, ki mu je enačba:

a) $x^2 + (y + 5)^2 = 25$, *b)* $(x - 2)^2 + y^2 = 64$,
c) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$,
č) $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$,
d) $x^2 + y^2 - x = 0$, *e)* $2x^2 + 2y^2 - 11y = 0$.

11. Načrtaj krog, ki ima središče v točki S (— 2, 4) in se dotika abscisne (ordinatne) osi, ter mu določi enačbo!

12. Načrtaj krog, ki gre skoz koordinatno izhodišče in ima središče v točki S (3, — 6), ter mu določi enačbo!

13. Načrtaj krog, ki ima središče v točki S (— 1, 2) in se dotika premice $3x + 4y + 30 = 0$, ter mu določi enačbo!

14. Načrtaj krog, ki ima središče v presečišču premic $6x - y - 16 = 0$ in $7x - 5y - 11 = 0$ in gre skoz točko M_1 (7, 5), ter mu določi enačbo!

15. Načrtaj krog, ki gre skoz točke:

a) M_1 (6, — 4), M_2 (2, 2), M_3 (7, 1),
b) M_1 (4, — 2), M_2 (— 1, 3), M_3 (— 5, — 1),

ter mu določi enačbo!

16. Načrtaj krog, *a)* ki gre skoz točko M_1 (5, 9) in se dotika premice $4x + 3y + 3 = 0$ v točki M_2 (— 3, y_2), *b)* ki gre skoz točki M_1 (3, 4) in M_2 (— 3, 4) in se dotika premice $5y - 12x = 65$, ter mu določi enačbo!

17. Določi lego točk M_1 (0, 0), M_2 (2, — 2), M_3 (3, — 1) in M_4 (1, — 3) z ozirom na krog $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$!

18. Določi lego premic *a)* $7y - x = 25$, *b)* $3x + 4y = 25$, *c)* $5y - 3x = 34$ z ozirom na krog $x^2 + y^2 = 25$!

19. Enačbi dveh krogov sta $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$ in $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$; določi enačbo *a)* središčnice, *b)* potenčne premice!

20. Kolik lok odreže premica $x + y = 17$ od kroga $x^2 + y^2 = 169$?

21. Kolik središčni kot pripada tetivi $y = x + 14$ kroga $x^2 + y^2 = 100$?

22. Kolik kot oklepata tangenti, ki gresta skoz presečišči kroga $x^2 + y^2 = 25$ in premice $y + 7x = 25$?

23. Načrtaj iz točke M_1 ($-$ 14, 2) tangenti na krog $x^2 + y^2 = 100$ ter določi enačbe tangent in dotikalne tetive!

24. Določi pri krogu $x^2 + y^2 = 169$ enačbe tistih tangent, *a)* ki so vzporedne premici $5y + 12x = 7$, *b)* ki stoje pravokotno na tej premici!

25. Kolike kote tvori premica $y + x = 23$ s krogom $x^2 + y^2 = 289$ v njunih presečiščih?

26. Določi za točko M (17, 10) kroga $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 119$ dotikalne količine!

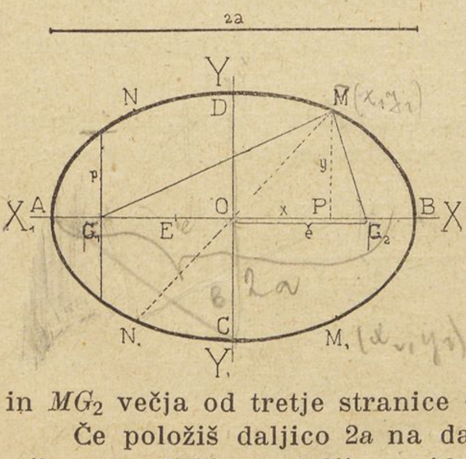
27. Koliko sta središči krogov $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 24$ in $x^2 + y^2 - x + 20y = 10$ oddaljeni od potenčne premice?

§ 34. Elipsa.

Pojasnilo o elipsi.

Elipsa je kriva črta, v kateri je vsota razdalj vsake točke M od dveh nepremičnih točk G_1 in G_2 enaka določeni daljici ($2a$), v znakih $MG_1 + MG_2 = 2a$. Nepremični točki G_1 in G_2 se imenujeta elipsni žarišči, razdalji elipsne točke M od žarišč G_1 in G_2 pa prevodnici (radius vektorja) točke M (slika 59). Če zaznamuješ razdaljo med žariščema z $2e$, je $2a > 2e$ (torej $a > e$); zakaj v vsakem trikotniku je vsota dveh stranic MG_1 in MG_2 večja od tretje stranice G_1G_2.

Slika 59.



Kako določiš elipsne točke.

Če položiš daljico $2a$ na daljico $2e$ tako, da se stikata središči teh daljic, najdeš elipsni točki A in

B; zakaj vsota prevodnic točke A, oziroma točke B je $= 2a$. Če izbereš na daljici $2a = AB$ točko E ter narišeš iz žarišča G_1 lok s polmerom EB in iz žarišča G_2 lok s polmerom EA, najdeš v presečiščih teh lokov elipsni točki M in M_1; če pa narišeš iz žarišča G_1 lok s polmerom EA in iz žarišča G_2 lok s polmerom EB, najdeš v presečiščih teh lokov elipsni točki N in N_1. Ako izbereš na AB kako drugo med žariščema ležečo točko, najdeš na isti način štiri druge elipsne točke.

Središčna elipsna enačba.

Če položiš skoz razpolovišče O daljice AB pravokotno soredje tako, da stoji ordinatna os pravokotno na daljici AB, so točke M, G_1, G_2 določene po: $M(x, y)$, $G_1(-e, o)$, $G_2(e, o)$, in prevodnici MG_1 in MG_2 (razdalji po dveh točk) določeni po: $MG_1 = \sqrt{(x+e)^2+y^2}$, $MG_2 = \sqrt{(x-e)^2+y^2}$. Z ozirom na pojasnilo o elipsi je potem

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a.$$

Če odpraviš iz te enačbe korene, najdeš

$$(a^2-e^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2-e^2),$$

in če postaviš $a^2 - e^2 = b^2$, je

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ ali } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Ta enačba se zove **središčna elipsna enačba**; količini a in b sta **elipsni stalnici**.

Dolžina elipsnih prevodnic.

Zgoraj navedena izraza za prevodnici elipsne točke M pretvoriš na enostavnejšo obliko tako-le: Iz

$$\left.\begin{aligned}\overline{MG_1}^2 &= (x+e)^2+y^2\\ \overline{MG_2}^2 &= (x-e)^2+y^2\end{aligned}\right\}\text{ odšteto}$$

sledi $\overline{MG_1}^2 - \overline{MG_2}^2 = 4ex$,

in če razstaviš razliko kvadratov na faktorja in porabiš pojasnilno enačbo $MG_1 + MG_2 = 2a$, najdeš $MG_1 - MG_2 = \frac{2ex}{a}$. Potem je

$$MG_1 = a + \frac{ex}{a} \text{ in } MG_2 = a - \frac{ex}{a}.$$

Iz elipsne enačbe $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sledi $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Ker pripadata vsaki elipsni abscisi dve nasprotni ordinati, se razteza elipsa somerno z ozirom na abscisno os. Za $x = 0$ sta ordinati najdaljši, namreč $= \pm b$. Od $x = 0$ do $x = \pm a$ se krajšajo ordinate. Za $x = \pm a$ sta pripadajoči ordinati najkrajši, namreč $= 0$. Daljša od a ne more biti nobena abscisa, ker bi potem bila ordinata nemogoča (umišljena). Ker pripadajo nasprotnim abscisam iste ordinate, se razteza elipsa tudi somerno z ozirom na ordinatno os. Koordinatni osi razdelita torej elipso na štiri enake dele.

Tolmačenje elipsne enačbe.

Elipsni stalnici a in b pomenita odseke, ki jih napravi elipsa na koordinatnih oséh. Krajišča teh odsekov (to so točke A, B, C, D v sliki 59.) se imenujejo elipsni vrhovi.

Pomen elipsnih stalnic.

Daljice, ki spajajo po dve elipsni točki, se imenujejo tetive. Važne so v prvi vrsti tetive, ki gredo skoz koordinatno izhodišče. Enačbe takih tetiv imajo obliko $y = Ax$.

Elipsne tetive.

Premica MN_1, ki gre skoz koordinatno izhodišče, ima z elipso skupni točki M in N_1. Ti točki določiš, ako poiščeš enačbama elipse in premice skupni razrešitvi. Iz $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ in $y = Ax$ najdeš

Elipsno središče in elipsni premeri.

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2A^2}} \text{ in } y = \pm \frac{ab\,A}{\sqrt{b^2 + a^2A^2}}, \text{ t. j.}$$

točki M in N_1 imata nasprotni koordinati. Ako izračunaš daljici OM in ON_1, dobiš enaka rezultata; točka O razpolavlja torej tetivo MN_1. Zaradi te lastnosti se imenuje točka O elipsno središče, in tetive, ki gredo skoz točko O, se zovejo elipsni premeri.

Dolžina premera MN_1 je

Dolžina elipsnih premerov. Velika in mala os.

$$MN_1 = 2 . OM = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ako postaviš za y vrednost iz elipsne enačbe, najdeš

$$MN_1 = 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}} = \frac{2}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)\,x^2 + a^2b^2}.$$

Iz tega izraza sledi, da so elipsni premeri tem večji, čim večjo absolutno vrednost imajo abscise njihovih krajišč. Za $x = 0$ je premer najmanjši, namreč $= 2b$; za $x = a$ je premer največji, namreč $= 2a$.

Največji elipsni premer se imenuje velika os, najmanjši pa mala os.

Dolgostna izsrednost.

Razdalja elipsnega središča od enega izmed žarišč se imenuje dolgostna izsrednost ali ekscentričnost. Iz zgoraj navedene enačbe $b^2 = a^2 - e^2$ je $e^2 = a^2 - b^2$, t. j. dolgostna izsrednost pri elipsi je ena kateta pravokotnega trikotnika, kateremu je polovica velike osi hipotenuza, polovica male osi pa druga kateta.

Parameter.

Elipsna tetiva, ki gre skoz žarišče in stoji pravokotno na veliki osi, se zove parameter. Parameter je sestavljen iz dveh nasprotnih ordinat, ki imata skupno absciso $+ e$, oziroma $- e$. Ako zaznamuješ polovico parametra $= p$ ter postaviš v elipsno enačbo e namesto x in p namesto y, najdeš

$$p = \sqrt{\frac{b^2(a^2 - e^2)}{a^2}} = \frac{b^2}{a}, \text{ t. j.}$$

polovica parametra je tretja geometrijska sorazmernica polovicama velike in male osi.

Elipsi očrtani krog.

Ako očrtaš elipsi krog, imata obe krivi črti iste abscise. Vsaki abscisi x pripadata krogova ordinata η in elipsna ordinata y (slika 60.). Iz krogove in elipsne enačbe najdeš

$$\eta^2 = a^2 - x^2 \quad \text{in} \quad y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2},$$

torej

$$\eta : y = a : b, \text{ t. j.:}$$

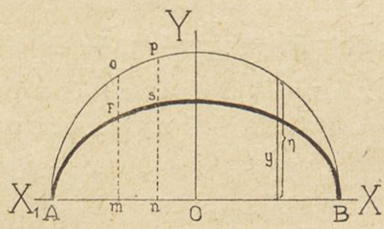
Ako očrtaš elipsi krog, sta si krogova in elipsna ordinata, ki pripadata isti abscisi, kakor polovici velike in male osi.

Elipsna ploščina.

Ako načrtaš v krogu, ki je očrtan elipsi, ordinate drugo tik druge, razpade krogova in elipsna ploščina na zelo ozke proge, ki jih smeš smatrati za trapeze. Dva trapeza z isto višino sta si kakor njuni srednjici.

Progi (trapeza) *mnpo* in *mnsr* imata isto višino *mn* (slika 60.); njuni srednjici sta krogova in elipsna ordinata, ki pripadata isti abscisi. Z ozirom na zgoraj navedeni izrek o teh ordinatah sta si torej progi *mnpo* in *mnsr* kakor polovici velike in male osi. Isto velja tudi o dveh drugih progah, ki pripadata druga drugi. Ako so P_1, P_2, P_3 ... proge krožne ploskve in p_1, p_2, p_3 ... pripadajoče proge elipsne ploskve, je po navedenem

Slika 60.



$$P_1 : p_1 = P_2 : p_2 = P_3 : p_3 = \ldots = a : b.$$

Iz tega zaporednega sorazmerja najdeš

$$\underbrace{(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)}_{a^2\pi} : \underbrace{(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots)}_{p} = a : b$$

in

$$p = ab\pi.$$

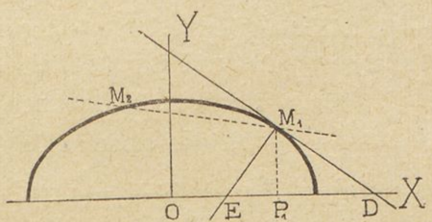
Ploščino elipsne ploskve izračunaš, ako pomnožiš produkt iz polovice velike in male osi z Ludolfovim številom.

Lega premice z ozirom na elipso.
Dotikalne količine pri elipsi.
Kako najdeš enačbo tangente pri elipsi.

Lego premice z ozirom na elipso določiš istotako, kakor se določi lega premice z ozirom na krog.

Dotikalne količine pri elipsi imajo isti pomen kakor pri krogu.

Slika 61.



Sekanta M_1M_2 (slika 61.) gre skoz elipsni točki M_1 (x_1, y_1) in $M_2 (x_2, y_2)$; njena enačba je $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$. Če zavrtiš sekanto $M_1 M_2$ okoli točke M_1 tako daleč, da se točka M_2 stika s točko M_1, preide sekanta M_1M_2 v tangento M_1D in diferenčni kvocijent $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ preide v diferencijalni kvocijent $\frac{dy_1}{dx_1}$, čigar vrednost najdemo, ako diferencujemo elipsno enačbo v obliki, ki velja za točko M_1. Iz $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$ sledi $2b^2x_1 + 2a^2y_1 \frac{dy_1}{dx_1} = 0$ in $\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. Enačba tangente M_1D je torej

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1) \text{ ali } y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1).$$

Če urediš zadnjo enačbo in uporabiš $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$, najdeš za enačbo tangente obliko

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2,$$

ki nekoliko spominja na elipsno enačbo.

Enačba elipsne normale.

Ker gre normala M_1E skoz točko M_1 (x_1, y_1) in stoji pravokotno na tangenti, je njena enačba

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1).$$

Naloge.

1. Določi središčno enačbo one elipse, ki gre skoz točki M_1 $(3, \frac{12}{5})$ in M_2 $(-4, \frac{9}{5})$, ter jo načrtaj!

Razrešitev. Koordinate določenih točk ustrezajo elipsni enačbi, v znakih $\frac{9}{a^2} + \frac{144}{25b^2} = 1$ in $\frac{16}{a^2} + \frac{81}{25b^2} = 1$. Iz teh enačb najdeš $a^2 = 25$ in $b^2 = 9$. Elipsna enačba je $9x^2 + 25y^2 = 225$. – Za načrtovanje elipse potrebuješ veliko os $2a = 10$ in dolgostno izsrednost $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Napravi sliko!

2. Katere točke elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ imajo od žarišč razdaljo $r = 7\frac{1}{4}$?

Razrešitev. Iz obrazca za prevodnico, t. j. iz $r = a \pm \frac{ex}{a}$ najdeš abscisi, iz elipsne enačbe pa ordinate dotičnih točk. $x = \pm \frac{15}{4}, y = \pm \sqrt{7}$.

3. Kolik je premer elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, ki stoji pravokotno na premici $2y + 3x = 10$?

Razrešitev. Smerni koeficient premera je $= \frac{2}{3}$. Presečišči premera in elipse sta M_1 $(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2})$ in M_2 $(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Dolžina premera $= \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{26}$.

4. Določi one točke elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, v katerih stojita prevodnici *a)* pravokotno druga na drugi, b) v katerih tvorita kot 45^0!

Razrešitev. *a)* Ako načrtaš iz elipsnega središča krog s polmerom dolgostne izsrednosti, najdeš v presečiščih kroga in elipse tiste točke, v katerih tvorijo prevodnice prave kote. Kako izračunaš koordinate teh točk? Ali so take točke v vsakem slučaju mogoče?

b) Recimo, da sta x_1 in y_1 koordinati tiste elipsne točke, v kateri tvorita prevodnici kot 45^0. Smerna koeficienta teh prevodnic sta $A = \frac{y_1}{x_1 - e}$ in $A_1 = \frac{y_1}{x_1 + e}$. Kot, ki ga oklepata prevodnici, je določen po obrazcu $\operatorname{tg} \delta = \frac{A - A_1}{1 + AA_1}$. Ako postaviš v ta obrazec vrednosti za A, A_1 in $\operatorname{tg} \delta$, najdeš enačbo $x_1^2 + y_1^2 - 2ey_1 = e^2$, ki predstavlja krog s središčem $S(o, e)$ in polmerom $r = e\sqrt{2}$. V presečiščih tega kroga in elipse najdeš točke, ki jih iščeš.

5. Kolik je pravokotnik, ki ga stvoriš iz pravokotnic, ki ju narišeš iz žarišč elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ na tangento te črte?

Razrešitev. Ako pretvoriš enačbo elipsne tangente na normalno obliko, najdeš za pravokotnici iz žarišč na tangento izraza

$$p_1 = - \frac{- b^2ex_1 - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}} \text{ in } p_2 = - \frac{b^2ex_1 - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}.$$

Produkt teh izrazov je

$$p_1p_2 = \frac{a^4b^4 - b^4e^2x_1^2}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}.$$

Ker pa je $a^2y_1^2 = a^2b^2 - b^2x_1^2$, najdeš $a^4y_1^2 = a^4b^2 - a^2b^2x_1^2$ in

$$p_1p_2 = \frac{b^4(a^4 - e^2x_1^2)}{b^4x_1^2 + a^4b^2 - a^2b^2x_1^2} = \frac{b^4(a^4 - e^2x_1^2)}{b^2(a^4 - e^2x_1^2)} = b^2.$$

Razreši še naslednje naloge:

6. Načrtaj elipso, v kateri je velika os $2a = 10$ in mala os $2b = 6$!

7. Načrtaj elipso, ki gre skoz točko M_1 (5, $\frac{3}{2}$) in v kateri je razdalja žarišč $2e = 6$!

8. Načrtaj elipso $16x^2 + 25y^2 = 400$ ter izračunaj parameter in ploščino?

9. Določi enačbo elipse, ki gre skoz točko M_1 (2, 1) in v kateri je velika os $2a = 8$!

10. Določi pri elipsi $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{49} = 1$ tiste točke, ki imajo od žarišč razdaljo 10!

11. Določi lego premice a) $2x + 3y = 5$, b) $y - 2x = 1$, c) $x - y = 3$ z ozirom na elipso $x^2 + 4y^2 = 4$!

12. Kolika je tetiva, katero odreže elipsa $9x^2 + 25y^2 = 225$ na premici $5y + 9x = 45$?

13. Določi pri elipsi $16x^2 + 25y^2 = 400$ tisti premer, ki je vzporeden premici $5y = 3x + 10$!

14. Načrtaj skoz presečišči elipse $25x^2 + 36y^2 = 900$ in premice $6y = 5x - 6$ tangenti ter določi njuni enačbi!

15. Določi pri elipsi $9x^2 + 16y^2 = 144$ enačbi tistih tangent, ki so vzporedne premici $5y = 9x + 14$!

16. Kolike so dotikalne količine elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ v točki M_1 $(4, y_1 > 0)$?

17. Kolike kote tvorita premica $x = y + 5$ in elipsa $16x^2 + 25y^2 = 400$ v njunih presečiščih?

18. Določi enačbi tistih tangent, ki jih načrtaš iz točke M_1 (15, 10) na elipso $4x^2 + 9y^2 = 36$!

§ 35. Hiperbola.

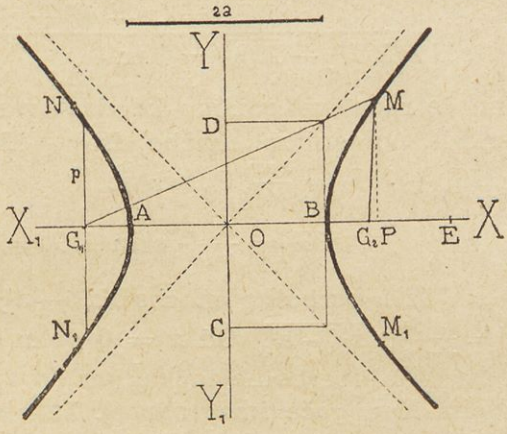
Hiperbola. Pojasnilo o hiperboli. Žarišče. Prevodnica.

Hiperbola je kriva črta, v kateri je razlika razdalj vsake točke M od dveh nepremičnih točk G_1 in G_2 enaka določeni daljici ($2a$), v znakih $MG_1 - MG_2 = 2a$. Nepremični točki G_1 in G_2 se imenujeta **hiperbolni žarišči**, razdalji hiperbolne točke M od žarišč G_1 in G_2 pa **prevodnici** točke M (slika 62.). Če zaznamuješ razdaljo med žariščema z $2e$, je $2e > 2a$ (torej $e > a$); zakaj v vsakem trikotniku je razlika dveh stranic MG_1 in MG_2 manjša od tretje stranice G_1G_2.

Kako določiš hiperbolne točke.

Če položiš daljico $2a$ na $2e$ tako, da se stikata središči teh daljic, najdeš hiperbolni točki A in B; zakaj razlika prevodnic točke A, oziroma točke B je $= 2a$. Ako izbereš na podaljšku daljice $2a = AB$ točko E, ki leži zunaj žarišč G_1 in G_2, ter narišeš iz žarišča G_1 lok s polmerom EA in iz žarišča G_2 lok s polmerom EB, najdeš v presečiščih teh lokov hiperbolni točki M in M_1; če pa narišeš iz žarišča G_1 lok s polmerom EB in iz žarišča G_2 lok s polmerom EA, najdeš v presečiščih teh lokov hiperbolni točki N in N_1. Ako izbereš na podaljšani daljici AB kako drugo zunaj žarišč ležečo točko, najdeš na isti način štiri druge hiperbolne točke.

Slika 62.



Središčna hiperbolna enačba. Hiperbolni stalnici.

Če položiš skoz razpolovišče daljice AB pravokotno soredje tako, da stoji ordinatna os pravokotno na AB, so točke M, G_1, G_2 določene po: $M\ (x, y)$, $G_1\ (-e, o)$, $G_2\ (e, o)$, in prevodnici MG_1 in MG_2 (razdalji po dveh točk) določeni po: $MG_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$ in $MG_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$. Z ozirom na pojasnilo o hiperboli je potem

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 - y^2} = 2a.$$

Če odpraviš iz te enačbe korene, dobiš

$$(e^2 - a^2)\, x^2 - a^2 y^2 = a^2 (e^2 - a^2),$$

in če postaviš $e^2 - a^2 = b^2$, najdeš

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \text{ ali } \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Ta enačba se zove *središčna hiperbolna enačba*; količini a in b sta *hiperbolni stalnici*.

Dolžina hiperbolnih prevodnic.

Zgoraj navedena izraza za prevodnici pretvoriš na enostavnejšo obliko tako-le. Iz

$$\left.\begin{aligned}\overline{MG_1}^2 &= (x+e)^2+y^2\\ \overline{MG_2}^2 &= (x-e)^2+y^2\end{aligned}\right\}\text{ odšteto}$$

sledi $\overline{MG_1}^2 - \overline{MG_2}^2 = 4ex$,

in če razstaviš razliko kvadratov na faktorja in porabiš pojasnilno enačbo $MG_1 - MG_2 = 2a$, najdeš $MG_1 + MG_2 = \frac{2ex}{a}$. Potem je

$$MG_1 = \frac{ex}{a} + a \text{ in } MG_2 = \frac{ex}{a} - a.$$

Tolmačenje (diskusija) hiperbolne enačbe.

Iz hiperbolne enačbe $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ sledi $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Od $x = 0$ do $x = \pm a$ ni nobene (reelne) hiperbolne točke, ker so v teh slučajih ordinate nemogoče (imaginarne). Za $x = \pm a$ sta ordinati najmanjši, namreč $= 0$. Od $x = \pm a$ do $x = \pm \infty$ pripadata vsaki hiperbolni abscisi dve nasprotni ordinati, ki se vedno daljšata, če se veča absolutna vrednost za x. Hiperbola je torej sestavljena iz dveh delov (vej), ki se raztezata somerno ob abscisni osi od točk $+a$ in $-a$ v neskončno daljavo. Ker pripadajo dvema nasprotnima abscisama iste ordinate, ležita hiperbolni veji tudi somerno z ozirom na ordinatno os.

Hiperbolna temena.

Hiperbola preseka abscisno os v razdaljah $+a$ in $-a$; ordinatna os nima s hiperbolo nobene skupne točke. Krajišči odsekov $+a$ in $-a$ (to sta točki A in B v sliki 62.) se zoveta hiperbolna temena.

Hiperbolne tetive.

Daljice, ki spajajo dve hiperbolni točki, se imenujejo tetive. Važne so v prvi vrsti tiste tetive, ki gredo skoz koordinatno izhodišče. Enačbe takih tetiv imajo obliko $y = Ax$.

Hiperbolno središče in hiperbolni premeri.

Premica MN_1, ki gre skoz koordinatno izhodišče, ima s hiperbolo skupni točki M in N_1. Te točki določiš, ako poiščeš hiperbolni in prémični enačbi skupni razrešitvi. Iz $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ in $y = Ax$ najdeš

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2A^2}} \text{ in } y = \pm \frac{abA}{\sqrt{b^2 - a^2A^2}}, \text{ t. j.}$$

točki M in N_1 imata nasprotni koordinati. Ako izračunaš daljici OM in ON_1, dobiš enaka rezultata; točka O torej razpolavlja tetivo MN_1. Zaradi te lastnosti se imenuje točka O hiperbolno središče, in tetive, ki gredo skoz točko O, se zovejo hiperbolni premeri.

Dolžina hiperbolnih premerov. Glavna os.

Dolžina premera MN_1 je

$$MN_1 = 2 \cdot OM = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ako postaviš za y vrednost iz hiperbolne enačbe, najdeš

$$MN_1 = 2\sqrt{x^2 + \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2}} = \frac{2}{a}\sqrt{(a^2 + b^2)\,x^2 - a^2b^2}.$$

Iz tega izraza sledi, da so hiperbolni premeri tem večji, čim večjo absolutno vrednost imajo abscise njihovih krajišč. Za $x = a$ je premer najmanjši, namreč $= 2a$. Največji premer se ne da določiti, ker je neskončno velik.

Najmanjši hiperbolni premer se imenuje glavna os.

Stranska os.

Na ordinatni osi ležeča daljica $CD = 2b$, katero po prejšnjem določa izraz $2b = 2\sqrt{e^2 - a^2}$, se zove hiperbolna stranska os.

Hiperbolna asimptota.

Premica, ki gre skoz hiperbolno središče, preseka hiperbolo v dveh točkah, čijih koordinate določata izraza

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2A^2}} \text{ in } y = \pm \frac{abA}{\sqrt{b^2 - a^2A^2}}.$$

Iz teh izrazov sledi, da more presekati premica $y = Ax$ hiperbolo le tedaj, kadar je $b^2 > a^2A^2$ ali $A^2 < \frac{b^2}{a^2}$; če je pa $b^2 < a^2A^2$ ali $A^2 > \frac{b^2}{a^2}$, nima premica s hiperbolo nobene skupne točke. — Premica $y = Ax$ preseka hiperbolo v neskončni daljavi, če postaneta koordinati presečišč neskončno veliki. To se zgodi, če je $b^2 = a^2A^2$ ali $A = \pm \frac{b}{a}$. Take premice se imenujejo hiperbolne asimptote. Vsaka hiperbola ima dve asimptoti; njuni enačbi sta $y = \pm \frac{b}{a} x$. Primerjaj sliko 62!

Lastnost hiperbolnih asimptot.

Da se asimptoti vedno bližata hiperbolnima vejama, uvidiš, ako določiš razliko med asimptotno in hiperbolno ordinato, ki imata isto absciso. Iz

$$\eta = \pm \frac{b}{a} x \quad \text{ali} \quad \left.\begin{aligned} \eta^2 &= \frac{b^2}{a^2} x^2 \\ \text{in} \quad y^2 &= \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2} \end{aligned}\right\} \text{odšteto}$$

sledi $(\eta + y)(\eta - y) = b^2$;

torej je $\eta - y = \frac{b^2}{\eta + y}$. — Kaj pravi ta izraz?

Dolgostna izsrednost.

Razdalja hiperbolnega središča od enega izmed žarišč se imenuje dolgostna izsrednost ali ekscentričnost. Iz zgoraj navedene enačbe $b^2 = e^2 - a^2$ je $e^2 = a^2 + b^2$, t. j. dolgostna izsrednost pri hiperboli je hipotenuza pravokotnega trikotnika, čigar kateti sta polovici glavne in stranske osi.

Parameter.

Hiperbolna tetiva, ki gre skoz žarišče in stoji pravokotno na glavni osi, se zove parameter. Na isti način kakor pri elipsi najdeš tudi pri hiperboli za polovico parametra izraz $p = \frac{b^2}{a}$, t. j. polovica parametra je tretja geometrijska sorazmernica polovicama glavne in stranske osi.

Lega premice z ozirom na hiperbolo. Dotikalne količine. Enačba hiperbolne tangente. Enačba hiperbolne normale.

Lego premice z ozirom na hiperbolo določiš istotako, kakor se določi lega premice z ozirom na elipso.

Dotikalne količine pri hiperboli imajo isti pomen kakor pri elipsi.

Enačba hiperbolne tangente je $b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$; določiš jo na isti način kakor pri elipsi.

Enačbo normale določiš pri hiperboli istotako kakor pri elipsi:

$$y - y_1 = - \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1).$$

Enakostranična hiperbola.

Hiperbola, v kateri sta osi enaki, se imenuje enakostranična. Njena enačba je $x^2 - y^2 = a^2$.

Naloge.

1. V katerih točkah hiperbole $9x^2 - 16y^2 = 576$ je produkt prevodnic $= 213\frac{7}{9}$?

Razrešitev. Ako daš hiperbolni enačbi obliko $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, najdeš $a = 8$ in $b = 6$. Potem je $e = 10$. Iz pogoja $r_1 r_2 = \left(\frac{ex}{a} + a\right)\left(\frac{ex}{a} - a\right)$ najdeš $x = \pm\frac{40}{3}$, iz hiperbolne enačbe pa $y = \pm 8$.

2. V katerih točkah hiperbole $4x^2 - 9y^2 = 36$ je subtangenta $= 8$?

Razrešitev. Iz enačbe hiperbolne tangente najdeš absciso tiste točke, v kateri preseka tangenta abscisno os, t. j. $x = \frac{a^2}{x_1}$. Potem je subtangenta $= x_1 - x = x_1 - \frac{a^2}{x_1}$. Ta izraz je pri eni hiperbolni veji pozitiven, pri drugi negativen; zato je pri navedeni nalogi $8 = \pm\left(x_1 - \frac{a^2}{x_1}\right)$. Iz te enačbe najdeš $x_1 = \pm 9$, iz hiperbolne enačbe pa $y_1 = \pm\sqrt{40}$.

3. Dokaži, da razpolavlja dotikališče vsake hiperbolne tangente oni del tangente, ki leži med asimptotama!

Razrešitev. Hiperbolna tangenta preseka asimptoti v točkah $M_2\left(\frac{a^2b}{bx_1 - ay_1}, \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}\right)$ in $M_3\left(\frac{a^2b}{bx_1 + ay_1}, -\frac{ab^2}{bx_1 + ay_1}\right)$. Ako poiščeš razpolovišču daljice M_2M_3 koordinati, najdeš x_1 in y_1, t. j. koordinati tangentnega dotikališča.

Razreši še naslednje naloge:

4. Načrtaj hiperbolo, v kateri meri glavna os $2a = 8$, stranska os pa $2b = 6$!

5. Načrtaj hiperbolo, ki gre *a)* skoz točki M_1 (3, 2) in M_2 (4, 3), *b)* skoz točki M_3 (5, 3) in M_4 (8, — 10) ter določi njeno enačbo!

6. Načrtaj hiperbolo *a)* $9x^2 - 16y^2 = 144$, *b)* $x^2 - y^2 = 25$, *c)* $5x^2 - 4y^2 = 20$ ter določi parameter in dolgostno izsrednost!

7. Določi prevodnice hiperbole $x^2 - 4y^2 = 4$ v točkah M_1 $(x_1 > 0, \sqrt{3})$ in M_2 $(x_1 < 0, -\frac{1}{2}\sqrt{5})$!

8. Določi lego premic *a)* $6y = 5x + 8$, *b)* $y = 2x + 3$, *c)* $6y + 7x = 22$ z ozirom na hiperbolo $x^2 - 4y^2 = 4$!

9. Kolik kot oklepata asimptoti hiperbole *a)* $4x^2 - 9y^2 = 36$, *b)* $x^2 - y^2 = 36$, *c)* $4x^2 - 5y^2 = 100$?

10. Kolik je premer hiperbole $16x^2 - 9y^2 = 144$, ki je vzporeden premici $5y + 4x = 10$?

11. Določi pri hiperboli $9x^2 - 4y^2 = 36$ ($4x^2 - y^2 = 1$) enačbi tangent, ki so vzporedne premici $4y - 9x + 20 = 0$ ($y = 3x + 5$)!

12. V katerih točkah hiperbole $9x^2 - 7y^2 = 63$ stojita prevodnici pravokotno druga na drugi?

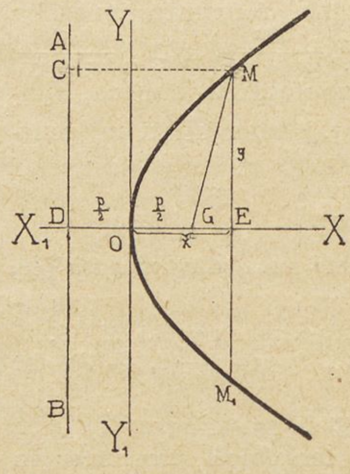
13. Določi dotikalne količine hiperbole $64x^2 - 25y^2 = 1600$ v točki M_1 $(13, y_1 > 0)$!

§ 36. Parabola.

Parabola. Pojasnilo o paraboli. Žarišče. Vodnica. Prevodnica.

Parabola je kriva črta, v kateri je vsaka točka M enako oddaljena od nepremične točke G in od nepremične premice AB, v znakih $MG = MC$ (slika 63.). Točka G se imenuje **žarišče**, premica AB je **vodnica**, razdalja parabolne točke M od žarišča G pa **prevodnica**.

Slika 63.



Kako določiš parabolne točke.

Ako načrtaš iz žarišča G pravokotnico GD na vodnico AB in razpoloviš to razdaljo, najdeš točko O, ki leži v paraboli. Ta točka je teme parabole. Če izbereš na podaljšani daljici GD točko E, postaviš v tej točki pravokotnico MM_1 na DG ter narišeš iz žarišča G lok s polmerom ED, najdeš v presečiščih tega loka in pravokotnice MM_1 dve parabolni točki. Na isti način določiš tudi druge parabolne točke.

Če položiš skoz parabolno teme pravokotno soredje tako, da stoji ordinatna os pravokotno na DG, in če zaznamuješ $GD = p$ in $M(x, y)$, je

Temenska parabolna enačba.

$$MG = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \text{ in } MC = ED = x + \frac{p}{2}.$$

Z ozirom na pojasnilo o paraboli je

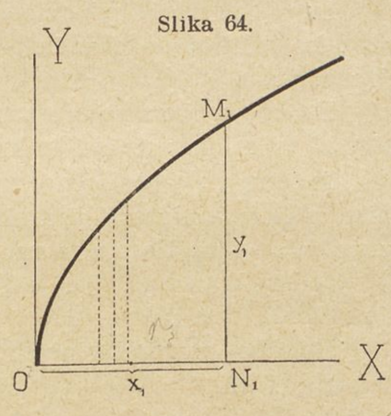
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Ako urediš to enačbo, najdeš temensko parabolno enačbo $y^2 = 2px$.

Tolmačenje parabolne enačbe. Parameter.

Iz parabolne enačbe $y^2 = 2px$ sledi $y = \pm\sqrt{2px}$. Ob negativnem delu abscisne osi ni nobene parabolne točke, ker so za negativne abscise ordinate nemogoče. Za $x = 0$ je $y = 0$; parabola se začne v koordinatnem izhodišču. Od $x = 0$ do $x = \infty$ pripadata vsaki parabolni abscisi dve nasprotni ordinati, ki se daljšata, če se veča vrednost za x. Parabola se torej razteza ob pozitivnem delu abscisne osi somerno v neskončno daljavo. Abscisna os je obenem parabolna os. — Za $x = \frac{p}{2}$ je $y = \pm p$. Tetiva, ki gre skoz žarišče in stoji pravokotno na parabolni osi, se imenuje parameter; njegova dolžina je $= 2p$.

Slika 64.



Ploščina parabolnega izseka.

Ploskev parabolnega izseka, ki ga oklepajo parabolni lok in koordinati x_1 in y_1 katerekoli točke M_1 na paraboli (slika 64.), določiš tako-le. Ako razrežeš izsek ON_1M_1 z daljicami, ki so vzporedne ordinati $y_1 = M_1N_1$ na ozkih progah, čijih širina je $= dx$, razpade omenjeni izsek na mnogo pravokotnikov. Ploščina enega teh pravokotnikov je $= y \cdot dx$ in vsota vseh pravokotnikov je določeni integral navedenega izraza od $x = 0$ do $x = x_1$, t. j. v znakih

$$P = \int_0^{x_1} y \cdot dx.$$

Ako postaviš za y vrednost iz parabolne enačbe, najdeš

$$P = \int_0^{x_1} y dx = \int_0^{x_1} \sqrt{2px} \cdot dx = \sqrt{2p} \int_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} x_1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x_1 \sqrt{2px_1} = \frac{2}{3} x_1 y_1,$$

ker je namreč po parabolni enačbi $\sqrt{2px_1} = y_1$.

Parabolni izsek, ki ga oklepajo parabolni lok in koordinati skrajne točke na tem loku, je torej $= \frac{2}{3}$ produkta iz koordinat skrajne točke.

Lega premice z ozirom na parabolo. Enačba parabolne tangente

Lego premice z ozirom na parabolo določiš istotako, kakor se določa lega premice z ozirom na elipso.

Enačba parabolne tangente je $y_1 y = p(x_1 + x)$, najdeš jo na isti način kakor pri elipsi.

Lastnost parabolne subtangente.

Iz enačbe parabolne tangente dobiš za absciso tiste točke, v kateri preseka tangenta abscisno os, izraz $x = - x_1$. Potem je subtangenta $= x_1 - x = 2x_1$, t. j. subtangenta je enaka dvojni abscisi dotikališča.

Enačba parabolne normale.

Enačbo normale najdeš pri paraboli istotako kakor pri elipsi

$$y - y_1 = - \frac{y_1}{p} (x - x_1).$$

Lastnost parabolne subnormale.

Iz enačbe parabolne normale dobiš za absciso točke, v kateri preseka normala abscisno os, izraz $x = p + x_1$. Potem je subnormala $= x - x_1 = p$, t. j. subnormala je enaka polovici parametra.

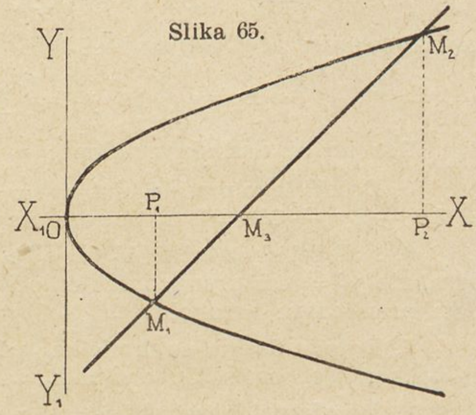
Naloge.

1. Določi temensko enačbo parabole, ki gre skoz točko M_1 (3, 3), ter jo načrtaj!

Razrešitev. Koordinati točke M_1 ustrezata parabolni enačbi. Iz te pogojne enačbe izveš parameter.

Razdalja parabolnega žarišča, oziroma parabolne vodnice od koordinatnega izhodišča je $= \frac{1}{4}$ parametra. $y^2 = 3x$. Napravi sliko!

2. Kolik je parabolni odsek, ki ga odreže premica $y = x - 8$ od parabole $y^2 = 4x$?



Slika 65.

Razrešitev. Premica in parabola imata skupni točki M_1 (4, — 4) in M_2 (16, 8) (slika 65.). Absciso točke M_3 določiš iz premične enačbe; M_3 (8, 0). Ploskev, ki jo oklepata parabola in premica, je sestavljena iz parabolnih izsekov OM_2P_2 in OM_1P_1 in iz pravokotnih trikotnikov $M_3P_2M_2$ in $M_3P_1M_1$, v znakih

$$p = OM_2P_2 - M_3P_2M_2 + OM_1P_1 + M_3P_1M_1 =$$
$$= \tfrac{2}{3}x_2y_2 - \tfrac{1}{2}y_2(x_2 - x_3) + \tfrac{2}{3}x_1y_1 + \tfrac{1}{2}y_1(x_3 - x_1) = 72.$$

Ordinate se jemljejo v račun kakor absolutne količine.

3. Določi pri paraboli $y^2 = 2x$ enačbo normale, ki gre skoz točko M (1, 4)!

Razrešitev. Koordinati x_1 in y_1 parabolnega dotikališča je treba določiti. Koordinati točke M ustrezata enačbi parabolne normale, koordinati dotikališča pa parabolni enačbi. Iz teh pogojnih enačb najdeš $x_1 = 2$ in $y_1 = 2$. Enačba parabolne normale je potem $y + 2x = 6$.

4. V kateri točki parabole $y^2 = 12x$ sta si tangenta in normala kakor 2:3?

Razrešitev. Koordinati dotikališča M_1 (x_1, y_1) ustrezata parabolni enačbi, v znakih $y_1{}^2 = 12x_1$. Presečišči tangente, oziroma normale z abscisno osjo se dasta iz enačb tangente in normale določiti in sta M_2 $(-x_1, 0)$ in M_3 $(x_1 + 6, 0)$. Dolžina tangente je $= \sqrt{(2x_1)^2 + y_1^2}$ in dolžina normale $= \sqrt{p^2 + y_1^2}$. Po nalognem pogoju je potem

$$\sqrt{(2x_1)^2 + y_1^2} : \sqrt{36 + y_1^2} = 2 : 3.$$

Iz navedenih pogojev najdeš

$$x_1 = \tfrac{4}{3} \text{ in } y_1 = \pm 4.$$

Razreši še naslednje naloge:

5. Določi lego premic *a)* $4y - x = 12$, *b)* $4 + 8y = x$, *c)* $5x - 2y + 10 = 0$ z ozirom na parabolo $y^2 = 3x$!

6. Načrtaj skoz točki $M_1\ (2, y_1 > 0)$ in $M_2\ (18, y_2 < 0)$ parabole $y^2 = 8x$ premico ter določi ploskev, ki jo oklepata premica in parabola!

7. Določi dotikalne količine pri paraboli $y^2 = 5x$ za točko, čije abscisa in ordinata sta enaki!

8. Določi pri paraboli $y^2 = 3x$ enačbe onih tangent, ki stoje pravokotno na premici $x - 2y = 1$!

9. Kolike kote tvorita premica $3x + y = 12$ in parabola $y^2 = 6x$ v presečiščih?

10. Načrtaj skoz točko $M_1\ (2, y_1 > 0)$ parabole $y^2 = 8x$ tangento in normalo ter določi ploskev, ki jo oklepajo *a)* tangenta, parabola in ordinatna os, *b)* tangenta, normala in ordinatna os!

11. Načrtaj iz točke $M_1\ (-6, 0)$ tangenti na parabolo $y^2 = 6x$ ter določi ploskev, ki jo oklepajo tangenti in parabola!

12. Določi pri paraboli $y^2 = 12x$ enačbo normale, ki gre skoz točko $M\ (9, 0)$!

§ 37. Poševnokotno in polarno soredje. Pretvorba koordinat.

Poševnokotno soredje. Tečajno (polarno) soredje.

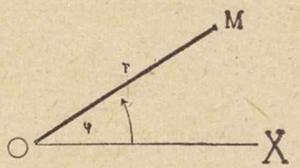
Razen pravokotnega soredja se rabi tudi poševnokotno in polarno soredje.

Soredje se imenuje poševnokotno, če stojita koordinatni osi poševno druga na drugi. Naklonski kot koordinatnih osi mora biti v takih slučajih določen. Ako načrtaš iz točke M vzporednici koordinatnima osema, najdeš na teh oseh odseka (poševnokotni koordinati točke M), ki določata lego točke M z ozirom na dotično poševnokotno soredje.

Določena točka O in nepremakljivi poltrak OX iz te točke (slika 66.) tvorita tečajno ali polarno soredje. Točka O se zove **tečaj** ali **pol**, poltrak OX pa **tečajna** ali **polarna os**. Lego točke M z ozirom na polarno soredje določiš, ako poveš, kolika je razdalja točke M od tečaja O in kolik kot tvori ta razdalja s polarno osjo. Razdalja $OM = r$ se zove **prevodnica**, kot $MOX = \varphi$ pa **polarni kot**. Prevodnica r utegne imeti vse mogoče smeri in ne dobiva nobenega predznaka; polarni kot φ se šteje od $0^0 - 360^0$.

Tečajna (polarna) os. — Tečaj. — Prevodnica. — Tečajni (polarni) kot.

Slika 66.



Včasih je treba enačbe določenih geometrijskih črt iz enega soredja pretvoriti v kako drugo soredje. Tako pretvoritev izvršiš, ako poiščeš najprej, v kakšni zvezi so koordinate ene in iste točke, ležeče v dotični črti, z ozirom na obojni soredji (pogojni enačbi za pretvarjanje) in potem zameniš s pomočjo teh pogojnih enačb koordinati prvega soredja s koordinatama drugega soredja. N. pr.

Pretvarjanje enačb iz enega soredja v drugo soredje.

Ako pomakneš pri elipsi (slika 59.) koordinatno izhodišče iz središča v levo teme velike osi tako, da ostane ordinatna os vzporedna svoji prvotni legi, postane abscisa vsake elipsne točke za polovico velike osi daljša, ordinata pa obdrži svojo prvotno velikost, v znakih $\xi = x + a$ in $\eta = y$, kjer pomenita ξ in η koordinati elipsne točke z ozirom na novo soredje. Ako postaviš vrednosti za x in y iz navedenih pogojnih enačb v $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, najdeš **temensko elipsno enačbo**

Temenska elipsna enačba.

$$\eta^2 = \frac{2\,b^2}{a}\,\xi - \frac{b^2}{a}.\frac{\xi^2}{a} = 2\,p\,\xi - \frac{p\,\xi^2}{a},$$

ali če zaznamuješ koordinate elipsnih točk zopet z navadnimi znamenji x in y, je

$$y^2 = 2\,p\,x - \frac{p\,x^2}{a}.$$

Temenska hiperbolna enačba.

Če pomakneš pri hiperboli (slika 62.) koordinatno izhodišče iz središča v desni vrh glavne osi tako, da ostane ordinatna os vzporedna svoji prvotni legi, se zmanjša abscisa vsake hiperbolne točke za polovico glavne osi, ordinata pa obdrži svojo prvotno velikost, v znakih $\xi = x - a$ in $\eta = y$. Na isti način kakor zgoraj najdeš temensko hiperbolno enačbo

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}.$$

Temenske enačbe, in sicer

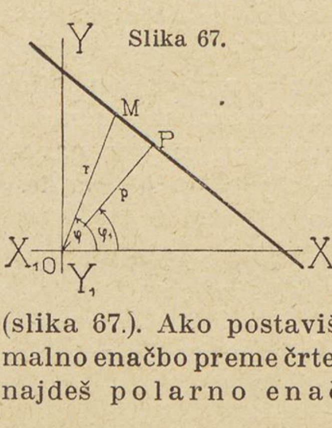
$$\text{krogova } y^2 = 2rx - x^2,$$

$$\text{elipsna } y^2 = 2px - \frac{px^2}{a},$$

$$\text{hiperbolna } y^2 = 2px + \frac{px^2}{a},$$

$$\text{parabolna } y^2 = 2px$$

kažejo, da so ordinate, ki pripadajo enakim abscisam, pri krogu in elipsi manjše, pri hiperboli pa večje od parabolnih ordinat, in da so abscise pri krogu in elipsi omejene ($x \leqq 2r$, oziroma $x \leqq 2a$), pri hiperboli in paraboli pa neomejene. Pri krogu je parameter enak premeru. Elipsa preide v krog, če se žarišči stikata s središčem.



Slika 67.

Polarne enačbe za premico, krog, elipso, hiperbolo in parabolo najdeš takole:

Polarna enačba premice.

Če se pri polarnem in pravokotnem soredju stika tečaj (pol) s koordinatnim izhodiščem in polarna os s pozitivno abscisno osjo, je $x = r \cos \varphi$ in $y = r \sin \varphi$ (slika 67.). Ako postaviš te vrednosti za x in y v normalno enačbo preme črte, t. j. v $\sin \varphi_1 y + \cos \varphi_1 x - p = 0$, najdeš polarno enačbo preme črte

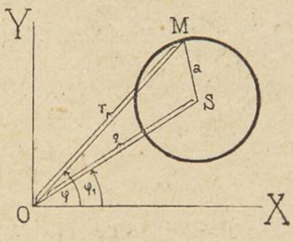
$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \varphi_1)}.$$

Isto enačbo najdeš tudi iz pravokotnega trikotnika v sliki 67. po trigonometrijskih pravilih.

Polarna enačba kroga.

Če imata pri krogu polarno in pravokotno soredje isto medsebojno lego kakor pri premici, je $p = \varrho \cos \varphi_1$, $q = \varrho \sin \varphi_1$, $x = r \cos \varphi$ in $y = r \sin \varphi$ (slika 68.). Če postaviš te vrednosti v občno krogovo enačbo, t. j. v $(x-p)^2 + (y-q)^2 = a^2$, najdeš njegovo polarno enačbo

Slika 68.



$$r^2 - 2r\varrho \cos(\varphi - \varphi_1) = a^2 - \varrho^2.$$

Isto enačbo dobiš tudi iz trikotnika OSM v sliki 68. po izreku o kosinusih. Iz navedene polarne enačbe sledi

$$r = \varrho \cos(\varphi - \varphi_1) \pm \sqrt{a^2 - \varrho^2 \sin^2(\varphi - \varphi_1)}.$$

Polarna enačba elipse.

Če se pri elipsi tečaj stika z levim žariščem (slika 59.) in ima polarna os smer pozitivne abscisne osi, je $r = G_1M = a + \frac{ex}{a}$ in $x = OP = OG_1 + G_1P = -e + r\cos\varphi$. Če iztrebiš x iz navedenih enačb, najdeš polarno elipsno enačbo

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a - e\cos\varphi} = \frac{b^2}{a - e\cos\varphi} = \frac{b^2 : a}{1 - \frac{e}{a}\cos\varphi} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

kjer pomeni $\varepsilon = \frac{e}{a}$ številčno (astronomijsko) izsrednost.

Polarna enačba hiperbole.

Če se pri hiperboli tečaj stika z desnim žariščem (slika 62.) in ima polarna os smer pozitivne abscisne osi, je $r = G_2M = \frac{ex}{a} - a$ in $x = OP = OG_2 + G_2P = e + r\cos\varphi$. Če iztrebiš x iz teh enačb, najdeš polarno hiperbolno enačbo

$$r = \frac{e^2 - a^2}{a - e\cos\varphi} = \frac{b^2}{a - e\cos\varphi} = \frac{b^2 : a}{1 - \frac{e}{a}\cos\varphi} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

kjer pomeni $\varepsilon = \frac{e}{a}$ številčno (astronomijsko) izsrednost.

Polarna enačba parabole.

Ako se pri paraboli tečaj stika z žariščem in ima polarna os smer pozitivne abscisne osi, je $r = GM = MC = DE = \mathrm{p} + GE$ in $GE = r \cos \varphi$ (slika 63.). Ako iztrebiš GE iz navedenih enačb, najdeš polarno parabolno enačbo

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}.$$

Polarne enačbe za elipso, hiperbolo in parabolo se razlikujejo med seboj samo po njih številčni izsrednosti ε, ki je pri elipsi manjša od enote, pri hiperboli večja od enote in pri paraboli enaka enoti.

Naloge.

1. Zameni $x = \xi + m$ in $y = \eta + n$ v enačbah *a)* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, *b)* $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, *c)* $y^2 = 2px$, primerjaj v vsakem slučaju urejeni rezultat s prvotno enačbo ter povej, kaj se izpremeni pri tej enačbi, kaj pa ne!

2. Izrazi hiperbolno enačbo $7x^2 - 9y^2 = 63$ v soredju, ki ima izhodišče v točki M_1 (3, —2) in čigar osi sta vzporedni osema prvotnega soredja!

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Abscisa vsake hiperbolne točke je v prvotnem soredju tri dolgostne enote daljša nego v novem soredju, v znakih $x = \xi + 3$; ordinata vsake hiperbolne točke pa je v prvotnem soredju dve dolgostni enoti krajša nego v novem soredju, v znakih $y = \eta - 2$. Če postaviš te vrednosti v navedeno hiperbolno enačbo, najdeš

$$7\xi^2 + 42\xi - 9\eta^2 + 36\eta = 36,$$

ali če zaznamuješ koordinate hiperbolnih točk zopet z navadnimi znamenji x in y, je hiperbolna enačba v novem soredju

$$7x^2 + 42x - 9y^2 + 36y = 36.$$

3. Pretvori enačbo elipse $4x^2 - 16x + 9y^2 - 18y = 11$ na obliko središčne enačbe!

Razrešitev. Po pogoju naloge morata člena s premenljivkama v prvi potenci izginiti. Če postaviš v navedeno enačbo $x = \xi + m$ in $y = \eta + n$, kjer pomenita m in n še nedoločeni vrednosti, najdeš

$$4(\xi + m)^2 - 16(\xi + m) + 9(\eta + n)^2 - 18(\eta + n) = 11$$

ali urejeno

$$4\xi^2 + (8m - 16)\xi + 9\eta^2 + (18n - 18)\eta =$$
$$= 11 - 4m^2 + 16m - 9n^2 + 18n.$$

Člena s premenljivkama v prvi potenci izgineta, če sta dotična koeficienta $= 0$, v znakih $8m - 16 = 0$ in $18n - 18 = 0$; torej je $m = 2$ in $n = 1$. Potem dobi elipsna enačba obliko

$$4\xi^2 + 9\eta^2 = 36 \text{ ali } 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

4. Pretvori enačbo $y^2 - 10y - 6x = 15$ na obliko $y^2 = 2px$!

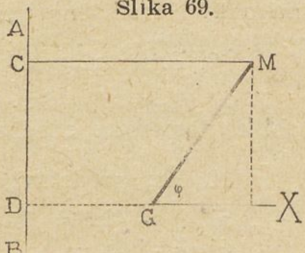
Razrešitev. Po nalognem pogoju mora člen s premenljivko y v prvi potenci in znani člen izginiti. Če postaviš v navedeno enačbo $x = \xi + m$ in $y = \eta + n$ ter urediš rezultat, najdeš

$$\eta^2 + (2n - 10)\eta - 6\xi = 15 - n^2 + 10n + 6m.$$

Z ozirom na nalogni pogoj mora biti $2n - 10 = 0$ in $15 - n^2 + 10n + 6m = 0$; torej je $n = 5$ in $m = -\frac{20}{3}$. Pretvorjena enačba je $\eta^2 = 6\xi$ ali $y^2 = 6x$.

5. Poišči geometrijsko mesto onih točk M, pri katerih ima razmerje med razdaljama točke M od določene točke G in določene premice AB vedno isto vrednost ε, v znakih $\frac{MG}{MC} = \varepsilon$ (slika 69.)

Slika 69.



Razrešitev. Če položiš polarno soredje skoz določeno točko G tako, da stoji podaljšana polarna os pravokotno na določeni premici AB, je $MG = r$ in $MC = DP = DG + GP = = DG + r \cos \varphi$. Iz nalognega pogoja najdeš

$$r = \frac{\varepsilon \cdot DG}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Če zaznamuješ $\varepsilon \cdot DG = p$ (t. j. prevodnica za $\varphi = 90^0$), se izpremeni enačba geometrijskega mesta, ki ga iščeš, v

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Ta enačba predstavlja: 1. elipso za $\varepsilon < 1$, 2. hiperbolo za $\varepsilon > 1$, 3. parabolo za $\varepsilon = 1$.

Razreši še naslednje naloge:

6. Pretvori naslednje enačbe z ozirom na novo pravokotno soredje, ki ima izhodišče v določeni točki M in čigar osi sta vzporedni osema prvotnega soredja, in sicer:

a) $5x - 6y = 30$	z izhodiščem v točki	M_1 $(-2, 3)$,
b) $x^2 + y^2 = 25$	„ „ „ „	M_2 $(3, 5)$,
c) $4x^2 + 9y^2 = 36$	„ „ „ „	M_3 $(-4, 0)$,
č) $9x^2 - 16y^2 = 144$	„ „ „ „	M_4 $(-1, 4)$,
d) $y^2 = 6x$	„ „ „ „	M_5 $(0, 5)$.

7. Pretvori elipsno enačbo:

a) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$,
b) $16y^2 - 32y + 9x^2 + 36x = 12$

na obliko središčne enačbe!

8. Pretvori hiperbolno enačbo

a) $16x^2 - 96x - 9y^2 + 36y = 36$,
b) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y = 29$

na obliko središčne enačbe!

9. Pretvori parabolno enačbo

a) $y^2 - 6y - 8x = 63$, *b)* $y^2 - 12x + 12y = 108$ na obliko temenske enačbe!

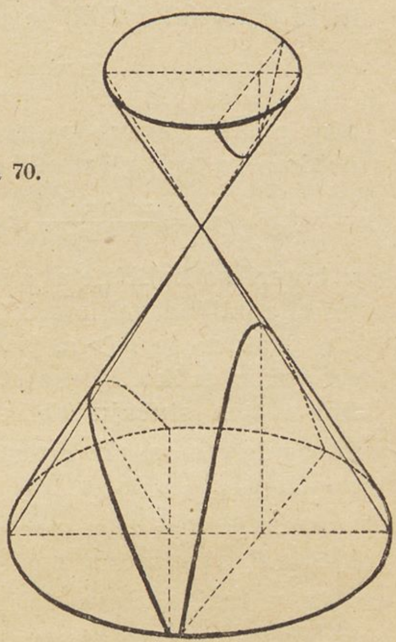
10. Kaj predstavljajo naslednje enačbe:

a) $4y^2 - 9x^2 = 36$, *b)* $y^2 = -6x$,
c) $y^2 = 4x - 5$, *č)* $x^2 = 3y$,
d) $4x^2 - 8y = 12$, *e)* $2y^2 + 3x - 12y = 0$,
f) $3x^2 + 2y^2 - 8y + 8 = 0$.
g) $25x^2 - 4y^2 + 50x - 16y + 9 = 0$.

§ 38. Elipsa, hiperbola in parabola so stožkosečnice.

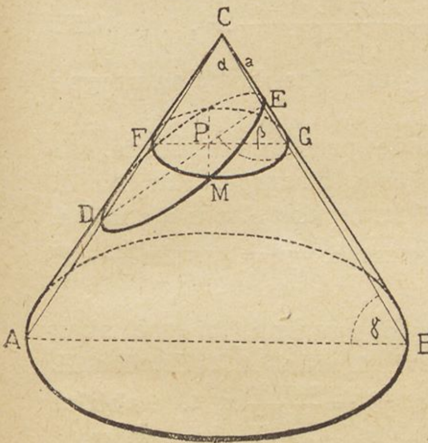
Ako presekamo plašč pokončnega stožca z ravnino, ki stoji pravokotno na osjem preseku ABC in tvori s stožčevo stranico BC kot β (slika 70. I.), dobimo krivo črto EMD za presečnico, ki jo hočemo v naslednjem nekoliko natančneje spoznati in določiti. Če izberemo v krivi pre-

II.



I.

Slika 70.



sečnici EMD točko M ter položimo skoz to točko ravnino GMF, ki je vzporedna stožčevi osnovni ploskvi, stvorimo presečnico MP, ki mora stati pravokotno na DE in FG; zakaj MP je presečnica ravnin EMD in GMF, ki stojita pravokotno na osjem preseku ABC. Da najdemo enačbo krive črte EMD, položimo skoz točko E, ki ima od stožčevega vrha C razdaljo $EC = a$, pravokotno soredje tako, da se pozitivna abscisna os stika z ED in da leži ordinatna os v ravnini presečnice EMD. Potem sta daljici $EP = x$ in $PM = y$ koordinati točke M. Ker je ravninski presek GMF krog, je

$$y^2 = GP \cdot PF \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{I.}$$

Iz trikotnika GPE najdemo po izrekih o sinusih

$$GP = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} x;$$

iz trikotnika *DPF* najdemo po istem izreku

$$PF = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(180 - \gamma)} (DE - x),$$

in iz trikotnika *DEC* je po istem izreku

$$DE = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} a.$$

Ako postavimo vrednosti za *GP*, *PF* in *DE* v enačbo I., dobimo za krivo črto *EMD* enačbo

$$y^2 = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin^2\gamma} x - \frac{\sin\beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2\gamma} x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.},$$

v kateri so količine a, α in γ stalnice, kot β pa utegne imeti različne velikosti.

Dokler je $\beta > \alpha$, zadene presečna ravnina, ki gre skoz točko *E*, vse stožčeve stranice. Enačba II. ima v tem slučaju obliko temenske elipsne enačbe, ki preide v temensko krogovo enačbo $y^2 = 2ax \sin\frac{\alpha}{2} - x^2$, če postane $\beta = 180^0 - \gamma$.

Če je $\beta = \alpha$, je presečna ravnina, ki gre skoz točko *E*, vzporedna stožčevi stranici *AC*. Enačba II. dobi v tem slučaju obliko $y^2 = \frac{a \sin^2\alpha}{\sin^2\gamma} x$, t. j. oblika temenske parabolne enačbe. Primerjaj sliko 70. II.!

Ako je $\beta < \alpha$, je $\sin(\beta - \alpha)$ negativen in enačba II. dobi potem obliko temenske hiperbolne enačbe. Presečna ravnina, ki gre skoz točko *E*, je v tem slučaju vzporedna dvema stožčevima stranicama in preseka tudi plašč nasprotnega stožca (druga hiperbolna veja). Primerjaj sliko 70. II.!

§ 39. Ponavljalne naloge.

A. Iz trigonometrije v zvezi s planimetrijo.

1. Določi ostre kote, ki ustrezajo enačbam:

a) $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$;

b) $\sin 2x \cos x - 2 \sin x + \frac{1}{4} = 0$;

c) $6 \sin^2 x + 8 \cos^2 x = 7 \sin 2x$;

č) $\frac{2}{3} \sec x + 6 \operatorname{tg} x = 3 \cos x$.

2. Razreši naslednje goniometrijske enačbe:

a) $3\sec^4 x + 8 = 10\sec^2 x$;

b) $\sin 4x - 2\sin 2x = \cos x$;

c) $\cos x = \frac{1}{2}\sin x \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$;

č) $\frac{\sin x + 2\cos x}{4\sin x - \cos x} = \frac{1+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$;

d) $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = 2$;

e) $\sqrt[3]{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} + 12\sqrt[3]{\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}} = 7$;

f) $\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}$ in $\cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{2}$;

g) $9\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4$ in $2\operatorname{cotg} x + 4\operatorname{cotg} y = 1$;

h) $5^{\sin x} + 3^{\sin y} = 4$ in $3 \cdot 5^{\sin x} - 2 \cdot 3^{\sin y} = 5$;

i) $y^{\operatorname{tg} x} = 64$ in $y^{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}} = 16$.

3. Tangenti dveh kotov sta v razmerju 5:4; kolika sta kota, ako znaša njuna vsota $87^0\,34'\,17''$?

4. Enačbi $4^{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = 8$ in $16^{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y} = 8$ določujeta dva trikotnikova kota; kolik je tretji kot?

5. Koliki so trikotnikovi koti, čijih tangente so izražene s tremi zaporednimi celimi števili?

6. Načrtaj in razreši pravokoten trikotnik:

a) ako meri obseg 12 *m* in eden izmed ostrih kotov $22\frac{1}{2}^0$ $(=\frac{45^0}{2})$;

b) ako merita kateti skupaj za 5 *m* več nego hipotenuza in eden izmed ostrih kotov $52\frac{1}{2}^0$ $(= 30^0 + \frac{45^0}{2})$;

c) ako merita kateti skupaj 7 *m*, hipotenuza pa 5 *m*;

č) ako meri hipotenuza 8 *m*, kateti pa se razlikujeta za 2 *m*;

d) ako merita hipotenuza in ena kateta skupaj 25 *m*, druga kateta pa 15 *m*;

e) ako meri ena kateta 3 *m*, druga kateta pa je 2 *m* manjša od hipotenuze;

f) ako je ena kateta za 2 *m* manjša od hipotenuze in tej kateti nasprotni kot $= 75^0$ $(= 45^0 + 30^0)$;

g) ako razdeli razpolovnica enega ostrega kota nasprotno kateto na 3 *m* in 4 *m* dolga dela;

h) ako meri hipotenuzi pripadajoča višina 24 m in se razlikujeta projekciji katet na hipotenuzo za 14 m;

i) ako meri vsota ene katete in hipotenuzi pripadajoče višine 9 m in eden ostrih kotov $67\frac{1}{2}^0$ $(= 45^0 + \frac{45^0}{2})$;

j) ako meri ena kateta 6 m in polmer včrtanega kroga 2 m.

7. Razreši pravokoten trikotnik:

a) ako meri obseg 24 m in ploščina 24 m^2;

b) ako meri obseg 132 m, vsota kvadratov nad stranicami pa 6050 m^2;

c) ako merita projekciji katet na hipotenuzo 2·8 m in 3·5 m;

č) ako meri ena kateta 25 m, projekcija druge katete na hipotenuzo pa 15 m;

d) ako je hipotenuza = 12·8 m in njej pripadajoča višina = 4·56 m;

e) ako meri vsota katet 14 in večji kateti pripadajoča srednjica $2\sqrt{13}$.

8. Načrtaj in razreši enakokrak trikotnik:

a) ako meri obseg 980 m in osnovnici pripadajoča višina 350 m;

b) ako meri krak 9 dm in njemu pripadajoča višina 5·4 dm;

c) ako je kot na osnovnici = $67\frac{1}{2}^0$ in vsota iz osnovnične in krakove višine = 10 dm.

9. Načrtaj in razreši poševnokoten trikotnik:

a) ako meri obseg 12 m in kota na osnovnici 75^0 in $52\frac{1}{2}^0$;

b) ako meri obseg 15 m, višina 3 m in en kot na osnovnici 45^0;

c) ako je razlika dveh stranic = 2 m, tretja stranica = 7·2 m in tej stranici nasprotni kot = 60^0;

č) ako je stranica b = 8·1 m, nasprotni kot β = = 75^0 in vsota ostalih stranic = 12 m;

d) ako merita osnovnici priležna kota 60^0 in 45^0 in višina 25 dm;

e) ako je višina $v_a = 4{\cdot}5\ m$, stranica $b = 6\ m$ in srednjica $s_b = 7{\cdot}2\ m$;

f) ako merita dve stranici $5\frac{1}{2}\ m$ in $7\frac{3}{4}\ m$ in srednjica tretje stranice $6\ m$;

g) ako merijo stranica $a = 8\ m$, višina $v_b = 5\ m$ in višina $v_c = 6\ m$;

h) ako je višina $v_a = 3\ m$ in somernica kota $\alpha = 75^0$ enaka $4\ m$;

i) ako merijo višine po $10\ dm$, $12\ dm$ in $14\ dm$;

j) ako meri stranica $a = 7\ m$, njej priležni kot $\gamma = 52\frac{1}{2}^0$ in polmer včrtanega kroga $2\frac{1}{2}\ m$.

10. Razreši poševnokoten trikotnik:

a) ako je vsota dveh stranic 67·395 m in če merita nasprotna kota $39^0\ 14'\ 37''$ in $54^0\ 18'\ 43''$;

b) ako sta dve stranici v razmerju 9:8, razlika nasprotnih kotov $= 42^0\ 28'$ in tretja stranica $= 87\ m$;

c) ako merita stranici, ki oklepata kot $67^0\ 34'\ 17''$, skupaj $19\ m$ in vsota kvadratov teh stranic $= 185\ m^2$;

č) ako so stranice v razmerju 5 : 8 : 9 in vsota kvadratov nad stranicami $= 680\ m^2$;

d) ako je ploščina $= 721\ cm^2$, ena stranica $= 121\ cm$ in eden priležnih kotov $= 69^0\ 28'$;

e) ako je ploščina $15\ m^2$, vsota dveh stranic $13\ m$ in vsota kvadratov teh stranic $89\ m^2$;

f) ako je ploščina $= 9{\cdot}35\ m^2$ in če merita dva kota $100^0\ 43'\ 14''$ in $55^0\ 8'\ 10''$;

g) ako merita dve stranici skupaj $384\ m$, eden nasprotnih kotov $= 52^0\ 38'\ 10''$ in polmer očrtanega kroga $= 126\ m$;

h) ako je višina $5\ m$ dolga in njeno podnožišče po $2\ m$ in $3\ m$ oddaljeno od priležnih stranic;

i) ako je kot $\alpha = 105^0\ 9'\ 30''$, kot $\beta = 36^0\ 41'$ in razpolovnica prvega kota $p_\alpha = 7{\cdot}25\ m$;

j) ako merita dva notranja kota $50^0\ 12'\ 25''$ in $74^0\ 4'\ 40''$ in polmer včrtanega kroga $\varrho = 250\ mm$.

11. Ploščina pravokotnega trikotnika meri 28 m^2 in eden ostrih kotov $42^0\ 38'\ 20''$; kolika je krajša kateta in kolika hipotenuza?

12. Koliki so koti pravokotnega trikotnika, čigar stranice tvorijo *a)* aritmetično, *b)* geometrijsko postopico?

13. Razdeli osnovnico enakostraničnega trikotnika na tri enake dele ter spoji razdelišči z nasprotnim ogliščem; na katera dela se razdeli na ta način kot ob vrhu?

14. Razdeli osnovnico $a = 30\ dm$ enakokrakega trikotnika na tri enake dele ter spoji razdelišči z vrhom; kako se razdeli kot $\alpha = 40^0\ 16'$ ob vrhu?

15. Razdeli kot $\alpha = 63^0$ ob vrhu enakokrakega trikotnika s poltrakoma na tri enake dele; na katere dele razdelita poltraka osnovnico $a = 50\ dm$?

16. Načrtaj v enakokrakem trikotniku, čigar krak meri 4 m in kot ob vrhu $52\frac{1}{2}^0$, osnovnici vzporednico tako, da je njena dolžina enaka vsoti spodnjih krakovih odsekov; kolika je ta vzporednica in kolika njena razdalja od vrha?

17. Stranice nekega trikotnika so $a = 15\ m$, $b = 17\ m$ in $c = 24\ m$; kolika je razpolovnica največjega kota in kolika srednjica najmanjše stranice?

18. Trikotniku s stranicami 195 cm, 169 cm in 182 cm je včrtan krog; kolika je ploščina onega trikotnika, ki ima oglišča v dotikališčih včrtanega kroga?

19. Koliki so koti trikotnika, v katerem sta stranici a in b v razmerju $5:12$ in nasprotna kota v razmerju $1:3$?

20. Trikotnikovi stranici a in b merita 8 m in 5 m, nasprotna kota pa sta v razmerju $2:1$; kolika je tretja stranica?

21. Od kraja C na neki ravni cesti vodita na desno in levo obstranska ravna pota, ki tvorita s cesto kota 45^0 in 64^0. Na prvem potu se nahaja v

razdalji $3\frac{1}{2}$ *km* od C kraj A in na drugem potu v razdalji $5\frac{1}{3}$ *km* od C kraj B. Kako daleč sta kraja A in B narazen?

22. Na premicah, ki se sekata v kotu 60^0, sta točki A in B 31 *m* oddaljeni druga od druge. Ako premakneš točko A 20 *m* proti presečišču, meri razdalja točk A in B 21 *m*. Kako daleč sta točki A in B oddaljeni od presečišča?

23. Mož, ki ima oko 1·6 *m* nad tlemi, gleda na 65 *m* visok stolp, ki je 85 *m* oddaljen od njega; v kolikem kotu vidi stolp?

24. Kolik je krogov odsek, ki pripada središčnemu kotu $42^0\ 13'$, če meri polmer 12·5 *m*?

25. Kolika je ploskev med vzporednima tetivama $a = 4\ dm$ in $b = 6\ dm$, ki sta 2 *dm* oddaljeni druga od druge?

26. Tetiva razdeli premer, ki stoji na njej pravokotno v razmerju 3 : 1; v katerem razmerju razdeli ta tetiva *a)* krogov obod, *b)* krogovo ploščino?

27. Dva obodna kota istega kroga sta v razmerju 2 : 1, pripadajoči tetivi pa v razmerju 3 : 2; kolika sta kota?

28. Včrtaj krogu s polmerom $r = 3\ dm$ trikotnik s stranicama $a = 4\ dm$ in $b = 5\ dm$ ter določi ploščino liku, ki leži med trikotnikovim obsegom in krogovim obodom!

29. Krogu s polmerom r je včrtan trikotnik, ki sta mu kota $\alpha = 40^0$ in $\beta = 60^0$; razpolovišča lokov, ki pripadajo stranicam tega trikotnika, določujejo oglišča drugega včrtanega trikotnika. Kako sta si ploščini teh trikotnikov?

30. Dva premera nekega kroga sta $36^0\ 21'\ 40''$ naklonjena drug proti drugemu; izmed tetiv, ki spajajo krajišča teh premerov, se neenaki tetivi razlikujeta za 409 *cm*. Kolik je premer?

31. Ako podaljšaš krogov polmer $r = 4\ m$ za 1 *m* ter načrtaš iz tega krajišča sekanto na krog

tako, da sta njena odseka v razmerju 1:3, katero smer ima sekanta (kolik kot tvori s podaljšanim polmerom)?

32. Razlika rombovih diagonal je 10 *m* in eden notranjih kotov 50^0; kolika je stranica in kolika ploščina?

33. Izračunaj stranice in diagonali paralelograma, čigar obseg je $= 40$ *dm*, ploščina $= 4$ *dm*^{2} in en kot $= 30^0$!

34. Kolika je ploščina paralelograma, ako je razlika neenakih stranic 4 *dm*, ena diagonala 14 *dm* in tej diagonali nasprotni kot $64^0\ 30'$?

35. Kolike so stranice paralelograma, čigar diagonali sta 2 in $2\sqrt{3}$ in eden izmed kotov $= 60^0$?

36. Paralelogramova višina, ki jo načrtaš iz enega oglišča, preseka eno diagonalo v kotu $\varphi = 68^0$ in jo razdeli v razmerju 7:3; koliki so koti in stranice?

37. Kolike so stranice enakokrakega trapeza, čigar diagonala meri 35 *dm* in tvori v enem krajišču s priležnima stranicama kota $32^0\ 40'$ in $44^0\ 10'$?

38. Razreši trapez, v katerem meri krajša vzporednica 21 *cm*, kraka po 15 *cm* in 12 *cm* in njun naklonski kot 63^0!

39. Deltoidovi diagonali sta v razmerju 2:5, ploščina meri 10 *dm*^{2} in kot, ki leži diagonali nesomernici nasproti, meri 115^0; kolike so stranice?

40. Razreši četverokotnik, ki je krogu s polmerom $r = 8{\cdot}125$ *m* včrtan in v katerem merita dve nasprotni stranici po 14 *m* in 13 *m* in prvi stranici priležni kot $106^0\ 15'\ 37''$!

41. V četverokotniku, ki je krogu očrtan, merita dve zaporedni stranici $201{\cdot}73$ *cm* in 74 *cm* in prvi stranici priležna kota $46^0\ 46'\ 31''$ in $87^0\ 12'\ 20''$; kolika sta ostala kota in ostali stranici?

B. Iz stereometrije v zvezi s planimetrijo in trigonometrijo.

1. Površina enakorobne tristranične (četverostranične) prizme je $P = 2{\cdot}56\ dm^2$; kolika je višina?

2. Pravokotni paralelepiped (kvader) s kvadratno osnovno ploskvijo se preseka z ravnino, ki gre skoz dva nasprotna osnovna roba; če je ploščina tega preseka $= p$ in če sta stranski in osnovni rob v razmerju 4:3, kolika je paralelepipedova površina?

3. Stikajoči se robi pravokotnega paralelepipeda (kvadra) so $a = 1$, $b = 2$ in $c = 3$; kolike kote tvorijo ti robi z diagonalo kvadra?

4. V kolikih kotih se sekajo kockine diagonale?

5. Stranski robi tristranične prizme so po 7 dm dolgi in po 60^0 naklonjeni proti osnovni ploskvi, ki je včrtana krogu s polmerom $r = 5\ dm$ in ima kota $\alpha = 50^0\ 7'$ in $\beta = 70^0\ 13'$. Kolika je prizmina prostornina?

6. Kolika je površina in prostornina pravilne tristranične piramide, čije osnovni rob je $a = 3\ m$ in stranski rob $s = 5$ m?

7. Kolika je prostornina pravilne šesterostranične piramide, če meri osnovni rob $4{\cdot}5\ m$ in stranska višina $9\ m$?

8. Piramidi je osnovna ploskev kvadrat, ki se mu da očrtati krog s polmerom $r = 2\ m$; stranske ploskve so enakostranični trikotniki. Kolika je površina in kolika prostornina?

9. Višina pokončne piramide s kvadratno osnovno ploskvijo meri 231 cm; vzporedni presek, ki je 77 cm oddaljen od osnovne ploskve, meri 5625 cm^2. Kolika je površina prisekane piramide?

10. Stranski robi pokončne piramide, kateri je osnovna ploskev pravokotnik s stranicama $a = 26\ m$ in $b = 18\ m$, merijo po 38 m; v kateri razdalji od vrha se mora napraviti vzporedni presek, da razdeli piramido na dva prostorno enaka dela?

11. Pravilni četverostranični piramidi, kateri je a osnovni rob in $\frac{3}{4}a$ stranski rob, se včrta kocka tako, da se zgornja kockina ploskev stika z vzporednim piramidnim presekom; kako sta si prostornini piramide in kocke?

12. Ako položiš skoz središča treh stikajočih se robov določene kocke ravnino, kolika je površina in kolika prostornina odsekane piramide?

13. Koliko so stranski robi in stranske ploskve pravilnega tetraedra naklonjeni proti osnovni ploskvi?

14. Koliki so osnovni robi pravilne četverostranične (peterostranične) piramide, ki ima 55·778 dm^3 prostornine, če so stranske ploskve $68^0\ 9'\ 24''$ naklonjene proti osnovni ploskvi?

15. Kolika je prostornina pravilne šesterostranične piramide, če so stranski robi po 65^0 naklonjeni proti osnovni ploskvi in če meri polmer osnovni ploskvi včrtanega kroga 3 dm?

---

16. Kako sta si plašč in površina pokončnega valja, čigar osji presek meri 32 dm v obsegu in 60 dm^2 v ploščini?

17. Koliko pločevine se potrebuje za odprto valjasto posodo, ki drži 10 hl, če sta višina in premer osnovne ploskve v razmerju 4:3?

18. Koliko moraš polmer enakostraničnega valja povečati, da postane pri isti višini površina osemkrat večja?

19. Valj iz lesa plava na vodi tako, da je njegova os vzporedna gladini vode in da gleda $\frac{1}{4}$ njegovega premera izpod vode; kolika je specifična teža lesu?

20. Dva pokončna po 25 cm visoka valja s polmeroma 44 cm in 37 cm stojita na isti ravnini drug poleg drugega tako, da meri središčnica njunih osnovnih ploskev 15 cm; koliko meri njuna presečna ploskev?

21. Pravokotnemu paralelepipedu, čigar robi so v razmerju 2:4:9, se očrtajo trije valji; kako so si prostornine teh valjev?

22. V poševnem valju meri značilni paralelogram 75 dm^2 in pravokotni osji presek 98 dm^2; koliko je os naklonjena proti osnovni ploskvi?

23. Stranica pokončnega stožca meri 89 *cm* in razlika med višino in polmerom znaša 41 *cm*; kolik je plašč?

24. Kolika je prostornina pokončnega stožca, *a)* čigar površina je $= 3\pi$ in stranica $= 2$; *b)* čigar višina meri 20 *dm* in čigar osnovna ploskev in plašč sta v razmerju 8 : 17; *c)* čigar plašč je napravljen iz krogovega izseka, s središčnim kotom 120^0 in s polmerom $1\frac{1}{2}$ *m*?

25. Površina pokončnega stožca meri 92 dm^2 in polmer osnovne ploskve $3\frac{1}{2}$ *dm*; kolik je središčni kot krogovega izseka, ki ga stvoriš iz odvitega in zravnanega stožčevega plašča?

26. Kolika je prostornina pokončnega prisekanega stožca, *a)* čigar površina je $= 150\pi$, plašč $= 65\pi$ in stranica $= 5$; *b)* čigar polmera sta v razmerju 5:4, večja osnovna ploskev $= 100\ dm^2$ in višina $= 48\ dm$?

27. Kolika je površina prisekanega stožca, ki ima 1000 cm^3 prostornine, če je $R:v:r = 10:7:3$?

28. Določi pri pokončnem stožcu (prisekanem stožcu) oni vzporedni presek, ki razdeli višino po stalnem sorazmerju?

29. Ako presekaš stožec 2 *m* nad osnovno ploskvijo, stvoriš prisekani stožec, ki ima 57 m^3 prostornine in čigar osnovni ploskvi sta v razmerju 9 : 4; kolika je prostornina prvotnega stožca?

30. Pokončnemu stožcu je včrtan valj, čigar višina je enaka polovici stožčeve višine; kako sta si prostornini teh teles?

31. Pravilnemu tetraedru se včrta stožec in očrta valj; kako so si prostornine teh teles?

32. Enakostraničnemu stožcu je včrtana kocka; kako sta si prostornini teh teles?

33. Pokončen stožec in enakostraničen valj imata skupno osnovno ploskev in enako površino. Kolika je stožčeva prostornina, če meri valjev polmer 3·76 *dm*?

34. Kako sta si plašča in kako površini enakostraničnega valja in enakostraničnega stožca, če sta njuna osja preseka v razmerju $m : n$?

35. Očrtaj določenemu enakostraničnemu valju enakostraničen stožec ter izračunaj stožčevo stranico!

36. Iz pokončnega prisekanega stožca (R, r, s) se izreže stožec, čigar vrh leži v središču manjše osnovne ploskve in čigar stranice so vzporedne stranicam prisekanega stožca. Kolika je površina ostalega telesa?

37. Pokončnemu prisekanemu stožcu (R, r, v) sta včrtana dva stožca tako, da imata isto os in isti osnovni ploskvi kakor prisekani stožec; kolik je polmer kroga, v katerem se sekata plašča teh stožcev?

38. Prisekanemu stožcu (R, r, v) se včrta in očrta pravilna šesterostranična prisekana piramida; koliko se razlikujeta prostornini prisekanih piramid?

39. Ako zavrtiš pravokoten trikotnik zaporedoma okoli katet a in b, sta si prostornini nastalih teles kakor $3 : 4$; če pa zavrtiš isti trikotnik okoli hipotenuze c, meri prostornina nastalega telesa $1200\,\pi$. Kolika je površina vsakega teh teles?

40. Trikotnik s stranicama $a = 5$, $b = 29$ in $c = 30$ se zavrti okoli stranice a; kolika je površina in kolika prostornina nastale vrtenine?

41. Polmer pokončnega stožca meri 12·7 *cm* in kot ob vrhu osjega preseka $72^0\ 43'\ 18''$; kolika je površina in kolika prostornina?

42. Kolika je prostornina pokončnega stožca, če je osjemu preseku 10 m^2 ploščine in če meri kot ob vrhu osjega preseka 50^0?

43. Stožec ima 45 cm^3 prostornine in njegove stranice so po $23^0\ 8'$ naklonjene proti osnovni ploskvi; izračunaj polmer!

44. Površina pokončnega stožca meri 20 dm^2 in višina oklepa s stranico kot 55^0; izračunaj višino!

45. Plašč pokončnega stožca je trikrat tolik kakor osnovna ploskev; kolik je kot ob vrhu osjega preseka?

46. Kocki je očrtan pokončen stožec, čigar višina je dvakrat tolika kakor kockin rob. Kolik je kot ob vrhu osjega preseka?

47. Na isti osnovni ploskvi, ki ima 512 cm v premeru, stojita dva pokončna stožca, katerih stranice so oziroma po 78^0 in 20^0 naklonjene proti osnovni ploskvi; kolika je površina in kolika prostornina telesa, ki ga mejita stožčeva plašča?

48. Kolika sta polmera pokončnega prisekanega stožca, če je plašč enak večji osnovni ploskvi, stranica $= 1\ m$ in 60^0 naklonjena proti osnovni ploskvi?

49. Izračunaj površino in prostornino prisekanega stožca, če je razlika osnovnih ploskev 8 dm^2, če sta oboda osnovnih ploskev v razmerju $5:3$ in če so stranice po 45^0 naklonjene proti osnovni ploskvi?

50. V poševnem stožcu meri značilni trikotnik 25 dm^2 in osji presek, ki stoji pravokotno na značilnem trikotniku, meri 42 dm^2; koliko je os naklonjena proti osnovni ploskvi?

51. Kolika je prostornina poševnega stožca, pri katerem so stranice značilnega trikotnika $S = 58$, $s = 41$ in $2\,r = 51$?

52. Kolik je premer osnovne ploskve pri poševnem stožcu, čigar os je $= 7\ m$, največja stranica $= 12\ m$ in najmanjša stranica $= 8\ m$?

53. Kolika je os poševnega stožca, če meri višina $12 m$, najdaljša stranica $20 m$ in najkrajša stranica $15 m$?

54. En kot enakokrakega trapeza meri 54^0, srednjica 28·8 *dm* in razmerje vzporednic je 5:3. Ako zavrtiš ta trapez okoli večje vzporednice, kolika je površina in prostornina nastalega telesa?

55. Romb se zavrti okoli osi, ki gre skoz rombovo oglišče in je vzporedna manjši diagonali. Kolika je površina in prostornina nastale vrtenine, če je rombova stranica $a = 12\frac{1}{2}$ *cm* in manjša diagonala enaka stranici?

---

56. Kolika je površina krogle, na kateri je krogeln krog, ki ima 24 *cm* v premeru, 8 *cm* oddaljen od enega tečaja?

57. Koliko se zmanjša prostornina določene krogle, če se površina zmanjša za $\frac{1}{4}$ njene velikosti?

58. V kateri razdalji od osnovne ploskve moraš presekati polkroglo z vzporedno ravnino, da imata oba dela enaki površini?

59. Kapica in plašč krogelnega izseka sta v razmerju $2:\sqrt{5}$; kolika je višina krogelne kapice?

60. Kolika je kapica krogelnega odseka, ki mu pripada enakostraničen stožec?

61. Izračunaj prostornino krogelnega izseka, čigar površina je dvakrat tolika kakor ploščina glavnega kroga!

62. V kateri razdalji moraš kroglo, ki ima 10 *dm* v premeru, presekati z ravnino, da sta krogelna kapica in presečna ploskev v razmerju 3 : 2?

63. Kraja *A* in *B* imata isto zemljepisno širino $\varphi = 48^0\ 12'\ 35''$ in sta 3094 *km* narazen; kolika je razlika njunih zemljepisnih dolžin?

64. Votla krogla, ki je 40 *cm* debela, se potopi v vodi za $\frac{3}{4}$ njene debelosti; kako debela je krogelna lupina, če je specifična teža snovi $6\frac{3}{4}$ *g*?

65. Lesena krogla je 2 *dm* debela in se potopi v vodi tako, da tvori gladina vode s krogelnim površjem krog, ki ima 16 *cm* v premeru; kolika je specifična teža lesu?

66. Kako daleč mora stati luč od krogle ($r = 5{\cdot}8\ m$), da razsvetljuje $\frac{1}{3}$ njene površine?

67. Prostornina krogelnega izseka meri $\frac{8}{3}\pi$ in kot ob vrhu osjega preseka meri 120^0; kolik je krogelni polmer?

68. Površina krogelnega odseka je enaka ploščini največjega krogelnega kroga; kolik je središčni kot krogelnega odseka?

69. Kolik je središčni kot krogelnega izseka, pri katerem sta odsek in pripadajoči stožec prostorno enaka (čigar kapica in plašč sta v razmerju 2 : 3)?

70. Kolika je površina in kolika prostornina telesa, ki nastane, ako zavrtiš krogov izsek (odsek), ki mu je središčni kot α in polmer r, okoli premera, ki je vzporeden tetivi pripadajočega loka?

71. Votla krogla s polmeroma R in r se pretvori v pokončen prisekani stožec, čigar osnovni ploskvi imata ista polmera; koliko je stranica prisekanega stožca naklonjena proti osnovnima ploskvama?

72. Krogla s polmerom $r = 1{\cdot}56\ dm$ se pretvori v pokončen stožec tako, da je njegov plašč trikrat večji od osnovne ploskve. Kolik je premer osnovne ploskve?

73. Površini krogle in enakostraničnega stožca sta v razmerju 1 : 3; kako sta si njuni prostornini?

74. Kolik je polmer krogle, *a)* ki ima istotoliko površino kakor pokončen stožec, čigar polmer meri 6 *m* in pri katerem je razmerje med višino in stranico 4 : 5; *b)* ki se da včrtati (očrtati) pokončnemu stožcu, čigar polmer meri 12 *dm* in višina 16 *dm*?

75. Določeni krogli se včrta pravilna tristranična piramida, katere višina in osnovni rob sta v razmerju 2 : 1; kolika je piramidina višina?

76. Določeni krogli se očrta pokončen stožec, čigar višina je šestkrat tolika kakor krogelni polmer; kolika je stožčeva osnovna ploskev?

77. Pravilni četverostranični piramidi z osnovnim robom a in stranskim robom $\frac{3}{2} a \sqrt{2}$ se očrta krogla; kako sta si prostornini teh teles?

78. Določeni krogli se včrta pokončen stožec tako, da se njegova višina razdeli v krogelnem središču po stalnem sorazmerju; kolika je stožčeva prostornina?

79. Določeni kocki se očrta krogla; v katerem razmerju deli ena razširjena kockina ploskev krogelno površino (krogelno prostornino)?

80. Krogli ($r = 8\ dm$) se včrta pokončen stožec tako, da je njegova višina enaka premeru osnovne ploskve; določi površino in prostornino stožca!

81. Iz krogle ($r = 20\ cm$) se izreže $16\ cm$ debel valj, čigar os gre skoz krogelno središče; kolika je površina in prostornina ostalega telesa?

82. Določeni krogli sta včrtana (očrtana) enakostraničen valj in enakostraničen stožec; kako so si površine in kako prostornine teh teles?

83. Posoda ima obliko pokončnega stožca s polmerom $3\ dm$ in višino $8\ dm$; ako vliješ $6\ dm$ visoko vode v to posodo in v tej vodi potopiš kroglo s polmerom $1\frac{1}{2}\ dm$, koliko se zviša gladina vode?

84. Kolik je polmer krogle, ki je včrtana pokončnemu prisekanemu stožcu, čigar polmera sta $R = 26$ in $r = 10$?

85. Pravilnemu tetraedru se včrta in očrta krogla; kako so si prostornine teh teles?

86. Kolika je površina in prostornina tetraedra (oktaedra), če meri polmer očrtane (včrtane) krogle $6\ dm$?

C. Iz analitike.

1. Povečaj (zmanjšaj) daljico s krajiščema M_1 (3, 8) in M_2 (— 5, 2) v razmerju 2 : 3 (3 : 2) ter določi novo krajišče!

2. Kako se glasi enačba premice:

a) ki gre skoz točko M_1 (3, 5) in odreže na koordinatnih oseh odseka, ki sta v razmerju 3 : 4;

b) ki gre skoz točko M_1 (8, 3) in tvori s koordinatnima osema trikotnik 50 dm^2 ploščine;

c) ki gre skoz točko M_1 (— 4, 3) tako, da razdeli točka M_1 tisti del premice, ki leži med koordinatnima osema v razmerju 5 : 3;

č) ki gre skoz točko M_1 (1, 2) in je enako oddaljena od točk M_2 (3, 3) in M_3 (5, 2).

d) ki gre skoz točko M_1 (2, 2) in tvori s premico $2y = x - 6$ kot 30^0?

3. Koliko je presečišče premic $y - 2x = 3$ in $y - 3x + 4 = 0$ oddaljeno od premice $5y + 4x = 7$?

4. Določi podnožišče pravokotnice, ki jo spustiš iz točke M_1 (2, 3) na premico $12y - 9x = 8$!

5. Katera točka leži somerno s točko M_1 (8, 2) z ozirom na premico $4y - 3x = 24$?

6. Določi kotom, ki jih tvorita premici $12y - 5x = 48$ in $8y + 15x = 4$, enačbi somernic!

7. Katera točka premice $4y - 5x + 28 = 0$ je enako oddaljena od točk M_1 (1, 5) in M_2 (7, — 3)?

8. Poišči v premici $x + y = 2$ točko, ki je enako oddaljena od premic $4y + 3x = 0$ in $5y + 12x = 0$!

9. Določi v trikotniku z ogliščí M_1 (— 6, 3), M_2 (— 4, — 11) in M_3 (8, 5) kot pri M_2, ploščino in težišče!

10. Zavrti trikotnik, čigar stranice imajo enačbe $y + x = 3$, $y + 3x = 19$ in $3y - 5x = 1$, okoli ordinatne osi do njegove prvotne lege ter izračunaj površino in prostornino nastalega telesa!

11. Poišči enačbam:

$a)$ $4x^2 - 3x + 4y^2 + 7y - 12\frac{3}{8} = 0$,
$b)$ $16y^2 - 96y + 9x^2 - 36x + 36 = 0$,
$c)$ $9x^2 - 18x - 4y^2 - 16y + 29 = 0$,
$č)$ $3y^2 - 30y - 12x - 9 = 0$

geometrijska mesta ter določi točke, v katerih presekata ta geometrijska mesta koordinatni osi!

12. Določi lego točk M_1 $(4, -2)$ in M_2 $(-3, -1)$ z ozirom na krog $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 2$!

13. Določi lego premice $x + y = 1$ z ozirom na krog $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$!

14. Kako ležita kroga $x^2 + y^2 - 2y = 0$ in $x^2 + y^2 - 2x = 0$ drug z ozirom na drugega, in kako se glasita enačbi njune središčnice in njune potenčne premice?

15. Poišči enačbo kroga:

$a)$ ki ima središče v abscisni osi, polmer $r = 13$ in se dotika premice $12x + 5y = 97$;

$b)$ ki gre skoz točko M_1 $(9, 2)$ in se dotika koordinatnih osi;

$c)$ ki gre skoz točko M_1 $(6, 3)$ in se dotika premic $4y = 3x + 2$ in $12y + 5x = 48$!

16. Stranice nekega trikotnika so določene po enačbah $2y = x + 4$, $y + x = 2$ in $y = 2x - 1$; kje leži središče očrtanega kroga?

17. Trikotniku z oglišči A $(-2, -2)$, B $(1, 3)$ in C $(3, -1)$ je očrtan krog; kolika je ploskev med krožnico in trikotnikovim obsegom?

18. Kolika je središčna razdalja premice $x - 2y = 6$ z ozirom na krog $x^2 + y^2 - 12x + 10y = 39$?

19. Določi dolžino tetive $x + y = 17$ pri krogu $x^2 + y^2 = 169$!

20. Kolik je središčni kot, ki pripada tetivi, ležeči na premici $2x + y = 20$ kroga $x^2 + y^2 = 100$?

21. Kolik je krogov odsek, ki ga stvori premica $2x + y = 10$ na krogu $x^2 + y^2 = 25$?

22. V kolikih kotih preseka premica $y - 4x + 7 = 0$ krog $x^2 + y^2 = 10x$?

23. Kolik kot oklepata tangenti, ki ju načrtaš iz točke M_1 (0, 6) na krog $x^2 + y^2 = 9$?

24. Koliki sta tangenti, ki ju načrtaš iz točke M_1 (14, 2) na krog $x^2 + y^2 = 100$, in kolika je razdalja točke M_1 od dotikalne tetive?

25. Načrtaj iz točke M_1 (7, —1) tangenti na krog $x^2 + y^2 = 25$ ter določi dolžino in enačbo dotikalne tetive!

26. Načrtaj skoz presečišči premice $y + 2x = 15$ in kroga $x^2 + y^2 = 50$ tangenti ter razreši trikotnik, ki ga tvorijo tangenti in dotikalna tetiva!

27. Kolike so dotikalne količine kroga $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$ v točki M_1 $(5, y_1 > 0)$?

28. Kako se glasijo pri krogu $x^2 + y^2 = 289$ $(x^2 + y^2 + 12x + 16y = 69)$ enačbi tangent, ki so vzporedne premici $15x - 8y = 40$ $(12x + 5y = 60)$?

29. Določi v premici $3x + 4y = 50$ točko, ki leži najbližje krogu $x^2 + y^2 = 25$ (to je podnožišče pravokotnice, ki jo načrtaš iz dotikališča vzporedne krogove tangente na določeno premico)! Kako enostavneje?

30. Poišči pri krogu, ki gre skoz točko M_1 (8, 1) in se dotika koordinatnih osi, enačbo tangente, ki stoji pravokotno na premici $4y - 3x = 6$!

31. Poišči pri krogu, ki gre skoz točke M_1 (1, 2), M_2 (4, 1) in M_3 (9, 6), enačbe onih tangent, ki so enako naklonjene proti koordinatnima osema (odrežejo enake odseke na koordinatnih oseh)!

32. Načrtaj skoz točko M_1 (3, 3) premico tako, da je enako oddaljena od središč krogov $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ in $x^2 + y^2 - 8x = 0$. Kje in v kolikem kotu preseka ta premica potenčno premico obeh krogov?

33. Zavrti premico $3y + 4x + 12 = 0$ okoli one točke v tej premici, ki je središču kroga $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ najbližja, in sicer toliko, da po-

stane premica krogu tangenta, ter določi velikost tega vrteža!

34. Načrtaj iz točke M_1 $(-3, 0)$ tangento na krog $(x-1)^2+y^2=1$ ter določi odsek, ki ga odreže ta tangenta na krogu $(x-4)^2+y^2=4$!

35. Načrtaj iz točke M_1 $(10, 0)$ tangenti na krog $x^2+y^2=50$, zavrti potem lik okoli abscisne osi ter določi površino in prostornino nastalega telesa!

36. Načrtaj nad daljico $2a=6$ trikotnik, čigar kot ob vrhu je $\gamma=30^0$, ter določi geometrijsko mesto za vrhe takih trikotnikov!

37. Določi geometrijsko mesto onih točk M, čijih razdalje od krajišč določene daljice $2a=6$ so v razmerju $5:4$!

---

38. Kako se glasi enačba elipse:

a) s parametrom $7\frac{2}{5}$ in dolgostno izsrednostjo 3;

b) ki se dotika premice $8y+3x=50$ v točki M_1 (?, 4)?

39. Katere točke elipse $5x^2+9y^2=45$ so od žarišč po $1\frac{2}{3}$ oddaljene?

40. Kakšno lego ima premica $y-3x=2$ z ozirom na elipso $x^2+4y^2=16$?

41. V kolikih kotih preseka: *a)* premica $2y=7x-50$ elipso $x^2+4y^2=100$; *b)* krog $x^2+y^2=16$ elipso $9x^2+25y^2=225$?

42. Kolik je premer elipse $9x^2+25y^2=225$, ki je vzporeden premici $5y-4x=15$?

43. Kje in v kolikem kotu se sekata tangenti, ki ju načrtaš skoz presečišči elipse $5x^2+9y^2=45$ in premice $3y+5x=3$?

44. Določi dolžino in enačbo dotikalne tetive onih tangent, ki ju narišeš iz točke M_1 $(14, 1)$ na elipso $x^2+4y^2=100$!

45. Kolike so stranice, koti in ploščina trikotnika, ki ga oklepajo tangenti iz točke M_1 $(7, -\frac{2}{5})$ na elipso $4x^2+25y^2=100$ in dotikalna tetiva?

46. Kako se glasita pri elipsi $9x^2 + 16y^2 = 144$ enačbi tangent, ki sta vzporedni premici $5y = 2x + 20$?

47. Določi pri elipsi $4x^2 + 9y^2 = 36$ enačbe onih tangent, ki odrežejo na koordinatnih oseh enake odseke!

48. Načrtaj iz točke M_1 (0, 4) tangento na prvi kvadrant elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ ter določi dotikališču dotikalne količine!

49. Subnormala neke točke na elipsi $x^2 + 4y^2 = 64$ je 1 *cm* dolga; kolika je subtangenta iste točke?

50. Elipsa $16x^2 + 25y^2 = 400$ se dotika premice $5y + 3x = 25$; kolik kot oklepata prevodnici v dotikališču?

51. V katerih točkah elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ stojita prevodnici pravokotno druga na drugi?

52. V kateri točki prvega kvadranta elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ oklepata prevodnici kot 45^0?

53. Iz katere točke prvega kvadranta elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ vidiš dolgostno izsrednost v kotu 45^0?

54. V kolikem kotu se vidi elipsa $9x^2 + 16y^2 = 144$ iz točke M_1 (1, 6)?

55. Tretji del večjega korena enačbe

$$\sqrt[3]{(x-3)^2} = 4\,(3 + \sqrt[3]{x-3})$$

je enak polovici velike osi pri elipsi z dolgostno izsrednostjo 48. Kolik je premer osnovne ploskve pri enakostraničnem stožcu, čigar plašč je enak elipsni ploščini?

56. V katerih točkah elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sta tangenta in normala enaki?

57. Dokaži, da tvori v vsaki elipsni točki normala s prevodnicama enaka kota!

58. Načrtaj iz elipsnih žarišč pravokotnici na tangento ter določi, koliko sta podnožišči teh pravokotnic oddaljeni od središča!

59. Kako se glasi središčna enačba hiperbole:

a) ki se dotika premice $6y = 5x - 32$ v točki $M_1 (x_1, 3)$;

b) pri kateri je $x - 2y = 0$ enačba asimptote in $y = x - 3$ enačba tangente?

60. V katerih točkah hiperbole s parametrom $21\frac{1}{3}$ in z dolgostno izsrednostjo 5 ima pravokotnik, stvorjen iz prevodnic, ploščino 91 cm^2?

61. Enačba hiperbolne asimptote je $12y - 5x = 0$ in središčna izsrednost meri 13; kako se glasita enačbi tangent, ki gresta skoz parametrovi krajišči, in kolika je ploskev, ki jo oklepajo parameter in omenjeni tangenti?

62. Kolik je trikotnik, ki ga tvorijo tetiva $y = 4x - 12$ hiperbole $16x^2 - 9y^2 = 144$ in tangenti v tetivnih krajiščih?

63. Kolik kot oklepata tangenti, ki ju načrtaš iz točke M_1 (2, 1) na hiperbolo $3x^2 - 4y^2 = 12$?

64. Kolika je tetiva, ki jo določujeta tangenti iz točke M_1 $(2, \frac{2}{3})$ na hiperbolo $4x^2 - 9y^2 = 36$, in kako se glasi njena enačba?

65. Kako se glasijo pri hiperboli $16x^2 - 9y^2 = 144$ enačbe tistih tangent, katerih dotikališča so po $2\frac{5}{16}$ oddaljena od žarišč?

66. Kako se glasita pri hiperboli $16x^2 - 9y^2 = 144$ enačbi tistih normal, ki stojita pravokotno na premici $y + 3 = 4x$, in koliko sta te normali oddaljeni druga od druge?

67. Kateri tangenti hiperbole $x^2 - 2y^2 = 2$ sta vzporedni premici $x - y = 5$, in kolika je razdalja teh tangent?

68. V kolikem kotu preseka krog $x^2 + y^2 = 64$ hiperbolo $x^2 - y^2 = 36$?

69. Načrtaj iz točke M_1 (3, 0) tangento na prvi kvadrant hiperbole $x^2 - y^2 = 25$ ter poišči dotikališču dotikalne količine!

70. V katerih točkah hiperbole $4x^2 - 9y^2 = 36$ je *a)* subtangenta $= 8$, *b)* subnormala $= 8$?

71. Kolik trikotnik tvori hiperbolna tangenta z asimptotama?

72. Dokaži, da tvori v vsaki hiperbolni točki tangenta s prevodnicama enaka kota!

73. Načrtaj iz hiperbolnih žarišč pravokotnici na tangento ter določi, koliko sta podnožišči teh pravokotnic oddaljeni od središča!

---

74. Kako se glasi temenska enačba parabole, ki se dotika premice $2y = 5x + 2$?

75. Kje in v kolikem kotu se sekata tangenti, ki ju narišeš skoz presečišči premice $x + y = 3$ in parabole $y^2 = 4x$?

76. Načrtaj iz točke M_1 $(-3, 1)$ tangenti na parabolo $y^2 = 6x$ ter določi kota, ki jih tvorita tangenti z dotikalno tetivo!

77. Kako se glasita pri paraboli $y^2 = 5x$ enačbi tangent, ki gresta skoz točko M_1 $(-3, 7)$?

78. Kako se glasita pri paraboli $y^2 = 4x$ enačbi tangent, ki sta vzporedni premici $y - 2x = 3$?

79. V kolikih kotih seka premica $3y - 4x + 20 = 0$ parabolo $y^2 = 8x$, in kolika je ploskev, ki jo odreže premica od parabole?

80. Kako se glasi enačba normale v točki M_1 $(4, 4)$ parabole $y^2 = 4x$, in v kolikem kotu preseka ta normala drugokrat parabolo?

81. Načrtaj skoz točko M_1 $(18, y_1 > 0)$ parabole $y^2 = 8x$ tangento ter določi ploskev, ki jo oklepajo ordinatna os, tangenta in parabolni lok!

82. Določi v premici $y = 5x + 40$ točko, ki leži najbližje paraboli $y^2 = 150x$. Glej nalogo 29., stran 147.!

83. Skoz točko M_1 $(3, 4)$ kroga $x^2 + y^2 = 25$ gre parabola, ki ji leži vrh v krogovem središču. V ko-

likem kotu preseka krog parabolo, in kolika je ploskev, ki jo oklepata krog in parabola?

84. Načrtaj v točki M_1 $(x_1, 6)$ parabole $y^2 = 6x$ tangento in normalo ter očrtaj krog trikotniku, ki ga tvorijo abscisna os, tangenta in normala. Kje leži središče kroga in kolik mu je polmer?

85. Načrtaj iz neke točke v parabolni vodnici tangenti na parabolo ter določi kot, ki ga oklepata tangenti!

86. Katera tangenta parabole $y^2 = 6x$ preseka premico $y = 3x + 5$ v kotu 45^0?

Zgodovinski dostavki.

Prvi početki geometrije so se pojavili v Egiptu ob Nilu. Sledovi praktične geometrije Egipčanov se še sedaj kažejo v ponosnih piramidah in v mnogih starodavnih nasipih in vodotokih. V dobi tujih Hiksos-kraljev je zbral neki pisar Ahmes (Amasis, med 2000 in 1700 pr. Kr.) v nekaki ročni knjigi zbirko računskih vaj. V tej zbirki se uporablja pri krogu za število π ulomek $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{\cdot}16\ldots$ V stereometriji so obdelane zlasti štiristranične piramide (beseda je staroegiptovskega izvora) in celo poizkusi nekake trigonometrije se dajo zaslediti. Egipčani so že poznali pravokotni trikotnik s stranicami 3, 4, 5, s katerimi so praktično načrtavali pravi kot. V isto svrho so rabili stari Indijci in Kitajci pravokotni trikotnik s stranicami 5, 12, 13.

Pri Egipčanih so se učili geometrije stari Grki. Že modri Tales iz Mileta (rojen okrog 624 pr. Kr.) je šel v Egipet, da bi si izpopolnil matematično znanje. Pri njem se nahajajo začetki grške matematične terminologije. Njegova zasluga je v prvi vrsti ta, da je seznanil Grke z egiptovsko vedo. Do znanstvene geometrije se je povzpel šele Pitagora (okrog 570 do 508 pr. Kr.), ustanovitelj italske šole. Njegov izrek o pravokotnem trikotniku je postal nekaka podlaga in središče računajoče geometrije. Pitagora je prvi uporabljal proporcije pri geometrijskih nalogah in postavil tako izreke o podobnosti likov na trdno podlago. Njemu se pripisuje nadalje „zlati sek“ in pa načrtavanje pravilnega peterokotnika. S peterokotnikom so našli potem Pitagorovci tudi pravilni dodekaeder, t. j. peti in zadnji pravilni polieder (Platonova telesa).

Tri geometrijske naloge, ki se naj izvrše z ravnilom in šestilom, so v tej dobi začele razgrevati ves učeni svet: 1. razdelitev kota na tri enake dele, 2. podvojitev kocke in 3. kvadratura kroga.

Razdelitev kota na tri enake dele je rešil Hipija iz Elide (rojen okrog 460 pr. Kr.), in sicer s pomočjo krive črte „Quadratrix", ki jo je pozneje Dinostrat (na koncu 4. stoletja pr. Kr.) uporabljal za kvadraturo kroga. Nalogo o podvojitvi kocke so stavili baje svečeniki v svetišču v Delfih Delijcem, ko so prišli le-ti v stiski iskat pomoči (delijski problem). S tem vprašanjem so se posebno trudili Platonovi učenci. Hipokrat (rojen na otoku Kiju na koncu 5. stoletja) je izkušal z dvakratno srednjo geometrijsko sorazmernico dobiti stranico podvojene kocke. Iz $a : x = x : y = y : 2a$ sledi nameč $x^3 = 2a^3$ ali $x = a\sqrt[3]{2}$. Geometrijska konstrukcija se je posrečila šele Platonovemu učencu Menehmu, in sicer na dva načina: s pomočjo parabole in hiperbole in pa s pomočjo dveh parabol, torej zopet ne z ravnilom in šestilom. Po sedanjem načinu v analitični geometriji sledi iz Hipokratovih proporcij takoj $x^2 = ay$ in $y^2 = 2ax$, to sta pa dve paraboli, ali pa $x^2 = ay$ in $xy = 2a^2$, kar pomeni parabolo in hiperbolo. Menehmos je tudi prvi obdelal krive črte, ki jih dajo stožčevi preseki (stožkosečnice). Pitagorovec Arhita je izkušal nalogo o podvojitvi kocke rešiti s pomočjo valjevih presekov in s premikanjem likov.

S kvadraturo kroga, t. j. z nalogo, kako se pretvori krožna ploskev v kvadrat, se je trudil zlasti Hipokrat. Pri tem je znašel znani izrek o mesečevih krajcih na stranicah pravokotnega trikotnika.

Filozof Platon (427—347 pr. Kr.) ni toliko znan glede novih geometrijskih problemov, kakor da je svoje učence navajal na kritično presojo tedanjega geometrijskega znanja. Znamenit je bil Platonov napis na akademiji v Atenah: „Kdor ni vešč geometrije, naj ne vstopi."

Z vsemi tremi vprašanji so se še v srednjem in novem veku bavili razni znanstveniki in lajiki in šele v novejši dobi smo prišli do bridkega spoznanja, da je razrešitev vseh treh nalog samo s pomočjo ravnila in šestila nemogoča. Pri kvadraturi kroga se je stvar razjasnila šele potem, ko so dokazali, da število π ni racionalno in tudi ne iracionalno, marveč transcendentno število, ki se ne da izraziti z nobeno algebrajsko enačbo. Hermite je l. 1873. prvi dokazal, da je število $e = 2\cdot71281828\ldots$ transcendentno, in l. 1882. je isto dokazal Lindemann za število π. S tema razpravama je bilo tisočletno vprašanje o kvadraturi kroga rešeno. Četudi je rezultat teh zgodovinsko važnih nalog nazadnje nezadovoljiv, so vendar te tri naloge mnogo pripomogle, da se je geometrija tako hitro razvila in da se je geometrijsko znanje poglobilo.

Za razvoj stereometrije je posebno važen Evdoks iz Knida (okrog 390—337 pr. Kr.), Arhitov učenec. Izračunal je prvi telesnino piramide in stožca. Izkušal je tudi dokazati anomalije v gibanju planetov (premikanje naprej in nazaj).

Pomen največjega učenjaka starega veka Aristotela (v Stagiru r. l. 384. pr. K.) za geometrijo in za znanost sploh tiči v tem, da je začrtal dokazovanju določni red in mu ustanovil logične zakone. (Primerjaj: Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Dr. H. Suter, 1873—1875.) Aristotelov vpliv se je kazal še v srednjem veku, ko so prisegali na njegove besede in si šteli v največjo čast in zaslugo, ako so ga umeli.

Klasična doba grške geometrije pa ni vznikla več v Atenah, marveč v novem središču znanosti, v Aleksandriji v Egiptu. V prvi aleksandrijski dobi štejemo največje grške (helenske) veleume in najodličnejše zastopnike geometrije. Možje kakor Evklid, Eratosten, Arhimed in Apolonij so ustvarili pravo znanstveno geometrijo, ki je vzor še za današnje čase.

Aleksandrijec Evklid (okrog 300 pr. Kr.) se je izprva učil v Atenah ter je postal pozneje ustanovitelj aleksandrijske šole, ki je bila tja do osvojitve Egipta po Arabcih nekako središče znanosti, kamor so se zatekali tedanji učenjaki vsega sveta. Najvažnejše delo Evklidovo so „Elementa“ (*στοιχεῖα*), ki obsegajo 15 knjig. Evklid se kaže v svojem delu izvrstnega didaktika. Zbral je v logični sporedbi in znanstveni razlagi elementarno geometrijo, kakor se je splošno še danes učimo. Znamenita je njegova teorija o vzporednicah, ki je izzvala mnogo protivnikov, pa tudi zagovornikov, in šele v 19. stoletju se je doznalo, da se strogi dokaz o vzporednicah ne da izvesti. Znan je tudi Evklidov izrek: „Do geometrije ni nikakega kraljevega pota.“

Eratosten (rojen okrog 276 pr. Kr.), učenec Aristarha, je bil začetnik matematične astronomije in predhodnik Kopernika glede gibanja planetov. Eratosten je prvi poizkusil izračunati dolžino meridijana na podlagi merjenja gotove razdalje. Tudi je prvi izračunal naklonski kot ekliptike na $23^0 51' 13''$.

Izven središča v Aleksandriji je živel na Siciliji veliki geometer in mehanik Arhimed (rojen v Sirakuzi 287 pr. Kr. in umorjen l. 212. ob osvojitvi mesta). Za geometrijo si je stekel največ zaslug s tem, da je izračunal ploščine in prostornine teles in da je našel svojstva novih krivih črt (spiralo in druge). Arhimed je prvi izračunal vsebino elipse in odseka parabole, potem prostornino krogle iz očrtanega valja, nadalje prostornino rotacijskih teles, elipsoida, paraboloida i. t. d. Uvedel je v geometrijo nov način dokazovanja: metodo izčrpavanja (ekshauscijsko metodo), ki je prvi početek infinitezimalnega računa. Še ob svoji smrti je baje zaklical morilcu: „Ne dotikaj se mojih krogov!“

Apolonij (rojen v Pergi okrog 240 pr. Kr.) je znan po svoji knjigi o stožkosečnicah, ki tvori nekak vrhunec grške geometrije. V tej knjigi se nahajajo še sedaj navadna imena: elipsa, parabola, hiperbola, parameter, os, premer. Znan je tudi Apolonijev problem o načrtavanju kroga, če so dani trije pogoji (točke, premice, krogi).

Okrog 160—120 pr. Kr. je deloval veliki astronom Hiparh iz Nikeje. Ta je že računal kote iz tetiv in zato velja za začetnika trigonometrije. Zanimiva je njegova teorija o gibanju planetov v epiciklih, ki je bila v veljavi tja do Keplerja. S pomočjo paralakse, ki jo je pri solncu določil na 3′ in pri mescu na 57′, je izkušal prvi izračunati razdaljo obeh teles od zemlje. Našel je tudi precesijsko gibanje enakonočja in je napravil zvezdni katalog.

Iz poznejše dobe je znan Aleksandrijec Heron (okrog 100 pr. Kr.) posebno kot mehanik. Po njem se imenuje obrazec za ploščino trikotnika iz stranic.

V drugi aleksandrijski dobi so zlasti znani sledeči: 1. Menelaj (okrog 100 po Kr.), 2. Klavdij Ptolomej (okrog 125—160 po Kr.), 3. Pap (okrog 300 po Kr.) in Prokel (v 5. stoletju po Kr. v Atenah).

Menelaj je uporabljal tetive za račune pri ravnih in sferičnih trikotnikih ter je našel izrek, da je vsota stranic sferičnega trikotnika manjša od 360^0 in vsota kotov večja od 180^0.

Ptolomej (rojen v Peluziju v Egiptu) je bil vodja zvezdarne v Aleksandriji in se je povzpel do časti prvega astronoma starega veka. Njegov „almagest“ (*μεγάλη σύνταξις*) nadomešča vsa prejšnja astronomska dela, ki so se že poizgubila, in jih izpopolnjuje z novimi odkritji. Njegov svetovni sistem gibanja je veljal za resnico tja do Kopernika. V istem delu se nahaja tudi znamenita tablica tetiv za trigonometrijske račune.

Pap je izdal zbirko najlepših iznajdeb takratnih geometrov. Po njem se imenuje izrek o stranicah poljubnega trikotnika, iz katerega se izvaja Pitagorov izrek. Tudi izrek o prostornini rotacijskih teles s pomočjo premikanja težišča, ki se sedaj zove „Guldinov izrek“, ima že Pap.

Prav na koncu druge aleksandrijske dobe je še važen pisatelj Prokel, ki ni bil toliko samostojen matematik, kakor pa razlagalec (komentator Evklidov). Za zgodovino matematike v starem veku je zanimiv zato, ker nam je ohranil mnogo izrekov drugih pisateljev, ki bi se bili sicer poizgubili.

Odslej so nastopali večinoma sami komentatorji (tako n. pr. Teon in njegova hči Hipatia) in posnemovalci — očividen znak, da je matematična veda začela propadati. Svoj preporod in svoje vstajenje je slavila šele čez tisoč let.

Izmed indijskih matematikov, ki so črpali iz grških virov, je v srednjem veku važen za geometrijo Bhâskara Akarya (rojen 1114 po Kr.). Indijci so v trigonometriji napravili važen korak, ko so uvedli namesto tablic za tetive tablice sinusov (polovične tetive dvojnih kotov). Take tablice se nahajajo v knjigi „Surya-Siddhanta" (Sindhind) neznanega pisatelja.

Tudi Arabci so pridno prebirali in prestavljali dela grških matematikov. Bili so v prvi vrsti aritmetiki in algebraiki, v geometriji pa se niso odlikovali, le v trigonometrijo so posegli s srečno roko. Ker so se mnogo pečali z astronomijo, so sestavili poleg sinusovih tablic tudi tablice za tangente. Poznali so že kotangento, sekanto in kosekanto, kosinuse pa so nadomestili s sinusi komplementarnih kotov. Najimenitnejši arabski matematik je Sirec Mohamed al Battânî (Albategnius imenovan). V arabskem almagestu, ki ga je sestavil Abûl Wafâ, so tudi že enačbe, kako se geometrijske funkcije izvajajo druga iz druge. Najbolj pa se je odlikoval v trigonometriji Arabec Nasr-Eddin (1201—1274 po Kr.). Ta ima že sinusov izrek ravninske trigonometrije, v sferični trigonometriji pa navaja že vse slučaje, kako se iz treh sestavin določijo druge.

Iz arabskih virov je 200 let pozneje prevzel Regiomontanus (Joh. Müller iz Königsberga, 1436—1476) trigonometrijske izreke, jih predelal in prikrojil v obliko, kakor jih še danes poznamo. V svojih trigonometrijskih tablicah je prvi uvedel decimalni sestav namesto seksagezimalnega pri Arabcih.

Šestnajsto stoletje pomeni za geometrijo in astronomijo dobo preporoda. Tako je Mauroliko iz Mesine (1494—1575) izpopolnil Evklidovo geometrijo s tangentami in asimptotami. François Viète (Vieta, 1540—1603) je našel kosinusov in tangentni izrek ravninske trigonometrije ter je postal s svojimi analitičnogeometrijskimi poizkusi predhodnik Descartov. Še hitreje nego geometrija se je razvijala istodobno astronomija. Nikolaj Kopernik (1473—1543) je v svoji knjigi „N. C. de revolutionibus orbium coelestium libri sex" zadal smrtni udarec Ptolomejevemu svetovnemu sistemu. Poleg tega je izdal trigonometrijske tablice za sinuse, kotangente in sekante na 10 decimalk. Tudi beseda trigonometrija je njegova. Rheticus (Georg Joachim v. Lauchen, 1514—1576) je izdelal tablice za sekante in našel obrazec za tg $\frac{\alpha}{2}$ iz stranic *a, b, c*.

V 17. stoletju je Lah Bonaventura Cavalieri (1578—1647) v svoji knjigi „Indivisibilia" povzel Arhimedov način izčrpavanja in pripravil tako pot do infinitezimalnega računa. John Napier (1550—1617), iznajditelj logaritmov, je v sferični trigonometriji znan po svojih dveh analogijah (drugi dve je dodal Briggs) in po svojem pravilu za razreševanje pravokotnega sferičnega trikotnika. Takozvane Gaußove enačbe sta imela že Delambre in Mollweide. Obrazec za ploščino sferičnega trikotnika je našel Albert Girard (1590—1632), sedanjo pisavo za goniometrijske funkcije pa je uvedel šele Leonhard Euler (1707—1783).

Kakor nova zvezda pa se je prikazala v matematični vedi l. 1637. knjiga „Géométrie", ki jo je spisal Francoz René Descartes (Cartesius Renatus, 1596—1650). Sicer je imel že prej Francoz Pierre de Fermat (1608—1665) pripravljeno razpravo: „Ad locos planos et solidos isagoge", toda Descartes ga je v tisku prehitel. Descartes in Fermat sta začetnika in ustanovitelja analitične geometrije v sedanjem pomenu besede. Z novimi pojmi abscise in ordinate in soredja in s sistematično uporabo algebre v geometriji sta položila temelj novi dobi, v kateri se je geometrija z nenavadno hitrico razvila. Ko sta še v istem stoletju Isaak Newton in še bolj Gottfried v. Leibniz vpeljala infinitezimalni račun, je nastopila za geometrijo doba pravega zmagoslavja.

Opomnja. O domačih pisateljih matematikih glej dodatek v „Aritmetiki in algebri".

UNIVERZITETNA KNJIŽNICA MARIBOR

21390/1-2,2.izd.

099213254

Č