



Grafično-aritmetična metoda

The Arithmetic Graphic Method

Sonja Rajh

Zavod RS za šolstvo

Σ Povzetek

V prispevku je predstavljena grafično aritmetična metoda reševanja besedilnih nalog. Na začetku je metoda opisana, nato pa je prikazanih nekaj mogočih načinov reševanja izbranih nalog s to metodo. Reševanje učencev je podkrepljeno z mnenji učiteljev.

Ključne besede: besedilne naloge, metode reševanja, grafično aritmetična metoda

Σ Abstract

The paper presents the arithmetic graphic method for solving textual tasks. The method is described at the beginning; next, some of the possible methods for solving selected tasks through this method are presented. The pupils' approaches to solving are accompanied by teachers' opinions.

Keywords: textual tasks, the methods of solving problems, the arithmetic graphic method

α Predstavitev grafično-aritmetične metode

Grafično-aritmetična metoda ponazori matematično nalogo s slikovnim gradivom, ki pomaga učencem pri razumevanju problema in jih vodi na poti do rešitve. Koristnost metode se kaže v tem, da sam način sklepanja podpira sklepanje pri reševanju nalog z Descartovo algebrsko metodo (z zapisom enačbe).

Naloga 1 – Tri števila

Vsota treh števil je 3946. Prvo število je 4-krat manjše od drugega, tretje pa za 4 večje od drugega. Poišči ta števila.

Rešitev: Ta števila so 438, 1752 in 1756.

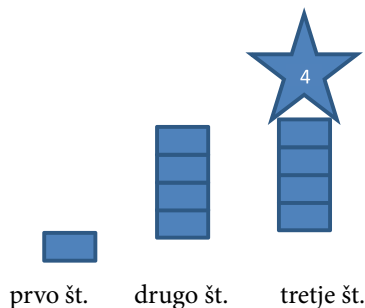
Opis načina reševanja

Ugotovimo, da je prvo število najmanjše. To število ponazorimo s pravokotnikom (ali kakšno drugačno grafično upodobitvijo):



Lik je torej nadomestil neznanko. Drugo število je štirikrat večje od prvega, zato ga grafično prikažemo kot stolpec štirih takih pravokotnikov. Tretje število je za 4 večje od drugega, zato ga grafično predstavimo kot drugo število, ki mu dodamo simbol, ki predstavlja število 4.

Dobimo naslednjo sliko:



Vsota vseh treh števil je 3946. Grafično je to prikazano kot $1 + 4 + 4 = 9$ enakih pravokotnikov in en simbol (zvezda), ki predstavlja število 4. Torej 9 pravokotnikov določa število $3946 - 4 = 3942$. Zato vsak pravokotnik predstavlja število $3942 : 9 = 438$.

Zdaj lahko odgovorimo na vprašanje. Prvo število je enako 438, drugo število je $4 \cdot 438 = 1752$, tretje število je enako $1752 + 4 = 1756$.

Pri preizkusu samo še seštejemo ta tri števila. $438 + 1752 + 1756 = 3946$.

Učenec, ki usvoji reševanje besedilne naloge z grafično-aritmetično metodo, lahko na ta način preide na reševanje besedilnih nalog z zapisom enačb. Pri tej metodi gre skozi iste faze kot pri reševanju z enačbami: ugotavlja znane in neznane količine ter odnose med njimi. V prvem primeru so količine predstavljene grafično, v drugem pa kot algebrski izrazi.

Grafična metoda je torej mogoča spodbuda za tiste, ki jim je jezik algebre še pretežak in miselno lažje manipulirajo z narisanimi objekti.

Rešimo nalogo še z zapisom enačbe: Namesto slikovnega prikaza prvo število označimo z x . Potem je drugo število $4x$, tretje pa $4x + 4$. Njihova vsota je 3946. Zapišimo enačbo in jo rešimo:

$$x + 4x + (4x + 4) = 3946$$

$$9x + 4 = 3946$$

$$9x = 3942$$

$$x = 438$$

Vidimo, da je postopek reševanja enak prejšnjemu, le da imamo namesto igre s pravokotniki tukaj opravka s spremenljivko x .

β Reševanje naloge Lubenice

Naloga 2 – Lubenice

Masa prve lubenice ja za 2 kg manjša od mase druge lubenice in petkrat manjša od mase tretje lubenice. Masa prve in tretje lubenice skupaj je dvakrat večja od mase druge lubenice. Koliko je masa vsake lubenice.

*Rešitev: Lubenice imajo mase
1 kg, 3 kg in 5 kg.*

Načini reševanja

1. način reševanja

V sledečem zapisu na sliki 1 je učenec 8. razreda podobno kot v prejšnjem predstavljenem primeru ponazoril prvo, drugo in tretjo lubenico. Sestavil je zapis, ki zelo spominja na enačbo, le da je spremenljivko označil s kvadratom. Tudi način reševanja spominja na reševanje enačb. Ta učenec bo v 9. razredu lažje razumel postopek reševanja enačb z ekvivalentnim preoblikovanjem, saj je postopek sam ugotovil.

masa prve lubenice $\square$

masa druge lubenice..... $\square + 2 \text{ kg}$,

masa tretje lubenice..... $\square \square \square \square \square$.

masa prve in tretje lubenice skupaj je dvakrat večja od mase druge lubenice

$\square \square \square \square \square$ $\square + 2 \text{ kg}$

$\square + 2 \text{ kg}$

Velja: $\square \square \square \square = 4 \text{ kg}$

$\square = 1 \text{ kg}$.

maso prve lubenice.....1 kg

masa druge lubenice..... 1 kg + 2 kg = 3 kg

masa tretje lubenice5 kg

Preizkus:

masa prve in tretje lubenice skupaj 1 kg + 5 kg = 6 kg je dvakrat večja od mase druge lubenice, $2 \cdot 3 \text{ kg} = 6 \text{ kg}$

[Slika 1] Pretipkano reševanje učenca z dodanimi komentarji o postopku njegovega reševanja

Njegova učiteljica je zapisala:

»Nalogo z lubenicami smo reševali z učenci iz osmega razreda v heterogeni skupini. Zraven grafično aritmetične metode sem se odločila, da bom uporabila še ponazoritev s pomočjo enotskih kock. Ob koncu reševanja sem učencev zastavila še nekaj vprašanj in s pomočjo odgovorov prišla do naslednjega sklepa:

- Grafično-aritmetična metoda je učenecem pomagala pri razumevanju obeh problemskih nalog,
- pri razumevanju in predstavi je večini celo bolj pomagala predstavitev z enotskimi kockami,
- učenci niso imeli težav pri prehodu iz grafično-aritmetične naloge na zapis z enačbo,
- večina učencev meni, da zdaj bolje razumejo reševanje besedilnih nalog,
- na tak način bi se še lotili reševanja problemskih nalog.«

Poleg nalog, ki smo jih ponudili za reševanje ob predstavitvi te metode, so učitelji z učenci našli še precej drugih nalog, ki so jih reševali po grafično-aritmetični metodi. Z grafično aritmetično metodo so učenci rešili tudi naloge, za katere smo predvidevali, da jih bodo reševali pa kakšni drugi metodi. V nadaljevanju je zapisanih nekaj nalog, ki so nam jih poslali učitelji.

γ Reševanje naloge Sadje

Naloga 3 – Sadje

Oče je na trgu kupil jabolka, hruške, pomaranče in banane. V košari ima skupaj 44 sadežev. Število jabolk je za 2 večje od števila hrušk, število hrušk je za 8 večje od števila banan, število banan je za 2 večje od števila pomaranč. Koliko je hrušk v košari?

Rešitev: V košari je 15 hrušk.

Načini reševanja

jabolka	hruške	banane	pomaranče	skupaj
				44
2	2	2		
8	8			
2				

$$\begin{aligned}
 & \bullet + \bullet + \bullet + \bullet + 24 = 44 \\
 & \bullet + \bullet + \bullet + \bullet = 20 \\
 & \bullet = 5
 \end{aligned}$$

Hruške:

$$\bullet + 2 + 8 = 5 + 2 + 8 = 15$$

Odgovor: V košari je 15 hrušk.

[Slika 2] Pretipkano reševanje učenca

Učenec 8. razreda je nalogo Sadje na sliki 2 v bistvu reševal s pomočjo enačbe (čeprav je zapis malo drugačen, kot smo navajeni), v kateri je spremenljivko označil s krogcem.

Izhajal je iz števila pomaranč, kar je označil s krogcem. Ker je število banan za 2 večje od števila pomaranč, je krogcu (ki označuje število pomaranč) dodal število 2. Ker je število hrušk za 8 večje od števila banan, je oznakam za število banan (krogec in število 2) dodal še število 8. Ker je število jabolk za 2 večje od števila hrušk, je oznakam za število hrušk (krogec + 2 + 8) prištel še število 2.

Potem je upošteval to, da je število vseh sadežev v košari enako 44, in sestavil zapis, ki zelo spominja na enačbo (štirje krogci + 24 = 44). Učenec je ob sliki sam ugotovil postopek reševanja enačb. Pri reševanju je enačbe ekvivalentno preoblikoval.

Učenec pa ni izračunal števila drugih sadežev niti ni naredil preizkusa, da bi tako preveril svojo rešitev.

8 Reševanje naloge Riba

Naloga 4 – Riba

Glava ribe predstavlja tretjino mase cele ribe, rep ribe četrtno mase cele ribe, trup ribe pa ima maso 30 dag. Koliko je masa cele ribe?

Odgovor: Masa cele ribe je 72 dag.

Načini reševanja

1. način reševanja

Ena izmed učiteljic, ki je z učenci reševala nalogo Ribe, je zapisala:

»Učencem sem zadnje dni pouka ponudila naloge v reševanje brez kakšnega posebnega navodila. Rekla sem samo, naj

poskusijo naloge rešiti in čim bolj opisati način razmišljanja oziroma reševanja. Najprej sem to naredila v 9. razredu. Na naši šoli imamo heterogene skupine, naloge pa so reševali različni učenci. Kot sem pričakovala, je nalogo večina rešila z enačbo, le dva sta se je lotila malo drugače.

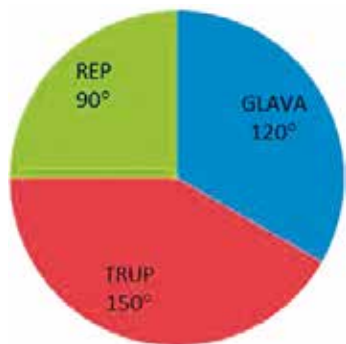
Popolnoma drugače pa je bilo v 6. razredu, kjer sem nalogo ponudila le najuspešnejšim učencem. Le eni učenki je uspelo rešiti nalogo, in še to na zelo izviren način. Ker smo se zadnje ure učili o krogu in krožnici in smo to povezali z obdelavo podatkov ter s tortnim prikazom, je poskušala po tej poti, in kot je razvidno iz njenega izdelka, ji je to tudi uspelo.«

Učenka 6. razreda se je reševanja naloge lotila tako kot je navedeno v sliki 3.

V navedenem primeru reševanja v sliki 3 je učenka na zelo izviren način ponazorila nalogo s slikovnim gradivom, in to na drugačen način, kot smo predstavili z uvodnim primerom. Njen način je za nalogo Ribe bolj ustrezen in ji je pomagal pri razumevanju problema.

Učenka je pri reševanju problemske naloge uspešno povezala znanje o ulomkih, krožnem izseku, središčnem kotu ... Tako je v tortnem diagramu s krožnimi izseki najprej ponazorila glavo in rep ribe. Vedela je, da tretjino ponazori s krožnim izsekom s središčnim kotom 120° , četrtno pa s središčnim kotom 90° . Za krožni izsek, ki je ostal za trup, je izmerila ali pa izračunala velikost središčnega kota. Tako je ugotovila, da maso trupa ponazori s krožnim izsekom, katerega središčni kot meri 150° .

Iz podatka, da maso 30 dag ponazorimo s krožnim izsekom s središčnim kotom 150° , je izračunala, da maso 1 dag ponazorimo s krožnim izsekom s središčnim kotom 5° .



$$150^\circ = 30 \text{ dag}$$

$$120 : 5 = 24 \text{ dag}$$

$$150 : 30 = 5$$

$$90 : 5 = 18 \text{ dag}$$

$$30 + 24 + 18 = 72$$

Odgovor:

Masa cele ribe je 72 dag.

$$\frac{1}{3} \text{ od } 72 = 72 : 3 = 24$$

$$\frac{1}{4} \text{ od } 72 = 72 : 4 = 18$$

[Slika 3] Pretipkano reševanje učenke

Potem kotu 120° ustreza 24 dag (kar je masa glave), kotu 90° pa masa 18 dag (masa repa). Ko je seštela mase trupa, glave in repa, je dobila 72 dag. Na koncu je zapisala odgovor in naredila še preizkus, ter tako preverila, ali je tretjina od 72 res 24 (masa glave) in četrtnina od 72 res 18 (masa repa).

Učenka je nalogo inovativno rešila. Uspešno je uporabila znanje v novi, čisto drugačni situaciji, kar nam je tudi cilj: učence naučiti povezovati znanje, uporabiti znano v novih situacijah.

Motijo le neustrezni zapisi enakosti $150^\circ = 30 \text{ dag}$ in $120 : 5 = 24 \text{ dag}$.

2. način reševanja

$$\text{Glava ribe} \quad \frac{1}{3} = \frac{4}{12} \quad \rightarrow \quad 6 \cdot 4 = 24$$

$$\text{Rep ribe} \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \quad \rightarrow \quad 6 \cdot 3 = 18$$

$$\text{Trup ribe} \quad 30 = \frac{5}{12} \quad \rightarrow \quad 6 \cdot 5 = 30$$

$$\frac{1}{12} = 6 \quad 30 : 5 = 6 \quad 24 + 18 + 30 = 72$$

Odgovor: Masa cele ribe je 72 dag.

[Slika 4] Pretipkano reševanje učenke

Učenka 8. razreda je ulomka, ki predstavlja maso glave in maso repa ribe, razširila na skupni imenovalc, da je ugotovila, da ji do celote (do $\frac{12}{12}$) manjka še $\frac{5}{12}$, kar je masa trupa ribe. In če $\frac{5}{12}$ mase ribe predstavlja 30 dag, potem $\frac{1}{12}$ mase ribe predstavlja 6 dag. S pomočjo tega podatka je izračunala maso za glavo, rep in trup ribe ter na koncu vse skupaj seštela, da je dobila skupno maso ribe, to je 72 dag.

Iz zapisov na sliki 4 je razvidno, da ima tudi učenka 8. razreda težave pri zapisih enakosti: $30 = \frac{5}{12}$ in $\frac{1}{12} = 6$.

Njena učiteljica je poleg izdelka učenke poslala še pripis:

»V preteklem šolskem letu sem poučevala matematiko v 8. razredu (III. nivo) in 9. razredu (II. nivo). V zadnjem tednu pred poletnimi počitnicami, ko smo imeli ocene že zaključene, smo si z učenci pogledali različne primere reševanja problemskih nalog. Učencem sem razdelila učne liste, na katerih so bile predstavljene 4 različne metode reševanja problemskih nalog.

S pomočjo rešenega primera so potem samostojno rešili svojo nalogo. V 8. razredu so naloge reševali zelo dobro. Bili so zainteresirani za delo, reševanje jim je bilo v veselje. Hitro so rešili naloge, zato smo potem dodatno reševali še naloge iz učbenika za deveti razred – poglavje uporaba enačb v problemskih nalogah. Zanimivo se mi je zdelo to, da skoraj vsi učenci v 9. razredu take vrste nalogo skušajo rešiti z zapisom enačbe, le kakšen posameznik se znajde in nalogo reši na svoj oz. drug način.»

ε Reševanje naloge Zbiralnik vode

Naloga 5 – Zbiralnik vode

Če odtočimo iz polnega zbiralnika $\frac{2}{3}$ vode, od ostanka zopet $\frac{2}{3}$, nam ostane 84 litrov vode. Koliko litrov drži zbiralnik?

Odgovor: Zbiralnik drži 756 litrov.

Način reševanja

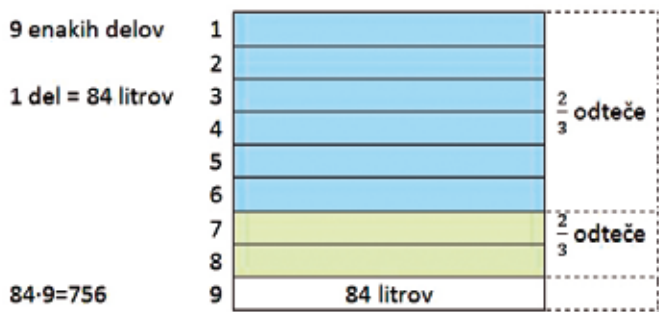
Iz zapisa v sliki 5 razberemo, da je učenka 8. razreda ugotovila, da če hoče ponazoriti $\frac{2}{3}$ od ostanka vode, torej $\frac{2}{3}$ od $\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, mora

zbiralnik razdeliti na devetine. Zelo nazor-
no je ponazorila svoj način reševanja naloge.
Količino vode, ki smo jo najprej odtočili, je
obarvala z modro barvo, količino vode, ki
smo jo naknadno odtočili, pa je obarvala z
zeleno barvo. Količina vode, ki je ostala na
koncu, je ostala nepobarvana. Ta količina,
84 l, predstavlja $\frac{1}{9}$ polnega zbiralnika. In če
en del predstavlja 84 l, potem 9 enakih delov
predstavlja $9 \cdot 84 \text{ l} = 756 \text{ l}$. Tako je izračunala
prostornino celotnega zbiralnika.

Žal pa se je pri prepisovanju zmotila in
tako v odgovoru zapisala napačno vrednost.
Zapisala je, da zbiralnik drži 765 l, čeprav je
izračunala 756 l.

η Za konec

Učenci so pri reševanju problemskih nalog
uporabljali zelo inovativne pristope reševa-
nja in s tem dokazali razumevanje problema,
ki so ga reševali. Ugotavljamo pa, da imajo
učenci težave pri uporabi matematičnega
jezika, zlasti pri zapisovanju matematičnih
enakosti ($150^\circ = 30 \text{ dag}$ in $\frac{1}{12} = 6$), kar je
razvidno pri obeh rešenih primerih naloge
Riba.



Odgovor: Zbiralnik drži 765 litrov vode.

[Slika 5] Pretipkano reševanje učenke

S pomočjo grafično-aritmetične metode so nekateri učenci reševali naloge, ki so omenjene pri drugih metodah reševanja besedilnih nalog. Vizualnim tipom učencev pomaga, da si besedilno nalogo grafično oz. vizualno predstavijo, ker jim to pomaga pri reševanju, vendar to še ni nujno grafično-aritmetična metoda.

Navajamo še dve nalogi, ki jih lahko rešimo z uporabo grafično-aritmetične metode.

Naloga 6 – Notranji koti trikotnika

V trikotniku je prvi notranji kot trikrat manjši od drugega notranjega kota, tretji pa je za 15° večji od prvega notranjega kota. Koliko merijo posamezni notranji koti trikotnika?

Rešitev: Notranji koti trikotnika merijo 33° , 99° in 48° .

Naloga 7 – Vsota zaporednih lihih števil

Vsota štirih zaporednih lihih števil je 216. Poišči ta števila.

Rešitev: Iskana števila so 51, 53, 55 in 57.

Dopis uredništva:

Zahvaljujemo se učiteljicam Petri Kastelec, Mojci Kavčič, Vilmi Moderc, Barbari Fir, Nevi Slavec, Petri Tonejc, Sonji Mišič, ki so v šolskem letu 2010/11 delile svoje izkušnje in izdelke učencev v spletni učilnici študijskih skupin za matematiko v OŠ.

Vir

1. Sanja Varošaneč: Neke metode reševanja problemskih zadataka. Poučak, letnik 4, št. 13, 2003.