LOGISTIČNA PORAZDELITEV

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11B68, 26A06, 60E10

V prispevku je predstavljena logistična porazdelitev v povezavi z Bernoullijevimi števili in nekaterimi drugimi porazdelitvami. Podana je tudi izpeljava formule za entropijo logistične porazdelitve.

THE LOGISTIC DISTRIBUTION

In this contribution the logistic distribution in connection with the Bernoulli numbers and some other distributions is presented. The derivation of entropy formula of the logistic distribution is also given.

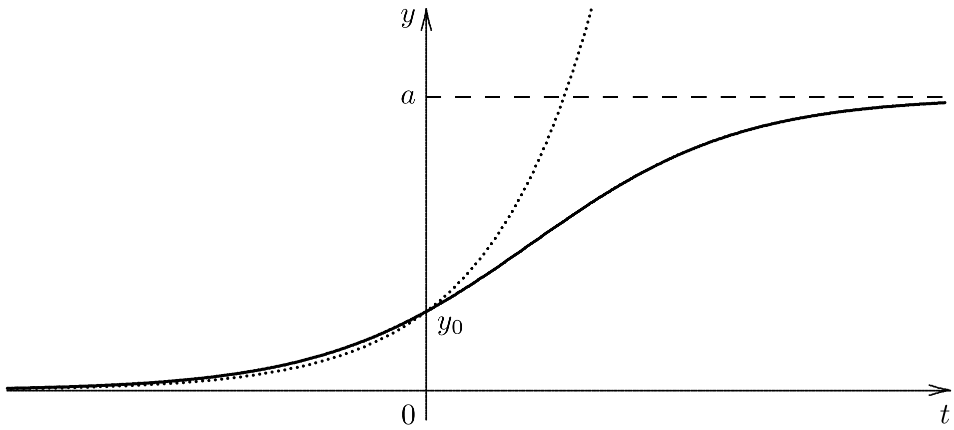
Uvod

Logistična porazdelitev je zvezna verjetnostna porazdelitev, ki pa jo redko srečamo v učbenikih, čeprav jo je poznal že Pierre François Verhulst (1804–1849) pri svojem modelu rasti populacij. V prispevku bomo obravnavali logistično porazdelitev, izračunali njeno karakteristično funkcijo in njene momente, ki se izražajo z Bernoullijevimi števili. Pokazali bomo tudi, kako je povezana z Laplaceovo porazdelitvijo. Na koncu pa bomo poiskali še njeno diferencialno entropijo in navedli primere uporabe. Za skoraj vse pojme iz verjetnostnega računa, ki se pojavljajo v tem prispevku, najdemo temeljita pojasnila v [5].

Eksponentno funkcijo z osnovo e bomo označevali z exp, njeno inverzno funkcijo, naravni logaritem, pa z log. Uporabljali bomo tudi hiperbolične funkcije ch, sh, th, ki so definirane z izrazi: $\operatorname{ch} x = (\exp x + \exp(-x))/2$, $\operatorname{sh} x = (\exp x - \exp(-x))/2$, $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$. Vse potrebno o teh funkcijah, realnih in kompleksnih, najdemo v [9].

Rast populacije pogosto opišemo z diferencialno enačbo z začetnim pogojem. S funkcijo $t \mapsto y(t)$ povemo, da je v času t velikost populacije enaka $y(t)$. Kako hitro populacija raste v času t, pa pove odvod $y'(t)$. Pri najenostavnejšem modelu rasti je hitrost rasti populacije v času t premo sorazmerna z njeno velikostjo v tem času, kar nam da linearno diferencialno enačbo $y' = ky$, kjer je k pozitivna konstanta. Če imamo še začetni pogoj $y(0) = y_0 > 0$, potem diferencialno enačbo hitro rešimo in dobimo: $y(t) = y_0 \exp(kt)$. Rast je eksponentna. Rešitev dobro opisuje dejansko rast le za majhne t. Ker pa je $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$, bi taka populacija prej ali slej napolnila še tako velik prostor.

Zato je treba poiskati boljši model, ki upošteva omejen prostor za populacijo, torej omejeno rast. To pomeni, da naj bo velikost populacije vedno manjša od pozitivnega števila a, na začetku pa naj je bo $y(0) = y_0 \in (0, a)$. Verhulstov model rasti predpostavlja, da je hitrost rasti populacije v času t premo sorazmerna s produktom njene velikosti in razlike do zgornje meje. Model nam da nelinearno diferencialno enačbo $y' = ky(a - y)$, recimo ji *logistična diferencialna enačba*, z začetnim pogojem $y(0) = y_0$. Enačba ima ločljivi spremenljivki, zato jo lahko rešimo s standardnim postopkom in dobimo njeno edino rešitev, *logistično funkcijo*: $y(t) = ay_0/(y_0 + (a - y_0)\exp(-kat))$, $t \in \mathbb{R}$. Rešitev je zvezna in naraščajoča funkcija na $\mathbb{R}$ in zanjo velja še $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(x) = a$. Graf rešitve imenujemo *logistična krivulja* (glej [7]). Na sliki 1 sta načrtani logistična (polna črta) in eksponentna krivulja (pikčasta črta) za isti k.

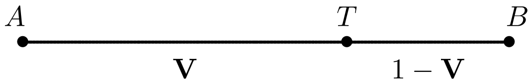


Slika 1. Logistična in eksponentna krivulja

Če izberemo $a = 1$, potem nas lastnosti logistične funkcije in oblika njenega grafa napeljejo na misel, da je logistična krivulja graf porazdelitvene funkcije neke slučajne spremenljivke. Taka slučajna spremenljivka obstaja, ni pa ena sama (primerjaj [5, izrek 16.6]). V nadaljevanju bomo videli, da do ene take slučajne spremenljivke, za katero bomo rekli, da je porazdeljena *logistično*, pridemo razmeroma enostavno.

1. Enakomerna in logistična porazdelitev

Model, pri katerem nastopa logistična porazdelitev, je preprost. Na daljici AB dolžine 1 slučajno izberemo točko T in z $\mathbf{V}$ označimo razdaljo te točke do levega krajišča A. Potem je $\mathbf{V}$ slučajna spremenljivka z vrednostmi na intervalu $[0, 1]$.



Slika 2. Slučajna razdelitev daljice

Predpostavili bomo, da je slučajna spremenljivka $\mathbf{V}$ enakomerno porazdeljena na intervalu $[0,1]$, tako da je njena gostota verjetnosti $p_{\mathbf{V}}$ na $\mathbb{R}$: $p_{\mathbf{V}}(v) = 1$ za $0 \le v \le 1$ in $p_{\mathbf{V}}(v) = 0$ sicer. Naj $\mathbf{P}[E]$ označuje verjetnost kateregakoli dogodka E. Porazdelitvena funkcija $F_{\mathbf{V}}$ slučajne spremenljivke $\mathbf{V}$ je dana z izrazom:

$$F_{\mathbf{V}}(v) = \mathbf{P}[\mathbf{V} < v] = \int_{-\infty}^{v} p_{\mathbf{V}}(\nu)\, d\nu = \begin{cases} 0 & \text{za } v < 0\,, \\ v & \text{za } 0 \le v < 1\,, \\ 1 & \text{za } v \ge 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

Naj bo $\mathbf{X} = \log(\mathbf{V}/(1-\mathbf{V}))$. Slučajni spremenljivki $\mathbf{V}$ in $\mathbf{X}$ sta druga z drugo natančno določeni, saj je $v \mapsto \log(v/(1-v))$ bijektivna funkcija iz $(0,1)$ na $\mathbb{R}$. Z robnima točkama intervala ni težav, saj je $\mathbf{P}[\mathbf{V} = 0] = \mathbf{P}[\mathbf{V} = 1] = 0$.

Kako se izražata porazdelitvena funkcija $F_{\mathbf{X}}$ in gostota verjetnosti $p_{\mathbf{X}}$ slučajne spremenljivke $\mathbf{X}$? Po definiciji ([5, §15]) velja za vsak $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \mathbf{P}[\mathbf{X} < x] = \mathbf{P}[\log(\mathbf{V}/(1-\mathbf{V})) < x] = \mathbf{P}[\mathbf{V} < \exp x/(1+\exp x)]\,.$$

Iz (1) vidimo, da je

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \frac{\exp x}{1+\exp x} = \frac{1}{1+\exp(-x)} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{th}(x/2)\right)\,. \tag{2}$$

Gostoto verjetnosti $p_{\mathbf{X}}(x)$ izrazimo iz (2) kot:

$$p_{\mathbf{X}}(x) = F'_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{4\operatorname{ch}^2(x/2)}\,. \tag{3}$$

Privzemimo, da je μ poljubno realno število in s kakršnokoli pozitivno število. Oglejmo si slučajno spremenljivko $\mathbf{Z} = \mu + s\mathbf{X}$. Porazdelitveno funkcijo $F_{\mathbf{Z}}$ in gostoto verjetnosti $p_{\mathbf{Z}}$ slučajne spremenljivke $\mathbf{Z}$ dobimo po običajni poti. Po definiciji je za vsak $z \in \mathbb{R}$:

$$F_{\mathbf{Z}}(z) = \mathbf{P}[\mathbf{Z} < z] = \mathbf{P}[\mu + s\mathbf{X} < z] = \mathbf{P}\left[\mathbf{X} < \frac{z-\mu}{s}\right] = F_{\mathbf{X}}\left(\frac{z-\mu}{s}\right).$$

Zato velja za porazdelitveno funkcijo

$$F_{\mathbf{Z}}(z) = \frac{1}{1+\exp(-\frac{z-\mu}{s})} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{th}\frac{z-\mu}{2s}\right) \tag{4}$$

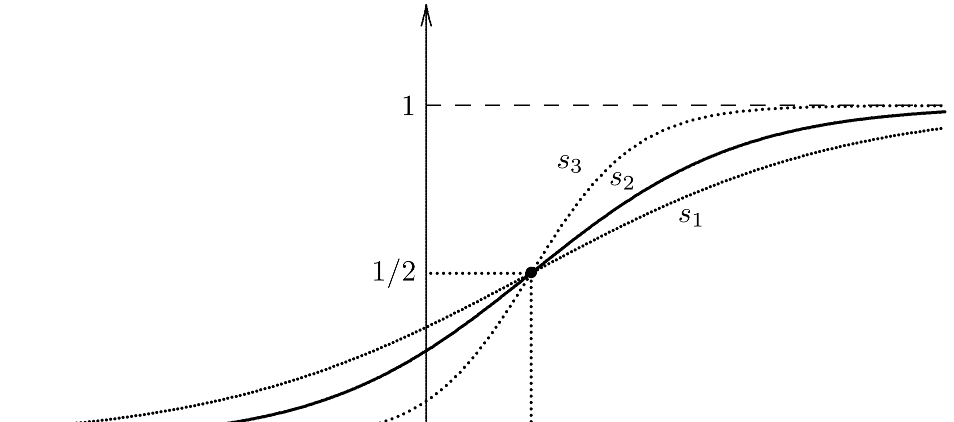
in za ustrezno gostoto

$$p_{\mathbf{Z}}(z) = F'_{\mathbf{Z}}(z) = \frac{\exp(-\frac{z-\mu}{s})}{s(1+\exp(-\frac{z-\mu}{s}))^2} = \frac{1}{4s\,\mathrm{ch}^2\,\frac{z-\mu}{2s}}\,. \tag{5}$$

Pravimo, da ima slučajna spremenljivka $\mathbf{Z}$ *logistično porazdelitev* s parametroma μ in s (glej na primer [2]). Na kratko označimo to porazdelitev z $\mathcal{L}(\mu, s)$. Graf funkcije $F_{\mathbf{Z}}$ ima prevoj v točki $(\mu, 1/2)$, kjer je njena strmina padajoča funkcija parametra s, funkcija $p_{\mathbf{Z}}$ pa ima svoj maksimum v točki $(\mu, 1/(4s))$. Nadalje pa preprost račun pokaže, da velja:

$$F_{\mathbf{Z}}(z)(1 - F_{\mathbf{Z}}(z)) = \frac{1}{4\,\mathrm{ch}^2\,\frac{z-\mu}{2s}} = s p_{\mathbf{Z}}(z) = sF'_{\mathbf{Z}}(z)\,.$$

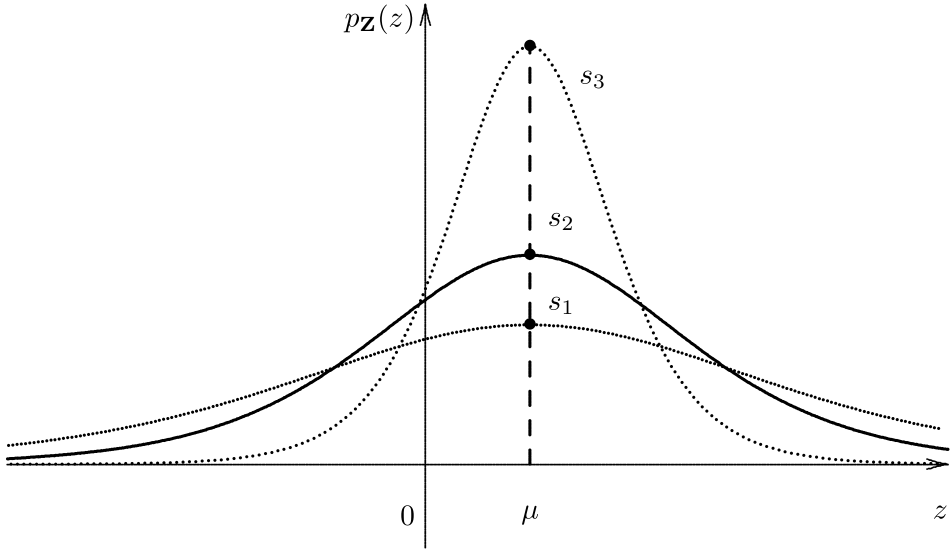
To pomeni, da je porazdelitvena funkcija $F_{\mathbf{Z}}$ rešitev logistične diferencialne enačbe $sy' = y(1-y)$ pri začetnem pogoju $y(0) = 1/(1+\exp(\mu/s))$ in graf funkcije $F_{\mathbf{Z}}$ je res logistična krivulja.



Slika 3. Porazdelitvena funkcija porazdelitve $\mathcal{L}(\mu, s)$ $(s_1 > s_2 > s_3)$

V nadaljevanju bomo spoznali, da sta tako imenovana *lokacija* μ in *skala* s v tesni zvezi z matematičnim upanjem $E[\mathbf{Z}]$ in disperzijo $D[\mathbf{Z}]$ slučajne spremenljivke $\mathbf{Z}$.

Če je $\mu = 0$ in $s = 1$, govorimo o *standardizirani logistični porazdelitvi*, ki jo seveda označujemo z $\mathcal{L}(0, 1)$. Slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$, ki smo jo vpeljali zgoraj, ima standardizirano porazdelitev $\mathcal{L}(0, 1)$. Dokazali smo



Slika 4. Gostota verjetnosti logistične porazdelitve $\mathcal{L}(\mu, s)$ $(s_1 > s_2 > s_3)$

Izrek 1. *Če je slučajna spremenljivka* $\mathbf{V}$ *porazdeljena enakomerno na intervalu* $[0,1]$*, potem ima slučajna spremenljivka* $\mathbf{X} = \log(\mathbf{V}/(1-\mathbf{V}))$ *standardizirano logistično porazdelitev* $\mathcal{L}(0,1)$*, slučajna spremenljivka* $\mathbf{Z} = \mu + s\mathbf{X}$*, kjer sta* μ *in* s *realni števili in* $s > 0$*, pa logistično porazdelitev* $\mathcal{L}(\mu, s)$*.*

2. Karakteristična funkcija

Karakteristično funkcijo $\varphi_{\mathbf{S}}$ neke slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$ v točki $t \in \mathbb{R}$ definiramo (glej na primer ustrezno poglavje v [5]) kot matematično upanje sestavljenke $\exp(it\mathbf{S})$:

$$\varphi_{\mathbf{S}}(t) = E[\exp(it\mathbf{S})]\,.$$

Karakteristično funkcijo $\varphi_{\mathbf{S}}$ zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$ lahko izrazimo z njeno gostoto verjetnosti $p_{\mathbf{S}}$:

$$\varphi_{\mathbf{S}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{S}}(x) \exp(itx)\, dx\,. \tag{6}$$

Karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$ je očitno Fourierova transformiranka njene gostote ([10]), v verjetnostnem računu pa je pomembno orodje za računanje začetnih momentov ν_n, ki so definirani z izrazom $\nu_n = E[\mathbf{S}^n]$. Pri tem je $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Pri zvezni porazdelitvi jih lahko izrazimo z gostoto:

$$\nu_n = E[\mathbf{S}^n] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\mathbf{S}}(x)\, dx\,.$$

Z n-kratnim odvajanjem karakteristične funkcije (6) dobimo

$$\varphi_{\mathbf{S}}^{(n)}(t) = i^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\mathbf{S}}(x) \exp(itx)\, dx\,,$$

kar pomeni, da lahko zapišemo začetne momente kot:

$$\nu_n = i^{-n}\varphi_{\mathbf{S}}^{(n)}(0) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

V posebnih primerih je $\nu_0 = 1$ in $\nu_1 = E[\mathbf{S}]$.

Če je na voljo razvoj karakteristične funkcije v potenčno vrsto eksponencialne oblike, to se pravi $\varphi_{\mathbf{S}}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n/n!$, lahko začetne momente izrazimo s koeficienti v razvoju:

$$\nu_n = i^{-n} c_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{7}$$

Izrek 2. *Karakteristična funkcija slučajne spremenljivke* $\mathbf{X}$*, ki je porazdeljena standardizirano logistično, je*

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \frac{\pi t}{\mathrm{sh}(\pi t)}\,, \tag{8}$$

karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $\mathbf{Z} = \mu + s\mathbf{X}$*, ki je porazdeljena logistično po zakonu* $\mathcal{L}(\mu, s)$*, pa*

$$\varphi_{\mathbf{Z}}(t) = \exp(i\mu t)\frac{\pi s t}{\mathrm{sh}(\pi s t)}\,. \tag{9}$$

Dokaz. Najprej brez težav preverimo, da je (9) posledica (8):

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{Z}}(t) &= E[\exp(it\mathbf{Z})] = E[\exp(it(\mu + s\mathbf{X}))] = E[\exp(i\mu t)\exp(ist\mathbf{X})] = \\ &= \exp(i\mu t)E[\exp(ist\mathbf{X})] = \exp(i\mu t)\psi_{\mathbf{X}}(st)\,.\end{aligned}$$

Sedaj se posvetimo karakteristični funkciji standardizirane logistične porazdelitve. Po definiciji (6) je za gostoto (3):

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{X}}(x)\exp(itx)\, dx = \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(itx)\, dx}{\mathrm{ch}^2(x/2)}\,.$$

Dobljeni integral bomo izračunali z integracijo kompleksne funkcije f, definirane z izrazom $f(z) = \exp(itz)/(4\,\mathrm{ch}^2(z/2))$, po pozitivno orientiranem robu pravokotnika z oglišči $-R$, R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$ v ravnini kompleksnih števil (glej [10]). Označimo ta rob s $\mathcal{C}_R$. Pri tem je R poljubno pozitivno število. Funkcija ima v točki $z = \pi i$ pol druge stopnje kot edino izolirano singularno točko znotraj tega pravokotnika. Po izreku o residuih (ostankih) velja:

$$\oint_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z), \pi i)\,.$$

Residuum bomo našli v glavnem delu funkcije f glede na točko πi:

$$f(z) = \frac{\exp(itz)}{4\,\mathrm{ch}^2(z/2)} = \frac{\exp(itz)}{2(1+\mathrm{ch}\,z)}\,.$$

Vpeljemo $w = z - \pi i$, da pol $z = \pi i$ funkcije f prenesemo v pol $w = 0$ funkcije g, ki je podana tako:

$$g(w) = f(w+\pi i) = \frac{\exp(it(w+\pi i))}{2(1+\mathrm{ch}(w+\pi i))} = \frac{\exp(-\pi t)\exp(itw)}{2(1-\mathrm{ch}\,w)}\,.$$

Z znanima razvojema v potenčni vrsti dobimo:

$$g(w) = -\frac{\exp(-\pi t)(1 + itw - t^2w^2/2 - it^3w^3/6 + \cdots)}{w^2(1 + w^2/12 + w^4/360 + \cdots)}\,.$$

Kvocient vrst lahko zapišemo kot novo potenčno vrsto:

$$\frac{1 + itw - t^2w^2/2 - it^3w^3/6 + \cdots}{1 + w^2/12 + w^4/360 + \cdots} = a + bw + cw^2 + \cdots$$

Prva koeficienta sta $a = 1$ in $b = it$, kar zadošča za zapis začetka razvoja

$$g(w) = -\frac{\exp(-\pi t)}{w^2}(1 + itw + cw^2 + \cdots)\,,$$

od koder preberemo $\mathrm{Res}(f(z), \pi i) = \mathrm{Res}(g(w), 0) = -it\exp(-\pi t)$ kot koeficient pri potenci w^{-1}.

Vsota integralov po vodoravnih stranicah pravokotnika je

$$\frac{1}{4}\int_{-R}^{R} \frac{\exp(itx)\,dx}{\mathrm{ch}^2(x/2)} + \frac{1}{4}\int_{R}^{-R} \frac{\exp(it(x+2\pi i))\,dx}{\mathrm{ch}^2((x+2\pi i)/2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-R}^{R} \frac{\exp(itx)\,dx}{\mathrm{ch}^2(x/2)} - \frac{\exp(-2\pi t)}{4}\int_{-R}^{R} \frac{\exp(itx)\,dx}{\mathrm{ch}^2(x/2)}$$

in v limiti $R \to \infty$ konvergira proti $(1 - \exp(-2\pi t))\varphi_{\mathbf{X}}(t)$, integrala po navpičnih stranicah pravokotnika pa proti 0, o čemer nas prepriča krajši račun. Tako smo našli

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = (1-\exp(-2\pi t))\varphi_{\mathbf{X}}(t) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \pi i) = 2\pi t \exp(-\pi t)\,.$$

Velja torej enačba $(1 - \exp(-2\pi t))\varphi_{\mathbf{X}}(t) = 2\pi t \exp(-\pi t)$, iz katere sledi $\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \pi t/\operatorname{sh}(\pi t)$. Dobljena funkcija ima v točki $t = 0$ limito 1, kar smo pričakovali. ■

Iz karakteristične funkcije $\varphi_{\mathbf{X}}$, ki je soda, takoj razberemo, da so vsi začetni momenti lihega reda enaki 0: $\nu_{2n+1} = 0$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$

Iz znanega neskončnega produkta (glej na primer [1, 6, 10])

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

ki konvergira za vsako kompleksno število z, dobimo z zamenjavo $z \mapsto iz$ še

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Zato lahko karakteristično funkcijo napišemo tudi kot

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (t/n)^2}\,.$$

V tem produktu pa je vsak faktor zase tudi karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke $\mathbf{X}_n$. Označimo

$$\varphi_{\mathbf{X}_n}(t) = \frac{1}{1 + (t/n)^2} = \frac{n^2}{n^2 + t^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{10}$$

3. Laplaceova porazdelitev

Slučajna spremenljivka, katere verjetnostna gostota je

$$p(x, \mu, \beta) = \frac{1}{2\beta}\exp(-|x - \mu|/\beta)\,, \quad \beta > 0\,,$$

je porazdeljena po *Laplaceovem zakonu* s parametroma μ in β (glej na primer [1]). Po Laplaceovem zakonu je porazdeljena razlika dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki sta enako porazdeljeni, in sicer po eksponentnem zakonu s parametrom $\beta > 0$:

$$q(x,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta}\exp(-x/\beta) & \text{za } x > 0\,, \\ 0 & \text{za } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Zato Laplaceovi porazdelitvi pravijo tudi *dvojna eksponentna* porazdelitev. Življenjsko dobo delcev pri radioaktivnem razpadu in življenjsko dobo elektronskih komponent se na primer obravnava z eksponentno porazdelitvijo.

Karakteristična funkcija eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke je

$$\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \exp(-x/\beta)\exp(itx)\,dx = \frac{1}{1-i\beta t}\,,$$

karakteristična funkcija nasprotno predznačene slučajne spremenljivke pa $1/(1+i\beta t)$. Zato ima razlika dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki sta porazdeljeni po eksponentnem zakonu z istim parametrom β, karakteristično funkcijo $1/(1-i\beta t)\cdot 1/(1+i\beta t) = 1/(1+\beta^2t^2)$ (glej [5, izrek 33.4]).

Če je $\mu = 0$, dobimo karakteristično funkcijo Laplaceove porazdelitve tudi neposredno:

$$\frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^\infty \exp(-|x|/\beta)\exp(itx)\,dx = \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \exp(-x/\beta)\cos(tx)\,dx = \frac{1}{1+\beta^2t^2}\,.$$

Izrek o edinosti pove (glej [5]), da je razlika dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki sta porazdeljeni po eksponentnem zakonu s parametrom β, porazdeljena po Laplaceovem zakonu s parametroma $\mu = 0$ in β.

Torej je vsak faktor v (10) karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $\mathbf{X}_n$, ki je porazdeljena po Laplaceovem zakonu s parametroma $\mu = 0$ in $\beta = 1/n$.

Denimo, da so slučajne spremenljivke $\mathbf{X}_k$ $(k = 1,\ 2\ ,\ 3, \ldots)$ med seboj neodvisne in vse porazdeljene po Laplaceovem zakonu s parametroma $\mu = 0$ in $\beta = 1$. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{X}_2 + \cdots + \frac{1}{n}\mathbf{X}_n\,?$$

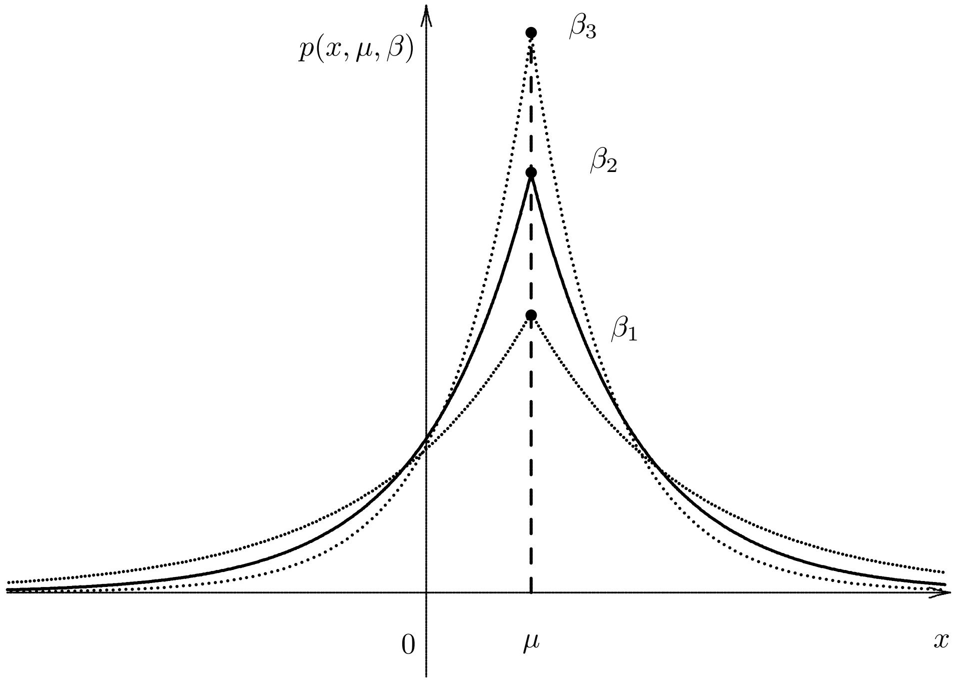
Sumandi v tej vsoti imajo karakteristično funkcijo oblike (10), torej je karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $\mathbf{S}_n$:

$$\varphi_{\mathbf{S}_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(t/k)^2}\,.$$

Pri tem se sklicujemo na izrek, ki pravi, da je karakteristična funkcija vsote končnega števila med seboj neodvisnih slučajnih spremenljivk enaka produktu karakterističnih funkcij posameznih slučajnih spremenljivk (glej [5, izrek 33.4]). Za vsak $t \in \mathbb{R}$ pa je

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\mathbf{S}_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(t/k)^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(t/k)^2} = \frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)}\,.$$

To pa ima za posledico, da zaporedje porazdelitvenih funkcij $F_{\mathbf{S}_n}$ konvergira po točkah proti porazdelitveni funkciji $F_{\mathbf{S}}$ na vsej realni osi (primerjaj na primer [5, izrek 35.2]) in slučajna spremenljivka $\mathbf{S}$ je porazdeljena standardizirano logistično. Verjetnost dogodka, da je slučajna spremenljivka $\mathbf{S}$ na danem intervalu, se torej poljubno malo razlikuje od verjetnosti dogodka, da je slučajna spremenljivka $\mathbf{S}_n$ na tem intervalu, če je le n dovolj velik indeks.



Slika 5. Laplaceova porazdelitev s parametroma μ in β ($\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$)

4. Bernoullijeva števila

Začetne momente sodega reda slučajne spremenljivke $\mathbf{X}$ bomo izrazili z Bernoullijevimi števili B_n (več v [1, 6]), ki so definirana z rodovno funkcijo

$$\frac{z}{\exp z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi\,.$$

Če razvijemo $\exp z - 1$ v potenčno vrsto in z njo pomnožimo obe strani zgornje enakosti ter nato primerjamo koeficiente na obeh straneh, hitro najdemo nekaj prvih Bernoullijevih števil: $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$. Poleg tega pa najdemo tudi rekurzivno zvezo, ki jo zapišemo simbolično:

$$B_{n+1} = (1 + B)^{n+1}, \quad B^k \equiv B_k\,.$$

To pomeni, da formalni binom $1 + B$ potenciramo po binomski formuli, potem pa eksponente zamenjamo z indeksi, na primer:

$$B_5 = (1 + B)^5 = 1 + 5B^1 + 10B^2 + 10B^3 + 5B^4 + B^5,$$

$$B_5 = 1 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 + B_5\,,$$

$$1 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0\,.$$

Iz znanih B_1, B_2 in B_3 izračunamo $B_4 = -1/30$. Tako korak za korakom izračunamo poljubno dolgo zaporedje Bernoullijevih števil.

Ker je funkcija $z \mapsto z/(\exp z - 1) + z/2$ soda, sledi iz razvoja

$$\frac{z}{\exp z - 1} - B_1 z = \frac{z}{\exp z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

da so vsa Bernoullijeva števila lihega indeksa od vključno tretjega naprej enaka 0: $B_{2n+1} = 0$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$

$z \mapsto z/\operatorname{sh} z$ lahko razvijemo v potenčno vrsto, katere koeficienti se izražajo z Bernoullijevimi števili. Najprej preverimo, da velja elementarna enakost

$$\frac{z}{\operatorname{sh} z} = \frac{2z}{\exp z - 1} - \frac{2z}{\exp(2z) - 1}\,.$$

Nato z rodovno funkcijo Bernoullijevih števil razvijemo oba člena v potenčni vrsti

$$\frac{z}{\operatorname{sh} z} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2z)^n.$$

Prva vrsta konvergira pri pogoju $|z| < 2\pi$, druga pa pri pogoju $|2z| < 2\pi$. Potem ko pogledamo člene z najnižjimi indeksi, lahko zapišemo:

$$\frac{z}{\operatorname{sh} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - 2^{2n})B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \pi\,. \tag{11}$$

Bernoullijeva števila imajo v matematiki (v numerični analizi in v teoriji števil) kar precejšnjo vlogo. Obstaja veliko relacij med njimi in nekaterimi drugimi funkcijami ter z nekaterimi posebnimi števili.

5. Momenti

Sedaj pa lahko izrazimo vse začetne momente slučajne spremenljivke $\mathbf{X}$ z Bernoullijevimi števili.

Izrek 3. *Slučajna spremenljivka* $\mathbf{X}$*, ki je porazdeljena standardizirano logistično, ima vse začetne momente, ki se izražajo kot:*

$$\nu_{2n} = (-1)^n (2 - 2^{2n})\pi^{2n} B_{2n}\,, \quad \nu_{2n+1} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Njeno matematično upanje in disperzija sta $E[\mathbf{X}] = 0$*,* $D[\mathbf{X}] = \pi^2/3$*.*

Dokaz. Po formuli (11) je

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - 2^{2n})\pi^{2n} B_{2n}}{(2n)!} t^{2n}, \quad |t| < 1\,.$$

Če uporabimo formulo (7), dobimo:

$$\nu_{2n} = i^{-2n}(2 - 2^{2n})\pi^{2n} B_{2n} = (-1)^n (2 - 2^{2n})\pi^{2n} B_{2n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Vsi začetni momenti lihih redov pa so enaki 0: $\nu_{2n+1} = 0$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$ ■

Tako hitro najdemo nekaj začetnih momentov za slučajno spremenljivko $\mathbf{X}$: $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \pi^2/3$, $\nu_3 = 0$, $\nu_4 = 7\pi^4/15$. Torej velja

$$E[\mathbf{X}] = \nu_1 = 0\,, \quad D[\mathbf{X}] = E\big[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^2\big] = \nu_2 = \frac{\pi^2}{3}\,.$$

Posvetimo se še malo slučajni spremenljivki $\mathbf{Z} = \mu + s\mathbf{X}$. Kot vemo, so centralni momenti μ_n katerekoli slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$ definirani z izrazom:

$$\mu_n = E[(\mathbf{S} - E[\mathbf{S}])^n] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Izrek 4. *Slučajna spremenljivka* $\mathbf{Z}$*, ki je porazdeljena po zakonu* $\mathcal{L}(\mu, s)$*, ima vse centralne momente:*

$$\mu_{2n} = (-1)^n s^{2n}(2 - 2^{2n})\pi^{2n} B_{2n}\,, \quad \mu_{2n+1} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Njeno matematično upanje in disperzija sta $E[\mathbf{Z}] = \mu$*,* $D[\mathbf{Z}] = s^2\pi^2/3$*.*

Dokaz. Zaradi linearnosti matematičnega upanja je $E[\mathbf{Z}] = E[\mu + s\mathbf{X}] = E[\mu] + sE[\mathbf{X}] = \mu$ in zato

$$\mu_n = E[(\mathbf{Z} - E[\mathbf{Z}])^n] = E[(\mathbf{Z} - \mu)^n] = E[(s\mathbf{X})^n] = s^n E[\mathbf{X}^n] = s^n \nu_n\,.$$

Za nekaj indeksov dobimo: $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = s^2\pi^2/3$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 7s^4\pi^4/15$. Torej res velja: $E[\mathbf{Z}] = \mu$, $D[\mathbf{Z}] = \mu_2 = s^2\pi^2/3$. ■

Lokacija μ je torej matematično upanje slučajne spremenljivke $\mathbf{Z}$, ki je porazdeljena logistično po zakonu $\mathcal{L}(\mu, s)$, skalo s pa lahko izrazimo kot

$$s = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma[\mathbf{Z}]\,, \tag{12}$$

pri čemer je $\sigma[\mathbf{Z}] = \sqrt{D[\mathbf{Z}]}$ standardna deviacija slučajne spremenljivke $\mathbf{Z}$. Vsemu skupaj lahko dodamo še asimetrijo $\gamma_1 = \mu_3/\mu_2^{3/2}$ in eksces $\gamma_2 = \mu_4/\mu_2^2 - 3$. Dobimo: $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 6/5$.

Za slučajno spremenljivko $\mathbf{Z}$, ki je porazdeljena logistično po zakonu $\mathcal{L}(\mu, s)$, lahko izračunamo katerikoli kvantil z_p reda p $(0 < p < 1)$ ali p-ti kvantil (več o kvantilih najdemo v [5, §29]). Število z_p zadošča enačbi $F_{\mathbf{Z}}(z_p) = p$. Rešiti moramo na z_p pri danem p enačbo $F_{\mathbf{Z}}(z_p) = p$. Uporabimo funkcijo (4) in preprost račun pove: $z_p = \mu + s\log(p/(1-p))$. Za $p = 1/2$ dobimo mediano: $m = \mu$. Modus porazdelitve je prav tako μ, ker takrat gostota doseže svoj edini lokalni maksimum.

6. Entropija

Izraz *entropija* v verjetnostnem računu in v teoriji informacije (osnovni vir nam je lahko [4]) je izposojen iz fizike, kjer ga srečamo v termodinamiki in statistični mehaniki. Entropija je količina, ki jo priredimo stanju sistema. Fizik Ludwig Boltzmann (1844–1906) je pokazal, da je entropija premo sorazmerna z logaritmom verjetnosti za to stanje. Entropija izraža nedoločenost stanja sistema. Največ zaslug za vpeljavo pojma *entropija* v verjetnostni račun in teorijo informacije pa je imel Claude E. Shannon (1916–2001) v svojem temeljnem članku [8].

V verjetnostnem računu najprej priredimo entropijo diskretni slučajni spremenljivki $\mathbf{S}$, ki more zavzeti končno mnogo vrednosti, denimo $s_1, s_2, \ldots,$

s_n z ustreznimi verjetnostmi p_1, p_2, $\ldots$, p_n, pri čemer je seveda $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. Entropija slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$ je potem definirana z vsoto:

$$H(\mathbf{S}) = H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k \,. \tag{13}$$

Namesto naravnega logaritma lahko uporabljamo tudi logaritem z drugo osnovo, večjo kot 1. Pogosto uporabljamo osnovo 2. Dobljeni entropiji se med seboj razlikujeta le za konstanten faktor. Enota za entropijo je *bit*, če uporabljamo v definiciji entropije logaritem z osnovo 2, in *nat*, če uporabljamo naravni logaritem.

Entropija $H(\mathbf{S})$ izraža nedoločenost diskretne slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$, je nenegativna, neodvisna od vrednosti, ki jih more zavzeti, in doseže največjo vrednost $\log n$, če je $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$. Za produkt med seboj neodvisnih diskretnih slučajnih spremenljivk $\mathbf{S}$ in $\mathbf{T}$ velja preprosto pravilo: $H(\mathbf{ST}) = H(\mathbf{S}) + H(\mathbf{T})$. Če lahko slučajna spremenljivka $\mathbf{S}$ zavzame števno neskončno mnogo vrednosti, nadomestimo vsoto v (13) z ustrezno neskončno vrsto, seveda ob predpostavki, da le-ta konvergira.

Po analogiji s (13) definiramo entropijo tudi za zvezno porazdeljeno slučajno spremenljivko $\mathbf{S}$. Denimo, da ima ta gostoto $p_{\mathbf{S}}$. Entropijo $h(\mathbf{S})$ definiramo z izrazom

$$h(\mathbf{S}) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{S}}(x) \log p_{\mathbf{S}}(x)\, dx \,, \tag{14}$$

seveda ob predpostavki, da integral v (14) obstaja. Če se zgodi, da je kje na integracijskem območju $p_{\mathbf{S}}(x) = 0$, vzamemo, kot da je $0 \log 0 = 0$, kar temelji na tem, da ima funkcija $x \mapsto x \log x$ desno limito enako 0 v točki $x = 0$. Toda entropija $h(\mathbf{S})$ ni vselej pozitivna kot v diskretnem primeru. Zato ima tudi posebno ime: pravimo ji *diferencialna entropija*. Pogosto zapišemo diferencialno entropijo kot $h(p)$, kjer je p gostota porazdelitve.

Brez težav lahko preverimo, da za transformaciji $\mathbf{S} \mapsto \mathbf{S} + c$, kjer je c realna konstanta, in $\mathbf{S} \mapsto a\mathbf{S}$, kjer je a od nič različna konstanta, veljata za vsako zvezno porazdeljeno slučajno spremenljivko $\mathbf{S}$ relaciji: $h(\mathbf{S}+c) = h(\mathbf{S})$ (invariantnost glede na premik) in $h(a\mathbf{S}) = h(\mathbf{S}) + \log |a|$.

Primer. Izračunajmo diferencialno entropijo slučajne spremenljivke $\mathbf{Z}$, ki je porazdeljena po zakonu $\mathcal{L}(\mu, s)$, torej z gostoto (5):

$$h(\mathbf{Z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4s \operatorname{ch}^2 \frac{z-\mu}{2s}} \log\left(4s \operatorname{ch}^2 \frac{z-\mu}{2s}\right) dz \,.$$

Najprej uvedemo v zgornji integral novo integracijsko spremenljivko x z relacijo $x = (z-\mu)/s$:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{Z}) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\,\mathrm{ch}^2(x/2)} \log(4s\,\mathrm{ch}^2(x/2))\,dx = \\ &= \log(4s) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\,\mathrm{ch}^2(x/2)}\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x/2)} \log \mathrm{ch}(x/2)\,dx\,. \end{aligned}$$

Prvi integral je enak 1, ker je pod integralskim znakom ravno gostota porazdelitve $\mathcal{L}(0,1)$, drugi integral pa računamo z metodo per partes:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x/2)} \log \mathrm{ch}(x/2)\,dx &= 2\,\mathrm{th}(x/2) \log \mathrm{ch}(x/2) - \int \mathrm{th}^2(x/2)\,dx = \\ &= 2(\mathrm{th}(x/2) \log \mathrm{ch}(x/2) - x/2) + \int \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x/2)}\,dx\,. \end{aligned}$$

Prvi člen je pri $x = 0$ enak 0, zato je

$$h(\mathbf{Z}) = \log(4s) + 2 \lim_{x\to\infty} (\mathrm{th}(x/2) \log \mathrm{ch}(x/2) - x/2) + 2\,.$$

Limito hitro izračunamo tako, da predhodno preoblikujemo:

$$\mathrm{th}(x/2) \log \mathrm{ch}(x/2) - x/2 = \mathrm{th}(x/2)(\log(1+\exp(-x)) - \log 2) - \frac{x}{\exp x + 1}\,.$$

Zgornji izraz očitno gre proti $-\log 2$, ko $x \to \infty$. Nazadnje imamo izraz za entropijo: $h(\mathbf{Z}) = \log s + 2 = \log(e^2 s)$.

Vidimo, da je predznak diferencialne entropije logistične porazdelitve $\mathcal{L}(\mu, s)$ neodvisen od lokacije μ, odvisen pa je od skale s: za $s > \exp(-2)$ je $h(\mathbf{Z}) > 0$, za $s = \exp(-2)$ je $h(\mathbf{Z}) = 0$ in za $0 < s < \exp(-2)$ je $h(\mathbf{Z}) < 0$.

V zvezi z diferencialno entropijo porazdelitve je še veliko zanimivosti, ki jih najdemo v obsežni literaturi. Vprašajmo se samo še po tisti zvezni porazdelitvi, ki ima pri dani varianci σ^2 največjo diferencialno entropijo. Zaradi invariantnosti diferencialne entropije glede na premik lahko privzamemo, da je matematično upanje iskane porazdelitve enako 0. Naj bo $p(x)$ gostota iskane porazdelitve. Iščemo ekstrem integrala $-\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x)\,dx$ pri pogojih $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$ in $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx = \sigma^2$. Z metodami variacijskega računa (podobno kot rešujemo izoperimetrični problem, glej na primer [7, VII. pogl.]) hitro dobimo

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

torej gostoto normalne porazdelitve $\mathcal{N}(0,\sigma)$. Še laže kot za logistično porazdelitev dobimo za normalno: $h(p_{\mathcal{N}}) = \log(\sigma\sqrt{2\pi e}) \approx \log(4{,}13\sigma)$. Potem je pri istem σ za logistično porazdelitev $\mathcal{L}(0,s)$ skala $s = \sigma\sqrt{3}/\pi$ in diferencialna entropija $h(p_{\mathcal{L}}) = \log(\sigma e^2\sqrt{3}/\pi) \approx \log(4{,}07\sigma)$, kar ni dosti manj kot pri normalni porazdelitvi.

7. Sklep

Obravnavali smo le najenostavnejše izreke v zvezi z logistično porazdelitvijo. Obstajajo tudi njene posplošitve z dodatnimi parametri. Zaradi razmeroma preprostih funkcij, ki opisujejo logistično porazdelitev, jo včasih uporabljajo namesto normalne tako, da po formuli (12) normalni zakon $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ nadomestijo z logističnim $\mathcal{L}(\mu,\sigma\sqrt{3}/\pi)$. Po obeh zakonih imamo potem enaki matematični upanji, disperziji in asimetriji. Opazna razlika je v ekscesu. Toda računanje kvantilov je pri logistični porazdelitvi bistveno enostavnejše kot pri normalni.

Logistična porazdelitev je uporabna na različnih področjih znanosti: v samem verjetnostnem računu in seveda pri statistiki v biologiji, epidemiologiji, psihologiji, tehnologiji in ekonomiji.

Šahovske zveze po svetu primerjajo moči šahistov glede na njihove uspehe in pripravljajo tako imenovane *rating lestvice*. Sistemov, po katerih pridejo do teh lestvic, je več. Mednarodna šahovska zveza FIDE (Fédération Internationale des Échecs) jih objavlja dvakrat na leto, do njih pa prihaja po sistemu, ki temelji ravno na *logistični porazdelitvi*.

LITERATURA

[1] M. Abramowitz in I. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover publications, New York, 1972.

[2] N. Balakrishnan, *Handbook of the logistic distribution*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[3] T. M. Cover in J. A. Thomas, *Elements of information theory*, Wiley, New York, 2006.

[4] R. Jamnik, *Elementi teorije informacije*, Knjižnica Sigma 10, DZS, Ljubljana, 1974.

[5] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Matematika – fizika 3, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1971.

[6] I. S. Gradsteyn in I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums and products*, ur. A. Jeffrey, Academic Press, New York, 1994.

[7] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, Matematika – fizika 5, DZS, Ljubljana, 1974.

[8] C. Shannon, *A mathematical theory of communication*, The Bell system technical journal **27** (1948), str. 379–424 in 623–656.

[9] I. Vidav, *Višja matematika I*, Matematika – fizika 6, DMFA–založništvo, Ljubljana, 2008.

[10] I. Vidav, *Višja matematika III*, Matematika – fizika 8, DZS, Ljubljana, 1976.