STIRLINGOVA ŠTEVILA DRUGE VRSTE V INTEGRALSKI OBLIKI

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11B73, 30E20

V prispevku pokažemo, kako lahko Stirlingova števila druge vrste vpeljemo s kompleksnim integralom. Izpeljemo tudi njihove osnovne lastnosti.

STIRLING NUMBERS OF THE SECOND KIND IN INTEGRAL FORM

It is shown how we can introduce the Stirling numbers of the second kind by an integral in the complex domain. Their basic properties are also derived.

Uvod

Namen članka je pokazati preprost primer, v katerem se srečata kombinatorika in kompleksna analiza. Dani množici A priredimo družino vseh njenih podmnožic, ki ji pravimo *potenčna množica* množice A in jo označimo s $\mathcal{P}(A)$. Če ima A končno mnogo elementov, denimo n, potem ima $\mathcal{P}(A)$ še več elementov kot A, in sicer 2^n. To navadno dokažemo s štetjem podmnožic, ki imajo po m elementov, pri čemer je $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, in z binomsko formulo, lahko pa se dokaza lotimo tudi z metodo matematične indukcije. Za $n = 0$ je $A = \emptyset$ in $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, potenčna množica ima $2^0 = 1$ element. Trditev za $n = 0$ res velja. Privzemimo, da je n število elementov množice A in da je število elementov v $\mathcal{P}(A)$ enako 2^n. Denimo, da ima množica B en element več kot A, torej $n + 1$. Brez škode za splošnost lahko vzamemo $B = A \cup \{x\}$, kjer $x \notin A$. Vse podmnožice množice B lahko razdelimo na dve tuji si skupini: na tiste, ki x vsebujejo, in tiste, ki x ne vsebujejo. V prvi so vse podmnožice X množice A, v drugi pa vse $X \cup \{x\}$, kjer je X iz prve skupine. Enih in drugih je ravno 2^n. Zato ima $\mathcal{P}(B)$ natančno $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ elementov. S tem smo zapisano trditev dokazali.

Eden od osnovnih pojmov pri množicah je *binarna relacija* v dani množici A (več o tem najdemo na primer v [5]). Pravimo, da je R binarna relacija v A, če je $R \in \mathcal{P}(A \times A)$. Binarna relacija R v A je podmnožica produkta $A \times A$. Če sta $a, b \in A$ v relaciji R, zapišemo kot aRb, kar ni nič drugega kot krajši zapis za $(a, b) \in R$.

Binarne relacije v A, ki ima n elementov, lahko preštejemo. Produkt $A \times A$ ima tedaj n^2 elementov, $\mathcal{P}(A \times A)$ pa 2^{n^2}. Nekatere vrste binarnih relacij so posebno pomembne. Od teh omenimo le *ekvivalenčne relacije*. Relacija R v množici A je ekvivalenčna, če je R hkrati refleksivna, simetrična ter tranzitivna. Taka relacija množico A razbije na paroma tuje neprazne podmnožice, ekvivalenčne razrede množice A po tej relaciji. Po drugi strani pa vsako razbitje množice A na paroma tuje neprazne podmnožice definira ekvivalenčno relacijo v A. Torej, če vemo, na koliko načinov lahko množico razbijemo na paroma tuje neprazne podmnožice, ki jim popolnoma smiselno pravimo kar *razredi*, potem vemo, koliko ekvivalenčnih relacij je v tej množici. Oglejmo si sedaj to za končno množico.

Stirlingova števila

Naj bo množica A neprazna, ima naj $n > 0$ elementov, število $S(n, m)$ pa naj pove, na koliko načinov lahko A razbijemo na m razredov. Število $S(n, m)$ torej pove, koliko ekvivalenčnih relacij v A je takih, ki imajo m ustreznih ekvivalenčnih razredov. Števila $S(n, m)$ imenujemo *Stirlingova*[1] *števila druge vrste*. Mimogrede pripomnimo, da se zanje v ustrezni matematični literaturi uporablja tudi drugačne oznake.

Takoj najdemo posebne primere. Za $n > 0$ in $m = 0$ ni nobenega prej opisanega razbitja množice A, prav tako ne, če je $m > n$. To pomeni: $S(n, 0) = 0$ za $n > 0$ in $S(n, m) = 0$ za $m > n > 0$. Razbitje je za $n > 0$ eno samo, če je $m = 1$ ali $m = n$, torej $S(n, 1) = S(n, n) = 1$. Premislimo, da je tudi $S(0, 0) = 1$. Prazno množico lahko namreč na en sam način razbijemo na nič razredov, ker je unija prazne družine razredov prazna množica. S tem bo račun potekal nemoteno,

Podobno kot lahko binomske koeficiente v Pascalovem trikotniku izračunamo postopno, lahko tako sestavimo tudi trikotnik števil $S(n, m)$. V ta namen pride prav njihova rekurzijska zveza. Do te pa pridemo tako, da vzamemo množico A, ki ima n elementov, ter množico $B = A \cup \{x\}$, kjer $x \notin A$. Množica B ima $n + 1$ element in jo razbijemo na m razredov. To se da narediti na $S(n + 1, m)$ načinov. V razbitjih množice B na m razredov so razbitja, ki razred $\{x\}$ vsebujejo, in taka, ki $\{x\}$ ne vsebujejo. Obe skupini razbitij sta si tuji. Prvih je $S(n, m - 1)$, saj tedaj preostalih $m - 1$ razredov razbitja sestavlja razbitje množice A. Razbitij množice B, v katerih razred $\{x\}$ ne nastopa, je pa podmnožica natančno enega od m razredov tega razbitja, je $mS(n, m)$. Tako smo našli rekurzijsko zvezo

$$S(n + 1, m) = mS(n, m) + S(n, m - 1), \tag{1}$$

ki velja za vsak $m \geq 1$ in za vsak $n \geq 0$.

[1] James Stirling (1692–1770) je bil škotski matematik.

$n\backslash m$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0
4	0	1	7	6	1	0
5	0	1	15	25	10	1

Tabela 1. Stirlingova števila druge vrste.

Primer 1. Z metodo matematične indukcije pa lahko s pomočjo rekurzijske zveze hitro preverimo enakosti

$$S(n+1,n)=\frac{n(n+1)}{2},\quad S(n+1,2)=2^n-1,$$

ki veljata za vsak $n \geq 0$. Opazimo, da je $S(n+1,n)$ ravno n-to trikotniško število.

Nekaj Stirlingovih števil druge vrste je zbranih v tabeli 1.

V zvezi s tem zlahka odgovorimo na vprašanje, koliko je surjektivnih preslikav ali funkcij iz množice A, ki ima n elementov, na množico B, ki ima m elementov. Množico A razbijemo na m razredov, nato pa vsak razred preslikamo na natanko en element množice B. To se da narediti na $m!S(n,m)$ načinov. Torej je surjektivnih preslikav iz A na B ravno $m!S(n,m)$. Čisto na koncu bomo izpeljali še en izraz za to število.

Število $B(n)$ vseh ekvivalenčnih relacij v množici A z n elementi ali število vseh razbitij množice A na razrede je n-to *Bellovo*[2] *število.* Očitno velja enakost

$$B(n)=\sum_{m=0}^{n} S(n,m).$$

Zaporedje Bellovih števil se prične tako:

$$B(0)=1, B(1)=1, B(2)=2, B(3)=5, B(4)=15, B(5)=52.$$

Iz rekurzijske zveze (1) brez težav z metodo matematične indukcije glede na število n dokažemo formulo

$$z^n=\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(z)_k, \tag{2}$$

[2]Eric Temple Bell (1883–1960) je bil rojen na Škotskem, kot matematik in pisatelj pa je deloval v ZDA.

v kateri so z izrazom $(z)_k = z(z-1)\cdots(z-k+1)$ definirane *padajoče faktoriele*. V dokazu uporabimo enakost $k(z)_k + (z)_{k+1} = z(z)_k$. Pravimo, da so Stirlingova števila druge vrste *povezovalni koeficienti* med potencami in padajočimo faktorielami. Pri tem vzamemo $(z)_0 = z^0 = 1$.

Pripomnimo, da lahko *Stirlingova števila prve vrste*, ki jih označimo s $s(n,m)$, vpeljemo kot povezovalne koeficiente med padajočimi faktorielami in potencami:

$$(z)_n = \sum_{m=0}^{n} s(n,m) z^m.$$

Števila $|s(n,m)|$ pa imajo prav tako kombinatorični pomen. Povejo namreč, koliko je med $n!$ permutacijami števil $1, 2, \ldots, n$ takšnih, ki se izražajo kot produkt m ciklov. Več o Bellovih in Stirlingovih številih ter njihovih rodovnih funkcijah lahko preberemo na primer v [1, 3, 4].

Nekaj kompleksne analize in računanje z residui

V nadaljevanju bomo uporabili nekatere pojme in prijeme, ki so znani v kompleksni analizi, na primer izrek o residuih (ostankih). Spomnimo se, da je funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ *holomorfna (regularna, analitična)*, če je v kompleksnem smislu odvedljiva v vsaki točki $z \in \mathcal{D}$. Pri tem je $\mathcal{D}$ odprta množica v ravnini kompleksnih števil $\mathbb{C}$.

Funkcija f ima *pol* v točki $a \in \mathcal{D}$, če obstajata taka odprta okolica $\mathcal{U}_a \subseteq \mathcal{D}$ točke a in taka holomorfna funkcija $g : \mathcal{U}_a \to \mathbb{C}$, da velja enakost $f(z) = g(z)/(z-a)^n$ pri nekem pozitivnem celem številu n, in sicer za vsak $z \in \mathcal{U}_a \setminus \{a\}$. Najmanjše število n s to lastnostjo je *stopnja pola* a. Če je $n = 1$, govorimo o *enostavnem polu*. Pol je poseben primer *izolirane singularne točke* funkcije.

Za točko $a \in \mathcal{D}$ lahko zapišemo *Laurentovo*[3] *vrsto* funkcije f:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Laurentova vrsta konvergira v neki odprti okolici točke a razen morda v sami točki a. Del vrste z negativnimi indeksi k imenujemo *glavni del*, del vrste s pozitivnimi indeksi k pa imenujemo *regularni del* funkcije f v točki a. Glede števila od nič različnih koeficientov c_k z negativnimi indeksi k v Laurentovi vrsti razločujemo tri možnosti:

[3] Pierre Alphonse Laurent (1813–1854) je bil francoski matematik.

1. Če je $c_k = 0$ za vsak $k < 0$, je a *odpravljiva singularna* točka funkcije f. Laurentova vrsta takrat preide v navadno potenčno vrsto.

2. Če je $c_k \neq 0$ za neskončno mnogo indeksov $k < 0$, potem je a *bistvena singularna* točka funkcije f.

3. Če je $c_k \neq 0$ za končno mnogo negativnih indeksov k in je $-n$ najmanjši tak indeks, potem ima funkcija f v a pol stopnje n. Tedaj ima glavni del funkcije f v točki a obliko:

$$\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a}.$$

V vseh primerih imenujemo koeficient c_{-1} *residuum*[4] funkcije f v točki a in označimo: $c_{-1} = \mathrm{Res}(f, a)$. Če integriramo z $2\pi i$ deljene člene Laurentove vrste $c_n(z-a)^n$ v pozitivni smeri po krožnici s poljubnim polmerom in s središčem v a, dobimo za rezultat 0 za vsak n razen za $n = -1$, ko dobimo (nam *ostane*) c_{-1}.

Kadar pa ima funkcija f enostaven pol v točki a, kar bomo uporabljali v nadaljevanju, izračunamo residuum po formuli:

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} f(z)(z-a).$$

Primer 2. Naj bo

$$z \mapsto f(z) = \frac{2z}{z^2+1} = \frac{2z}{(z+i)(z-i)}.$$

Funkcija f ima enostavna pola v točkah $z_1 = -i$ in $z_2 = i$ in

$$\mathrm{Res}(f, -i) = \lim_{z \to -i} \frac{2z(z+i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{-2i}{-2i} = 1,$$

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} \frac{2z(z-i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{2i}{2i} = 1.$$

V zvezi z residui navedimo brez dokaza *izrek o residuih*. Z njim izračunamo brez večjih težav marsikateri realni integral.

Izrek 1. *Naj bo množica $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ odprta in enostavno povezana, funkcija f pa naj bo holomorfna na $\mathcal{D}$ razen v končno mnogo točkah $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ki so zanjo izolirane singularne točke. Če je $\mathcal{C}$ v $\mathcal{D}$ pozitivno orientirana*

[4]residuum (latinsko): ostanek

enostavno sklenjena izmerljiva krivulja, ki objame točke $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in ne poteka skozi nobeno od njih, potem velja enakost

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Množica $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ je, poenostavljeno povedano, enostavno povezana, če lahko v njej vsako krožnico zvezno (ne da bi jo pretrgali) stisnemo v točko. Krivulja je izmerljiva, če ima končno dolžino.

Zapišimo še poseben primer:

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i. \tag{3}$$

Pri tem je $\mathcal{C}$ pozitivno orientirana enostavno sklenjena izmerljiva krivulja, ki objame točko a in ne poteka skoznjo. Pripomnimo še, da je $\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0$ za vsako enostavno sklenjeno izmerljivo krivuljo $\mathcal{C}$ v odprti in enostavno povezani množici $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$, na kateri je funkcija f holomorfna (Cauchyjev integralski izrek).

Za kompleksno analizo obstaja zelo obširna in bogata matematična literatura, na primer [6].

Lema 2. *Naj bo*

$$z \mapsto f(z) = \frac{z^n}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}$$

okrajšana racionalna funkcija, n nenegativno celo število in $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ne nujno različna kompleksna števila, pri čemer je $m - n > 1$. Potem veljata enakosti

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_k) = 0, \qquad \oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0,$$

kjer je $\mathcal{C}$ poljubna enostavno sklenjena izmerljiva krivulja, ki objame točke $z_1, z_2, \ldots, z_m$ in ne poteka skozi nobeno od njih.

Dokaz. Integrirajmo funkcijo f po krožnici $|z| = R$ oziroma $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, pri čemer vzamemo poljuben $R > \max\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_m|\}$. Naj bo $r_k = \operatorname{Res}(f, z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Po izreku o residuih imamo enakost

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{z^n\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}$$

in oceno

$$|r_1 + r_2 + \ldots + r_m| =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{R^n e^{ni\varphi} \cdot Re^{i\varphi} i\, d\varphi}{(Re^{i\varphi} - z_1)(Re^{i\varphi} - z_2) \cdots (Re^{i\varphi} - z_m)} \right| \le \\
&\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^{n+1}\, d\varphi}{(R - |z_1|)(R - |z_2|) \cdots (R - |z_m|)} \le \\
&\le \frac{R^{n+1}}{(R - |z_1|)(R - |z_2|) \cdots (R - |z_m|)}.
\end{aligned}
$$

Naredimo limitni prehod $R \to \infty$, upoštevamo pogoj $m > n + 1$ in dobimo

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = 0.$$

To tudi pomeni, da je

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^n\, dz}{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)} = 2\pi i (r_1 + r_2 + \ldots + r_m) = 0$$

za vsako enostavno sklenjeno izmerljivo krivuljo $\mathcal{C}$, ki objame $z_1, z_2, \ldots, z_m$ in ne poteka skozi nobeno od njih. ■

Primer 3. Vzemimo racionalno funkcijo iz primera 2. Zanjo velja $\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i) = 2 \neq 0$. Našli smo racionalno funkcijo, za katero vsota residuov ni enaka 0.

Primer 4. Kombinatoriko lahko včasih uporabimo tudi v kompleksni analizi. Vprašajmo se na primer, največ koliko različnih vrednosti ima lahko integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)},$$

kjer so $z_1, z_2, \ldots, z_n$ med seboj različne točke v ravnini kompleksnih števil, $\mathcal{C}$ pa je v tej ravnini pozitivno orientirana enostavno sklenjena izmerljiva krivulja, ki ne poteka skozi nobeno od naštetih točk. Število vrednosti integrala je odvisno od točk $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in od tega, katere od njih krivulja $\mathcal{C}$ objame.

Če je $n = 1$, ima podintegralska funkcija enostaven pol v točki z_1 in sta 2 možnosti: ali $\mathcal{C}$ objame z_1 in integral je enak $2\pi i$ ali pa te točke ne objame in je integral enak 0.

Kadar je $n > 1$, pa lahko $\mathcal{C}$ objame vsako podmnožico množice polov podintegralske funkcije, to je množice $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Takih podmnožic pa je 2^n, vključno s prazno množico. V slednjem primeru je integral enak 0. Toda integral je 0 po lemi 2, tudi ko $\mathcal{C}$ objame točke $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Zato ima dani integral pri $n > 1$ lahko kvečjemu $2^n - 1$ vrednosti. To število je včasih doseženo, včasih ne, odvisno od medsebojne lege točk $z_1, z_2, \ldots, z_n$ v ravnini kompleksnih števil. Oglejmo si to na preprostih primerih.

Pri $n = 2$ ima lahko integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

$2^2 - 1 = 3$ vrednosti. Če $\mathcal{C}$ objame z_1, ima vrednost $2\pi i/(z_1 - z_2)$, če objame z_2, vrednost $2\pi i/(z_2 - z_1)$. Če pa $\mathcal{C}$ hkrati objame z_1 in z_2 ali pa če tega sploh ne naredi, ima integral vrednost 0.

Pri $n = 3$ se začne zapletati. Residui v polih podintegralske funkcije integrala

$$I_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}$$

so števila $1/(z_1 - z_2)(z_1 - z_3), 1/(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)$ in $1/(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)$, vsota katerihkoli dveh od teh pa je enaka njihovim nasprotnim vrednostim $-1/(z_1 - z_2)(z_1 - z_3), -1/(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)$ in $-1/(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)$, ker je vsota vseh treh residuov enaka 0. Integral ima največ $2^3 - 1 = 7$ različnih vrednosti. Preprost račun nam pokaže, da se to zgodi natanko tedaj, ko hkrati velja $z_1 + z_2 \neq 2z_3, z_1 + z_3 \neq 2z_2, z_2 + z_3 \neq 2z_1$. Noben od polov podintegralske funkcije ne sme biti na sredini med preostalima dvema.

Za $n \geq 4$ so razmere prezapletene in presegajo namen tega članka. Zadovoljimo se kar s posebnim primerom. Pokažimo, da za $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$ in $z_4 = 2$ integral ne zavzame vseh $2^4 - 1 = 15$ vrednosti. Residui v polih podintegralske funkcije integrala

$$J_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z + 1)z(z - 1)(z - 2)}$$

so $\pm 1/6$ in $\pm 1/2$, njihove vsote po vseh kombinacijah pa $0, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 2/3$ in $\pm 1/6$. Našteta števila, pomnožena z $2\pi i$, dajo samo 9 različnih vrednosti integrala $J_{\mathcal{C}}$, ne pa 15.

Stirlingova števila druge vrste v integralski obliki

Da bi Stirlingovo število druge vrste $S(n, m)$ izrazili s kompleksnim integralom, vzemimo poljubno nenegativno celo število m in obe strani relacije (2) delimo s produktom $z(z - 1)(z - 2) \ldots (z - m)$. Dobimo izraz

$$\frac{z^n}{z(z - 1)(z - 2) \ldots (z - m)} = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)\varphi(z, k, m), \tag{4}$$

pri čemer smo označili

$$\varphi(z,k,m) = \frac{z(z-1)(z-2)\dots(z-k+1)}{z(z-1)(z-2)\dots(z-m)}$$

za $k \geq 1$ in

$$\varphi(z,0,m) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)\dots(z-m)}.$$

Naj bo $\mathcal{C}$ poljubna enostavno sklenjena izmerljiva krivulja, ki objame točke $0, 1, 2, \dots, m$ v ravnini kompleksnih števil (z) in ne poteka skozi nobeno od njih. Potem velja relacija

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \varphi(z,0,0)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 1$$

in po lemi 2

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \varphi(z,0,m)\,dz = 0$$

za $m \geq 1$.

Za $k \geq 1$ pa se v izrazu za $\varphi(z,k,m)$ določeno število faktorjev v števcu in v imenovalcu pokrajša. Če je $k > m$, dobimo polinom spremenljivke z, torej na $\mathbb{C}$ holomorfno funkcijo, in tedaj je

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \varphi(z,k,m)\,dz = 0.$$

Za $k < m$ ostaneta v imenovalcu vsaj dva faktorja, števec pa je enak 1, zato je po lemi 2 spet

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \varphi(z,k,m)\,dz = 0.$$

Če pa je $k = m$, dobimo

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \varphi(z,m,m)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-m} = 1.$$

Ugotovitev lahko strnemo v preprosto formulo

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \varphi(z,k,m)\,dz = \delta_{k,m},$$

kjer je $\delta_{k,m}$ Kroneckerjev simbol. Zato dobimo z integracijo iz izraza (4):

$$S(n,m) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^n\,dz}{z(z-1)(z-2)\dots(z-m)}.$$

Funkcije pod integralskim znakom, to se pravi

$$F(.,n,m) : z \mapsto F(z,n,m) = \frac{z^n}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-m)},$$

kjer sta števili n in m nenegativni in celi, vzamemo kot funkcije z morebitno odpravljivo singularnostjo v točki $z = 0$. Hitro se da preveriti, da za vsak $n \geq 0$ in vsak $m \geq 1$ velja enakost

$$F(z,n+1,m) = mF(z,n,m) + F(z,n,m-1). \tag{5}$$

Funkcije $z \mapsto F(z,n,m)$ po vsem, kar smo videli, lahko uporabimo za novo, integralsko definicijo Stirlingovih števil druge vrste (članek [2]). Zanje lahko tudi povsem na novo, neodvisno od njihove kombinatorične definicije, izpeljemo glavne lastnosti. Oblikujmo izrek.

Izrek 3. *Za poljubni nenegativni celi števili m in n ima integral*

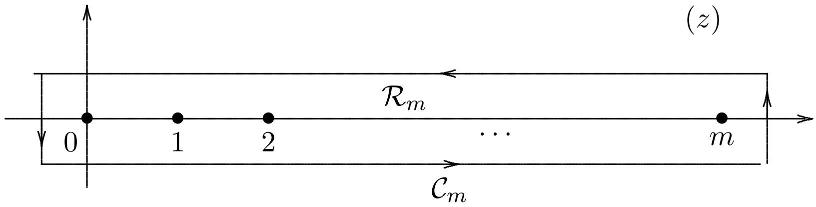
$$S(n,m) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} F(z,n,m)\,dz, \tag{6}$$

kjer je $\mathcal{C}$ poljubna enostavno sklenjena izmerljiva krivulja, ki objame točke $0,1,2,\ldots,m$ v ravnini kompleksnih števil (z) in ne poteka skozi nobeno od njih, naslednje lastnosti:

1. $S(0,0) = 1$*;*
2. $S(n,0) = 0$ *za vsak* $n \geq 1$*;*
3. $S(0,m) = 0$ *za vsak* $m \geq 1$*;*
4. $S(n+1,m) = mS(n,m) + S(n,m-1)$ *za vsak* $m \geq 1$ *in za vsak* $n \geq 0$*;*
5. $S(n,m) = 0$ *za* $m > n \geq 1$*;*
6. *vsa števila* $S(n,m)$ *so nenegativna in cela.*

Dokaz. Za integracijsko krivuljo integrala v izreku lahko vzamemo na primer $\mathcal{C}_m$, to je ograjo pravokotnika $\mathcal{R}_m$, ki ga kaže slika 1. Glede na to, kako je definirana funkcija $F(.,n,m)$, je lahko točka $z = 0$ vselej znotraj tega pravokotnika, kot je razvidno iz poteka dokaza.

1. Za $n = m = 0$ je
$$S(0,0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_0} \frac{dz}{z} = 1.$$



Slika 1. Integracijska krivulja.

2. Za $n \geq 1$ in $m = 0$ imamo po Cauchyjevem integralskem izreku

$$S(n,0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} z^{n-1}\, dz = 0,$$

saj je tedaj podintegralska funkcija na pravokotniku $\mathcal{R}_0$ regularna.

3. Za $n = 0$ in $m \geq 1$ je prav tako po lemi 2

$$S(0,m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_m} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-m)} = 0.$$

4. Za vsak $m \geq 1$ in za vsak $n \geq 0$ je

$$2\pi i(mS(n,m)+S(n,m-1)) = m \oint_{\mathcal{C}_m} F(z,n,m)\, dz + \oint_{\mathcal{C}_m} F(z,n,m-1)\, dz =$$

$$= \oint_{\mathcal{C}_m} (mF(z,n,m) + F(z,n,m-1))\, dz =$$

$$= \oint_{\mathcal{C}_m} F(n+1,n,m)\, dz = 2\pi i S(n+1,m)\,.$$

Pri tem smo uporabili enakost (5). Po krajšanju s faktorjem $2\pi i$ dobimo iskano rekurzijsko zvezo.

5. Za $m > n \geq 1$ dobimo po lemi 2

$$S(n,m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_m} \frac{z^{n-1}\, dz}{(z-1)(z-2)\cdots(z-m)} = 0.$$

6. Da so vsa števila $S(n,m)$ nenegativna in cela, lahko sklepamo induktivno na podlagi pravkar dokazane rekurzijske zveze.

S tem smo izrek v celoti dokazali. ∎

Z rekurzijsko zvezo

$$S(n+1,m) = mS(n,m) + S(n,m-1),$$

ki velja za $m \geq 1$ in $n \geq 0$, so pri robnih pogojih $S(0,m) = 0$ za $m \geq 1$, $S(n,0) = 0$ za $n \geq 1$ in $S(0,0) = 1$ Stirlingova števila $S(n,m)$ natančno določena. Zato imamo (6) res lahko za njihovo integralsko definicijo.

Primer 5. Izrek 1 in izraz (6) nam pomagata razviti še eno formulo za število surjektivnih funkcij iz množice A, ki ima n elementov, na množico B, ki ima m elementov. Vemo že, da jih je $m!S(n,m)$. Sedaj pa lahko zapišemo

$$m!S(n,m) = m!\sum_{k=0}^{m} \mathrm{Res}(F(.,n,m),k).$$

Najprej obravnavamo primer $n \geq 1, n \geq m \geq 1$. V polu $z = k$, kjer je $k = 1, 2, \ldots, m$, je tedaj

$$\mathrm{Res}(F(.,n,m),k) = \lim_{z\to k} \frac{z^n}{z(z-1)\ldots(z-k+1)(z-k-1)\ldots(z-m)}.$$

Po poenostavitvi dobimo

$$\mathrm{Res}(F(.,n,m),k) = \frac{(-1)^{m-k}k^n}{k!(m-k)!}.$$

Dobljeni izraz je pravilen tudi za $n = 0$ in $k = 0$, če v njem privzamemo, da je $0^0 = 1$. Nazadnje dobimo:

$$m!S(n,m) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}k^n\binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k(m-k)^n\binom{m}{k}.$$

Zgornji izraz se da izpeljati tudi popolnoma kombinatorično z uporabo pravila o vključitvi in izključitvi.

Stirlingova in Bellova števila imajo še veliko drugih lastnosti, posplošitev in povezav. Nastopajo še marsikje v matematiki, zlasti v kombinatoriki, verjetnostnem računu in teoriji števil.

LITERATURA

[1] M. Abramowitz in I. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover publications, New York, 1972.

[2] A. Benzait in B. Voigt, *A combinatorial interpretation of* $(1/k!)\Delta^k t^n$, Discrete Mathematics **73** (1988/89), 27–35.

[3] J. Grasselli, *Enciklopedija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.

[4] S. Klavžar in P. Žigert, *Izbrana poglavja uporabne matematike*, Pedagoška fakulteta, Maribor, 2002.

[5] N. Prijatelj, *Matematične strukture I*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1964.

[6] I. Vidav, *Višja matematika III*, DZS, Ljubljana, 1976.