

MATEMATIČNE SPOSOBNOSTI PRI OTROCIH: NEKAJ VROJENEGA, NEKAJ PRIDOBLENEGA, A VEDNO LAHKO VIR ZADOVOLJSTVA

TINA BREGANT

Univerzitetni rehabilitacijski inštitut – URI Soča
Ljubljana

Ocenjevanje številčnosti neke skupine, primerjanje dveh vrednosti oziroma količin ter osnovno seštevanje (dodajanje) in odštevanje (odvzemanje) so biološko določene sposobnosti, ki so prirojene tako nekaterim živalim kot ljudem. Že novorojenček razlikuje nekatere količine, z zorenjem možganov pa ta sposobnost še napreduje, tako da lahko ljudje kasneje razločujemo količine, ki se tudi zelo malo razlikujejo med seboj. Razumemo tudi velike količine. Kasneje ta vrojena znanja nadgradimo z uporabo števk, simboličnim učenjem in učenjem algoritmov. Matematične kompetence se povezujejo z zgodnjimi zaznavnimi in gibalnimi izkušnjami, telesno shemo in celo s socialno-čustvenimi kompetencami, ki smo jih razvili v otroštvu znotraj družine. Ker so tudi matematične kompetence v otroštvu tiste, ki določajo kasnejšo akademsko uspešnost, lahko razumevanje njihovega razvoja pomaga oblikovati spodbude pri usvajanju matematičnih veščin.

MATHEMATICAL ABILITIES IN CHILDREN: SOME INBORN, SOME ACQUIRED BUT ALWAYS A POTENTIAL SOURCE OF PLEASURE

Numerosity, comparison of two values or quantities as well as addition and subtraction are biologically inherent abilities in people and some animals, too. A newborn can already distinguish between some quantities. Through development her ability increases up to the adult level where even small differences are detected and big quantities are understood. Later on, we add to inborn abilities the use of numbers, symbolic learning, and learning of algorithms. Mathematical competences are linked to sensory and motor experiences, body scheme, and even socio-emotional competencies we have acquired within the family during childhood. By understanding how mathematical abilities develop we can create opportunities and encourage mathematical competences which determine academic success later in life.

Uvod

»Za božjo voljo, prosim te, odnehaj! Boj se je toliko kot strasti in čutne obsedenosti, saj ti bo prav tako vzela ves čas, tvoje zdravje, mir v duši in srečo v življenju!« moleduje Farkas Bolyai svojega sina Jánosa Bolyaija (eden od očetov neevklidske geometrije), da naj le odneha s proučevanjem hiperbolične geometrije [8].

Za večino ljudi je matematika zelo abstrakten, čutom nedostopen, šolski predmet, ki jim je vrh tega grenil veselje pri pouku. Matematik Zagier celo napiše, da večina ljudi ne more niti od daleč razumeti, da obstaja povezava med matematiko in zadovoljstvom in da jih straši že zgolj misel na matematiko [23]. Da obstaja povezava med matematiko in umetnostjo, je morda lažje razumeti, če se spomnimo renesanse, ko so umetniki poskusili prenesti naš tridimenzionalni svet na dvodimenzionalno platno; če pomislimo na uganke, ki jih je postavil M. C. Escher; če se ozremo na arabske mozaike in na fraktale. Da se matematika lahko napaja iz uporabne umetnosti, kot je kvačkanje, pa je pokazala latvijska matematičarka Daina Taimina [12].

Matematiko in njene zakonitosti lahko spremljamo povsod, ne le na računih pri trgovcih, tehtanju sadja pri branjevkah in nakupu varčnega avtomobila. Vseprisotnost matematike v našem življenju je fascinantna. Če je matematično mišljenje del naših miselnih procesov, kdaj in kje se v našem umu prične porajati matematično mišljenje?

V prispevku se bomo sprehodili skozi otrokov razvoj. Na poti od zaznavno-telesnega do abstraktnega bomo lahko uvideli, zakaj je spodbujanje matematičnih kompetenc pomembno za otrokov razvoj in čemu šele po usvojenih matematičnih veščinah v matematiki lahko tudi uživamo in občutimo lepoto, celo strast, ki nas lahko zasvoji za celo življenje.

Telesna shema in matematične sposobnosti

Človeški možgani so omreženi za prepoznavo antropomorfnih struktur, kar opazimo že pri novorojenčkih, ki z zanimanjem opazujejo človeške obraze in tako spodbujajo svoj čustveni, socialni in miselni razvoj. Nekatere funkcionalne raziskave kažejo, da smo omreženi tudi za prepoznavo simetrije. Za zaznavanje prostora in našega mesta v njem je zelo pomembna telesna shema. Osnova simetrija in »človeškost« naših teles sta pri oblikovanju telesne sheme izjemnega pomena. Vemo, da nekateri bolezenski procesi shemo porušijo oz. jo v otroškem obdobju, ki je zanjo ključno, ne izgradijo dovolj funkcionalno.

Prostorske predstave, ki so ključne tako pri geometriji kot pri umetnosti, otrok prične usvajati zelo zgodaj, takrat ko pričene oblikovati lastne telesne sheme: ko leži na hrbtu kot dojenček in z roko namensko poseže po predmetu okoli tretjega meseca starosti. Sprva je njegov poseg v prostor negotov: premočan ali prešibak, nenatančno usmerjen na predmet, a sčasoma se dojenček izuri in s spoznavanjem svojega telesa poseže ne le z roko po predmetu, pač pa tudi s telesom v prostor: prične s kotaljenjem,

plazenjem, kobacanjem in okoli prvega rojstnega dne tudi shodi. S celim telesom otrok spoznava, kaj je daleč in kaj blizu; kaj je več in kaj manj. Njegovo telo mu omogoča razumeti osnovne koncepte: več-manj, močno-šibko, daleč-blizu, ostro-topo, ravno-ukriviljeno itd. Prve koračnice otroku omogočijo novo modalnost: matematične količine spoznava s celim telesom, ko koraka po taktu in s celim telesom občuti zaporedje in ritem. Otroci praviloma štejejo na prste in tudi mi, odrasli, ker imamo 10 prstov, uporabljamo desetiški sistem, čeprav je dvanajstiški sistem preprostejši za uporabo.

Ljudje smo praviloma šele v obdobju šolanja sposobni abstraktnega mišljenja, ko se nam ni več treba zanašati na telesno shemo. Marsikdo pa tega prehoda iz telesnega v abstraktni svet ne zmore nikoli. Sposobnost abstraktne koncepte preigrati le z miselnim procesom, brez vpletenosti svojega telesa, je za naše možgane precej zahtevno opravilo, za katero je treba poleg bioloških danosti in dobrega delovanja osrednjega živčevja tudi veliko vaje in urjenja. Kljub temu so še vedno nekateri koncepti označeni s telesno shemo.

Lakoff in Nunez sta uporabila sistem metafor (teorijo kognitivnih ali konceptualnih metafor), v katerem predlagata aritmetiko kot način zbiranja predmetov oziroma aritmetiko kot gibanje vzdolž osi [15]. Če ste desnični, kar velja za večino zdrave populacije, in uporabljate evropski način pisanja od leve proti desni, potem je za vas vse, kar je večje, boljše in prihodnje, umeščeno na vašo desno. Zahodnoevropejci smo znani po linearnem razmišljanju, z numerično osjo, ki se pričinja na levi in po velikosti raste proti desni [6]. Pri poskusih s številčnimi vrednostmi na ekranih smo pri pritisku na gumb, kot reaktivnem času prepoznavne vrednosti, pri večjih količinah hitrejši z desnico kot levico. Podobno za nas velja pri vertikalni številčni osi, kjer višje za nas pomeni tudi večje. Zanimivo, da tudi odrasli to zaznavamo s celim telesom. Tako so preiskovanci pri generiranju števil ob premikih telesa navzgor generirali večje vrednosti, kot če so se premikali navzdol [11]. Če so preiskovanci kimali navzgor, so generirali višje vrednosti, kot če so kimali z glavo navzdol [22]. Naši možgani poleg tega enačijo modalnosti. Tako razumemo večje napisano številko tudi kot količinsko večjo od drobno napisane [21] in količino pikic precenimo, če prekrivajo večjo površino [13].

Miselne predstave smo v otroštvu namreč izoblikovali s pomočjo telesa. Celotako abstraktne koncepte, kot je negativnost, npr. zakaj je zmnožek dveh negativnih števil pozitiven, nekateri strokovnjaki razlagajo s konkretnimi primeri [14].

Ob procesiranju števil in količin se v možganih aktivira temenski režanj,

pri čemer je aktivacija podobna kot pri procesiranju prostorskih informacij [4]. Temu se ne izognejo niti študenti matematike, ki celo pri razlagi integralov uporabljajo značilne geste, ki sovpadajo z osnovnimi količinskimi pojmi (desno-levo, višje-nižje) [17].

Aritmetika in občutek za količino

Poznavanje števil je nujno za razumevanje matematike. Razvoj aritmetičnih sposobnostih ne temelji zgolj na pridobivanju izkušenj in učenju, temveč so nam nekatere aritmetične sposobnosti, predvsem občutek za količino, vrojene [16]. Ocenjevanje številčnosti neke skupine, primerjanje dveh števil po velikosti ter osnovno seštevanje ali dodajanje in odštevanje ali odvzemanje so biološko vrojene ločene sposobnosti. Presoja, kje bo veriverica našla več orehov ali v kateri čredi je možnost ulova največja, določa obstoj osebka in vrste. Živali sicer zelo verjetno ne štejejo v lingvističnem pomenu štetja. Torej živali ne štejejo ena, dve, tri, ... pač pa imajo vrojeno sposobnost določanja in razločevanja količine. Gre najverjetneje za evolucijsko prednost teritorialnih živali, ki jim ta sposobnost omogoča določiti teritorij, kjer je več hrane za celotno čredo [3].

Že majhni otroci zmorejo prepoznati različne količine. Otroci se med seboj sicer precej razlikujejo, kdaj usvojijo določene veščine, drži pa predvidevanje, ki velja med vzgojitelji in učitelji, da so tisti otroci, ki prej in bolj uspešno rešujejo matematične probleme, tudi kasneje akademsko bolj uspešni. V laičnem jeziku takim otrokom rečemo, da so »pametni«. Zanimivo je, da aritmetične sposobnosti otrok korelirajo tudi z nekaterimi socialnimi veščinami in čustvenimi vedenji [9], kar pa je v nasprotju s predsodkom, da so ti otroci »samotarji« in nezainteresirani za družbo.

Že dojenčki so sposobni razlikovati množici z različnimi elementi, številčnost pa dojemajo amodalno. Pri šestih mesecih ločijo množici, katerih število elementov je v razmerju 1 : 2, s starostjo pa se to razmerje hitro izboljšuje [7]. Petletni otroci že ločijo skupini, katerih število elementov je v razmerju 7 : 8 [10]. Sposobnost primerjanja dveh količin se začne razvijati šele po 15. mesecu starosti, preštevanja pa se otroci naučijo spontano, z učenjem jezika. Govor otroku omogoči, da števila dobijo abstrakten, simbolni pomen, s tem pa se odpre pot k simbolni aritmetiki. Otroci v predšolskem obdobju računajo po intuiciji, v šoli pa aritmetika temelji na učenju postopkov za reševanje problemov. Pri šolskem usvajanju matematičnih znanj prevzame glavno nalogo spomin in avtomatizacija procesov, pri čemer intuicijo zapostavimo. Vendar so raziskave pokazale, da je intuicija zelo pomembna

in je celo napovedni dejavnik razvoja matematičnih kompetenc skozi celotno šolanje.

Uspeh pri matematiki – spodbuda na jezikovnem, socialnem in čustvenem področju

Zanimivo in morda celo intrigantno je spoznanje, da na uspešnost učencev pri pouku matematike vplivajo odnosi. Recipročnost odnosov med šolo in domom je tako pomembna, da so otroci bolj osredotočeni na šolske naloge, in zanimivo, hkrati tudi bolj uspešni pri matematiki, če njihovi starši mislijo, da so njihovi otroci uspešni [1]. Ravno obratno pa nezaupanje v otrokove sposobnosti vodi v splošno učno manj uspešnost in tudi slabše matematične kompetence. Zanimivo, da starši, zlasti očetje, s trajanjem šolanja povečujejo zaupanje v sinove matematične kompetence, medtem ko jih za hčere zmanjšujejo. Kako matere razumejo otrokove matematične sposobnosti, pa določa formalno in neformalno matematično znanje ter tudi uspešnost, pri čemer je materino znanje matematike tisto, ki določa formalni nivo znanja otroka [2].

Predšolske izkušnje in spodbudno predšolsko okolje je tisto, ki določa kasnejše uspehe pri matematiki [5]. Učinki obogatenih materialov, dejavnosti in interakcij med vzgojitelji-učitelji in učenci v najzgodnejših letih učenja se kažejo še štiri leta po učinkoviti intervenciji, usmerjeni v matematiko [19]. Če spodbujamo učenje matematike pri ekonomsko in socialno manj privilegiranih učencih, pri njih pride do boljšega uravnavanja in zmanjšanja težavnih vedenj, pridobijo več samonadzora in pripadnosti šoli in učenju. Bolj pogosto kot pred intervenco so pridružena pozitivna socialno-čustvena vedenja [9].

Matematične sposobnosti se povezujejo s pismenostjo. Tako pričetki opisnejevanja sovpadajo tudi s štetjem in preprostimi operacijami seštevanja in odštevanja. Predšolski otrok, ki zmore pripovedovati zgodbo in jo osvetliti z logičnimi opisi sosledja dogodkov in morda celo z več vidikov, je po nekaterih raziskavah kasneje tudi pri matematiki uspešnejši [18]. Vzrok je verjetno v tem, da pri usvajanju matematičnih veščin ne gre zgolj za fonološko spretnost, pač pa za prepoznavanje in reševanje besedilnih problemov ter širši nabor spretnosti. Dobre matematične sposobnosti se povezujejo z jezikovnimi spretnostmi do te mere, da intervencijski programi, ki spodbujajo matematično pismenost, vplivajo na statistično značilen, količinsko merljiv porast jezikovnih spretnosti [20].

Z govorom se otrokom odpre pot k simboličnemu računanju. Do tretjega

leta starosti otroci štejejo avtomatično, brez težav do 10. Triinpolletni otrok že zazna napako v preštevanju, do četrtega leta pa usvoji osnovni princip preštevanja, tj. da je vsak predmet štet le enkrat in da si števila morajo slediti zaporedno. Domnevamo, da gre za vrojeno sposobnost, ki spremlja sposobnost spontanega učenja jezika. Šele po četrtem letu starosti otroci začnejo razumeti, čemu je preštevanje namenjeno, tj. da končno število pomeni število vseh elementov v skupini.

Matematične sposobnosti se ne povezujejo s sposobnostjo in hitrostjo poimenovanja in izražanja, ki so tudi eno od meril kognitivnega razvoja. Podatki iz raziskav nakazujejo, da so matematično »sposobnejši« posamezniki boljši ne toliko v priklicu aritmetičnih znanj, pač pa v delovanju višjih, kognitivnih procesov, zlasti pri procesiranju matematičnih simbolov. Te procese lahko zaznamo s slikanjem s funkcijsko magnetno resonanco (fMRI). Pri dobrih matematikih ti procesi zelo aktivno potekajo v levem angularnem girusu, ki je pri njih bolj dejaven kot pri slabih matematikih.

Sklep

Kljub temu da je ljudem občutek za količino in števila vrojen, ima tudi učenje aritmetike z začetkom že v predšolskem obdobju velik vpliv na razvoj kasnejših matematičnih sposobnosti. Dobra telesna shema, ki smo jo kot malčki zgradili na podlagi zaznav in gibanja telesa, ter poznavanje količin in števil sta temelj za poznejše uspešno razumevanje matematike. Uporaba matematične intuicije pri izgradnji miselnih modelov in hkrati uporaba aritmetike in razumevanja algoritmov se ne izključujeta, pač pa dopolnjujeta, in le tako lahko pričakujemo, da bo razumevanje matematike boljše, razvoj matematičnih kompetenc pa hitrejši in uspešnejši. V matematiki bomo lahko uzrli lepoto in v njej preprosto – uživali.

LITERATURA

- [1] K. Aunola, J. E. Nurmi, M. K. Lerkkanen, in H. Rasku-Puttonen, *The role of achievement-related behaviors and parental beliefs in children's mathematical performance*, Educational Psychology **23** (2003) 4, 403–421.
- [2] B. Blevins-Knabe, L. Whiteside-Mansell in J. Selig, *Parenting and mathematical development*, Academic Exchange Quarterly **11** (2007) 2, 76–80.
- [3] T. Bregant, *Ali je matematika doma le v človekovih možganih*, Proteus **75** (2013) 5, 209–216.
- [4] T. Bregant, *Nevrokognitivne osnove numeričnega procesiranja*, Psihološka obzorja **21** (2012) 3/4, 69–74.

- [5] J. Brooks-Gunn, A. S. Fuligni in L. J. Berlin, *Early child development in the 21st Century: Profiles of current research initiatives*, New York: Teachers College Press (2003).
- [6] S. Dehaene, S. Bossini in P. Giraux, *The mental representation of parity and number magnitude*, Journal of Experimental Psychology: General **122** (1993), 371–396.
- [7] S. Dehaene, N. Molko, L. Cohen in A. J. Wilson, *Arithmetic and the brain*, Current Opinion in Neurobiology **14** (2004), 218–224.
- [8] T. Denes, *Real face of Janos Bolyai*, Notices of the American Mathematical Society **58** (2011) 1, 41–51.
- [9] J. Dobbs, G. L. Doctoroff, P. H. Fisher in D. H. Arnold, *The association between preschool children's socio-emotional functioning and their mathematical skill*, Journal of Applied Developmental Psychology **27** (2006), 97–108.
- [10] L. Feigenson, S. Dehaene in E. Spelke, *Core systems of number*, Trends of Cognitive Science **8** (2004) 7, 307–314.
- [11] M. Hartmann, L. Grabherr in F. W. Last, *Moving along the mental number line: Interactions between whole-body motion and numerical cognition*, Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance **38** (2012) 6, 1416–1427.
- [12] D. W. Henderson in D. Taimina, *Crocheting the hyperbolic plane*, Mathematical Intelligencer **23** (2001) 2, 17–28.
- [13] F. Hurewitz, R. Gelman in B. Schnitzer, *Sometimes area counts more than number*, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, **103** (2006), 599–604.
- [14] M. Kline, *Mathematics for the nonmathematician*, Toronto, Canada: General Publishing Company (1967).
- [15] G. Lakoff in R. E. Nunez, *Where mathematics comes from*, New York: Basic Books (2000).
- [16] T. Levstek, T. Bregant in A. Podlesek, *Razvoj aritmetičnih sposobnosti*, Psihološka obzorja **22** (2013), 115–121.
- [17] T. Marghetis in R. Nunez, *The motion behind the symbols: A vital role for dynamism in the conceptualization of limits and continuity in expert mathematics*, Topics in Cognitive Science (2013), 1–18.
- [18] D. K. O'Neill, M. J. Pearce in J. L. Pick, *Predictive relations between aspects of preschool children's narratives and performance on the Peabody Individualized Achievement Test – Revised: Evidence of a relation between early narrative and later mathematical ability*, First Language **24** (2004), 149–183.
- [19] E. S. Preisner-Feinberg, M. R. Burchinal in R. M. Clifford, *The relation of preschool child-care quality to children's cognitive and social developmental trajectories through second grade*, Child Development **72** (2001) 5, 1534–1553.
- [20] M. Shayer in M. Adhami, *Realizing the cognitive potential of children 5–7 with a mathematics focus: Post-test and long-term effects of a 2-year intervention*, British Journal of Educational Psychology **80** (2010) 3, 363–379.
- [21] H. J. Tzelgov, *Is three greater than five: The relation between physical and semantic size in comparison tasks*, Memory & Cognition **10** (1982), 389–395.
- [22] B. Winter in T. Matlock, *More is up ... and right: Random number generation along two axes*, v M. Knauff, M. Pauen, N. Sebanz, I. Wachsmuth (Eds.), Proceedings of the 35th Annual Conference of the Cognitive Science Society, Austin, TX: Cognitive Science Society (2013), 3789–3974.
- [23] D. Zagier, *The beauty of numbers*, MaxPlanckResearch – The Science Magazine of the Max Planck Society (2012) 1, 12–17.