PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **28** (2000/2001)
Številka 3
Strani 140–147

Ivan Vidav:

O PERFEKTNIH (POPOLNIH) KVADRIH

Ključne besede: matematika, geometrija, teorija števil, diofantske enačbe.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/28/1441-Vidav.pdf

O PERFEKTNIH (POPOLNIH) KVADRIH

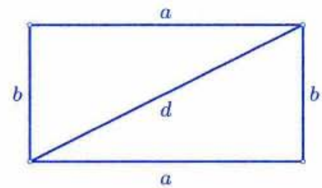
Perfektni (popolni) kvader imenujemo tak kvader, pri katerem se izražajo dolžine robov, telesne diagonale in diagonal vseh stranskih ploskev s celimi (torej naravnimi) števili. Pravzaprav smemo tako imenovati vsak kvader, pri katerem so vse naštete dolžine racionalna števila ali pa so med seboj v racionalnih razmerjih. Če so namreč vse racionalne, se pravi ulomki, pomnožimo robove z najmanjšim skupnim imenovalcem teh ulomkov. Tako dobimo podoben kvader, pri katerem se vse navedene dolžine izražajo z naravnimi števili. Če pa so vsa razmerja med njimi racionalna, lahko izberemo enoto za dolžino tako, da so potem vse te količine cela števila.

Ali v tem smislu perfektni kvadri obstajajo?

Kvader je telo v trirazsežnem prostoru. V ravnini ima pravokotnik vlogo kvadra. Po analogiji bi imenovali pravokotnik "perfekten", če se izražajo dolžine njegovih stranic in diagonale z naravnimi števili, oziroma, kar je v bistvu isto, z racionalnimi števili.

Diagonala razdeli pravokotnik na dva skladna pravokotna trikotnika s katetama a in b, hipotenuza pa je diagonala d (slika 1). Zato velja po Pitagorovem izreku zveza

$$a^2 + b^2 = d^2 \,.$$



Slika 1.

Pri "perfektnem" pravokotniku so a, b, d naravna števila, ki zadoščajo tej enačbi. Takih trojk a, b, d je nešteto, imenujemo jih pitagorejske trojke, najmanjša med njimi je $a = 3$, $b = 4$ in $d = 5$.

Če razširimo obravnavo na pravokotnike, pri katerih so dolžine a, b, d racionalna števila, smemo vzeti, da je ena izmed njih enaka 1, npr. $b = 1$ (ustrezno daljico smo izbrali za enoto dolžine). Zgornja enačba se zdaj glasi

$$a^2 + 1 = d^2 \,. \tag{1}$$

Iz nje dobimo $d^2 - a^2 = 1$. Če levo stran razstavimo v produkt, lahko zapišemo enačbo (1) v obliki

$$(d + a)(d - a) = 1 \,. \tag{1a}$$

Denimo, da pozitivni racionalni števili a in d zadoščata (1), torej tudi (1a). Očitno je $d > 1$. Postavimo $d + a = t$, kjer je t prav tako racionalen in večji od 1, saj je $t = d + a > d > 1$. Iz (1a) dobimo zdaj $d - a = 1/t$, od tod pa izračunamo

$$a = \frac{t^2 - 1}{2t}, \qquad d = \frac{t^2 + 1}{2t}, \qquad t > 1. \tag{2}$$

Za vsako racionalno rešitev enačbe (1) obstaja potemtakem tako racionalno število $t > 1$, da se a in d izražata z obrazcema (2). Narobe je prav tako res: Izberimo si poljubno racionalno število $t \neq 0$ in ga vstavimo v leva izraza (2). Dobljena a in d sta racionalni števili, ki zadoščata enačbi (1), kar pokaže preprost račun. Če sta a in d pozitivna – taka sta, kadar je $t > 1$ – določata a in $b = 1$ pravokotnik z racionalnimi stranicami in racionalno diagonalo d.

Pripomba. Kadar je $t < 1$, je bodisi a bodisi d negativno število. V tem primeru je dolžina ustrezne stranice enaka $|a|$ (oziroma diagonale $|d|$).

Racionalno število $t > 1$ lahko zapišemo v obliki ulomka $t = p/q$, kjer sta števec p in imenovalec q naravni tuji si števili in $p > q$. Če to vstavimo v (2), se a in d izražata v obliki teh-le ulomkov

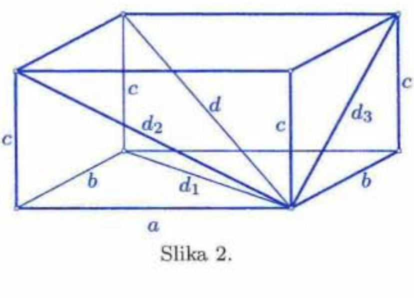
$$a = \frac{p^2 - q^2}{2pq}, \qquad d = \frac{p^2 + q^2}{2pq}.$$

Pomnožimo stranici a in $b = 1$ s skupnim imenovalcem $2pq$, pa dobimo podoben pravokotnik, ki ima stranici in diagonalo

$$a = p^2 - q^2, \qquad b = 2pq, \qquad d = p^2 + q^2. \tag{3}$$

Za vsak par naravnih števil p in q, $p > q$, so tako dobljeni a, b, d pitagorejska trojka.

Vzemimo zdaj kvader z robovi a, b in c (slika 2). Zaznamujmo z d telesno diagonalo (telesne diagonale so štiri, so pa med seboj enake), z d_1, d_2 in d_3 pa diagonale stranskih ploskev. Pri tem je d_1 diagonala osnovnega pravokotnika s stranicama a in b, d_2 diagonala stranskega pravokotnika s stranicama a in c, d_3 pa diagonala stranskega pravokotnika s stranicama b in c. Po Pitagorovem izreku dobimo zveze



Slika 2.

$$a^2 + b^2 = d_1^2, \qquad a^2 + c^2 = d_2^2, \qquad b^2 + c^2 = d_3^2. \tag{4}$$

Telesna diagonala d je hipotenuza pravokotnega trikotnika s katetama d_1 in c (slika 2). Zato je $d_1^2 + c^2 = d^2$, oziroma, če upoštevamo prvo enačbo (4),

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 . \tag{5}$$

Pri poljubno izbranih pozitivnih številih a, b, c izračunamo iz (4) in (5) stranske diagonale d_1, d_2, d_3 in telesno diagonalo d. Če so a, b, c cela (oziroma racionalna) števila, pa dobljeni d_1, d_2, d_3 in d niso vselej cela (niti racionalna) števila.

Kakor smo povedali na začetku, je za obstoj perfektnega kvadra dovolj, če najdemo pozitivna racionalna števila a, b, c, d_1, d_2, d_3 in d, ki zadoščajo enačbam (4) in (5). Odslej bomo torej iskali racionalne rešitve. Zdaj smemo vzeti, da je $c = 1$ (tretji rob kvadra smo izbrali za enoto dolžine). Enačbe (4) in (5) dobijo potem tole obliko

$$a^2 + b^2 = d_1^2 , \qquad a^2 + 1 = d_2^2 , \qquad b^2 + 1 = d_3^2 \tag{4a}$$

in

$$a^2 + b^2 + 1 = d^2 . \tag{5a}$$

Denimo, da imamo kakšno racionalno rešitev. Druga in tretja enačba (4a) imata obliko enačbe (1). Če se spomnimo, kako dobimo racionalne rešitve enačbe (1), vidimo, da obstajata taki racionalni števili večji od 1, imenujmo ju zdaj x in y, da je

$$a = \frac{x^2 - 1}{2x} , \qquad d_2 = \frac{x^2 + 1}{2x} \tag{6a}$$

in

$$b = \frac{y^2 - 1}{2y} , \qquad d_3 = \frac{y^2 + 1}{2y} . \tag{6b}$$

Ker lahko zapišemo enačbo (5a) v obliki

$$d_1^2 + 1 = d^2$$

in sta d_1 in d racionalna, obstaja racionalno število $z > 1$, da je

$$d_1 = \frac{z^2 - 1}{2z} , \qquad d = \frac{z^2 + 1}{2z} . \tag{6c}$$

Če vstavimo dobljene izraze za a, b in d_1 v prvo enačbo (4a), ki smo jo pomnožili s 4, dobimo tole zvezo

$$\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y^2-1}{y}\right)^2 = \left(\frac{z^2-1}{z}\right)^2 . \qquad (7)$$

Povzemimo, kaj smo doslej ugotovili: Če obstaja perfektni kvader, lahko najdemo racionalna števila x, y, z, vsa večja od 1, ki zadoščajo enačbi (7). Vzemimo zdaj, obratno, da od nič različna racionalna števila x, y, z ustrezajo tej enačbi. Potem so

$$a = \frac{x^2-1}{2x}, \qquad b = \frac{y^2-1}{2y}, \qquad c = 1$$

racionalni robovi kvadra, pri katerem se izražajo stranske diagonale d_1, d_2, d_3 in telesna diagonala d z obrazci (6a), (6b) in (6c). Vsa ta števila so racionalna. Štiri enačbe (4a) in (5a) smo tako nadomestili z eno samo enačbo (7).

Takoj vidimo, da je enačba (7) izpolnjena, če postavimo $x^2 = 1$, $z = y$, ali pa $y^2 = 1$ in $z = x$. V prvem primeru je $a = 0$, v drugem $b = 0$. Kvader se je izrodil v pravokotnik. Če pa je $z^2 = 1$, pove enačba (7), da mora biti $x^2 = 1$ in $y^2 = 1$. (Leva stran je namreč vsota dveh kvadratov in je enaka nič samo tedaj, kadar sta oba sumanda enaka nič.) Zdaj je $a = b = 0$, tako da se je kvader izrodil v daljico. Pravi perfektni kvader nam da le taka trojka x, y, z racionalnih števil, ki so vsa večja od 1 in zadoščajo enačbi (7). Ali obstaja taka trojka? Odgovora na to vprašanje ne vem. Doslej niso še našli perfektnega kvadra niti niso dokazali, da ga ni. Z računalniki so ugotovili samo to, da je dolžina najmanjšega roba perfektnega kvadra (z robovi, ki so cela števila) večja od 10^9, seveda, če tak kvader sploh obstaja.

Pripomba. Ni posebno težko ugotoviti, da ima enačba (7) rešitev, pri kateri so racionalni x, y, z vsi večji od 1, brž ko premore kakšno rešitev, pri kateri je $x^2 \neq 1$ in $y^2 \neq 1$. Ker nastopajo x, y in z v (7) samo v kvadratih, je namreč ta enačba izpolnjena tudi tedaj, kadar kakšno neznanko zamenjamo z njeno nasprotno vrednostjo, npr. x z $-x$. Prav tako pa smemo vsako neznanko zamenjati z njeno recipročno vrednostjo, torej x z $1/x$. S takimi zamenjavami pridemo iz vsake rešitve, pri kateri je $x^2 \neq 1$ in $y^2 \neq 1$, do rešitve, kjer so vse neznanke večje od 1.

Zastavimo si zdaj vprašanje, ali obstajajo kvadri z racionalnimi robovi in racionalnimi stranskimi diagonalami. Torej ne zahtevamo več, da naj bi bila tudi telesna diagonala d racionalna.

Če si izberemo poljubni racionalni števili x in y, ki sta obe večji od 1, nam dajo obrazci (6a) in (6b) kvader z racionalnimi robovi a, b, $c = 1$ in racionalnima diagonalama d_2 in d_3. Vstavimo izraza za a in b v prvo enačbo (4a) in dajmo levo stran na skupni imenovalec. Potem je pred nami enačba

$$\frac{y^2(x^2-1)^2 + x^2(y^2-1)^2}{4x^2y^2} = d_1^2 \,. \tag{8}$$

Diagonala d_1 je racionalna, če je ulomek na levi kvadrat racionalnega števila. Za to pa zadošča, da je števec kvadrat racionalnega števila, saj je imenovalec kvadrat racionalnega števila $2xy$. Števec lahko zapišemo v obliki

$$x^2y^2(x^2+y^2-4) + x^2 + y^2 \,.$$

Izberimo zdaj racionalni števili x in y tako, da bo med njima zveza

$$x^2 + y^2 = 4 \,. \tag{9}$$

Potem je števec enak 4, iz (8) pa dobimo $d_1 = 1/xy$ in je tudi diagonala d_1 racionalna. Pripadajoči kvader ima robove

$$a = \frac{x^2-1}{2x}\,, \qquad b = \frac{y^2-1}{2y}\,, \qquad c = 1\,, \tag{10a}$$

stranske diagonale pa so

$$d_1 = \frac{1}{xy}\,, \qquad d_2 = \frac{x^2+1}{2x}\,, \qquad d_3 = \frac{y^2+1}{2y}\,. \tag{10b}$$

Vsa ta števila so racionalna. Kvader ima potemtakem racionalne robove in racionalne stranske diagonale. Seveda morata racionalni števili x in y zadoščati enačbi (9). Kako taka števila dobimo?

Denimo, da je $y \neq 0$. Delimo enačbo (9) z y^2 in postavimo

$$\frac{x}{y} = u\,, \qquad \frac{2}{y} = v\,. \tag{11}$$

Če sta x in y racionalna, sta taka tudi u in v. Med njima pa je tale zveza

$$u^2 + 1 = v^2 \,. \tag{9a}$$

Kakor vemo, se vsaka racionalna rešitev te enačbe izraža v obliki

$$u = \frac{t^2 - 1}{2t}, \qquad v = \frac{t^2 + 1}{2t} \tag{12}$$

pri primerno izbranem racionalnem številu $t \neq 0$. Za vsak racionalen $t \neq 0$ pa sta tako dobljena u in v racionalna in zadoščata enačbi (9a). Iz enačb (11) in (12) zdaj lahko izračunamo

$$x = 2\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \qquad y = \frac{4t}{t^2 + 1}. \tag{13}$$

Ker si lahko racionalni t poljubno izberemo, določata obrazca (13) nešteto parov racionalnih števil x, y, ki zadoščajo enačbi (9). Formule (10a) in (10b) pa določajo nešteto kvadrov, pri katerih so dolžine robov in stranskih diagonal racionalne. Npr. za $t = 2$ imamo $x = 6/5$, $y = 8/5$. Robovi in stranske diagonale pripadajočega kvadra so

$$a = \frac{11}{60}, \quad b = \frac{39}{80}, \quad c = 1, \quad d_1 = \frac{25}{48}, \quad d_2 = \frac{61}{60}, \quad d_3 = \frac{89}{80}.$$

Pomnožimo robove z 240, ki je najmanjši skupni imenovalec vseh navedenih ulomkov, pa dobimo tale podobni kvader, ki ima za robove in stranske diagonale cela števila

$$a = 44, \quad b = 117, \quad c = 240, \quad d_1 = 125, \quad d_2 = 244, d_3 = 267.$$

Telesna diagonala $d = \sqrt{73\,225} = 5\sqrt{2929}$ pa je iracionalna.

Racionalno število t lahko zapišemo v obliki ulomka $t = p/q$, kjer sta p in q naravni tuji si števili. Če to vstavimo v izraza (13), dobimo

$$x = \frac{2(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2}, \qquad y = \frac{4pq}{p^2 + q^2}.$$

Preprost, čeprav nekoliko dolgovezen in zato dolgočasen račun, ki ga bralec lahko preskoči, pokaže, da se robova a in b izražata takole

$$a = \frac{3p^4 - 10p^2q^2 + 3q^4}{4(p^2 - q^2)(p^2 + q^2)}, \qquad b = \frac{14p^2q^2 - p^4 - q^4}{8pq(p^2 + q^2)}.$$

Skupni imenovalec obeh ulomkov na desni je $8pq(p^2 - q^2)(p^2 + q^2) = 8pq(p^4 - q^4)$. Če z njim pomnožimo a, b in $c = 1$, dobimo kvader z robovi

$$\begin{gathered} a = 2pq(3p^4 - 10p^2q^2 + 3q^4)\,, \quad b = (p^2 - q^2)(14p^2q^2 - p^4 - q^4)\,, \\ c = 8pq(p^4 - q^4)\,. \end{gathered} \tag{14}$$

Vsa števila na desni so cela, če sta taka p in q. Stranske diagonale se izražajo pri tem kvadru s celimi števili, in sicer so

$$\begin{gathered} d_1 = (p^2 + q^2)^3\,, \quad d_2 = 2pq(5p^4 - 6p^2q^2 + 5q^4)\,, \\ d_3 = (p^2 - q^2)(p^4 + 18p^2q^2 + q^4)\,. \end{gathered}$$

Te formule je poznal že Leonard Euler. Povedati pa je treba, da nam ne dajo vseh (nepodobnih) kvadrov, pri kateri so dolžine robov in stranskih diagonal cela števila.

Nešteto je kvadrov, ki imajo za robove in telesno diagonalo cela števila. Dobimo jih z rešitvami enačbe (5), to je, enačbe

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

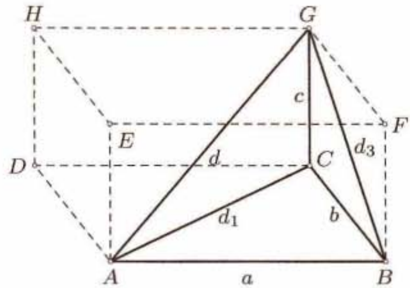
v naravnih številih a, b, c in d. Najpreprostejša med njimi se glasi $a = b = 2$, $c = 1$, $d = 3$. Kako dobimo vse njene rešitve v celih številih, pa lahko bralec zve iz knjige J. Grassellija, *Diofantske enačbe* (Ljubljana, 1984), na str. 64–68.

Ali obstajajo tudi kvadri, pri katerih se izražajo dolžine robov, telesne diagonale in dveh stranskih diagonal z naravnimi števili? Obstajajo. Najmanjši tak kvader ima robove

$$a = 104\,, \qquad b = 153\,, \qquad c = 672\,. \tag{15}$$

Tu je telesna diagonala $d = 697$, stranski diagonali $d_1 = 185$ in $d_3 = 680$ se izražata s celima številoma, diagonala $d_2 = 6\sqrt{10101}$ pa je iracionalna. Navedeni primer seveda ni edini tak kvader. Obstajajo parametrični obrazci, podobni obrazcem (14), ki dajo nešteto kvadrov s to lastnostjo, vendar so bolj zapleteni, kakor so (14), in tudi izpeljava je dolgoveznejša. Zato jih tu ne bomo navajali.

Vzemimo poljuben kvader, pri katerem se izražajo dolžine robov a, b, c, telesne diagonale d in dveh stranskih diagonal d_1 in d_3 z naravnimi števili. Naj bodo A, B, C, D oglišča spodnje osnovne ploskve, E, F, G, H pa oglišča zgornje (slika 3). Točke A, B, C in G določajo tristrano piramido (tetraeder), ki ima za osnovno ploskev trikotnik ABC s stranicami a, b, d_1, njeni stranski robovi pa so c, d in d_3. Vsi se izražajo s celimi števili. Mejne ploskve so štirje pravokotni trikotniki: Osnovna ploskev ABC in stranska ploskev BCG sta polovici pravokotnikov $ABCD$ in $BCGF$; v stranskem trikotniku ACG leži stranica AC (to je diagonala d_1) v osnovni ploskvi kvadra in je zato pravokotna na stranico CG, ki je tretji rob kvadra; v trikotniku ABG pa je stranica AB rob kvadra in je zato pravokotna na stranico BG (to je diagonala d_3), ki leži v stranski ploskvi $CBFG$ kvadra. Če so stranice pravokotnega trikotnika cela števila, je tudi njegova ploščina, ki je enaka polovici produkta katet, celo število (v pitagorejski trojki je vselej ena kateta sodo število, glej enačbe (3)).



Slika 3.

Vzemimo za zgled kvader z robovi (15). Za ploščine p_1, p_2, p_3 in p_4 stranskih ploskev tetraedra $ABCG$ dobimo tale števila

$$p_1 = \frac{1}{2}ab = 7\,956\,, \quad p_2 = \frac{1}{2}bc = 51\,408\,, \quad p_3 = \frac{1}{2}cd_1 = 62\,160\,,$$
$$p_4 = \frac{1}{2}ad_3 = 35\,360\,.$$

Prostornina V tetraedra $ABCG$ pa je šestina prostornine kvadra, saj je ploščina p_1 osnovne ploskve ABC polovica ploščine osnovne ploskve $ABCD$ kvadra, višina pa je pri obeh telesih enaka c, torej $V = \frac{1}{6}abc$. V našem primeru je prostornina $V = 1\,782\,144$, se pravi celo število.

Tako smo ugotovili tole: Vsak kvader, pri katerem se izražajo robovi, telesna diagonala in dve stranski diagonali z naravnimi števili, določa tristrano piramido (tetraeder), pri kateri se izražajo robovi, ploščine stranskih ploskev (to so trikotniki) in (izkaže se) tudi prostornina z naravnimi števili.

Ivan Vidav