PROBLEM UMETNOSTNE GALERIJE

ALEKSANDRA FRANC

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 52B55, 55R05

Predstavimo Kleejev problem umetnostne galerije in Fiskovo elegantno rešitev. Nato si ogledamo številne zanimive izpeljanke in končamo s sorodnim in trenutno še nerešenim problemom vsiljivca.

ART GALLERY PROBLEM

Klee's art gallery problem and Fisk's elegant solution are presented. We then explore several variations on the original problem and conclude with a somewhat related and currently unsolved Evasion Problem.

Uvod

Probleme, ki si jih bomo ogledali, bi lahko motivirali s pripovedko o ravbarjih, ki želijo s plenom pobegniti na varno, in žandarjih, ki jih želijo pri tem ujeti. Mi se bomo seveda postavili na stran pravice, ampak da ne bo vse skupaj preveč suhoparno, bomo raje ostali zvesti zgodovinskim formulacijam, tako da bodo žandarje enkrat zamenjali pazniki, drugič pa vitezi ali senzorji. Le nepridipravi bodo ostali nepridipravi, in v zadnjem primeru bomo za trenutek sami prestopili na temno stran.

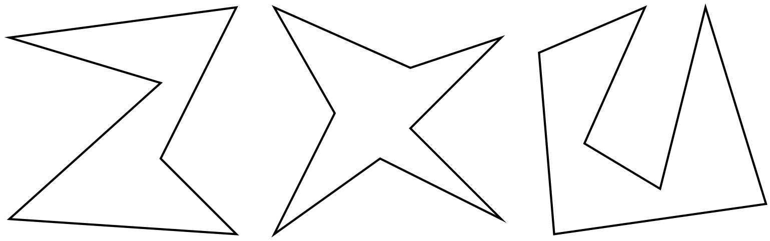
Najprej si oglejmo problem, ki se je znašel v naslovu tega članka in ki je bil tudi zgodovinsko prvi.

Denimo, da moramo v prostore na sliki 1 namestiti paznike tako, da bodo lahko nadzorovali prav vsako točko. Pazniki vidijo 360° okoli sebe (lahko se vrtijo na mestu), ne morejo pa videti skozi zidove, prav tako pa se ne smejo sprehajati naokrog. Vsak paznik nas nekaj stane, zato jih seveda želimo najeti čim manj.

Hitro opazimo, da lahko drugi prostor nadzorujemo z enim samim spretno postavljenim paznikom, medtem ko sta za vsakega od preostalih dveh prostorov potrebna po dva. Kaj pa, če so tlorisi prostorov, ki jih želimo nadzorovati, še bolj zapleteni?

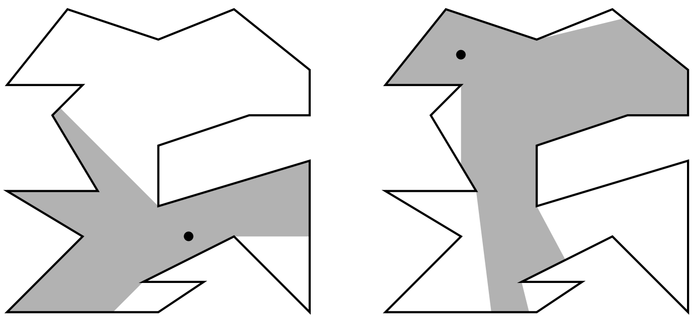
Naslednji problem je avgusta leta 1973 na konferenci v Stanfordu zastavil ameriški matematik Victor Klee [7]:

Problem 1. *Tloris umetnostne galerije ima obliko (ravninskega) mnogokotnika z n oglišči. Najmanj koliko paznikov potrebujemo, da bo vsako točko v galeriji nadziral vsaj eden?*



Slika 1. Kam naj postavimo paznike, če želimo nadzorovati ves prostor, pri tem pa uporabiti čim manj paznikov?

V osnovni različici problema pazniki ves čas stojijo vsak na svojem mestu in vidijo 360° okoli sebe. Na sliki 2 sta dva primera postavitve, pri čemer smo vsakič osenčili območje, ki ga paznik nadzira.



Slika 2. Kaj vidi paznik?

Za začetek predpostavimo še, da galerija nima notranjih dvorišč. Tedaj je mnogokotnik, ki predstavlja tloris galerije, enostavno povezan, tj. brez lukenj. V splošnem bo odgovor močno odvisen od geometrije tlorisa, ampak problem nas sprašuje po zgornji meji za število paznikov, ki bodo zagotovo lahko nadzirali vso galerijo. Želimo torej univerzalni odgovor, ki bo odvisen le od števila oglišč. Seveda bo včasih, ko bo geometrija prostora dovolj lepa, dovolj že manj paznikov.

Naloga 1. Na sliki 1 označi, kam moramo postaviti paznike.

Naloga 2. Nariši tloris galerije, ki ima 8 oglišč, pa jo vseeno lahko nadzorujemo z enim samim paznikom. Nato nariši še tloris galerije z 8 oglišči, za katero nujno potrebujemo vsaj dva paznika.

Problem umetnostne galerije

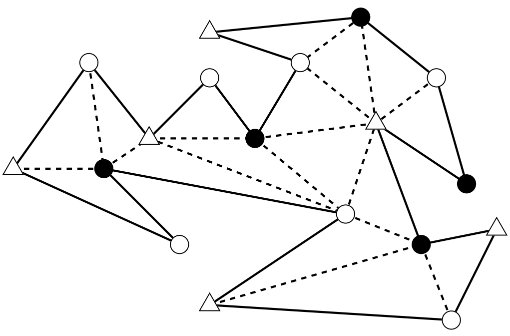
Zadostno število paznikov dobimo tako, da število oglišč delimo s 3 in rezultat zaokrožimo navzdol:

Izrek 1 (Problem umetnostne galerije). *Za nadzor mnogokotnika z n oglišči brez lukenj vedno zadošča $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ paznikov.*

Zgornjo trditev je prvi dokazal Vašek Chvátal [2] leta 1975, leta 1978 pa je Steve Fisk [5] našel krajši in nadvse eleganten dokaz, ki si ga bomo ogledali tudi mi.

Dokaz. Mnogokotnik najprej trianguliramo (da triangulacija obstaja, lahko pokažemo z indukcijo na število oglišč), nato pa njegovih n oglišč pobarvamo s tremi barvami (recimo rdečo, modro in zeleno) tako, da ima vsak trikotnik natanko eno oglišče vsake barve. Če želimo dokazati, da tako barvanje obstaja pri $n \geq 4$, se moramo najprej prepričati, da vsaj eden od trikotnikov v triangulaciji, označimo ga s T, vsebuje tri zaporedna oglišča mnogokotnika (in torej natanko dve stranici mnogokotnika in eno diagonalo). To ni čisto trivialno (glej [4, Corollary 1.9]). Nato lahko spet uporabimo indukcijo na število oglišč, da konstruiramo iskano barvanje. Če namreč izvzamemo tisto oglišče trikotnika T, ki pripada stranicama, potem lahko preostala oglišča po indukcijski predpostavki pobarvamo s tremi barvami. Ker je to oglišče povezano le z dvema sosednjima ogliščema, ga gotovo lahko pobarvamo s tretjo barvo (sosednji oglišči sta različnih barv, ker sta povezani z diagonalo).

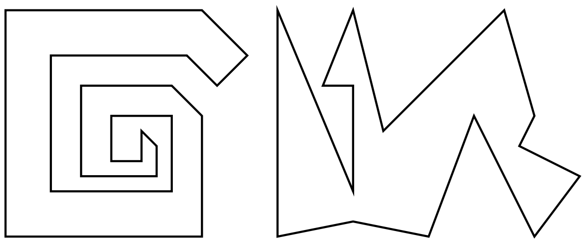
Po Dirichletovem principu zagotovo obstaja barva, ki ne more biti na več kot $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ogliščih. Recimo, da smo pri barvanju najmanjkrat uporabili rdečo. Ni težko videti, da tedaj zadošča postaviti stražarje v rdeča oglišča, pa bodo imeli pod nadzorom vso galerijo. Vsak trikotnik ima namreč vsaj eno rdeče oglišče in iz tega oglišča zagotovo vidimo ves trikotnik. ∎



Slika 3. Fiskova rešitev: Paznike postavimo v oglišča, ki so pobarvana z najmanj pogosto barvo.

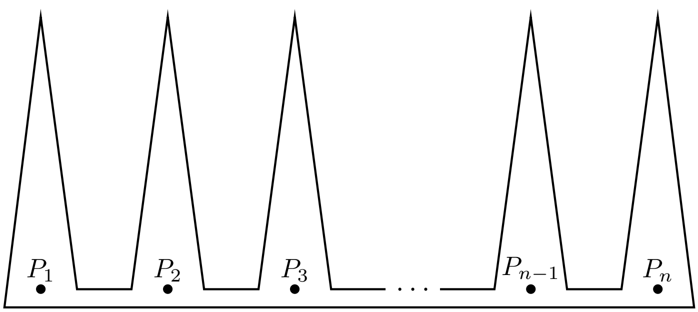
Ne smemo pozabiti, da je to samo zgornja meja in bo marsikdaj zadoščalo že manj paznikov. Na posameznih primerih lahko z nekaj spretnosti določimo minimalno število paznikov, ki jih potrebujemo za nadzor celotnega mnogokotnika, in v nadaljevanju si bomo ogledali nekaj takih primerov. Omenimo še, da so algoritmi, ki bi določili minimalno število paznikov za dani mnogokotnik, računsko zahtevni. Natančneje: Problem, ki za dani mnogokotnik M in dano število k odloči, ali k paznikov zadošča za nadzor M, sodi med NP-težke probleme. Če bi našli algoritem, ki bi ta problem rešil v polinomskem času, bi s tem pokazali, da je P = NP in si prislužili milijon dolarjev [3].

Naloga 3. Za prostora na sliki 4 poišči kakšno minimalno razporeditev paznikov.



Slika 4. Poišči postavitev z minimalnim številom paznikov.

Relativno enostavno pa se lahko prepričamo, da je zgornja meja iz izreka 1 v splošnem res najboljša možna. Na sliki 5 je primer poligona s $3n$ oglišči, za katerega potrebujemo natanko $\left\lfloor \frac{3n}{3} \right\rfloor = n$ paznikov.



Slika 5. Primer mnogokotnika, za katerega je zgornja meja dosežena.

Seveda so v resničnem življenju prostori redko taki kot v tem ekstremnem primeru. Stene se običajno stikajo pravokotno. Če se omejimo na n-kotnike, v katerih so vsi koti enaki 90° ali 270°, se izkaže, da vedno zadošča manj paznikov kot v posplošenem primeru. Naslednji izrek so dokazali Jeff Kahn, Maria Klawe in Daniel Kleitman [8] leta 1980.

Izrek 2 (Problem ortogonalne galerije). *Za nadzor mnogokotnika z n oglišči, v katerem se nosilke zaporednih stranic sekajo pod pravim kotom, vedno zadošča $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ paznikov.*

Kaj pa, če paznikom dovolimo, da se sprehajajo naokrog? Denimo, da se lahko vsak od njih premika po enem od robov n-kotnika in ima pod nadzorom vse točke, ki jih lahko vidi z vsaj ene točke na tem robu. Jasno je, da bomo v tem primeru za popoln nadzor potrebovali manj paznikov, vendar natančna zgornja meja ni znana. Godfried Toussaint je postavil domnevo, da za velike n za nadzor poljubnega n-kotnika zadošča $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ paznikov (glej [4], str. 18, ali [9], 3. poglavje).

Naloga 4. Koliko potujočih paznikov bi potrebovali za nadzor galerije s slike 5?

Ker pa smo se paznikov že malo naveličali, jih lahko zamenjamo z modernimi svetlobnimi ploščami, ki celotno steno spremenijo v vir svetlobe, in se vprašamo, najmanj koliko takih plošč potrebujemo, da bomo lahko osvetlili celotno galerijo.

Domneva 1 (Toussaint). *Za osvetlitev galerije potrebujemo $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ svetlobnih sten.*

Kaj pa, če stene galerije prekrijemo z ogledali? Ni znano, ali takrat zadošča že en sam točkast vir svetlobe (upoštevamo, da velja odbojni zakon).

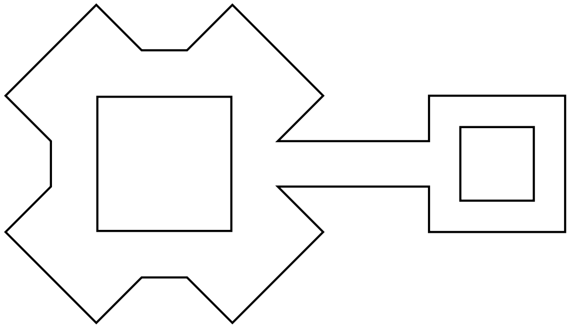
Naloga 5. Premislimo, kaj se zgodi, če ima galerija notranja dvorišča, ki imajo prav tako kot galerija obliko mnogokotnika. Poišči zgornjo mejo za število paznikov, ki lahko nadzorujejo galerijo z n oglišči in h luknjami, če veš, da za triangulacijo take galerije potrebujemo $n + 2h - 2$ trikotnikov.

Naloga 6. Koliko vitezov potrebujemo, da bodo nadzorovali prav vsako točko grajskega obzidja, prikazanega na sliki 6 (ne pa nujno tudi grajskih dvorišč)? Koliko lokostrelcev moramo razporediti po zunanjem robu obzidja, da bodo nadzorovali vso okolico gradu (zunaj obzidja)? Koliko lokostrelcev pa potrebujemo, če želimo, da nadzorujejo tudi notranji dvorišči?

Prejšnja naloga nas je pripeljala do sorodnega problema, kjer želimo namesto notranjosti nadzorovati zunanjost n-kotnika. V tem primeru poznamo natančno zgornjo mejo tudi pri nestacionarnih paznikih.

Problem trdnjave

Problem trdnjave sta neodvisno drug od drugega zastavila Derick Wood in Joseph Malkelvitch. Zanima nas, koliko stražarjev potrebujemo, da bodo nadzorovali zunanjost n-kotnika. O'Rourke in Wood sta leta 1983 pokazala,



Slika 6. Koliko vitezov potrebujemo, da bodo nadzorovali vsako točko grajskega obzidja? Koliko lokostrelcev, da bodo nadzorovali vso okolico gradu?

da vedno zadošča $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ paznikov in da včasih manj paznikov ni dovolj (glej [9], 6. poglavje). Yiu in Choi [1] sta predlagala izpeljanko problema, kjer se vsak paznik lahko premika po enem od robov n-kotnika, in dokazala, da je v tem primeru natančna zgornja meja $\lceil \frac{n}{3} \rceil$. Yiu [10] je nato oba problema posplošil:

Izrek 3 (Posplošeni problem trdnjave). *Denimo, da lahko paznike postavljamo tako, da se vsak lahko premika po $k-1$ zaporednih robovih n-kotnika. Tedaj za nadzor zunanjosti n-kotnika vedno zadošča $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$ paznikov.*

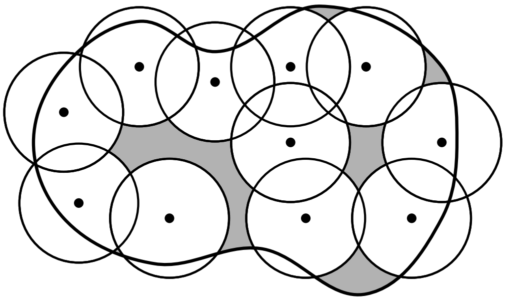
Posledica 4 (Problem trdnjave). *Za nadzor zunanjosti n-kotnika vedno zadošča $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ stacionarnih paznikov.*

Naloga 7. Kaj nam posledica 4 pove za primer trdnjave s slike 6 v primeru stacionarnih lokostrelcev? Primerjaj oceno z natančnim rezultatom iz naloge 6. Koliko lokostrelcev pa potrebujemo pri $k = 2$, tj. ko se lahko vsak od njih premika vzdolž ene stranice? Primerjaj točni odgovor z zgornjo mejo iz izreka 3.

Problem ubežnika

Nazadnje si oglejmo še bolj realistično verzijo problema, v kateri se pazniki lahko prosto premikajo po galeriji. V tem primeru bi seveda že z enim samim paznikom lahko s primerno izbranim obhodom zagotovili, da bo vsaka točka galerije pod nadzorom vsaj enkrat med obhodom. Vendar pa lahko v vsakem danem trenutku tudi pri uporabi več mobilnih paznikov obstajajo območja, ki niso pod nadzorom.

Bodimo spet moderni in tokrat zamenjajmo paznike z mobilnimi senzorji, n-kotnik, ki je predstavljal galerijo, pa s poljubnim ravninskim območjem D. Denimo, da se senzorji premikajo po območju D in da lahko vsak zazna vsiljivce, ki so od njega oddaljeni za največ d. Medtem ko bodo naši senzorji potovali po območju D, bodo obstajali deli območja, ki ne bodo pod nadzorom. Ta nenadzorovana območja želi izkoristiti nepridiprav, ki hoče pobegniti s plenom. Slika 7 prikazuje situacijo v nekem trenutku t. S časom se slika spreminja, osenčena območja se lahko združujejo, lahko izginjajo ali pa nastajajo nova.



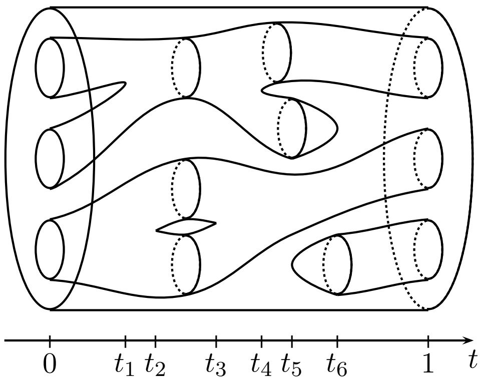
Slika 7. Ravninsko območje D s senzorji. Osenčena območja niso pokrita, v njih se lahko neopažen zadržuje vsiljivec.

Nepridiprav je ob času 0 v točki x_0, ki ni pod nadzorom, in želi neopažen v času 1 priti do točke x_1. Za vsak čas $t \in [0,1]$ naj bo P_t podmnožica območja D, ki je v tem trenutku pokrita s senzorji, medtem ko je $N_t = D \setminus P_t$ nepokrito območje, v katerem je ob času t naš dolgoprsti kolega varen. Situacijo lahko predstavimo grafično, če os x predstavlja časovno, osi y in z pa prostorski komponenti. Pri vsakem $t \in [0,1]$ narišemo v ravnini $x = t$ območji P_t in N_t in tako dobimo prostor

$$D \times [0,1] = \bigcup_{t\in[0,1]} (P_t \cup N_t).$$

Ker bo pomembna samo topološka informacija, lahko sliko nekoliko poenostavimo. Območje D zamenjamo z diskom, prav tako pa tudi vsak kos nepokritega območja. Rezultat bo tedaj podoben kot v primeru na sliki 8.

Primer 1. Kot primer si oglejmo situacijo, prikazano na sliki 8. Ob času 0 imamo tri nepokrita območja. Ob času t_1 se prvi dve območji združita v eno, ob času t_2 iz tretjega območja nastaneta dve, ki se ob času t_3 spet združita. Ob času t_4 se prvo od območij spet razdeli na dve, ampak ena od komponent ob času t_6 izgine. Ob času t_5 nastane novo nepokrito območje, ki obstane do konca. Ob času 1 imamo tako spet tri nepokrita območja, vendar je lahko vsiljivec le v dveh izmed njih. Če je bil na začetku varen v prvem ali drugem nepokritem območju, potem je lahko na koncu neopažen v prvem območju, če pa je bil na začetku v tretjem območju, potem lahko konča v drugem. V tretjem končnem območju ne more biti, ne da bi ga vmes zaznali senzorji.

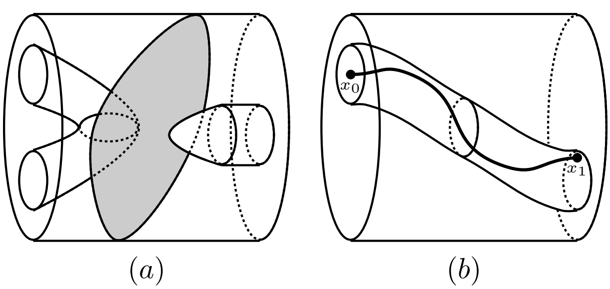


Slika 8. Grafični prikaz spreminjanja pokritosti s časom.

Med situacijama na slikah 7 in 8 je pomembna razlika. Na prvi sliki obstajajo nepokriti kosi na robu območja D, medtem ko je v vsakem trenutku t na drugi sliki rob ∂D vedno povsem pod nadzorom. V nadaljevanju bomo predpostavljali, da je rob ∂D vedno pod nadzorom senzorjev, tj. $\partial D \subset P_t$ za vse $t \in [0, 1]$.

Vin de Silva in Robert Grist [6] sta našla preprost kriterij, ki nam pove, kdaj se vsiljivec zagotovo ne bo mogel izmuzniti.

Izrek 5. *Če obstaja topološki disk B, ki v celoti leži v pokritem območju, tj. $B \subset \bigcup_{t\in[0,1]} P_t$, z robom $\partial B \subset \partial D \times I$, potem pobeg ni mogoč.*

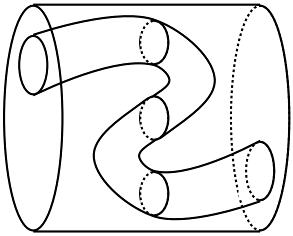


Slika 9. (a) Obstoj diska, ki v celoti leži v nadzorovanem območju, nam pove, da vsiljivec ne more pobegniti. (b) Vsiljivec lahko pobegne po označeni poti.

Preprost primer, ko tak disk B obstaja, je prikazan na sliki 9(a), kjer očitno vsiljivec nima možnosti za pobeg, medtem ko lahko na sliki 9(b) vsiljivec pobegne po označeni poti.

Poudariti moramo, da obratna trditev ne velja. Lahko se zgodi, da tovrsten disk ne obstaja, pa vsiljivec vseeno ne more pobegniti, ker bi vsak uspešen pobeg vključeval potovanje v preteklost. Taka situacija je ilustrirana na sliki 10. Kriterija, ki bi znal iz topološke informacije o prostoru

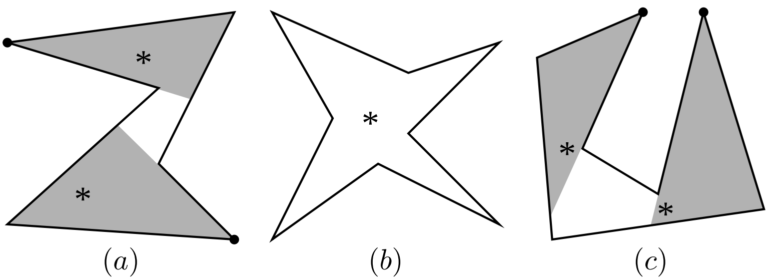
$\bigcup_{t\in[0,1]} P_t \subset D \times I$ vedno odločiti, ali vsiljivec lahko pobegne ali ne, za zdaj še ne poznamo.



Slika 10. Pobeg ni mogoč, ker bi pri vseh možnih poteh morali na določenem odseku potovati nazaj v času, vendar pa tudi disk iz izreka 5 ne obstaja.

Rešitve nalog

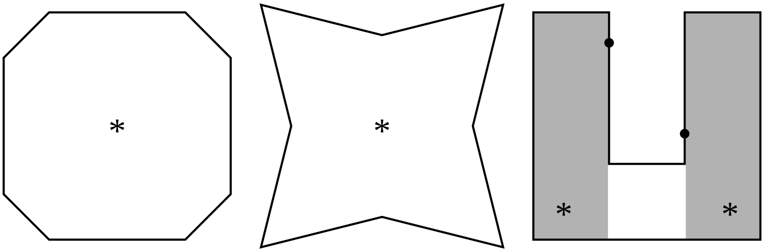
Rešitev naloge 1. *Možnih postavitev je seveda več, za vsak primer je narisana po ena na sliki 11, kjer so pazniki označeni z zvezdicami. Vsak od osenčenih trikotnikov v primerih (a) in (c) mora vsebovati vsaj enega paznika, ker sicer ne bi imeli pod nadzorom oglišč, označenih s krogci. Ker sta v obeh primerih osenčena kosa disjunktna, je jasno, da potrebujemo vsaj dva paznika. Poleg tega moramo pri postavljanju tudi paziti, da oba paznika skupaj vidita celotno nepokrito območje.*



Slika 11. Rešitev naloge 1: Vsako od osenčenih območij mora vsebovati vsaj enega paznika.

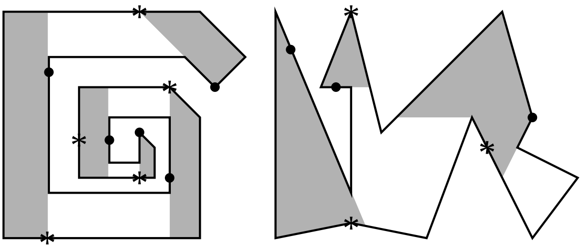
Rešitev naloge 2. *Prva dva primera na sliki 12 prikazujeta galeriji z 8 oglišči, ki ju lahko nadzoruje en sam paznik. V tretjem primeru sta očitno potrebna dva paznika, sicer nimamo pod nadzorom točk, označenih s krogci, ki sta vidni samo z osenčenih območij.*

Rešitev naloge 3. *Vsako od osenčenih območij na sliki mora vsebovati vsaj enega paznika, sicer ne vidimo točk, označenih s polnimi krogci. V*



Slika 12. Rešitev naloge 2: Vse galerije imajo 8 oglišč. V prvih dveh primerih potrebujemo le enega paznika, v tretjem primeru sta potrebna 2.

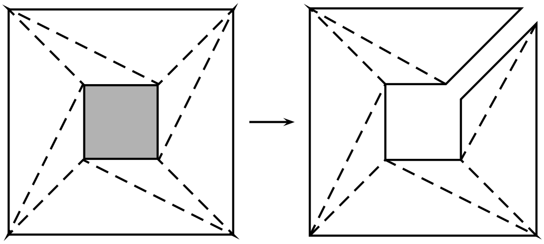
prvem primeru torej potrebujemo vsaj pet paznikov, v drugem vsaj tri. Hitro se lahko prepričamo, da imajo pod nadzorom celotno galerijo, če jih postavimo na mesta, označena z zvezdicami.



Slika 13. Rešitev naloge 3: Paznike postavimo na mesta, označena z zvezdicami.

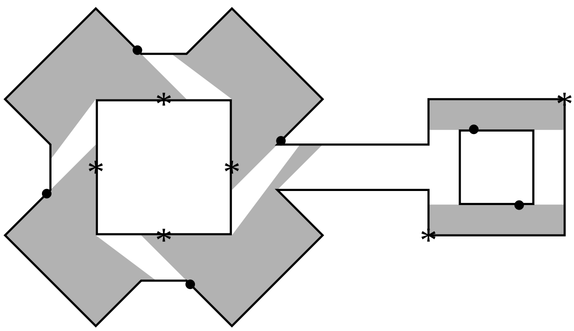
Rešitev naloge 4. *Samo enega, seveda. Naročimo mu, naj se sprehaja po najdaljši vodoravni stranici. Za galerijo v obliki glavnika z n zobci torej potrebujemo vseh* $n = \left\lfloor \frac{3n}{3} \right\rfloor$ *stacionarnih paznikov (doseže zgornjo mejo iz izreka 1), vendar pa zadošča že en sam potujoči paznik.*

Rešitev naloge 5. *Preprost odgovor bi bil* $n + 2h - 2$*, saj je galerija gotovo pod nadzorom, če dobi vsak trikotnik svojega paznika. Seveda se da to zgornjo mejo precej izboljšati, vendar ne moremo slepo posnemati Fiskovega dokaza, ker se lahko hitro prepričamo, da v tem primeru za barvanje oglišč grafa, ki ga dobimo s triangulacijo, včasih potrebujemo več kot tri barve. Dokažemo pa lahko, da zadošča* $\left\lfloor \frac{n+2h}{3} \right\rfloor$ *paznikov. Ideja je, da mnogokotnik popravimo tako, da se s tem znebimo lukenj. Za vsako luknjo obstaja vsaj ena diagonala mnogokotnika iz triangulacije, ki jo povezuje z zunanjim območjem ali z drugo luknjo. Če mnogokotnik prerežemo vzdolž te diagonale, dobimo nov mnogokotnik, ki ima eno luknjo manj, poleg tega pa dve novi oglišči (in dve novi stranici). Preprost primer je prikazan na sliki 14. Z nekaj truda lahko pokažemo, da diagonale lahko izbiramo tudi tako, da pri rezanju mnogokotnik ne razpade na več kosov. Ko končamo, dobimo mnogokotnik brez lukenj z* $n + 2h$ *oglišči, od koder z uporabo izreka 1 dobimo rezultat.*



Slika 14. Rešitev naloge 5: Mnogokotnik z luknjo lahko z rezom vzdolž ene od diagonal spremenimo v mnogokotnik brez luknje in z dvema ogliščema več.

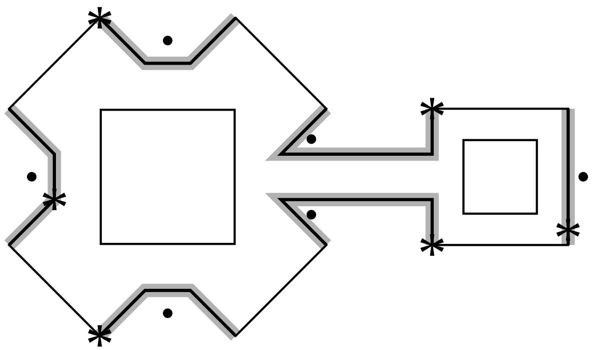
Rešitev naloge 6. *V prvem delu naloge moramo spet poiskati čim več točk, ki jih lahko nadzorujemo samo iz disjunktnih območij. Tokrat nam jih uspe najti 6, kar nam da spodnjo mejo za število vitezov. Hitro vidimo, da je 6 vitezov tudi dovolj, če jih postavimo v točke, ki so na sliki 15 označene z zvezdicami.*



Slika 15. Rešitev naloge 6: Viteze postavimo na mesta, označena z zvezdicami.

Zdaj pa poglejmo, kam postaviti lokostrelce, da jih bomo za nadzor okolice trdnjave potrebovali čim manj. Spet poiščemo točke, tokrat v ravnini zunaj obzidja, ki jih lahko nadziramo le z majhnega kosa zunanjega robu obzidja. Na sliki 16 smo jih označili s krogci, pripadajoče kose na robu obzidja pa narisali z odebeljeno črto. Od tu sklepamo, da bomo potrebovali vsaj 6 *lokostrelcev. Hitro se prepričamo, da jih* 6 *zadošča, če jih na primer postavimo na mesta, ki so na sliki 16 označena z zvezdicami. Kaj pa notranji dvorišči? Vsako od njiju lahko nadzorujemo z enim samim lokostrelcem, ki ga lahko postavimo kamorkoli na rob dvorišča, zato za nadzor celotnega območja skupaj potrebujemo* 8 *lokostrelcev.*

Rešitev naloge 7. *Po posledici 4 potrebujemo kvečjemu* $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ *lokostrelcev, če je* n *število oglišč. Hitro vidimo, da je* $n = 22$*, kar pomeni, da potrebujemo največ* 11 *lokostrelcev. Pri prejšnji nalogi smo premislili, da jih v resnici potrebujemo le* 6*. Če se lokostrelci lahko premikajo vzdolž ene stranice,*



Slika 16. Rešitev naloge 6: Lokostrelce postavimo na mesta, označena z zvezdicami.

potem jih po izreku 3 potrebujemo kvečjemu $\lceil \frac{n}{3} \rceil = 7$*. V resnici zadoščajo trije. Do postavitve lahko hitro pridemo tako, da* 6 *odebeljenih lomljenk s slike 16 razdelimo v tri pare tako, da sta v vsakem paru dve lomljenki, ki sta na obzidju zaporedni. Lokostrelce lahko potem postavimo na tiste stranice, ki povezujejo po dve lomljenki iz istega para.*

LITERATURA

[1] A. K. O. Choi in S. M. Yiu, *Edge guards for the fortress problem*, Journal of Geometry **72** (2001), 47–64.

[2] V. Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, J. Combin. Theory Ser. B **18** (1975), 39–41.

[3] Clay Mathematics Institute, *Millenium problems.* `http://www.claymath.org/millennium-problems`, ogled 9. 12. 2014.

[4] S. L. Devadoss in J. O'Rourke, *Discrete and Computational Geometry*, Princeton University Press, 2011.

[5] S. Fisk, *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, J. Combin. Theory Ser. B **24** (1978), 374.

[6] R. Ghrist in V. de Silva, *Coordinate-free Coverage in Sensor Networks with Controlled Boundaries via Homology*, International Journal of Robotics Research **25** (2006), 1205–1222.

[7] R. Honsberger, *Mathematical Gems II*, Mathematical Association of America, 1976, 104–110.

[8] J. Kahn, M. M. Klawe in D. J. Kleitman, *Traditional galleries require fewer watchmen*, SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, **4** (1983), 194–206.

[9] J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press,1987, `http://cs.smith.edu/~orourke/books/ArtGalleryTheorems/art.html`, ogled 9. 12. 2014.

[10] S. M. Yiu, *A generalized fortress problem using k-consecutive vertex guards*, Journal of Geometry **72** (2001), 188–198.