

iz katere je

$$\cos(\varphi/3) = \frac{2p - r \cos \varphi}{3r} = \frac{2p - x}{3r}. \quad (33)$$

Pri tem je $x = r \cos \varphi$ abscisa točke T . Očitno lahko konstruiramo kot $\varphi/3$ s pomočjo pravokotnega trikotnika, ki ima hipotenuzo $3r$ in eno kateto $2p - x$. Tschirnhausova kubika je le ena od trisektris. Precej znana je tudi *Maclaurinova trisektrisa*, ki ima v polarnih koordinatah enačbo $r = a/\cos(\varphi/3)$, kjer je a pozitivna konstanta. Še nekaj pa jih najdemo na primer v [1, 2].

Nekateri imenujejo Tschirnhausovo kubiko tudi *L'Hôpitalova kubika*, ker se je z njo ukvarjal tudi matematik markiz G. F. A. de L'Hôpital (1661–1704) in rezultate objavil leta 1696, kasneje kot Tschirnhaus. Zato je popolnoma umestno, da so krivuljo, malo pozno sicer, poimenovali po slednjem.

LITERATURA

- [1] E. H. Lockwood, *A book of curves*, Cambridge University Press, 1963.
- [2] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb 1979.
- [3] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, DMFA, Ljubljana 1986.
- [4] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA–založništvo, Ljubljana 2008.

NOVE KNJIGE

Jernej Kozak: NUMERIČNA ANALIZA, Matematika – fizika 44, DMFA–založništvo, Ljubljana 2008, 420 strani.

Slovenska matematična literatura je bogatejša za novo delo z zgornjim naslovom. Knjiga je izšla v zbirki *Matematika – fizika*, ki je zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij. Delo spada v to zbirko, ker je prav to: univerzitetni učbenik in monografija. Izdajatelja sta Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in Društvo matematikov, fizikov in astronomov – založništvo. Slovensko numerično literaturo je to delo dopolnilo na področju numerične analize, ki v ožjem smislu vsebuje poglavja: interpolacijo, aproksimacijo, numerično odvajanje in integriranje ter numerično reševanje navadnih in parcialnih diferencialnih enačb. Ta poglavja so bila sicer že na kratko obravnavana v prvem slovenskem učbeniku iz nume-

rične matematike (Z. Bohte, *Numerične metode*, DZS, Ljubljana 1978), vendar na zelo elementarnem nivoju. Pozneje so izšli v slovenskem jeziku še trije popolnejši učbeniki iz numerične matematike, ki pokrivajo numerično linearno algebro in nelinearne enačbe:

Z. Bohte, *Numerično reševanje nelinearnih enačb* (DMFA Slovenije, Ljubljana 1993),

Z. Bohte, *Numerično reševanje sistemov linearnih enačb* (DMFA Slovenije, Ljubljana 1994) in

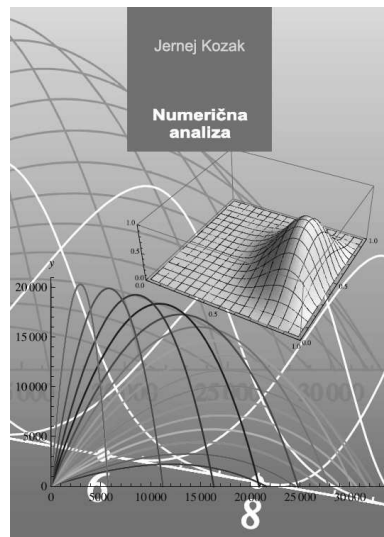
J. W. Demmel, *Applied numerical linear algebra* (SIAM, Philadelphia 1997) v slovenskem prevodu E. Zakrajška, *Uporabna*

numerična linearna algebra, DMFA Slovenije, Ljubljana 2000).

O razvoju numerične matematike na Oddelku za matematiko FMF je bilo v Obzorniku že poročano (OMF 54 (2007) 2, str. 57–62).

Najprej na kratko predstavimo avtorja nove knjige. Jernej Kozak se je rodil v Ljubljani leta 1946. Matematiko je študiral v Ljubljani, kjer je diplomiral in leta 1978 tudi doktoriral. Potem se je izpopolnjeval v ZDA pri znamenitem matematiku Carlu de Booru. Zdaj je redni profesor na Oddelku za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Predava razne numerične in računalniške predmete, znanstveno pa se ukvarja predvsem z interpolacijo in aproksimacijo funkcij, z zlepkami v eni in več dimenzijah, z geometrijsko interpolacijo krivulj in ploskev s polinomi in zlepkami. Poudarek pri zadnjih raziskavah je predvsem na težkih problemih v več dimenzijah. Kozak je napisal že tri učbenike s področja računalništva in je avtor ali soavtor petdesetih znanstvenih in strokovnih člankov, ki so pogosto citirani v mednarodnih revijah. Avtor je zelo uspešen mentor mladim. Pri njem je diplomiralo 105 uporabnih matematikov, magistriralo 8 mladih raziskovalcev in trije so že doktorirali. Njegova raziskovalna skupina šteje 5 članov. Pohvalijo se lahko s številnimi znanstvenimi članki v zelo uglednih mednarodnih revijah. Trije doktorandi so si že pridobili učiteljski naziv.

Nova knjiga *Numerična analiza* je primeren učbenik za predmete, ki jih avtor predava na drugi in tretji stopnji študija uporabne matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Ker pa po vsebini in



zahtevnosti močno prekaša programe teh predmetov, je knjiga monografija z edinstvenim pristopom do problemov numerične analize in z vso potrebno matematično strogostjo. Ne nazadnje je monografija lep primer, kako se v matematiki prepletajo in dopolnjujejo posamezna področja, kako npr. poznavanje funkcionalne analize s pridom uporabimo v numerični analizi in kako pomembne so metode numerične linearne algebre v drugih poglavjih numerične analize.

Knjiga *Numerična analiza* obsega skupaj s kazalom, predgovorom, literaturo in stvarnim kazalom štiri dele z osmimi poglavji na 420 straneh. Tekst ilustrirajo številni primeri, 87 slik in 43 tabel. Pri vseh poglavjih so dodane naloge, ki pretežno dopolnjujejo obravnavano snov in so praviloma zelo zahtevne. Razlagi posameznih numeričnih primerov so dodani večbarvni diagrami, ki zelo olajšajo razumevanje snovi. Posebnost tega dela je avtorjevo stališče, da je osnova numerične analize abstraktna aproksimacija, zato najprej pripravi potrebno teorijo, ki jo v naslednjih poglavjih dosledno uporablja. Zaradi tega se je treba pri razumevanju novih spoznanj pogosto sklicevati na pripravljeno osnovo. Nekatere izpeljave so dolge in zahtevne, kar zahteva od bralca aktivno sodelovanje. Podrobna razlaga posameznih korakov pa bi seveda zelo povečala obseg že tako obsežnega dela. Zelo pohvalno je Kozakovo dosledno obravnavanje napak, ki so neogibne pri numeričnem reševanju problemov. Dodajmo še, da je delo napisano v lepem, a tudi izvirnem jeziku. Kot se pričakuje od matematičnega teksta, je delo napisano zelo skrbno, brez nepotrebnih spodrsrljajev.

Zdaj pa na kratko opišimo vsebino dela. V prvem delu Aproksimacija in interpolacija postavi avtor najprej temelje abstraktne aproksimacije, tj. aproksimacije elementa abstraktnega linearnega prostora z elementi izbranega podprostora. Pri tem je zelo pomembna izbira baze v prostoru, zato avtor navede nekaj baz, ki jih pogosto uporabljamo, in analizira njihove lastnosti. Podrobno obdela osnovni problem eksistence in enoličnosti elementa najboljše aproksimacije. Posebej obravnava enakomerno aproksimacijo in aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov. Tudi v poglavju o interpolaciji avtor najprej formulira problem abstraktno, nato pa obdela konkretne primere. Tako obravnava polinomsko interpolacijo, iterativno interpolacijo in interpolacijo z raznimi tipi zlepkov: z odsekoma linearnimi zlepkami, kubičnimi zlepkami in B-zlepkami.

Drugi del knjige je posvečen numeričnemu odvajanju in integriranju. Najprej je na kratko omenjeno računanje odvodov funkcije, ki je podana z

vrednostmi v posameznih točkah. Tu avtor s pridom uporablja interpolacijo z zlepkami, ki jo je pripravil v prvem delu. Nato pa izpelje vrsto formul za numerično odvajanje v zaključeni obliki, ki se uporabljajo pri numeričnem reševanju diferencialnih enačb. Pri poglavju o numeričnem integriranju avtor obravnava konvergenco splošnih integracijskih pravil. Obširno obdela osnovna in sestavljena Newton-Cotesova integracijska pravila s strogo obravnavo napak. Posebej obravnava tudi zelo učinkovito Rombergovo metodo. Pomemben poudarek daje avtor integracijskim pravilom Gaussovega tipa in računanju singularnih integralov ter integralov na neomejenem intervalu. Računanju večkratnih integralov pa se je avtor odpovedal zaradi že tako povečanega obsega dela.

Tretji del knjige obravnava numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb. Avtor se najprej loti reševanja sistemov enačb prvega reda. Pri tem dosledno uporablja vektorsko obliko zapisa enačb in metod. Za razlago potrebne teorije uporabi nekaj preprostih metod, ki so zasnovane na formulah prejšnjega poglavja. Definira lokalno in globalno napako in strogo obravnava konvergenco metode. Podrobneje obdela enočlenske metode tipa Runge-Kutta in linearne veččlenske metode. Pri zadnjih se loti povezave pojmov stabilnosti, konsistence in konvergence. Dodatno se dotakne začetnih problemov pri enačbah višjih redov. Veliko pozornost je Kozak posvetil robnim problemom pri navadnih diferencialnih enačbah. Obravnava prevodbo robnih problemov na začetne in reševanje z diferenčno metodo. Tudi kolokacije se bežno dotakne, prav tako variacijskega problema in problema lastnih vrednosti diferencialnega operatorja.

Zadnje poglavje je posvečeno numeričnemu reševanju parcialnih diferencialnih enačb. Po obvezni klasifikaciji teh enačb se predvsem posveti reševanju z metodo končnih diferenc. Pri reševanju enačb eliptičnega tipa si za razlago metod izbere Poissonovo enačbo. Podrobno obravnava iteracijske metode reševanja sistema linearnih enačb, ki ga dobimo pri diskretizaciji Laplaceovega operatorja. Pomemben dodatek v tem poglavju je razlaga novejših večmrežnih metod. Avtor omenja še nekaj drugih znanih metod. Pri enačbah paraboličnega tipa je pomembno ločiti eksplisitne in implicitne metode zaradi stabilnosti. Tudi tu Kozak poveže pojme stabilnosti, konsistence in konvergence. Pri enačbah hiperboličnega tipa pa avtor najprej obravnava adveksijske in druge enačbe prvega reda, nato pa razloži diferenčno metodo in metodo karakteristik za reševanje valovne enačbe. Zaradi omejenega obsega se avtor odpove metodam končnih elementov, ki so za-

snovane na variacijski formulaciji. Te bi namreč zahtevale poseben učbenik.

Ob koncu lahko še enkrat pohvalimo avtorjev izbor snovi, zelo skrbno in dosledno strogo obravnavanje zahtevne teorije in dragocene napotke za dejansko reševanje zajetih problemov, saj je dodanih nekaj pomembnejših uporabnih algoritmov. Delo bodo s pridom uporabljali slušatelji numeričnih predmetov in uporabniki, ki pri svojem delu naletijo na katerega izmed obravnavanih problemov.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 30,39 EUR.

Zvonimir Bohte

Peter Šemrl: OSNOVE VIŠJE MATEMATIKE I, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 45, DMFA–založništvo, Ljubljana 2009, 280 strani.

Pri pisanju učbenikov in drugih tekstov smo matematiki zavezani matematični korektnosti. Zapisani besedi naj se ne bi moglo očitati dvoumnosti ali celo nepravilnosti. Ta razumljiva zahteva je lahko tudi ovira. Kar želimo pojasniti intuitivno ozadje konceptov, včasih tvegamo kršitev standardov matematične strogosti. Ali lahko učbenik napišemo matematično korektno, hkrati pa dostopno razmeroma široki populaciji in v neformalnem slogu? Prav gotovo to ni lahko. Knjiga Petra Šemrla pa dokazuje, da je izvedljivo.

Učbenik je v prvi vrsti namenjen študentom naravoslovja in tehnike ob njihovem prvem srečanju z višjo matematiko. Razdeljen je na pet poglavij: 1. Številske množice, 2. Vektorji, 3. Sistemi linearnih enačb, 4. O funkcijah, 5. Pregled elementarnih funkcij. Vsako poglavje se konča s podpoglavjema „Povzetek“ in „Zahtevnejše branje“ (le tretje poglavje je brez slednjega). V prvem je podana zgoščena obnova posameznega poglavja, drugo pa je pisano za bralce z nekaj več matematičnega posluha.

Besedilo se bere kot zgodba. Sproščeno in tekoče. Živahen stil popestrijo še številne slike. Ni stroge delitve na definicije, izreke in dokaze. Novi pojmi

