ZAPLETI Z GRAVITACIJSKO KONSTANTO

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 04.80.-y

V seznamu osnovnih konstant CODATA so relativno negotovost gravitacijske konstante $\mathcal{G}$ v zadnjem času dvakrat povečali. Razlike med izmerjenimi vrednostmi so večje od navedenih negotovosti. $\mathcal{G}$ je najbolj negotova od vseh osnovnih konstant. Izmerili so jo tudi v Mednarodnem uradu za uteži in mere. Zelo natančna merjenja so zanimiva tudi s fizikalnega gledišča.

COMPLICATIONS WITH THE NEWTONIAN GRAVITATIONAL CONSTANT

Recently in the CODATA list of fundamental constants the relative uncertainty of the gravitational constant $\mathcal{G}$ has been increased twice. The differences between measured values are greater than the quoted uncertainties. $\mathcal{G}$ is the most uncertain of all fundamental constants. The constant has been measured also at the International Bureau of Weights and Measures. Very precise measurements are interesting also from the viewpoint of physics.

Uvod

Gravitacija je najšibkejša sila v naravi. Gravitacijske konstante ni mogoče povezati z drugimi konstantami v količine, ki bi jih natančno izmerili. Izjema je produkt gravitacijske konstante in mase Zemlje, ki ga izmerijo z relativno negotovostjo $2 \cdot 10^{-9}$. Vendar mase Zemlje ni mogoče natančno izmeriti. Zato morajo gravitacijsko konstanto meriti neposredno [10].

Ob raziskovanju možnosti za zaznavanje gravitacijskega valovanja so podrobno preiskali nihanje prožnih teles z majhno frekvenco. Kazuaki Kuroda je obravnaval nihanje torzijskih nihal z žičkami in leta 1995 ugotovil, da merjenje moti odstopanje od idealne prožnosti in z njim povezano dodatno dušenje [10]. Pri sobni temperaturi se pojavijo napake, zaradi katerih je izmerjena gravitacijska konstanta prevelika za člen, obratno sorazmeren z dobroto nihala Q. O tem so se prepričali pri merjenju z žarjeno volframsko žičko, kremenovo nitko in hladno vlečeno volframsko žičko. V tem vrstnem redu se je zmanjšala dobrota in so za gravitacijsko konstanto dobili vse večje vrednosti. Odtlej gravitacijske konstante ne merijo več s torzijskim nihalom z žičko. Poleg drugih merilnih načinov pa še naprej uporabljajo torzijsko nihalo, v katerem žičko nadomestijo s tankim trakom.

Trak in žička

Pri torziji je zasuk φ sorazmeren z navorom M, če navor ni prevelik: $M = D\varphi$. Pri merjenju gravitacijske konstante *torzijski koeficient* D za tanek trak sestavijo iz dveh členov [7]:

$$D = \frac{Gbs^3}{3l} + \frac{Fb^2}{12l}. \tag{1}$$

Prvi – prožnostni – člen je povezan s prožnostjo neobremenjenega traku. V njem je G strižni modul, b širina, s debelina in l dolžina traku. Drugi – obremenitveni – člen je povezan z obremenitvijo. F je sila, ki napenja trak, to je teža mg, če je na trak obešeno telo z maso m. Za primerjavo navedimo torzijski koeficient žičke s krožnim presekom s premerom $2R$:

$$D' = \frac{G\pi R^4}{2l} + \frac{FR^2}{2l} = \frac{\pi R^4}{2l}(G+\sigma), \quad \sigma = F/(\pi R^2). \tag{2}$$

Prožnostna člena je utemeljil Barreé de Saint-Venant leta 1864 in ju najdemo v večini učbenikov prožnosti. Učbenik L. D. Landaua in E. M. Lifšica ju skrbno obdela in poudari, da je račun podoben kot pri obremenjeni opni in toku viskozne tekočine po ceveh [3]. Obremenitvena člena so odkrili precej pozneje [1]. V večini učbenikov ju ni najti in tudi sicer ju večkrat spregledajo. Pri traku drugi člen postane pomemben pri veliki obremenitvi.

Nakažimo izpeljavo obremenitvenih členov. V navpičnem tankem obremenjenem traku z debelino s opazujmo pramena traku s širino dr v razdalji r na eno in na drugo stran od osi na sredini. Pramen na spodnjem krajišču v navpični smeri obremenjuje sila $(F/bs)sdr$. Zunanji navor M na spodnjem krajišču povzroči, da se trak zasuče za kot φ. Zaradi tega se opazovana pramena za kot $\sin\phi = \phi = (r/l)\sin\varphi = (r/l)\varphi$ odklonita od navpičnice. Upoštevali smo, da sta kota majhna, in sinusa nadomestili z ločno merjenima kotoma. Vodoravna komponenta sile je $(F/bs)sdr(r/l)\sin\varphi = (F/bs)sdr\cdot(r/l)\varphi$. Na simetrični pramen na nasprotni strani osi deluje nasprotno enaka vodoravna komponenta sile. Komponenti sestavljata dvojico sil z razdaljo prijemališč $2r$ in navorom dvojice $(F/bs)sdr\cdot(r/l)\varphi\cdot 2r$. Celotni navor dobimo, ko seštejemo prispevke vseh pramenov v traku od 0 do $\frac{1}{2}b$:

$$M = \varphi(F/lbs)\cdot 2s\int_0^{\frac{1}{2}b} r^2 dr = (Fb^2/12l)\varphi = D\varphi.$$

Podobno računamo pri obremenjeni žički. Opazujemo silo $(F/\pi R^2)rdrd\alpha$ na pramen, ki ima na spodnjem krajišču presek $rdrd\alpha$. Integriramo po r od 0 do R in po α od 0 do π:

$$M = \varphi(F/l\pi R^2)\int_0^R 2r\cdot r^2 dr\int_0^\pi d\alpha = (FR^2/2l)\varphi = D\varphi.$$

V drugem zapisu zveze (2) je napetost σ veliko manjša, denimo stokrat, od strižnega modula. Pri žički zato prožnostni člen vselej prevlada obremenitvenega in se ni mogoče izogniti odstopanju od idealne prožnosti in dodatnemu dušenju. Upoštevajmo samo prožnostni člen v (2) in izračunajmo razmerje torzijskih koeficientov D/D', če je na traku obešeno telo z enako maso kot na žički in sta preseka enaka, $bs = \pi R^2$. Razmerje $D/D' = 2\pi s/(3b) + \pi b\sigma/(6sG)$ je pri zelo tankem in močno obremenjenem traku manjše kot 1. Torzijska tehtnica s trakom je bolj občutljiva kot tehtnica z žičko. V tem primeru obremenitveni člen znatno preseže prožnostnega in dodatno dušenje postane nepomembno.

Naprava

V Mednarodnem uradu za uteži in mere BIPM v Sevresu blizu Pariza je raziskovalna skupina pred letom 1997 pripravila načrt za napravo, ki omogoči merjenje gravitacijske konstante na dva načina [9].[1] Z napravo z nekaterimi podobnimi lastnostmi so leta 2000 merili na univerzi Washington v Seattlu [10]. Vse kaže, da je skupina na BIPM načrte naredila neodvisno od te skupine. Leta 1999 je poročala o poizkusnem merjenju [9]. Leta 2001 je objavila rezultat prvega merjenja na oba načina [5]. Z izdatno predelano napravo je poskus ponovila leta 2013 [6]. Člani skupine so poleg tega sproti objavljali zanimive delne ugotovitve, do katerih so prišli na opisani poti.

Za torzijsko tehtnico so izbrali trak iz zlitine bakra in 1,8 % berilija z debelino 0,03 mm, širino 2,5 mm in dolžino 160 mm. Na traku je visel aluminijast krožnik s premerom 295 mm in debelino 8 mm. Njegovo maso so zmanjšali z okroglimi odprtinami. Na krožniku so bile simetrično nameščene štiri valjaste uteži s premerom in višino 55 mm iz zlitine bakra in 0,7 % telurja z maso po 1,2 kg in s središči v razdalji 120 mm od osi (slika na naslovnici). Ves krožnik z utežmi je imel maso okoli 6 kg. To ustreza približno $\frac{4}{5}$ porušne obremenitve in zmanjša delež prožnostnega člena na samo 4 % torzijskega koeficienta. S tem so se znebili dodatnega dušenja. Vse to je bilo nameščeno v vakuumski posodi. V njej je nihalo, to je krožnik s štirimi majhnimi valji na traku, níhalo z nihajnim časom 120 s in dobroto 10^5.

Zunaj vakuumske posode so bile na vrtiljaku simetrično nameščene štiri večje uteži iz enake zlitine bakra in telurja s premerom 120 mm in višino 115 mm z maso po 11 kg. Osi večjih uteži so bile v razdalji 214 mm od osi nihala. Vrtiljak so preko jermena premikali s koračnim motorjem. Če so velike uteži stale nasproti manjših uteži, z gravitacijo nanje niso izvajale

[1] Terry Quinn se je leta 2004 upokojil kot direktor in Richard Davis kot višji raziskovalec BIPM, Clive Speake je član univerze v Birminghamu, Harold Park pa je bil raziskovalec na BIPM.

navora. Ko so vrtiljak zavrteli za 18,898° na eno ali na drugo stran, pa je bil navor gravitacije velikih uteži na majhne uteži največji.

Zasuk so merili z avtokolimatorjem z veliko ločljivostjo na ravnem zrcalu na nihalu. Nanj so bila zaradi simetrije pritrjena tri enaka zrcala, ki jih niso uporabljali. Celotna naprava je bila v posebnem prostoru, v katerem se med merjenjem temperatura ni spremenila za več kot za 0,1°. Naprava je stala na osnovni plošči merilnika koordinat.

Prvi način s prostim nihalom

Pri prvem merilnem načinu so najprej vrtiljak spravili v položaj, v katerem so bili veliki valji nasproti majhnih in je bil navor gravitacije enak nič. Z avtokolimatorjem so določili v tej legi zasuk $\varphi = 0$. Potem so zasukali vrtiljak za $\varphi = 18{,}898°$ na eno stran, da je bil gravitacijski navor največji, in po pol ure za toliko na drugo stran ter so to ponavljali. Nihalo je prosto nihalo in preko računalnika so vsake 4 s izmerili njegov zasuk (slika 1). Nihajni čas T so povezali s torzijskim koeficientom:

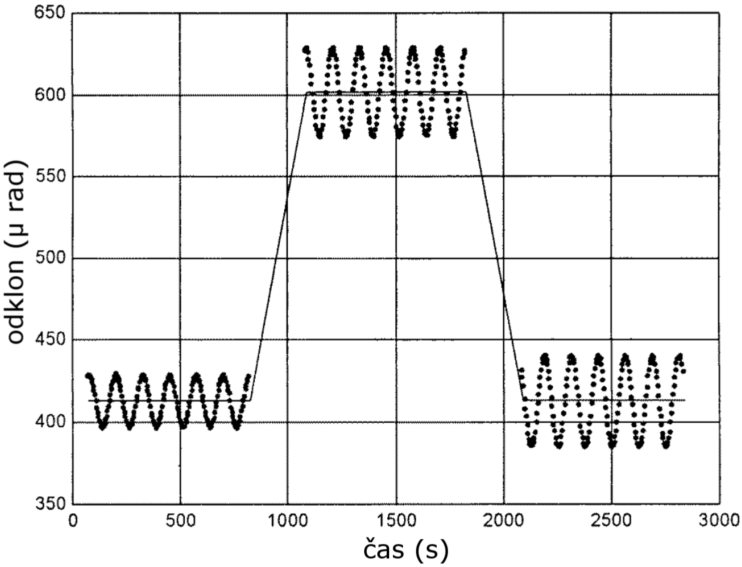
$$D = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 J \tag{3}$$

preko vztrajnostnega momenta nihala J. Enačbi za zasuk $M = D\varphi$ so dodali enačbo $M = \mathcal{G}\Gamma$ in z njo vpeljali funkcijo gravitacijske sklopitve med nihalom in vrtiljakom Γ. Enačbi za skrajno lego dasta skupaj z zvezo (3) gravitacijsko konstanto:

$$\mathcal{G} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{J}{\Gamma}\varphi_0. \tag{4}$$

Vztrajnostni moment nihala J in funkcijo sklopitve Γ so izračunali po porazdelitvi mas sestavnih delov naprave, nihajni čas T in zasuk φ_0 pa izmerili.

Preizkusili so natančnost merilnika koordinat in ugotovili, da so koordinate določili na 0,4 μm natančno. Posebno skrbno so premerili lego osi manjših in večjih valjev. Vztrajnostni moment nihala so preizkusili tako, da so posebej izmerili vztrajnostne momente sestavnih delov. Pri računanju vztrajnostnega momenta nihala so si pomagali z računalniškim programom. Po dveh poteh so dobili tudi sklopitveno funkcijo. Najprej so jo izračunali s privzetkom, da gre za točkasta telesa, in dobili $\Gamma = 70Mmr^4/R^5$, če je r razdalja središč majhnih valjev z maso m od osi in R razdalja središč velikih valjev z maso M od osi. Nihalo s štirimi simetrično razmeščenimi manjšimi valji ima 16-polni masni moment nasproti kvadrupolnemu momentu prečke pri nekdanjih merjenjih. Tako motilni gravitacijski navor oddaljenih gibajočih se teles v laboratoriju pojema s peto potenco oddaljenosti. Pri prečki pa ta navor pojema s tretjo potenco oddaljenosti. Podrobno so premislili, kako natančni so bili posamezni koraki v računih in pri merjenju.



Slika 1. Časovni potek nihanja nihala med dvema skrajnima legama vrtiljaka [5].

Nihalo se je odklonilo za $31{,}5'' = 0{,}153$ miliradiana, ko so vrtiljak premaknili za $\pm 18{,}898°$. Tako so dobili za torzijski koeficient traku $D = 2{,}06 \cdot 10^{-4}$ Nm/radian pri gravitacijskem navoru približno $3 \cdot 10^{-8}$ Nm. Ta je bil za več velikostnih stopenj večji kot pri nekdanjih merjenjih s prečko.

Desetkrat so izmerili zasuk φ s tem, da so pri vsakem merjenju upoštevali 34 podatkov v tridesetminutnih časovnih intervalih, v katerih so zasukali vrtiljak za $18{,}898°$ na eno ali drugo stran. Tako so dobili za gravitacijsko konstanto $6{,}67566 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s}^2)$ z relativno negotovostjo $5 \cdot 10^{-5}$.

Drugi način z vezanim nihalom

Pri drugem merilnem načinu so z električnim poljem dosegli, da se nihalo ni premaknilo iz začetnega položaja glede na vrtiljak in je prožni trak ostal nedeformiran. S tem so popolnoma izločili morebitne motnje zaradi neidealne prožnosti traku. V ta namen so nasproti štirim manjšim valjem na vrtiljak postavili štiri majhne valjaste elektrode. Kot druge elektrode so uporabili manjše valje same. Električno polje s frekvenco 1 kHz med pari elektrod je preko servomotorja poskrbelo, da je nihalo sledilo zasuku vrtiljaka in je trak ostal nedeformiran. Torzijski koeficient so dobili naravnost z odvisnostjo elektrostatične potencialne energije od zasuka: $dU/d\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{3}(dC_{ij}/d\varphi)(V_i - V_j)^2$. Pri tem so C_{ij} kapacitete med obema elektrodama in med elektrodo in preostankom naprave. Odvode $dC_{ij}/d\varphi$ so dobili tako, da so vsako od kapacitet izmerili v odvisnosti od zasuka. Tako so izrazili navor in nazadnje $\mathcal{G} = M/\Gamma$. Sklopitvena funkcija Γ je bila enaka kot pri prvem merilnem načinu.

Drugi merilni način je za gravitacijsko konstanto dal $6{,}67520 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s}^2)$ z relativno negotovostjo $6{,}1 \cdot 10^{-5}$. Ta rezultat so sestavili z rezultatom pri prvem merilnem načinu v vrednost gravitacijske konstante $6{,}67545 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s})^2$ z relativno negotovostjo $2{,}7 \cdot 10^{-5}$. Po mnenju merilcev ta vrednost statistično ni nasprotovala njihovi vrednosti $6{,}67559 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s})^2$ z relativno negotovostjo $4{,}1 \cdot 10^{-5}$ iz leta 2001. Vrednosti iz leta 2001 in iz leta 2013 precej presegata podatke skupine CODATA.

CODATA	objavljeno	$\mathcal{G}$	negotovost
2010	2013	$6{,}67384 \cdot 10^{-11} \mathrm{m}^3/(\mathrm{kgs}^2)$	$1{,}2 \cdot\ 10^{-4}$
2006	2008	6,67428	1,0
2002	2005	6,6742	1,5
1998	2000	6,673	15
1986	1986	6,67259	1,3
1973	1973	6,6720	6,1

V BIPM so postopno izboljševali napravo in zmanjševali relativno negotovost [9, 5, 6]. Skrbno so preizkusili, kako je najbolje vpeti trak. Preiskali so premikanje vpetega dela. Zaradi tresljajev zemeljskega površja se namreč spreminja nagib tal v laboratoriju. Merili so ponoči, ko je bilo tresenja čim manj. Po merjenju v letu 2001 so napravo popolnoma predelali, da bi zmanjšali relativno negotovost. Ostali so le večji valji, pa še tem so zmanjšali višino.

Kako dalje?

Telesi z masama po 1 kg v razdalji 1 m se privlačita s silo, ki ustreza teži nekaj živih celic. Zelo zahtevno je tako majhne sile med kilogramskimi telesi izmeriti na 4 ali 5 mest natančno. Veliko drugih učinkov lahko preseže gravitacijo in vse te učinke je treba spoznati in upoštevati. Prednost naprave na BIPM je v dveh merilnih načinih. »Težko je uvideti, kako naj bi dva različna merilna načina dala dve števili, ki sta napačni, a se ujemata med seboj.« [4]

Metrologi se zavedajo težav. Več deset let so z radarjem natančno sledili gibanju planetov in ugotovili, da se gravitacijska konstanta s časom ne spreminja. Ugotovljene razlike jasno opozarjajo na »resne napake ali močno podcenjene relativne negotovosti« [2].

Februarja je Kraljeva družba v Londonu priredila dvodnevno mednarodno srečanje *Newtonova gravitacijska konstanta, konstanta, ki je pretežavna za merjenje?* Udeleženci so poročali o merjenjih gravitacijske konstante in o tem, kako razumejo in obravnavajo razhajanja med njimi ter razpravljali o ukrepih [11]. Po srečanju so oblikovali sklepe. Ni verjetno, da bi zadrego rešilo eno merjenje ali dve. Česa podobnega pri merjenju osnovnih konstant v fiziki še ni bilo. Izhod je treba najti, da ne bo nastal dvom o zmožnosti metrologov. Sklenili so, da bodo osnovali mednarodni konzorcij, ki bo spremljal merjenja gravitacijske konstante in v okviru katerega bo mogoče o merjenjih razpravljati še pred objavo, ne samo po njej.

Oktobra so v okviru delavnice na ameriškem Državnem inštitutu za standarde in tehnologijo v Bouldru razpravljali o mednarodnem konzorciju, o načinih za merjenje gravitacijske konstante in o predlogu, da bi si raziskovalne skupine izmenjale merilne naprave. O tem bodo objavili članek v reviji Metrologia.

Raziskovalna skupina Mednarodnega urada za uteži je zaradi treh napak v svojih računih za malenkost povečala ugotovljeno vrednost gravitacijske konstante [8]. Pri merjenju na prvi način je navedla $6{,}67586(36) \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s}^2)$ in pri merjenju na drugi način $6{,}67515(41) \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s}^2)$. To je dalo končno vrednost $6{,}67554(16) \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s}^2)$.

LITERATURA

[1] J. C. Buckley, *The bifilar properties of twisted strips*, Phil. Mag. **28** (1914) 779–787.

[2] J. Cartwright, *The lure of $\mathcal{G}$*, Physics World **27** (2014) 34–37 (2).

[3] L. D. Landau in E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon, Oxford 1970, 59–64.

[4] C. Moskowitz, *Puzzling measurement of »big G« gravitational constant ignites debate*, Scientific American, (18. sept. 2013), `http://www.scientificamerican.com/article.cfm?id=puzzling-measurement-of-big-g-gravitational-constant-ignites-debate-slide-show/`, dostopano: 3. 11. 2014.

[5] T. J. Quinn, C. C. Speake, S. J. Rihman, R. S. Davis in A. Picard, *A new determination of G using two methods*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 111101–1-4.

[6] T. Quinn, H. Parks, C. Speake in R. Davis, *Improved determination of G using two methods*, Phys. Rev. Lett. **111** (2013) 111102–1–5.

[7] T. J. Quinn, C. C. Speake in R. S. Davis, *Novel torsion balance for the measurement of the Newtonian gravitational constant*, Metrologia **34** (1997) 245–249.

[8] T. Quinn, C. Speake, H. Parks in R. Davis, *Erratum: Improved determination of G using two methods*, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 039901.

[9] S. J. Richman, T. J. Quinn, C. C. Speake in R. S. Davis, *Preliminary determination of G using the BIPM torsion strip balance*, Meas. Sci. Technol. **10** (1999) 460–466.

[10] C. Speake in T. Quinn, *Newton's constant*, Phys. Today **67** (2014) 27–33 (7); J. Strnad, *O gravitacijski konstanti*, Obzornik mat. fiz. **48** (2001) 19–25.

[11] *The Newtonian Constant of Gravity, a Constant too Difficult to Measure?* `royalsociety.org/events/2014/gravitation/`, dostopano: 3. 11. 2014.