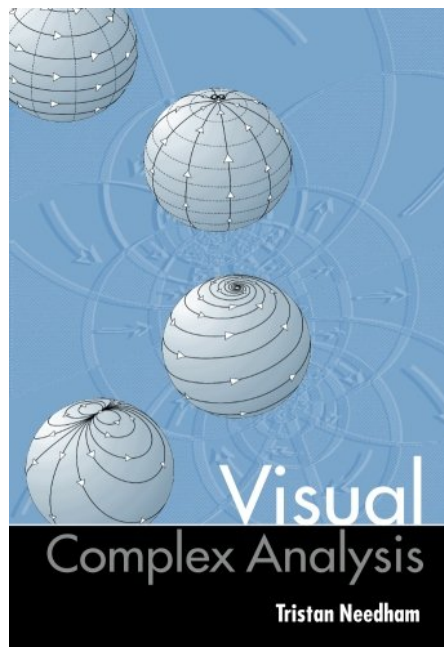


Tristan Needham, Visual Complex Analysis, Oxford University Press Inc., New York, 1998, 592 strani.

Na staro kitajsko modrost, da ena slika odtehta tisoč strani besedila, matematiki (v svojem stremljenju k logični strogosti) dostikrat pozabljamo.¹ Pretirano abstraktna razlaga brez uporabe slik lahko vodi v nerazumljivost in posledično učni neuspeh.² Po drugi strani pa nekateri moderni učbeniki kompleksne analize uporabljajo t. i. *fazne portrete*, ki reprezentirajo funkcije kompleksne spremenljivke kot barvne slike na njihovih domenah.³ Morda je prav Needhamova knjiga iz leta 1998 (s številnimi črno-belimi slikami) utrta pot nazornejšemu podajanju snovi na področju kompleksne analize in je zato po svoje še vedno aktualna. *Tako kot*



glasbe ni mogoče resnično razumeti in doživeti le z analiziranjem, ne pa tudi s poslušanjem, tako tudi matematike ni smiselno poskušati učiti ali razumeti brez pomoči slik. Prav ta misel je avtorja motivirala, da je napisal knjigo, v kateri so temeljni pojmi in izreki kompleksne analize predstavljeni na preprost in nazoren način. Idejo za pisanje takšne knjige o »geometriji kompleksne ravnine« (Uvod, str. ix) je dobil ob študiju Newtonove *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* iz leta 1687. Kot pravi sam, ga je fascinirala Newtonova elegantna geometrijska metoda.⁴ Domislil se je, da bi podobno, na geometriji osnovano metodo, lahko uporabil pri razlagi

¹Nekateri avtorji so tezo o nepotrebnosti slik zagovarjali celo v geometriji! Tako je npr. francoski matematik Jean Dieudonné (v knjigi *Algebre linéaire et géométrie élémentaire* iz leta 1964) elementarno geometrijo aksiomatsko zgradil na pojmi vektorskega prostora.

²To misel potrjujejo tudi spoznanja moderne psihologije in pedagogike o tem, kako novo snov usvajamo hitreje in bolje, če so v učenje smiselno vključeni različni senzorni kanali, ki nagovarjajo različne vrste človekovih inteligenc.

³Glej npr. E. Wegert, *Visual Complex Functions*, 2012.

⁴Newtonova prvotna verzija infinitezimalnega računa iz leta 1665 je temeljila na uporabi neskončnih vrst. Leibnizev »simbolični račun« je nastal okrog 1675. Newton, ki ni bil najbolj zadovoljen z nobeno od teh prvih dveh različic, je svojo »geometrijsko različico« infinitezimalnega računa razvil okrog leta 1680.

osnovnih pojmov in rezultatov kompleksne analize.

Knjiga je pregledno razdeljena na 12 poglavij, vsako od njih se deli še na manjše enote in se konča z vajami.

V 1. poglavju *Geometrija in kompleksna aritmetika* so predstavljeni ključni mejniki iz zgodovine kompleksnih števil. Ena izmed takih je bila npr. Bombellijeva »drzna misel«, da se iz rešitve $x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$, ki jo po Cardanovih formulah dobimo iz kubične enačbe $x^3 = 15x + 4$, mora nekako dobiti realno rešitev $x = 4$. Predsodki v zvezi s kompleksnimi števili so se postopoma umikali spoznanju o njihovi uporabnosti. Avtor se precej potrudi, da bralcu pojasni zgodovinski in matematični kontekst z raznimi pomembnimi odkritji o kompleksnih številih. Za Eulerjevo formulo $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ predstavi dva argumenta, ki potrjujeta njeno veljavnost na intuitivni, pred-logični ravni: kinematični argument s po enotski krožnici gibajočim se delcem, ter argument s potenčnimi vrstami (str. 10–14). Sledijo primeri uporabe kompleksnih števil v *trigonometriji* za izpeljevanje raznih formul, kot je npr. $2^4 \cos^4 \phi = 2 \cos 4\phi + 8 \cos 2\phi + 6$, *geometriji* (npr. za prikaz rotacij ter za lažje dokazovanje trditev, kot je npr. ta, da sta daljici, ki povezujeta središči po dveh kvadratih nad nasprotnima stranicama poljubnega četverkotnika v ravnini, pravokotni in enako dolgi), *infinitesimalnem računu*, *algebri*, ter pri operacijah z vektorji. Kompleksna števila se naravno pojavijo tudi pri skrbnem premisleku o *geometriji evklidske ravnine*, konkretno lahko pravilo za množenje kompleksnih števil dobimo kot posledico vedenja kompozitumov raztegov in rotacij.

V 2. poglavju avtor za vizualizacijo kompleksnih funkcij $w = f(z)$ predstavi z in njeno sliko w kot točki v kompleksni ravnini, in tako lahko f interpretira kot transformacijo ravnine⁵. Tako je npr. preslikava $z \mapsto w = z^n$, kjer je n naravno število, po prepisu v polarno obliko $z = re^{i\varphi}$ in $w = r^n e^{in\varphi}$ prikazana kot razteg in razvitje »pahljače« okrog izhodišča. Ta vizualizacija pa omogoča elegantno razrešitev paradoksa v zvezi z rešitvami kubičnih enačb: čeprav se zdi, da bi po Cardanovih formulah morali imeti devet rešitev, se izkaže, da se Cardanova rešitev prevede na Vietovo. Prav tako

⁵Omeni pa tudi druge možnosti vizualizacije kompleksnih funkcij, npr. z *vektorskim poljem*, kjer je kompleksno število $f(z)$ upodobljeno z vektorjem izhajajočim iz z , pa tudi z *Riemannovimi ploskvami*. Določeno predstavo o funkciji da tudi njena *modularna ploskev*, kjer je nad točko z v trirazsežnem prostoru upodobljena njena absolutna vrednost $|f(z)|$. V knjigi ni omenjeno *domensko barvanje* (opisano npr. na spletni strani http://users.mai.liu.se/hanlu09/complex/domain_coloring.html), preprosta tehnika, ki točki z priredi barvo njene slike $w = f(z)$.

posrečeno je razloženo, zakaj lahko potenčne vrste na robu konvergenčnega kroga v okolici nekaterih točk »eksplodirajo« oziroma »podivjajo«. Poučna je tudi pot, po kateri lahko z elementarnimi sredstvi (uporaba težišč in mnogokotnikov) postopoma pridemo do Gaussovega izreka o povprečni vrednosti: *Če je kompleksna funkcija $f(z)$ izrazljiva s potenčno vrsto, in če krog C (z radijem R in središčem k) leži znotraj konvergenčnega kroga te potenčne vrste, potem je $\langle f(z) \rangle_C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(k + Re^{i\varphi}) d\varphi = f(k)$.*

V 3. poglavju, posvečenem Möbiusovi transformaciji in inverziji, avtor pojasni zvezo Möbiusovih transformacij $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ z neevklidskimi geometrijami, Lorentzovo transformacijo 4-dimenzionalnega prostora-časa in Einsteinovo teorijo relativnosti, pa tudi z dvorazmerjem $[z, q, r, s] = \frac{(z-q)(r-s)}{(z-s)(r-q)}$. Reprezentira jih z 2×2 matrikami in pokaže, da imajo vse neidentične Möbiusove transformacije največ dve negibni točki. Po Kleinovi ideji klasificira Möbiusove transformacije v štiri razrede: eliptične, hiperbolične, loksodromske in parabolične. Vsakega od teh razredov tudi nazorno vizualizira (s slikami, ki kažejo, kako oziroma kam se z Möbiusovimi transformacijami preslikujejo posamezni krivočrti štirikotniki iz različnih tlakovanj kompleksne ravnine, prirejenih različnim Möbiusovim transformacijam).

Resnično čudovita uporabnost kompleksne inverzije, ki $z = re^{i\varphi}$ preslika v $1/(re^{i\varphi}) = (1/r)e^{-i\varphi}$, preslikuje krožnice in premice v krožnice in premice in ohranja kote, je prikazana na treh primerih. Najprej je uporabljena za dokaz trditve, da središča neskončnega zaporedja dotikajočih se krogov med dvema od znotraj dotikajočima se krožnicama ležijo na krožnici. Nato je uporabljena za dokaz trditve, da zrcalne slike poljubne točke v notranjosti četverkotnika s pravokotnima diagonalama prek njegovih stranic ležijo na krožnici. Nazadnje je kompleksna inverzija uporabljena še za dokaz Ptolemejevega izreka, ki pravi, da je v tetivnem četverkotniku vsota produktov nasprotnih stranic enaka produktu diagonal.

V 4. poglavju, posvečenem odvajanju kompleksnih funkcij, Needham za opisovanje (in nazorno vizualno ponazoritev) lokalnega delovanja kompleksnih funkcij $z \mapsto f(z)$, ki vsako kompleksno število, predstavljeno kot vektor iz določene točke z , enako raztegne (ali skrči) in enako zavrti, vpelje pojem »vrtinca« (angl. amplitwist). Nato pokaže, da so vse takšne »lokalno vrtinčne« preslikave *konformne* (tj. ohranjajo kote med krivuljami in njihovo orientacijo); in da se *analitične* ali *holomorfne* funkcije v točkah, kjer je odvod različen od nič, lokalno obnašajo kot takšni vrtinci.

V 5. poglavju so z uporabo »infinitezimalne geometrije« na novo izpeljani

Cauchy-Riemannovi pogoji za analitičnost funkcij v polarnih koordinatah namesto kartezičnih. V razdelku o nebesni mehaniki je obravnavan problem, kdaj se delec v centralnem polju sil (tj. v polju, kjer je velikost sile odvisna le od oddaljenosti r od danega središča) giblje po elipsi. Da dobimo eliptično tirnico le v dveh primerih (če sila linearno *narašča* z razdaljo: $F(r) = cr$, ali če *pada* s kvadratom razdalje: $F(r) = c/r^2$), se je zdelo Newtonu zelo presenetljivo (»very remarkable«); kot je opazil Nobelov nagrajenec S. Chandrasekhar, »si Newton nikjer drugje v Principih ni dovolil podobnega izraza presenečenja.«

V 6. poglavju, ki obravnava neevklidsko geometrijo, Needham poudari analogijo s kompleksnimi števili. Ta so bila po začetnem odporu dokončno sprejeta kot matematično neproblematična šele po njihovi konkretni predstavitvi v kompleksni ravnini. Presenetljivo podobno usodo so doživele neevklidske geometrije Gaussa, Bolyaia in Lobačevskega. Uveljavile so se šele po Beltramijevem odkritju, da se da hiperbolično geometrijo konkretno reprezentirati na t. i. Beltramijevi psevdosferi (sklenjeni ploskvi, sestavljeni iz dveh neskončno dolgih lijakov, zlepljenih vzdolž njunega širšega roba, tako da ta ploskev nima roba).

Sedmo poglavje obravnava preprost, a izjemno pomemben koncept ovojnega števila (»winding number«), ki pove, kolikokrat sklenjena krivulja zaokroži okrog dane točke, in njegovo uporabo v topologiji.

Osmo poglavje obravnava kompleksno integracijo in Cauchyjev izrek: Če analitična funkcija nima nobenih singularnosti znotraj dane sklenjene krivulje, potem je njen integral po tej krivulji ničeln. Kot intuitivno razlago veljavnosti tega izreka nam avtor ponudi trditev, da če sklenjeno krivuljo lahko deformiramo in skrčimo v točko, ne da bi prečkali kakšno singularnost, potem je integral analitične funkcije po njej enak nič.

Deveto poglavje je namenjeno uporabi Cauchyjeve formule, ki pove, da če je kompleksna funkcija $f(z)$ analitična na enostavni sklenjeni krivulji L in znotraj nje, in če je a točka znotraj L , potem je $\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a)$. Iz Cauchyjeve formule izpelje tri osnovne lastnosti analitičnih funkcij: da so neskončnokrat odvedljive, da se v okolici regularnih točk izražajo s Taylorjevo vrsto, v okolici singularnih točk pa z Laurentovo vrsto.

V 10. poglavju so kompleksne funkcije upodobljene kot vektorska polja, ta reprezentacija pa je uporabna tudi v fiziki in topologiji. To poglavje, v katerem je podan tudi Hopfov dokaz Poincaré-Hopfovega izreka⁶, lahko po

⁶Ena od posledic tega izreka je, da na sferi S^2 ne more obstajati gladko vektorsko

avtorjevih besedah bralcu služi kot motivacija za nadaljnji študij Riemannovih ploskev.⁷

Enajsto poglavje obravnava vektorska polja in kompleksno integracijo.

Dvanajsto poglavje govori o tokovih in harmoničnih funkcijah. Tokovi, ki v svojem teku od izvorov do ponorov naletijo na različne ovire, so predstavljeni z nazornimi slikami, ki pomagajo k razumevanju njihove strukture.

Da bi bila vsebina knjige kar se da privlačna za bralca, jo je avtor po lastnih besedah ubesedil in oblikoval tako, kot bi ideje razlagal v živo kakšnemu prijatelju. Bralcu pomaga aktivno sodelovati pri razvijanju idej in napredovanju v razumevanju na ta način, da mu v posebni obliki že med samim tekstom (ne le na koncih poglavij) ponuja vaje, v katerih mora sam izdelati podrobnosti v zaporedju jasno določenih opornih točk na poti do rešitve. Te vaje pripomorejo tudi k poglobljanju razumevanja teorije (tako npr. vaja 6 na str. 468 nazorno vizualizira razliko med eliptičnimi, paraboličnimi in hiperboličnimi tipi vektorskih polj v okolici dane točke).

Med didaktičnimi poudarki knjige je treba omeniti tudi avtorjevo spodbujanje bralca, da pri svojem matematičnem raziskovanju uporablja računalnik, podobno kot fizik uporablja svoj laboratorij oziroma eksperimente – »za preverjanje obstoječih idej o tem, kako je konstruiran svet, ali kot sredstvo za odkrivanje novih pojavov, ki potem zahtevajo nove ideje za njihovo razlago.« Da se ta misel danes matematikom zdi že skoraj sama po sebi umevna, so v veliki meri pripomogle tudi knjige, kot je Needhamova *Visual Complex Analysis*, ki bralcu ne predaja le določenega znanja, temveč spodbuja in krepi tako bralčevo aktivno sodelovanje pri izgradnji razumevanja konkretne matematične vsebine kot tudi njegove splošne matematične sposobnosti in veščine.

Čeprav je vsebina knjige zahtevna, ali pa morda prav zato, je bila avtorjeva odločitev, da bralca pritegne in motivira z intuitivnimi argumenti ter sugestivnimi slikami, posrečena. Morda je kljub temu dobra ideja ob njej vzporedno študirati še kakšen drug standarden učbenik kompleksne analize in si tako dodatno razjasniti morebitna težja mesta.

Jurij Kovič

polje brez negibnih točk, kar se da formulirati tudi tako, da se sfere ne da počesati brez vrtincev.

⁷Posebej naj bi npr. to poglavje bralcu omogočalo lažje branje Kleinove knjige *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and Two Integrals* iz leta 1881, ki sledi Riemannovi originalni predstavitvi multifunkcij s tokovi na ploskvah v prostoru.