PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 2
Strani 98–101

Drago Bajc:

POVRNIMO SE NA OTOK ZAKLADOV (ALI SESTAVLJAJMO ROTACIJE)

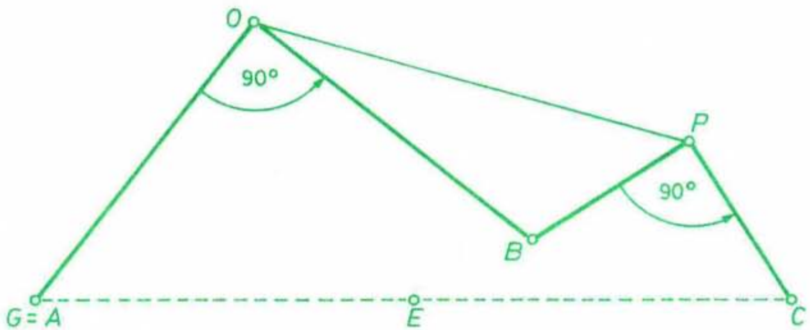
Ključne besede: matematika, geometrija, rotacije, zrcaljenja.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1216-Bajc.pdf

POVRNIMO SE NA OTOK ZAKLADOV (ALI SESTAVLJAJMO ROTACIJE)

V daljnem Preseku XIII/3 je Matjaž Željko prispeval uganko Otok zakladov, ki sega do slavnega fizika Gamowa (v knjigi One, two, three ... infinity). Uganko bomo tu za naše namene primerno priredili.

Star pergament vsebuje navodila o zakladu, pokopanem na samotnem otoku: "... zagledal boš gavge G. Od G pojdi do oljke O in preštej korake. Pri O zavij pravokotno na desno in prehodi enako število korakov. Tako boš prišel v B ($GO = OB$). Od B pojdi do palme P in spet zavij pravokotno na desno do C ($BP = PC$). V točki E sredi med G in C te čaka zaklad." (slika 1)



Slika 1.

Mornar pripluje na otok, ker pa gavg ne najde - so pač strohnele, z dolgim nosom odide. Tega bi ne smel storiti, saj bi prišel do zaklada, ne glede na to, iz katere točke A (ne nujno G) bi se odpravil. Bralca spodbujamo, da to "dokaže" tako, da začne risanje pri različnih A; končna točka E bo vedno ista.

Gamow je rešil nalogo s kompleksnimi števili, Željko pa z analitično geometrijo. Rešitvama dodajamo tretjo, ne samo zato, da pojasnimo, zakaj gavge niso potrebne oz. da lahko začnemo pri poljubni točki, ampak tudi z namenom, da si izmislimo druge podobne uganke. Saj je od reševanja ugank lepše le še njihovo zastavljanje!

Iz A v B lahko pridemo namesto z opisanim sprehodom še z rotacijo okoli osi O za $90°$, kar bomo označili z $(O, 90°)$, iz B v C pa z rotacijo $(P, 90°)$.

Gibanje iz začetne točke A v končno C je torej sestavljeno iz dveh rotacij, je vsota dveh rotacij. Kaj pa je to: vsota rotacij (O, α) in (P, β)?

Posebni primer, kako sešteti (O, α) in (O, β), ni težak: dobimo kar $(O, \alpha + \beta)$. Kako pa naprej?

Splošnemu sestavljanju rotacij (O, α) in (P, β) bomo kos, brž ko bomo upoštevali naslednja izreka:

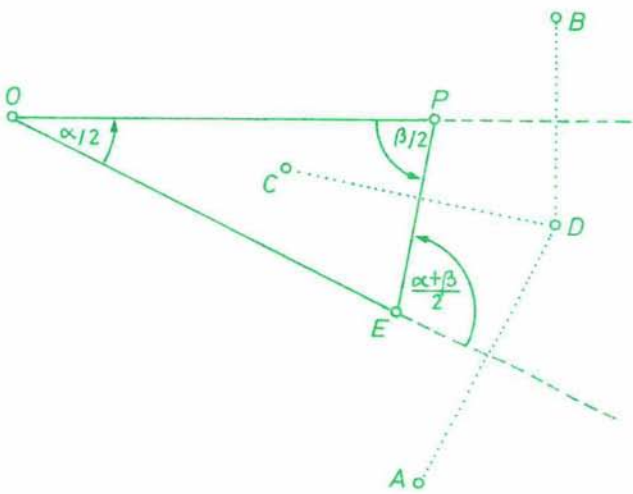
1. izrek: Rotacijo (O, α) si lahko (na neskončno načinov) mislimo sestavljeno iz dveh zaporednih zrcaljenj čez premici; pri tem morata potekati obe premici "zrcali" skozi O in kot med njima mora biti $\alpha/2$.

Dokaz je preprost, lahko ga napravite sami.

2. izrek: Dve zaporedni zrcaljenji čez premici lahko nadomestimo z rotacijo okoli presečišča O obeh zrcal za kot, ki je dvakratnik kota med zrcaloma.

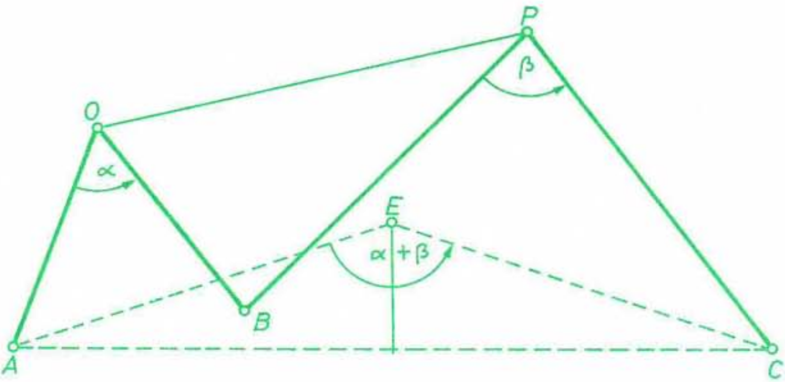
Tudi dokaz tega izreka, ki je obraten prvemu, je preprost.

Vrnimo se k rotacijama (O, α) in (P, β) ter uporabimo 1. izrek, vendar tako, da privarčujemo eno zrcalo: OP naj bo zrcalo, ki ustreza obema rotacijama (slika 2). Namesto obeh rotacij imamo sedaj štiri zrcaljenja: $A \Rightarrow D \Rightarrow B \Rightarrow D \Rightarrow C$. Ker se zrcaljenji $D \Rightarrow B \Rightarrow D$ "uničita", lahko namesto prejšnjega zaporedja zrcaljenj pišemo $A \Rightarrow D \Rightarrow C$, torej zrcaljenji preko premic, ki oklepata kot $(\alpha + \beta)/2$. Po 2. izreku pa je to enakovredno rotaciji za kot $\alpha + \beta$.



Slika 2.

Gibanje, sestavljeno iz rotacij (O, α) in (P, β), je torej rotacija $(E, \alpha+\beta)$, kjer novo os E dobimo s konstrukcijo, ki je razvidna s slike 2. Drugo, enakovredno konstrukcijo podaja slika 3.



Slika 3.

Vrnimo se za trenutek k začetni nalogi. Tam je $\alpha = 90°$ in $\beta = 90°$, sestavljena rotacija zavrti torej za $180°$. Če je začetna točka G znana in je C njena slika po sestavljeni rotaciji, je središče E daljice GC nujno os te sestavljene rotacije. Toda os je ena sama, zato bo E vedno na istem mestu, ne glede na to, kje bi začeli.

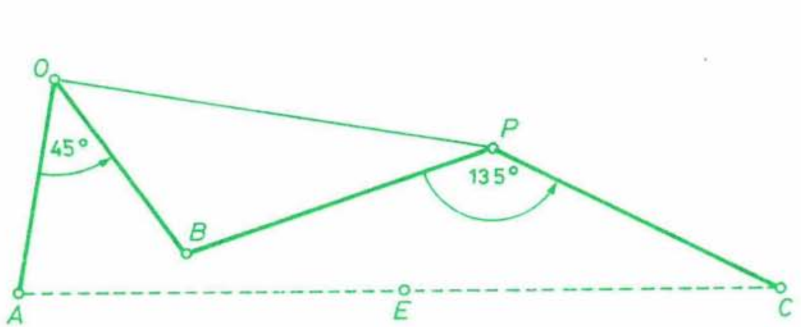
Ne samo, da gavge za najdbo zaklada niso potrebne, tudi sprehod $AOBPC$ je odveč. Vsota rotacij $(O, 90°)$ in $(P, 90°)$ je namreč $(E, 180°)$ in E je vrh enakokrakega trikotnika nad OP s kotom $45°$ ob osnovnici OP.

Sedaj je čas, da si izmislimo nekaj novih ugank:

1. Najprej ni treba, da sta kota vsak po $90°$, kot se to dogaja v začetni nalogi. Dovolj je, da sta suplementarna. Na sliki 4 sta to $45°$ in $135°$. Ostalo je enako kot v dani uganki.

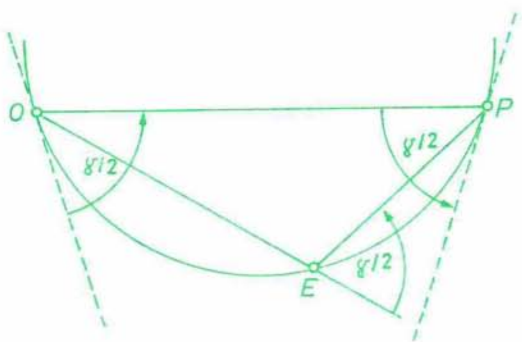
Zanimive so tudi uganke z bolj skopimi navodili, ki nam lege zaklada sicer popolnoma ne določijo, vendar pa jo zelo približajo, tako da nam ni treba počez prekopavati otoka. Na primer:

2. α in β sta enaka, pa poljubno velika. Zaklad se nujno nahaja na osi daljice OP (glej sliko 2).



Slika 4.

3. α in β sta majhna, sicer pa neznana. Dovolj je, da kopljemo (glej spet sliko 2) v bližini daljice OP.
4. Če kota obeh rotacij nista znana, znana pa je njuna vsota γ, potem moramo iskati zaklad na krožnem loku, razvidnem s slike 5. Ta ima v točkah O in P za tangenti premici, ki tvorita kota velikosti $\gamma/2$ z OP. Res je takrat zunanji kot ob E trikotnika OEP (E je poljubna točka loka) prav $\gamma/2$ oz. $(\alpha+\beta)/2$, kar potrebujemo (glej sliko 2).



Slika 5.

Novih ugank si lahko izmisli prizadevni bralec še sam.

Drago Bajc