PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **23** (1995/1996)
Številka 4
Strani 193–196

Primož Potočnik:

ZGODBA O PRAVOKOTNEM TETRAEDRU

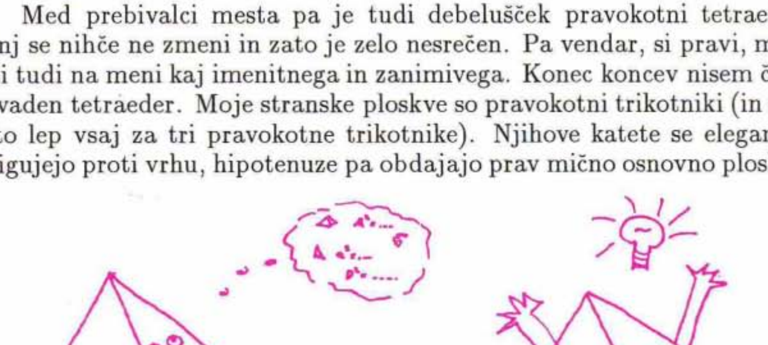
Ključne besede: matematika, geometrija, pravokotni trikotniki, tetraedri, Pitagorov izrek, Evklidov izrek.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/23/1266-Potocnik.pdf

ZGODBA O PRAVOKOTNEM TETRAEDRU

Za devetimi gorami in devetimi vodami leži mesto likov in teles. V njem živijo krogi, trikotniki, kvadrati, kocke, tetraedri, razne prizme, ikozaedri in še mnoga druga čuda najrazličnejših oblik in velikosti. Nekateri so okrogli, drugi koničasti, tretji bolj podolgovati, četrti bolj stisnjeni. Vsi pa se strinjajo, da je med njimi najimenitnejši trikotnik, ki ima en kot pravi. Med vsemi trikotniki so le njegove stranice takšne, da zadoščajo slavni Pitagorovi enačbi $a^2 + b^2 = c^2$.

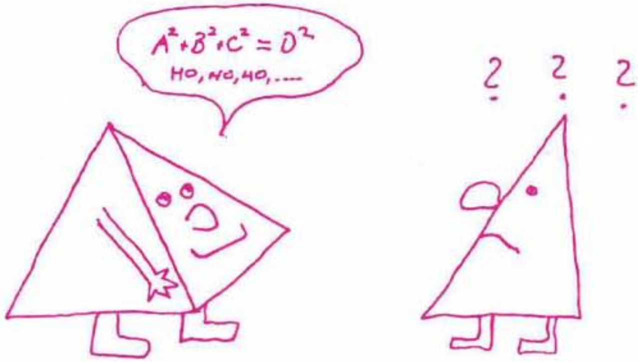
Med prebivalci mesta pa je tudi debeluščck pravokotni tetraeder. Zanj se nihče ne zmeni in zato je zelo nesrečen. Pa vendar, si pravi, mora biti tudi na meni kaj imenitnega in zanimivega. Konec koncev nisem čisto navaden tetraeder. Moje stranske ploskve so pravokotni trikotniki (in sem zato lep vsaj za tri pravokotne trikotnike). Njihove katete se elegantno dvigujejo proti vrhu, hipotenuze pa obdajajo prav mično osnovno ploskev.



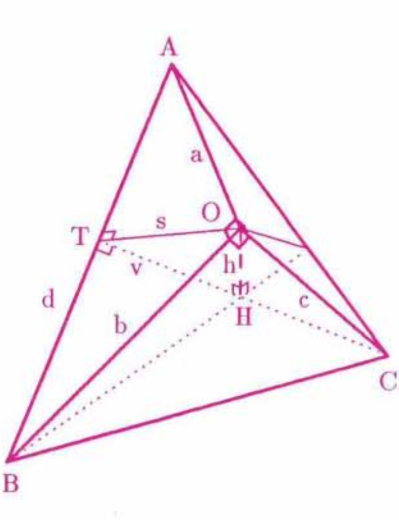
Gotovo tudi zame velja kakšen izrek. Tako razmišlja pravokotni tetraeder, se gleda v ogledalu in meri ter računa. Na koncu pa le odkrije nekaj čudovitega. Steče na ulico in pove vsakemu, ki ga sreča:

Če seštejem kvadrate ploščin svojih stranskih ploskev, dobim kvadrat ploščine osnovne ploskve. Torej:

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = \mathcal{D}^2 .$$



To je prišlo na uho tudi mestnemu matematiku. Novica o takšni skladnosti tetraedrovih ploskev ga je zelo presenetila. Kar je naš tetraeder zmeril, je hotel strokovnjak preveriti s svinčnikom in papirjem. Narisal je poljuben pravokotni tetraeder in razmišljal takole: Označimo vrh tetraedra z O in oglišča osnovne ploskve z A, B, C. Koti $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COA$ pravokotnega tetraedra so pravi. Narišimo višino trikotnika ABO na AB in nožišče označimo s T. Narišimo še višino osnovne ploskve (ABC) skozi C. Zdi se nam, da ima ta višina isto nožišče T kot višina OT. Preverimo:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{TC}\;\overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OT})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \\ &= \overrightarrow{OB}\;\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\;\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OT}\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0\,.\end{aligned}$$

TC je pravokotna na stranico AB in ima krajišče v C in je zato res višina osnovne ploskve. Podobno bi se lahko prepričali še za druge višine in ugotovili:

Višine stranskih ploskev imajo z višinami osnovne ploskve skupna nožišča.

Projicirajmo sedaj vrh tetraedra O pravokotno na osnovnico ABC. Kaj je projekcija? Iz skice lahko domnevamo, da je to višinska točka H osnovne ploskve. Dokažimo:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TH} = \overrightarrow{OT} + k\overrightarrow{TC}, \; \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OT}\,\overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{TC}\,\overrightarrow{AB} = 0\,.$$

Daljica OH je torej pravokotna na stranico AB in enako bi se prepričali, da je pravokotna tudi na stranico AC. Ker se da vsak vektor v ravnini osnovne ploskve zapisati kot linearna kombinacija vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, je OH pravokotna na vso ploskev ABC. To pa že pomeni, da je točka H res pravokotna projekcija vrha O na osnovno ploskev. Povedano drugače:

Višinska točka osnovne ploskve je hkrati nožišče telesne višine pravokotnega tetraedra.

Sedaj, ko smo opravičili privzetke, ki smo jih naredili ob risanju skice, lahko preverimo trditev našega tetraedra. Z $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ označimo ploščine stranskih ploskev OAB, OBC, OCA in z $\mathcal{D}$ ploščino osnovne ploskve ABC. Z a, b, c označimo dolžine stranic stranskih ploskev in z d dolžino stranice AB. V računu bomo potrebovali še dolžini višin OT in CT, ki ju bomo označili z s in v. Iz skice lahko preberemo:

$$\mathcal{A} = \frac{ab}{2}\,, \qquad \mathcal{B} = \frac{bc}{2}\,, \qquad \mathcal{C} = \frac{ca}{2}\,.$$

Nekaj več težav je z računanjem ploščine osnovne ploskve:

$$\mathcal{D} = \frac{dv}{2}\,, \qquad v^2 = s^2 + c^2\,.$$

Trikotnika ATO in AOB sta si podobna, saj imata en kot skupen, drugi pa je pri obeh kar pravi. Zato velja

$$s : a = b : d\,.$$

Od tod dobimo:

$$\mathcal{D}^2 = \frac{a^2b^2 + d^2c^2}{4}\,.$$

In ker je $d^2 = a^2 + b^2$, sledi:

$$\mathcal{D}^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{4} = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2\,.$$

Matematik, ki je bil v mestu likov in teles zelo cenjena oseba (ko bi vsaj bilo tudi kje drugje tako...), se je tako prepričal v pravilnost tetraedrove trditve. Rezultat mu je bil všeč in je zato računal dalje. Spomnil se je Evklidovega izreka, ki pravi, da je v pravokotnem trikotniku produkt osnovnice in projekcije katete na osnovnico enak kvadratu katete. Analogno je v pravokotnem tetraedru označil projekcijo stranske ploskve na osnovno z $\mathcal{A}'$ in daljico TH z s'. Sedaj je prebral s skice:

$$\mathcal{A}'\mathcal{D} = \frac{ds'}{2}\frac{dv}{2} = \frac{d^2 s' v}{4}\,.$$

Trikotnik TOC je pravokoten in zato velja

$$s'v = s^2\,,$$

$$\mathcal{A}'\mathcal{D} = \left(\frac{ds}{2}\right)^2 = \mathcal{A}^2\,.$$

Se pravi, da se tudi pravokotni tetraeder lahko ponaša z Evklidovim izrekom.

Matematik je računal še in še ter odkril še mnogo zanimivih lastnosti. Vse to je nato objavil meščanom in ti so sedaj postali ponosni, da živi med njimi poleg pravokotnega trikotnika še en tak lepotec. Tetraeder se jim ni zdel več dolgočasen in nezanimiv in vsi so ga vabili v svojo družbo.

Ugibanje, kaj vse zanimivega je matematik še odkril o pravokotnem tetraedru, pa prepuščamo nadobudnim bralcem. Naj le še namignemo, da se da do neke mere posplošiti tudi višinski izrek. Vprašamo pa se lahko tudi, ali so pravokotni tetraedri edini takšni tetraedri, ki zadoščajo posplošenemu Pitagorovemu izreku. Opazimo, da ne (najdi primer!), če pa poleg Pitagorove formule zahtevamo še nekaj dodatnih omejitev, res dobimo tudi zadostni pogoj za pravokotnost tetraedra.

Naloge:

1. Naj bosta a in b kateti, c pa hipotenuza pravokotnega trikotnika. Z v označimo višino na hipotenuzo. Dokaži, da velja

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\,.$$

Izpelji analogno formulo za pravokotni tetraeder.

2. Ali je lahko osnovna ploskev pravokotnega tetraedra topokotna?

3. V kakšnem odnosu so si nasprotni robovi pravokotnega tetraedra?

Primož Potočnik