OBRAVNAVA DINAMIČNIH SISTEMOV NA PODROČJU IZOBRAŽEVANJA

Vladimir Grubelnik

Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Univerza v Mariboru

Povzetek: *V prispevku pokažemo možnost obravnave dinamičnih sistemov na različnih stopnjah izobraževanja. Poudarimo pomen ponazoritve spreminjajočih se količin s pretakanjem tekočin, prikažemo vlogo računalnika v smislu izgradnje in simulacije dinamike sistemov ter navedemo nekaj primerov obravnave dinamičnih sistemov na različnih stopnjah izobraževanja.*

Abstract: *In the paper, the possibility of dynamical systems discussion on different levels of education is presented. The meaning of visualization of variables like flowing fluids is emphasized, the role of computer in building and simulation of dynamical systems is shown, and some examples of the discussed systems are indicated.*

1. UVOD

V vsakdanjem življenju imamo velikokrat opravka z dinamičnimi sistemi, ki jih opišemo s časovno spreminjajočimi se količinami [1]. Proučevanje relacij med količinami zahteva od nas reševanje sistema diferencialnih enačb. To je običajna praksa na znanstveno-raziskovalnem področju, medtem ko na področju izobraževanja običajno presega matematično znanje učencev in dijakov. Posledica tega je, da zaradi kompleksnosti naravnih sistemov in želje po analitični rešitvi prevečkrat obravnavamo poenostavljene sisteme, katerih rešitve se učenci učijo na pamet [2]. Pogosto se rezultati, ki jih dajo matematični modeli, ne ujemajo zadovoljivo z rezultati eksperimentov, kar lahko še poslabša razumevanje obravnavanih pojavov [3].

Pojavlja se vprašanje, kako matematično obravnavo dinamičnih sistemov prenesti na področje srednješolskega kot tudi osnovnošolskega izobraževanja. Kot prvo je pomembna vizualizacija kompleksnega sistema, kjer moramo učence v tesni navezavi z eksperimentalnim delom naučiti razgradnje problema in smiselne sestave posameznih členov v ustrezno celoto, ki jo imenujemo matematični model. Učenec mora znati proučiti matematične relacije med posameznimi količinami, ki so v primeru dinamičnih sistemov izražene v obliki diferencialnih enačb. Reševanje diferencialnih enačb v smislu simulacije modela na področju izobraževanja predstavlja eno izmed ključnih težav, vendar se je omenjeni problem z vse pogostejšo uporabo računalnikov v izobraževanju nekoliko omilil [4, 5]. Velik preskok pri tem so naredili tako imenovani grafično orientirani računalniški programi, kot so: Berkeley Madonna [6], Daynasys [7] in Stella [8]. Omenjeni programi omogočajo, da s povezovanjem grafičnih elementov za parametre, spremenljivke in tokove spremenljivk na enostaven in pregleden način sestavimo matematični model (glej sliko 3), katerega simulacijo prevzame računalnik [9].

V nadaljevanju bomo predstavili nekaj možnosti matematičnega modeliranja v srednji kot tudi osnovni šoli. Poudarili bomo pomen ponazoritve spreminjajočih se količin s pretakanjem tekočin, prikazali vlogo računalnika v smislu izgradnje in simulacije dinamike sistemov ter navedli nekaj primerov obravnave dinamičnih sistemov na različnih stopnjah izobraževanja.

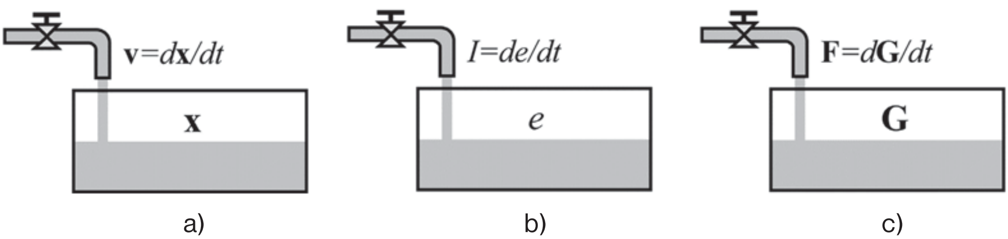
2. PONAZORITEV SPREMINJAJOČIH SE KOLIČIN S PRETAKANJEM TEKOČIN

Za lažje razumevanje dinamičnih sistemov oziroma odnosov med spremenljivkami in njihovimi tokovi predlagamo, da učenci najprej obravnavajo nekaj enostavnih primerov pretakanja tekočin, pri čemer spoznavajo vpliv tokov na spreminjanje količine tekočine v posodi. Pridobljene izkušnje na osnovi teh preprostih primerov uporabijo nato za opis drugih pojavov. Obstaja vrsta fizikalnih količin, ki jih lahko obravnavamo kot »snovem podobne količine« [10, 11], za katere velja kontinuitetna enačba:

$$dX/dt = \Sigma I_i + \Sigma i_i \, .$$

Pri tem je X ustrezna »snovi podobna« ekstenzivna količina (masa, električni naboj, gibalna količina, entropija …), ΣI_i vsota vseh tokov, ki prehajajo skozi stene opazovanega sistema, in Σi_i vsota vseh izvirov in ponorov znotraj opazovanega sistema.

Na sliki 1 je z analogijo pretakanja tekočin ponazorjena hitrost kot tok lege, električni tok kot tok naboja in sila kot tok gibalne količine.



Slika 1: Prikaz časovno spreminjajočih se količin z analogijo pretakanja tekočin.
a) Hitrost kot tok lege $\mathbf{v} = d\mathbf{x} / dt$.
b) Električni tok je tok naboja $I = de / dt$.
c) Sila kot tok gibalne količine $\mathbf{F} = d\mathbf{G} / dt$.

Tokovi ekstenzivnih količin ne tečejo sami od sebe. Odvisni so od razlike pripadajočih intenzivnih količin [11]. V tabeli 1 je podanih nekaj primerov tokov ($I = \mathrm{d}X/\mathrm{d}t$) in pripadajočih intenzivnih količin (y) za različna področja fizike. Razlika tlakov Δp poganja tok tekočine $\Phi_v = dV/dt$, napetost kot razlika električnih potencialov $U = \Delta\varphi$ poganja električni tok $I = de/dt$, sprememba hitrosti Δv poganja tok gibalne količine $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{G}/\mathrm{d}t$, razlika temperatur ΔT poganja entropijski tok $I_S = dS/dt$ itd.

Sprememba ekstenzivne količine je povezana tudi s spremembo energije. Pri vsaki spremembi energije se spremeni vsaj še ena ekstenzivna količina. Za koliko se energija spremeni zaradi spremembe ekstenzivne količine, določa pripadajoča intenzivna količina ($dW = ydX$). Ekstenzivno količino X in intenzivno količino y v takšnem paru imenujemo energijsko konjugirani količini [10, 11]. V tabeli 1 je podanih nekaj primerov takšnih parov, pri čemer lahko spremembo energije v splošnem zapišemo:

$$dW = \textstyle\sum_i y_i\, dX_i = -pdV + Ude + vdG + TdS + \ldots\ .$$

Ker si vsako spremembo energije $\sum_i y_i\, dX_i$ lahko predstavljamo kot posledico toka količine X, lahko tudi energijski tok P zapišemo kot vsoto posameznih tokov:

$$P = \frac{dW}{dt} = \textstyle\sum_i y_i I_i = p\Phi_v + UI + vF + TI_s + \ldots\ .$$

Omenimo še količino, ki določa spremembo ekstenzivne količine zaradi spremembe pripadajoče intenzivne količine. Poimenovali bi jo lahko »posplošena kapaciteta« [10, 11], saj imajo vsi kvocienti v tabeli 1 enako strukturo, kot jo ima električna kapaciteta. Tako lahko maso razumemo kot kapaciteto telesa za gibalno količino, izraz $\mathrm{d}S/\mathrm{d}T$ pa kot »entropijsko kapaciteto« [11] oziroma mero za toploto, ki jo je telo zmožno absorbirati. Povežemo jo lahko s toplotno kapaciteto pri konstantnem volumnu: $\mathrm{d}S/\mathrm{d}T = \mathrm{d}Q/T\mathrm{d}T = C_v/T$.

Tabela 1: Primeri tokov I ekstenzivnih količin X za posamezna področja fizike. Sprememba energije dW zaradi spremembe ekstenzivne količine dX je določena s pripadajočo intenzivno količino y.

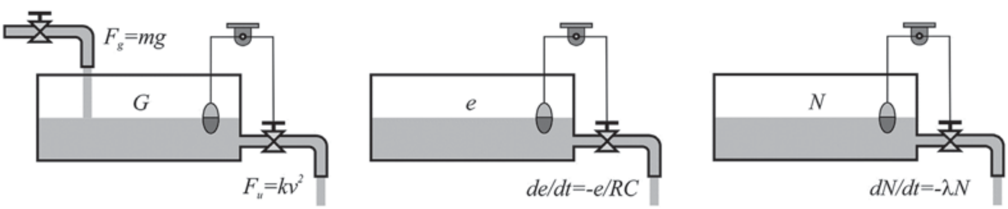
področje	X	$I = dX/dt$	y	$dA\ (dW) = ydX$	$P = dW/dt = yI$	kapaciteta
Mehanika tekočin	V	volumski pretok $\Phi_v = dV/dt$	p	$dA = -pdV$	$P = p\Phi_v$	$\frac{dV}{dp} = -\chi V$
Elektrika	e	električni tok $I = de/dt$	U	$dA = Ude$	$P = UI$	$\frac{de}{dU} = C$
Dinamika	$\mathbf{G}$	sila $\mathbf{F} = d\mathbf{G}/dt$	$\mathbf{v}$	$dA = \mathbf{v}d\mathbf{G}$	$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$	$\frac{dG}{dv} = m$
	Γ	navor $\mathbf{M} = d\boldsymbol{\Gamma}/dt$	ω	$dA = \omega d\boldsymbol{\Gamma}$	$P = \mathbf{M}\cdot\omega$	$\frac{d\Gamma}{d\omega} = J$
Toplota	S	entropijski tok $I_S = dS/dt$	T	$dQ = TdS$	$P = I_S T$	$\frac{dS}{dT}$

2.1 POVRATNE VEZAVE

Pri obravnavi časovno spreminjajočih se količin omenimo tudi pomen povratnih povezav, saj te odločilno vplivajo na regulacijo sistemov. Pozitivne povratne vezave procese pospešujejo, medtem ko negativne povratne vezave procese zavirajo oziroma omogočajo vzpostavitev ravnovesnega stanja, kar je še posebej pomembno v bioloških procesih.

Z raziskavo, ki je temeljila na ponazoritvi spreminjajočih se količin s pretakanjem tekočin [12], smo pokazali, da imajo učenci ob koncu osnovne šole probleme pri razumevanju časovnih potekov nelinearno spreminjajočih se količin kot posledice pozitivnih in negativnih povratnih vezav, medtem ko so zelo uspešni pri ločevanju med časovno linearno in nelinearno spreminjajočimi se količinami. Časovno linearno spreminjajoče se količine prepoznajo kot posledico konstantnega toka, nelinearne zveze pa kot posledico povratnih vezav.

Omenimo še nekaj primerov povratnih vezav, primernih za obravnavo v srednji šoli. V naravi so dokaj pogoste negativne povratne vezave. Na sliki 2 je prikazanih nekaj primerov. Sila upora ustali hitrost padanja dežnih kapljic ($dG / dt = mg - kv^2$, slika 2a), naboj na kondenzatorju vpliva na njegovo odtekanje ($de / dt = -e / RC$, slika 2b) in število radioaktivnih izotopov vpliva na število razpadov ($dN / dt = -\lambda N$, slika 2c). Seveda v naravi obstajajo tudi pozitivne povratne vezave, ki procese pospešujejo. Kot primer omenimo približevanje dveh teles pod vplivom gravitacijske sile, kjer se hitrost in lega telesa zaradi povečevanja pospeška vse hitreje spreminjata. Omenimo še debeljenje snežne kepe med kotaljenjem po snegu in debeljenje dežnih kapljic med padanjem v oblaku. V obeh primerih se s povečanjem volumna ta še hitreje povečuje.



a) b) c)

Slika 2: Vpliv povratne vezave na različnih področjih fizike, kjer na tok količine vpliva njena velikost.
a) Padanje teles pod vplivom zaviralnih sil.
b) Praznjenje kondenzatorja.
c) Radioaktivni razpad.

3. VLOGA RAČUNALNIKA PRI MATEMATIČNEM MODELIRANJU DINAMIČNIH SISTEMOV

Proučevanje relacij med količinami, ki določajo stanje sistema, običajno zahteva od nas reševanje sistema diferencialnih enačb. Reševanje diferencialnih enačb v smislu simulacije modela pa predstavlja eno ključnih težav pri obravnavi dinamičnih sistemov v osnovni in srednji šoli. Velikokrat imamo opravka tudi s sistemi diferencialnih enačb, ki so analitično nerešljivi in zahtevajo obravnavo z ustreznimi numeričnimi metodami. Pri tem si običajno pomagamo z različnimi programskimi jeziki, kot je C++, Pascal ali Basic. V zadnjem času se vse bolj pojavljajo tudi programi, ki imajo že vgrajene različne numerične metode, kot je na primer na področju tehnike dobro poznan program Matlab (http://www.mathworks.com). Seveda je takšen način dela primeren na znanstvenem področju oziroma za študente, medtem ko je na nižjih stopnjah izobraževanja, zaradi pomanjkanja znanja matematike, programskih jezikov in numeričnih metod, običajno nesprejemljiv.

Z razvojem računalniških programov in z metodami dela, ki vse pogosteje vključujejo računalnik v pouk, so danes dani pogoji, ki že omogočajo obravnavo ustrezno izbranih sistemov tudi na področju osnovnošolskega in srednješolskega izobraževanja. Pri tem omenimo tabelarično in grafično orientirane računalniške programe.

Primer tabelarično orientiranega računalniškega programa je Origin (http://www.originlab.com/), ki ga v zadnjem času vse pogosteje zasledimo pri prikazu numeričnih preračunov. V šoli dokaj razširjen in poznan program pa je Microsoftov Excel (http://office.microsoft.com). Ti programi omogočajo tabelarično reševanje diferenčnih enačb po časovnem koraku, kjer diferenčne enačbe zapišemo na osnovi diferencialnih enačb, ki določajo dinamiko sistema [13].

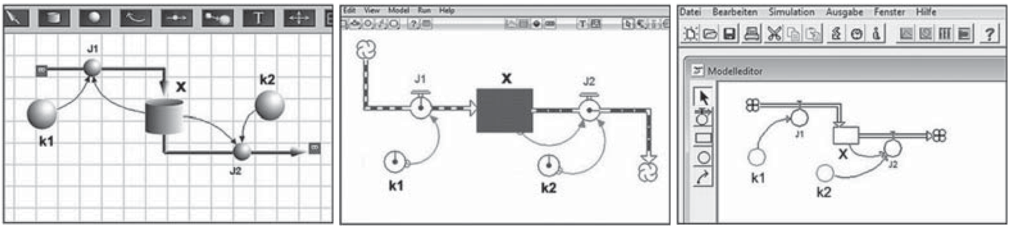
Pri kompleksnejših sistemih oziroma hkratni obravnavi več časovno spreminjajočih se količin pa so nam lahko v veliko pomoč tako imenovani grafično orientirani računalniški programi, kot so: Madonna, Stella, Daynasys in Powersim. Ti programi s svojo grafično podlago omogočajo, da lahko s posebnimi grafičnimi objekti (slika 3) neposredno izdelamo matematični model obravnavanega sistema. Pri tem je še posebej poudarjen pretok količin, kjer spreminjajoče se količine ponazorimo z rezervoarji, dotoke oziroma odtoke pa reguliramo z ustreznimi ventili.

Poleg izgradnje matematičnih modelov nam omenjeni programi v smislu numerične simulacije omogočajo tudi prikaz časovno spreminjajočih se količin. S tem je omogočen prenos modeliranja tudi na nižje stopnje izobraževanja, kjer dajemo predvsem pomen tako imenovanemu sistemskemu mišljenju [14], ne pa reševanju enačb, ki se jih učenci običajno učijo na pamet.

4. PRIMERI UPORABE MATEMATIČNEGA MODELIRANJA V IZOBRAŽEVANJU

Predstavili bomo nekaj primerov obravnave dinamičnih sistemov na področju izobraževanja. Naš namen ni podrobneje obravnavati posamezne primere, ampak želimo nakazati nekaj primerov, ki so primerni za obravnavo v osnovni in srednji šoli in smo jih podrobneje opisali v drugih prispevkih.

Najprej omenimo primere, pri katerih zaradi kompleksnosti sistemov velja izpostaviti kvalitativni modelni pristop. Takšen pristop je temeljnega pomena za razvijanje sistemskega mišljenja [14] in omogoča obravnavo nekaterih ključnih primerov naravnih sistemov že



a) b) c)

Slika 3: Grafične podlage računalniških programov. Posoda ponazarja spreminjajočo se količino $x(t)$, katere časovno odvisnost določata tokova J_1 in J_2. Na tokove lahko vplivamo s posameznimi konstantami (k_1 in k_2) in spreminjajočimi se količinami (x).

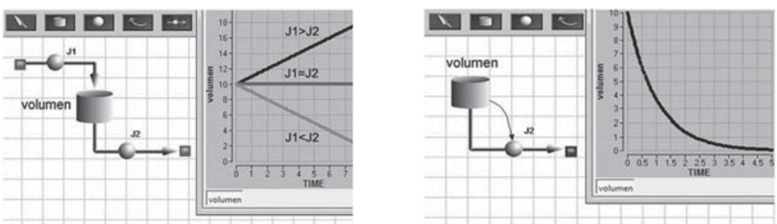
a) Berkely Madonna [6].

b) Stella [8].

c) Dynasys [7].

v osnovni šoli. Kot primer takšne obravnave izpostavimo kroženje vode v naravi, ki daje odlične možnosti postopne izgradnje modela preko cikličnih faz, znotraj katerih učenec dopolnjuje model. Gre za iskanje pozitivnih in negativnih vplivov med količinami, ki jih prikažemo v obliki vzročno-posledičnih diagramov [15]. Podobno velja tudi za razne populacijske modele, ki dajejo dobre možnosti proučevanja odzivov sistema pod vplivom zunanjih dejavnikov [16].

Pri kvantitativni obravnavi spreminjajočih se količin predlagamo, da učenci najprej obravnavajo nekaj enostavnih primerov pretakanja tekočin, saj ti omogočajo lažje razumevanje odnosov med spremenljivkami in njihovimi tokovi [9]. Na sliki 4 vidimo primer konstantnega pritoka in iztoka vode iz posode (slika 4a) ter primer vpliva negativne povratne vezave, kjer je iztok odvisen od količine vode v posodi (slika 4b).



a) b)

Slika 4: Proučevanje pretakanja tekočin z grafično orientiranim računalniškim programom Berkeley Madonna.

a) Konstanten dotok J_1 in iztok J_2 iz posode.

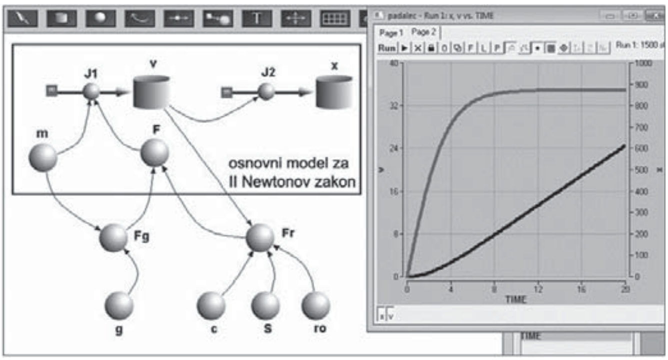
b) Iztok iz posode je odvisen od količine vode v posodi.

Na podoben način bi lahko obravnavali tudi druge časovno spreminjajoče se količine, kot je na primer gibanje teles pod vplivom zunanjih sil. Primer takšnega matematičnega modela je padanje padalca ob upoštevanju zračnega upora [9]. Omenjena tematika se pri pouku fizike pojavlja že v osnovni šoli in sicer običajno brez upoštevanja zračnega upora, ki se zaradi kompleksne analitične rešitve zanemari. To lahko učence zavede in jih privede do nesmiselnih zaključkov, kot je na primer naraščanje hitrosti proti neskončnosti.

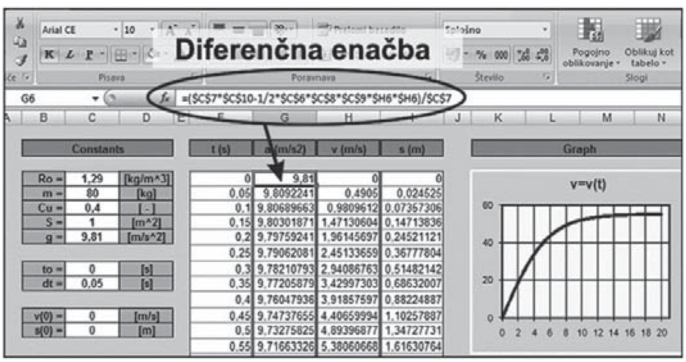
Na sliki 5a vidimo izdelan model z računalniškim programom Berkeley Madonna. Ob vnosu matematičnih relacij ter določitvi začetnih vrednosti spreminjajočih se količin računalniški program simulira ter prikaže časovni potek količin, ki določajo stanje sistema. Omenjeni primer lahko obravnavamo tudi s pomočjo tabelaričnih programov (Microsoft Excel), kjer diferencialne enačbe zapišemo v diferenčni obliki (slika 5b, [13]):

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot v,\quad v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta t \cdot a,\quad a = g(1 - v(t)^2 / v_0^2),$$

kjer je v_0 končna hitrost padajočega telesa pri danih pogojih.



a)



b)

Slika 5: Prosti pad padalca z upoštevanjem zračnega upora.

a) Izgradnja in simulacija matematičnega modela z računalniškim programom Berkely Madonna.

b) Reševanje diferenčnih enačb in prikaz rezultatov z Excelom.

Obravnavo dinamičnih sistemov v smislu pretakanja tekočin bi lahko v srednji šoli aplicirali še na številne druge primere, kot je praznjenje in polnjenje kondenzatorja, razpad radioaktivnih elementov, prevajanje toplote in drugo.

5. ZAKLJUČEK

Iz prispevka lahko razberemo, da je z razvojem računalniških programov in z ustreznimi metodami dela omogočen prenos matematičnega modeliranja tudi na področje izobraževanja v srednji in osnovni šoli. Pri tem je poleg poglobljenega razumevanja naravnih procesov dana tudi možnost razvoja generičnih kompetenc, ki so vezane tako na eksperimentalno delo kot na matematično modeliranje dinamičnih sistemov. Izpostaviti velja sposobnost zbiranja informacij, sposobnost analize in organizacije informacij, sposobnost učenja in reševanja problemov ter sposobnost sinteze zaključkov, kar je tudi glavno vodilo procesnega pristopa poučevanja, katerega pomen se vse bolj izpostavlja. Zaradi kompleksne obravnave naravnih procesov, katerih posamezni segmenti segajo na različna področja, velja tukaj omeniti še nekatere druge generične kompetence, kot so organiziranje in načrtovanje dela, sposobnost timskega dela ter medsebojna interakcija.

S takšnim načinom dela lahko torej pripomoremo k učenčevemu razumevanju številnih problemov in pojavov tako naravoslovja kot tudi družboslovja, hkrati pa razvijamo nekatere naravoslovne kompetence, ki so še posebej pomembne v smislu trajnostnega razvoja učencev.

VIRI

[1] B. Hannon in M. Ruth, *Dynamic Modeling*, Springer, New York 2001.

[2] M. Hribar, *Računske naloge pri pouku fizike*, Obzornik mat. 39, (1992) 113–116.

[3] M. Stöckler, *Modell, Idealizirung und Realität*, Praxis der Naturwissenschaften Physik **1/44,** (1995) 16–21.

[4] H.P. Schecker, *Entwicklung physikalischer Kompetenz bei unterrichtlicher Nutzung von Modellbildungssoftware,* Zur Didaktik der Physik und Chemie-Probleme und Prespektiven, Alsbach (1998) 289–291.

[5] M. Wells, D. Hestenes in G. Swackhamer, *A modeling method, for high school physics instruction*, Am. J. Phys. **63** (7), (1995) 606–619.

[6] Berkely Madonna, R. Macea in G. Oster, University of California at Berkeley *http://www.berkeleymadonna.com/*

[7] DYNASYS: W. Hupfeld, Bankerheide 2, 59065 Hamm (grafično orodje za izgradnjo modelov) *http://www.hupfeld-software.de*

[8] STELLA: High Performace Systems Inc. Hanover NH USA (grafično orodje za izgradnjo modelov) *http://www.hps-inc.com/*

[9] V. Grubelnik and R. Repnik, *Graphic Oriented Computer Programmes Aided Introduction of Mathematical Modelling in Primary School*, 33rd International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics – MIPRO, Opatija (2010) 24–28.

[10] T. Borer, P. Frommenwiler, H. Fuchs, H. Knoll, G. Kopacsy, W. Maurer, E. Schutz in K. Studer, *Physik, Ein systemdynamischer Zugang fur die Sekunderstufe II.* h.e.p. verlag ag, Bern 2005.

[11] F. Hermann, Karlsrujski tečaj fizike, metodično gradivo za učitelje. Pedagoška fakulteta, Univerza v Mariboru, Maribor 2001.

[12] V. Grubelnik in L. Grubelnik, *Uporaba grafičnih računalniških programov za matematično modeliranje dinamičnih sistemov v osnovni šoli*, Mednarodna konferenca Splet izobraževanja in raziskovanja z IKT - SIRIKT 2011, Kranjska Gora (13. –16. april 2011) 1059–1065.

[13] V. Grubelnik in R. Repnik, *Table oriented computer software as a tool for studying dynamical systems in high school. 21th Central European Conference on Information and Intelligent Systems*, Varaždin, Croatia (22–24 September 2010) 95–99.

[14] G. Ossimitz, *Entwicklung systemischen Denkens, Theoretische Konzepte und empirische Untersuchungen*, University of Klagenfurt, Klagenfurt 2000.

[15] V. Grubelnik, S. Fošnarič and M. Marhl, *Concepts of system thinking and modelling*, V: Plenković, Juraj (ur.), The 10th International Scientific Conference, Društvo i tehnologija, Rijeka (2003) 36–40.

[16] V. Grubelnik, S. Fošnarič and M. Marhl, *Razvijanje sistemskega mišljenja*, Pedagoška obzorja 20 (3–4), (2006) 51–57.