Vega
Mathematik

2

Vorlesungen
über die
Mathematik.
Zweyter Band,
welcher
die theoretische Geometrie, die ebene und sphärische Trigonometrie, die Anfangsgründe der praktischen Geometrie, eine Abhandlung von den krummen Linien, und die Differenzial- und Integralrechnung enthält.

Zum Gebrauche
des
Kaiserl. Königl. Artilleriekorps
aufgesetzt von

Georg Vega
Oberlieutenant und Lehrer der Mathematik bey dem Kaiserl. Königl. zweyten Feldartillerieregiment.

Wien,
gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern, kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.
1784.

Dem

sämtlichen kaiserlichen königlichen

Artilleriekorps.

Hier folgt der versprochene zweyte Theil meiner Vorlesungen über die Mathematik. Die Güte, mit welcher Sie den ersten aufgenommen, vergrösserte meinen Eyfer in Bearbeitung des gegenwärtigen. Ich bin auf dem einmal eingeschlagenen Wege fortgefahren, und habe gesucht Ihre Wünsche zu erfüllen, wovon sie der folgende Inhalt meiner Vorlesungen überzeugen wird. Auch Hilfsmittel zu einem besseren Gebrauche dieses Theils Ihnen zu liffern säumte ich nicht; meine bereits im vorigen Jahre herausgegebene Logarithmische Trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln sind ein Beweis davon.

Machen sie von diesem Theile jenen Gebrauch, den sie von dem ersten machten, so ist mir dieses Bürge Ihres gütigen Uhrtheils und Beyfalls, und beydes die Triebfeder zur fernern Arbeit.

Wien am 15ten Octobris 1784.

Der Verfasser.

Inhalt
des
zweyten Bandes.

Erste Vorlesung.

Von den Eigenschaften der Linien.

Zweyte Vorlesung.

Von den Eigenschaften der ebenen Flächen.

Dritte Vorlesung.

Von den Eigenschaften der Körper.

Vierte Vorlesung.

Von der Trigonometrie.

Fünfte Vorlesung.

Von den Anfangsgründen der praktischen Meßkunst.

Sechste Vorlesung.

Von einigen krummen Linien.

Siebente Vorlesung.

Von der Differenzialrechnung.

Achte Vorlesung.

Von der Integralrechnung.

Erste

Erste Vorlesung.

Von den Eigenschaften der Linien.

Vorläufige Einleitung in die Meßkunst.

241. Die ausgedehnten Größen, mit denen sich die Meßkunst beschäftiget (2), werden in drey Hauptgattungen, nämlich in **Körper**, **Flächen**, und **Linien** abgetheilet. Ein **Körper** (solidum) heißt im mathematischen Verstande eine begränzte Ausdehnung in die Länge, Breite, und Tiefe oder Dicke. In Fig. 1. ist ein solcher Körper abgebildet, den man einen **Würfel** nennet. Die Gränzen eines Körpers heißen **Flächen** (superficies), und sind nichts anders, als blosse Ausdehnungen in die Länge und Breite ohne aller Tiefe oder Dicke; ABCD, CDEF, BCFG u. s. w. stellen uns also Flächen vor. Die Gränzen einer Fläche heißen **Linien**, und sind Ausdehnungen in die blosse Länge ohne aller Breite und Dicke; AB, Fig. 1.

Fig. DE, GF u. s. w. stellen uns demnach Linien vor. Die
I. Gränzen, nämlich der Anfang oder das Ende einer Linie heißen endlich Punkte, die gar keine Ausdehnung mehr haben; durch A, B, C, u. s. w. werden also Punkte abgebildet. Mathematische Punkte, und Linien können niemals unseren Sinnen genau vorgestellet werden; man pflegt daher in der Ausübung einen Punkt auf dem Papiere mit einem kleinen runden Tüpflein, auf dem Felde mit einem Pflocke, oder einem anderen beliebigen Merkmale, und eine Linie auf dem Papiere mit einem feinen Striche, auf dem Felde aber entweder durch eine ausgespannte Schnur, oder auch durch eine schmale und seichte Vertiefung zu bezeichnen.

242. Aus dem Begriffe des Punktes, daß er nämlich ohne aller Ausdehnung sey, folget, daß er durch seine Bewegung einen Weg, oder eine Länge ohne aller Breite und Dicke, das ist, eine Linie beschreibe. Bewegt sich aber eine Linie AD anders als nach ihrer Richtung z. B. bis BC, so wird der Weg, den sie durchläuft, zwey Ausdehnungen haben, und folglich eine Fläche seyn. Bewegt sich endlich eine Fläche ABCD anders als nach ihrer Lage z. B. bis in HGFE, so wird der Weg, den sie zurücklegt, drey Ausdehnungen haben, und folglich ein Körper seyn. Doch kann man aus diesem keineswegs folgern, daß eine Linie aus Punkten, eine Fläche aus Linien, und ein Körper aus Flächen zusammengesetzt sey; nur soviel ist aus dem bisher angeführten abzunehmen, daß man in einer Linie überall in ihrer ganzen Ausdehnung nach Belieben Punkte annehmen könne, weil sich in einer Linie überall ihr Anfang oder ihr Ende gedenken läßt.

243. Bleibt nun die Richtung des Punktes während seiner Bewegung ungeändert, so wird er eine gerade Linie beschreiben, und von einem Orte zu dem anderen nach dem kürzesten Wege gelangen. Wird hingegen die Richtung des Punktes während seiner Bewegung jeden Augenblick geändert, so wird er eine krumme Linie beschreiben.

244. Eine gerade Linie AB ist demnach die kürzeste Entfernung ihrer Endpunkte A und B; durch zwey Punkte wird die Richtung, oder die Lage einer geraden Linie bestimmt; und durch zwey Punkte läßt sich nur eine gerade Linie ziehen, weil alle die übrigen geraden Linien, wenn man sie ja doch in Gedanken ziehen wollte, mit der ersten übereinfallen, und mit derselben immer nur eine einzige gerade Linie ausmachen würden. Hingegen können durch die nämlichen zwey Punkte A und B unzählige krumme, oder auch aus Geraden zusammengesetzte Linien ADB, AEB, AFB, ACB u. s. w. gezogen werden; jedoch ist jede derselben größer oder länger als die Gerade AB. Auch ist es leicht einzusehen, daß zwey gerade Linien, die sich durchschneiden, nur einen einzigen Punkt und nicht einen Theil gemein haben; haben hingegen zwey Gerade einen Theil, das ist ein gewisses Stück einer Geraden gemein, so liegen sie beyde nach einerley Richtung übereinander, und machen nur eine einzige Gerade aus. Fig. 2.

245. Eine Fläche, auf der sich durch was immer für zwey Punkte eine gerade Linie dergestalt ziehen läßt, daß sie *nach ihrer ganzen Länge auf der Fläche liegt*, heißt eine **Ebene** (planum). Alles, was man in der Meßkunst vornimmt, geschieht auf einer nämlichen Ebene, wenn man nicht das Gegentheil erinnert.

246. Drehet sich nun auf einer Ebene eine gerade Linie AC um einen unbeweglichen Punkt C, bis sie wieder in ihre vorige Lage kömmt, so beschreibt der Punkt A eine krumme Linie ABDEFA, deren alle Punkte A, B, D, F, u. s. w. gleichweit von C abstehen. Die von dieser krummen Linie eingeschlossene ebene Fläche heißt ein **Kreis** (circulus), der Punkt C dessen **Mittelpunkt** (centrum), und die krumme Linie ABDEFA der **Umkreis** (peripheria). Jeder Theil AB, DE u. s. w. des Umkreises wird ein **Kreisbogen** (arcus), jede Gerade zwischen zwey Punkten des Umkreises z. B. NM eine **Sehne** (chorda), jede Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, der **Durchmesser** (diameter), jede Gerade zwischen dem Mit- 3.

Fig. telpunkte und dem Umkreise, der Halbmesser (radius), jeder
3. Theil ACBA des Kreises zwischen zwey Halbmessern und einem Kreisbogen ein Ausschnitt (sector), und endlich jeder Theil EGFHE des Kreises zwischen der Sehne und dem Bogen wird ein Kreisabschnitt (segmentum) genennt.

247. Aus dieser Entstehungsart des Kreises folgt

I. Daß alle Halbmesser eines Kreises einander gleich seyn.

II. Daß auch alle Durchmesser des nämlichen Kreises einander gleichen, weil jeder Durchmesser nichts anders ist, als die Summe von zwey gleichen Halbmessern.

III. Daß gleiche Sehnen in dem nämlichen Kreise auch gleiche Bögen, und umgekehrt, abschneiden. Es sey z. B. die Sehne EF = MN, so ist auch der Bogen EF = MN; denn man bilde sich nur ein, daß der Abschnitt EF auf den Abschnitt MN dergestalt geleget werde, daß der Punkt E auf M, und F auf N zu liegen komme, so werden die Sehnen, weil sie einander gleich sind, und auch die Bögen einander decken, weil alle ihre Punkte von dem Mittelpunkte gleichweit entfernt sind, und ihre Endpunkte übereinander fallen; folglich müßen diese Bögen einander gleich seyn.

IV. Daß endlich jeder Durchmesser die Kreisfläche, und den Umkreis in zwey gleiche Theile zertheile. Es sey z. B. AE ein Durchmesser; man lege in Gedanken den Theil ANFEA auf den anderen Theil des Kreises ADEA, so werden sie einander decken, und folglich einander gleich seyn.

248. Diese Grundwahrheit: **Größen, welche einander decken sind vollkommen gleich, und umgekehrt, vollkommen gleiche Größen** (die nicht anders als durch die Verschiedenheit des Orts von einander unterschieden werden können als z. B. gerade Linien von einerley Länge, Kreise des nämlichen Durchmessers u. s. w.) **decken einander, wenn sie gehörig auf einander geleget werden**; nebst den zwey folgenden Forderungssätzen. **I. Durch jede zwey gegebenen Punkte kann eine gerade Linie gezogen, und beyderseits nach Belieben verlängert werden; II. aus jedem gege**benen

denen Punkte kann mit einem beliebigen Halbmesser ein Kreis beschrieben werden, muß man zu den (8) angeführten Grundsätzen hinzufügen, um daraus die meisten Wahrheiten in der Mathematik herzuleiten. Das erste nämlich der Zug und die Verlängerung einer geraden Linie geschieht auf dem Papiere, oder auf einer anderen kleinen ebenen Fläche durch Hilfe des Lineals, und auf dem Felde durch mehrere hintereinander gerade gepflanzte Pflöcke, oder Stangen, die man sodann nach Erforderniß mit einer Schnur verbindet, und längst derselben die gerade Linie mit einer seichten Vertiefung bezeichnet (traciret); das zweyte hingegen wird auf dem Papiere durch Hilfe des bekannten Instruments, welches man einen Zirkel nennt, und auf dem Felde durch Hilfe einer Schnur verrichtet, von der man das eine Ende an einen in dem angenommenen Mittelpunkte stehenden Pflock befestiget, und sodann auf der Erde die Linie bezeichnet, die das andere Ende der Schnur während der Umdrehung beschreibet. Fig. 3.

249. Der **Umkreis** eines jeden großen oder kleinen Kreises wird in 360 gleiche Theile abgetheilet, die man **Grade** nennt; jeder Grad wird in 60 gleiche Theile, die **Minuten** heißen, und jede *Minute in 60* **Sekunden** *abgetheilet u. s. w.* Die Grade, Minuten, Sekunden, Terzen, u. s. w. werden mit ($^\circ$), ($'$), ($''$), ($'''$) bezeichnet; z. B. ein Bogen von $65^\circ, 35', 40''$ wird also gelesen: **Ein Bogen von 65 Graden, 35 Minuten, 40 Sekunden.** Diese Abtheilung des Umkreises ist bloß willkührlich; man hat die Zahl 360 angenommen, weil sie aus sehr vielen Faktoren zusammengesetzt ist. Auch giebt uns die Anzahl der Grade eines Bogens noch nicht seine wirkliche Länge, sondern nur sein Verhältniß zu dem ganzen Umkreise an; wenn z. B. der Bogen $AB = 60^\circ$ ist, so ist dieß also zu verstehen, daß sich seine Länge zu der Länge des ganzen Umkreises verhält, wie 60 zu 360, nämlich daß der Bogen $AB = \frac{60.ABEFA}{360} = \frac{1}{6}ABEFA =$ dem sechsten Theile des ganzen Umkreises sey.

Fig. 3. 250. Die Neigung oder Oefnung zweyer gerader Linien aC und bC, welche in einem Punkte C zusammenlaufen, heißt ein **Winkel** (angulus). Die Geraden aC und bC werden dessen **Schenkel** (crura), und der beyden Schenkeln gemeine Punkt C dessen **Scheitel** (vertex) oder Spitze genennet. Man pflegt einen Winkel entweder durch drey Buchstaben, von denen der mittlere den Scheitel bezeichnet, oder auch nur durch einen in die Oefnung geschriebenen Buchstaben auszudrücken: man sagt z. B. der Winkel ACB oder BCA oder aCb, oder auch der Winkel m.

251. Die Verlängerung der Schenkel verändert ihre Oefnung beym Scheitel nicht; daher wird auch ein Winkel durch das Verlängern, oder Verkürzen seiner Schenkel weder größer noch kleiner, sondern ein Winkel wird größer, wenn sich seine Schenkel mehr öfnen, und kleiner, wenn sich diese mehr schließen. Bildet man sich nun ein, daß aus dem Scheitel C des Winkels aCb ein Kreisbogen ab beschrieben sey, so wird die Anzahl der Grade dieses Bogens das Maaß des Winkels seyn. Denn wenn man sich vorstellt, daß der Schenkel bC sich um den Punkt C drehe, und mit dem anderen Schenkel aC einmal eine kleinere, und einmal eine größere Oefnung mache, so wird auch der Bogen ab dadurch in dem nämlichen Verhältniße einmal kleiner, und einmal größer werden, das ist der Bogen ab wird 2, 3, ...nmal kleiner oder größer werden, wenn die Oefnung aCb 2, 3, ...nmal kleiner oder größer wird. Auch ist es gleichgiltig, ob man mit einem kleinen Halbmesser aC, oder mit einem größeren AC den Kreisbogen beschreibt, weil nicht durch die wirkliche Länge des Bogens, sondern nur durch die Anzahl seiner Grade, das ist durch sein Verhältniß zu dem ganzen Umkreise ein Winkel gemessen wird, und überdieß alle zwischen den Schenkeln AC und BC aus dem Scheitel C beschriebenen Kreisbögen die nämliche Anzahl der Grade enthalten müßen, da sie zugleich erzeuget werden, wenn sich der eine Schenkel um den Scheitel drehet.

252.

252. Es folgt aus diesem, daß man auf einer Geraden Fig.
ac aus dem Punkte c einen Winkel acb verzeichnen könne, der 4.
einem gegebenen Winkel ACB gleich ist, wenn man aus dem Scheitel C des gegebenen Winkels zwischen seinen Schenkeln mit einem beliebigen Halbmesser CA einen Bogen AB, und aus dem gegebenen Punkte c der Geraden ac mit dem nämlichen Halbmesser ebenfalls einen unbestimmten Bogen ab beschreibt, sodann die Sehne AB aus dem Punkte a auf den unbestimmten Bogen ab aufträgt, und endlich durch den auf diese Art gefundenen Punkt b, und durch den gegebenen Punkt c eine gerade Linie cb führet. Es kann dieses auch durch Hilfe des bekannten Instruments geschehen, welches ein Winkelmesser oder Transporteur genennt wird, und aus einem Halbkreise von Messing ungefähr 3 Zolle im Durchmesser besteht, dessen Rand in 180 Grade abgetheilt ist. Dieses Instrument dienet nicht nur auf dem Papiere Winkel zu messen, sondern auch Winkel von einer gegebenen Anzahl der Grade zu verzeichnen.

253. Die Winkel werden in rechte, spitzige, und stumpfe abgetheilet; ein rechter Winkel ist derjenige, der den 4ten Theil des ganzen Umkreises, das ist 90° zwischen seinen Schenkeln enthält; hingegen heißt ein Winkel spitzig, wenn er weniger als 90, und stumpf, wenn er mehr als 90 Grade enthält.

254. Wenn man die Schenkel AC und BC eines Winkels ACB verlängert, so heißen die zwey Winkel ACB und 5.
DCE, imgleichen ACD und ECB **Scheitelwinkel** (anguli verticales); die zwey Winkel ACD und DCE, oder auch DCE und ECB u. s. w. werden **Nebenwinkel** (anguli contigui) genennt: wenn nämlich eine Gerade DC eine andere Gerade AE in einem Punkte C schneidet, so heißen die dadurch auf der nämlichen Geraden entstandenen Winkel ACD und DCE **Nebenwinkel**. Bildet man sich ein, daß aus dem gemeinschaftlichen Scheitel C der Nebenwinkel ACD und DCE mit einem beliebigen Halbmesser CA ein Bogen ADE auf der Li-

Fig. nie AE beschrieben sey, so wird dieser Bogen ein halber Umkreis seyn, das ist, er wird 180 Grade enthalten, weil man
5. die Gerade AE als einen Durchmesser ansehen kann (247. IV.); nun ist der Bogen AD das Maaß des Winkels ACD, und der Bogen DE das Maaß des Winkels DCE, nämlich AD + DE, das ist, der halbe Umkreis oder 180 Grade sind das Maaß beyder Nebenwinkel zusammengenommen; folglich enthalten zwey Nebenwinkel auf einer geraden Linie zusammen 180 Grade. Auf die nämliche Art läßt sich erweisen, daß auch ACD + ACB = 180° sey.

Da nun $ACD + DCE = 180^\circ$
und auch $ACD + ACB = 180^\circ$
so ist auch $ACD + DCE = ACD + ACB$
oder $DCE = ACB$

das ist die Scheitelwinkel sind einander gleich. Man würde auf die nämliche Art darthun können, daß ACD = BCE sey u. s. w. Würde nun einer aus diesen vier Winkeln bekannt seyn, so sind alsogleich auch die drey übrigen bekannt: es sey z. B. $ACB = 50^\circ$, so ist $ACD = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$, $DCE = 50^\circ$, und $ECB = 130^\circ$. Auch dieses wird man leicht einsehen, daß alle Winkel um einen Punkt C z. B. ACD, DCE, ECB, BCA, wenn es ihrer noch so viele sind, zusammen 360 Grade enthalten.

6. 255. Wenn man die Endpunkte A und B der Schenkel CA und CB eines Winkels ACB mit einer Geraden AB verbindet, so heißt die dadurch eingeschlossene Fläche ein Dreyeck (triangulum), und die Geraden CA, AB, BC werden dessen Seiten (latera) genennt. Sind nun die drey Seiten eines Dreyecks von gleicher Länge, so heißt das Dreyeck **gleichseitig** (æquilaterum); sind nur zwey Seiten einander gleich, so wird das Dreyeck **gleichschenklicht** (æquicrurum aut isosceles), und endlich **ungleichseitig** (scalenum) genennt, wenn alle drey Seiten von ungleicher Länge sind. In Rücksicht der Winkel heißt ein Dreyeck **rechtwinklicht**, wenn es einen rechten, **stumpfwinklicht**, wenn es einen stumpfen Winkel

kel enthält, und endlich spitzwinklicht, wenn alle drey Fig.
Winkel spitzig sind. In einem rechtwinklichten Dreyecke 6.
wird noch insbesondere die dem rechten Winkel gegenüberstehende Seite die Hypothenuse, und die zwey übrigen Seiten, die dem rechten Winkel einschließen, die **Katheten** genennt. Wir müßen allhier einige Haupteigenschaften der Dreyecke anführen, die zu der Bestimmung sehr wichtiger Sätze in der Folge unentbehrlich sind, und können die übrigen Eigenschaften weiter unten auseinander setzen, allwo wir von den ebenen **Figuren**, das ist von begränzten Ebenen, ausführlich handeln.

256. Diese Haupteigenschaften der Dreyecke sind folgende:

I. In jedem Dreyecke ist die Summe zweyer Seiten größer, als die dritte Seite; z. B. $(AB + AC) > BC$; 7.
dieß erhellet aus (244).

II. Wenn in zwey Dreyecken ABC und abc zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel einander wechselweise vollkommen gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke einander vollkommen gleich; z. B. wenn $BC = bc$, $BA = ba$, und der Winkel $B = b$, so ist auch $AC = ac$, der Winkel $A = a$, und $C = c$. Um diese Gleichheit einzusehen, bilde man sich nur ein, daß das Dreyeck abc auf das Dreyeck ABC dergestalt geleget werde, daß der Scheitel b auf B, und die Seite bc auf BC zu liegen kommen, so werden die Winkel B und b, die Geraden BC und bc, und auch die Geraden BA und ba einander decken, weil sie vermög der Voraussetzung einander gleich sind; da nun die Seiten bc und BC, und auch ba und BA einander decken, so muß der Punkt a auf A, und der Punkt c auf C fallen, und die Seiten ac und AC müßen einander decken, weil ihre Endpunkte übereinander fallen; folglich ist die Seite $AC = ac$. Aus dem nämlichen Grunde des Deckens ist auch der Winkel $A = a$, und $C = c$ (248).

III. Wenn in zwey Dreyecken ABC, abc zwey Winkel mit der eingeschlossenen Seite einander wechselweise

Fig. gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke einander vollkommen
7. gleich; z. B. wenn B = b, C = c, und BC = bc; so ist auch BA = ba, CA = ca, und A = a. Denn man lege nur das Dreyeck abc auf das Dreyeck ABC dergestalt, daß die gleichen Seiten bc und BC, die gleichen Winkel b und B, und endlich auch c und C einander decken, so wird die Seite ba auf BA, und ca auf CA liegen, und der beyden Seiten ba und ca gemeinschaftliche Punkt a muß in den beyden Geraden BA und CA zugleich, nämlich in ihrem Durchschnittspunkte oder Scheitel A anzutreffen seyn: da nun der Punkt a in dem Punkte A anzutreffen ist, so müßen die Seiten ba und BA, ca und CA, und auch die Winkel a und A einander decken; folglich ist BA = ba, CA = ca, und A = a.

IV. Wenn in zwey Dreyecken ABC, abc alle drey Seiten einander wechselweise gleich sind, so sind auch die Winkel, die den gleichen Seiten gegenüberstehen, einander gleich; nämlich wenn BC = bc, BA = ba, und CA = ca, so ist auch A = a, C = c, und B = b. Um dieses deutlich einzusehen, bilde man sich ein, daß aus den Punkten B und b, imgleichen aus C und c mit den Halbmessern BA = ba, und CA = ca die Umkreise M, N, und m, n gezogen sind, die sich in den Punkten A und a durchschneiden: nach diesem lege man in Gedanken das Dreyeck bca mit seinen Kreisen dergestalt auf BCA, daß die Seiten bc und BC einander decken, das ist, daß der Punkt b auf B, und c auf C falle, der Punkt a aber nach derjenigen Gegend zu liegen komme, nach der A liegt, so werden sowohl die zwey kleinen, als auch die zwey großen Kreise einander decken, weil sie gleiche Halbmesser haben, und ihre Mittelpunkte übereinander fallen: da nun der Punkt a in den beyden Umkreisen m und n zugleich, nämlich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte sich befindet, so wird er ebenfalls nach dem Auflegen in den beyden Umkreisen M und N zugleich, nämlich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte A anzutreffen seyn; folglich werden die Seiten ba und BA, ca und CA, weil ihre Endpunkte übereinan-

der

der fallen, und auch die Winkel a und A, b und B, c und C Fig.
einander decken; es ist demnach der Winkel A = a, C = c, 7.
und B = b.

Von der verschiedenen Lage und Stellung der geraden Linien.

257. Wenn eine Gerade CE auf eine andere Gerade AB 8.
dergestalt gezogen ist, daß sie mit derselben gleiche Nebenwinkel, nämlich beyderseits rechte Winkel machet, so sagt man, daß CE auf AB senkrecht (perpendikulär) sey. Verlängert man nun CE, so ist der Winkel AEC = BED, weil sie Scheitelwinkel sind, nun ist auch AEC = CEB; folglich auch CEB = BED, nämlich diese zwey Nebenwinkel sind einander gleich, jeder derselben ist ein rechter Winkel, und BE ist senkrecht auf CD; wenn demnach CD auf AB senkrecht ist, so ist auch AB auf CD senkrecht.

258. Die Eigenschaften der senkrechten Linien sind folgende:

I. Wenn AE = EB, und CE senkrecht auf AB, so ist jeder Punkt der Senkrechten CE von A eben so weit, wie von B entfernet, z. B. CA = CB, aA = aB u. s. w. Denn in den Dreyecken CEA und CEB sind zwey Seiten AE = EB, und EC = EC mit dem eingeschlossenen rechten Winkel AEC = CEB einander gleich; folglich sind die ganzen Dreyecke einander vollkommen gleich, und CA = CB (256. II.). Eben dieß läßt sich von einem jeden anderen Punkte erweisen.

Imgleichen wenn CE senkrecht auf AB, und CA = CB, so ist auch EA = EB, und auch Aa = aB u. s. w. Um dieses einzusehen verlängere man CE, mache ED = EC, und ziehe AD und BD, so ist einmal AD = AC, BD = BC (weil ED = EC, und AB senkrecht auf CD vermög dem vorhergehenden): da nun BD = BC, und BC = CA = AD, so ist auch BD = AD; es ist demnach in den Dreyecken BCD und DCA die Seite AD = BD, AC = BC, und DC = DC; folglich sind sie einander vollkommen gleich,

Fig. gleich, und der Winkel ACD = BCD (256. IV.); fer-
8. ner ist in den Dreyecken AEC und CEB die Seite CA=CB, CE = CE, und der eingeschlossene Winkel ACD = BCD; folglich sind auch diese Dreyecke einander vollkommen gleich, und EA = EB. Eben dieses läßt sich von einem jeden anderen Punkte erweisen. Wir ziehen daraus folgenden Schluß: **wenn eine Gerade CD auf AB senkrecht steht, und ein Punkt dieser Senkrechten von zwey Punkten A und B der Geraden AB gleichweit entfernet ist, so sind jede zwey Entfernungen was immer für eines Punktes der Senkrechten CD von den zwey Punkten A und B der Geraden AB einander gleich.**

II. Wenn zwey Punkte C und a der Geraden CD von zwey Punkten A und B der Geraden AB gleichweit entfernet sind, nämlich wenn CA = CB, und auch aA = aB, so ist CD in dem Punkte E senkrecht auf AB. Denn die Dreyecke AaC und aCB sind einander vollkommen gleich, weil ihre Seiten einander wechselweise gleich sind; folglich ist der Winkel ACa = aCB; nun ist in den Dreyecken AEC und ECB die Seite CA = CB, CE = CE, und der eingeschlossene Winkel ACE=ECB; folglich sind auch diese Dreyecke einander vollkommen gleich, und der Winkel CEA = CEB; nun aber sind CEA und CEB Nebenwinkel; folglich ist jeder derselben ein rechter Winkel, und CE steht in dem Punkte E senkrecht auf AB. Aus dem nämlichen Grunde der Gleichheit der Dreyecke AEC und ECB, ist EA = EB.

III. Aus allen Geraden AE, Aa, AD, u. s. w. die aus dem Punkte A auf CD gezogen werden können, ist die Senkrechte AE die kürzeste. Denn jede Gerade Aa oder AC, die nicht durch den Punkt E gezogen wird, ist größer als AE, welches ich also erweise. Man verlängere die Senkrechte AE, mache EB = EA, und ziehe Ba, BC, BD u. s. w., so ist Aa = aB, AC = CB, weil EA = EB und CD senkrecht auf AB; nun ist Aa + aB > AB (256. I.): es ist also auch

Aa

$\frac{Aa + aB}{2} > \frac{AB}{2}$, nämlich $Aa > AE$, weil $\frac{Aa + aB}{2} = Aa$ Fig. 8.

und $\frac{AB}{2} = AE$. Eben dieses läßt sich von einer jeden anderen AC, AD u. s. w. erweisen.

Da nun aus allen diesen Geraden Aa, AE, AD u. s. w. eine einzige die kürzeste seyn kann, so kann aus einem Punkte A auch nur eine einzige Senkrechte auf CD gezogen werden. Und umgekehrt wenn AE aus allen Geraden, die von dem Punkte A auf CD gezogen werden können, die kürzeste ist, so ist sie senkrecht auf CD; denn sonst könnte eine andere Senkrechte z. B. Aa gezogen werden, welche auch die kürzeste wäre, und da wären zwey Geraden AE und Aa zugleich die kürzesten, die aus dem nämlichen Punkte A auf CD gezogen sind, welches nicht seyn kann. Nun pflegt man die Entfernung eines Punktes A von einer Geraden CD durch die kürzeste Linie anzugeben, die von A auf DC gezogen werden kann; **folglich ist die Entfernung eines Punktes A von einer Geraden CD nichts anders als die Senkrechte AE.**

259. Wir haben erwiesen (258. I.), daß $EA = EB$, der Winkel $ACE = ECB$, $CAE = CBE$ sey, wenn $CA = CB$, und CE senkrecht auf AB; nun aber sind AEC und BEC rechtwinklichte Dreyecke, in denen die Hypothenuse $CA = CB$, und die Kathete $CE = CE$; folglich können wir sagen, **daß zwey rechtwinklichte Dreyecke einander gleich seyn, wenn sie die Hypothenuse, und eine Kathete wechselweise gleich haben.**

260. Die (258) angeführten Eigenschaften der senkrechten Linien setzen uns in den Stand folgende Aufgaben aufzulösen.

I. **Eine gegebene gerade Linie DC in zwey gleiche Theile zu zertheilen.** Dieses geschieht auf dem Papiere, wenn man aus den Endpunkten D und C mit einem nämlichen Halbmesser, der nicht viel kleiner als DC seyn muß, Kreis- 9.

bögen

Fig. 9. bögen beschreibet, die sich in F und G durchschneiden, und sodann die Gerade FG zieht, welche die gegebene DC in dem Punkte E in zwey gleiche Theile ED = EC theilet. Denn DF = FC, DG = GC; folglich FG senkrecht auf AB, und ED = EC. Wäre kein Platz übrig den Durchschnitt F jenseits der Geraden DC zu bestimmen, so macht man mit dem Halbmesser DG = CG den Durchschnitt G, und mit einem anderen Halbmesser Df = Cf den Durchschnitt f, und zieht die Gerade GfE, so ist ebenfalls ED = EC. Auf dem Felde hingegen wird eine gerade Linie in zwey gleiche Theile getheilet, wenn man die gerade Linie ausmißt (das ist, untersucht, wie oft sie eine bekannte Linie, z. B. eine Wienerklafter in sich enthalte) und sodann die Hälfte dieses Maaßes von dem einen Endpunkte gegen den anderen austrägt. Dieses Ausmessen einer geraden Linie auf dem Felde geschieht meistentheils mit der **Meßkette**, deren Länge zehen Klafter beträgt; zuweilen auch mit den **Meßbalken**, wenn die größte Genauigkeit erforderlich ist; oder endlich mit blossen **Schritten**, wenn man nur mit einem **Beynahe** zufrieden seyn kann: nur ist es dazu erforderlich, daß man sich einen gleichförmigen Schritt angewöhne; bey uns ist es vorgeschrieben die Schritte also einzurichten, daß 5 Schritte 2 Klaftern gleich seyn.

II. **Aus dem Punkte E der Geraden AB eine Senkrechte zu errichten.** Auf dem Papiere schneide man EC = ED ab, beschreibe mit einem nämlichen Halbmesser zwey Kreisbögen, die sich in F oder in G durchschneiden, und ziehe durch E und F, oder durch E und G die Gerade FG, so ist sie in dem Punkte E senkrecht auf AB. Denn ED = EC, DF = CF; folglich EF senkrecht auf DC (258. II.). Auf dem Felde macht man ebenfalls ED = EC, bemerket die Punkte D, E, C mit Pflöcken, befestiget in D und C die Ende einer Schnur, deren Mittelpunkt F mit einem beliebigen Merkmale bezeichnet ist, ergreift diesen Mittelpunkt F, bringt die zwey gleichen Theile

DE

DF = CF in eine solche Lage, daß sie beyde gerade aus- Fig. gezogen, und gleich stark gespannt sind, bemerket den Punkt 9. F auf der Erde, und zieht sodann die Gerade FEG, so wird sie in dem Punkte E auf AB senkrecht seyn. Sollte aus dem Endpunkte E einer Geraden AE eine Senkrechte errichtet werden, so verlängere man AE um ein beliebiges Stück EC, und verfahre sodann wie ehevor.

III. *Durch einen außer der Geraden AB gegebenen Punkt G eine Senkrechte auf AB zu ziehen.* Man beschreibe aus dem gegebenen Punkte G einen Kreisbogen, welcher die Gerade AB in zwey Punkten D und C schneidet; aus den Punkten D und C beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser zwey Kreisbögen, die sich auf dieser, oder auf jener Seite der Geraden AB in F oder f durchschneiden, und ziehe sodann die Gerade FG so wird sie senkrecht auf AB seyn. Denn DG = CG, und Df=Cf; folglich FG senkrecht auf AB (258. II.). Auf dem Felde läßt sich diese Auflösung nicht jederzeit anwenden; wir werden daher weiter unten (264.) eine andere Auflösung dieser Aufgabe anführen. Auch merken wir noch an, daß man in der Ausübung auf dem Papiere die Senkrechten gemeiniglich durch Hilfe eines hölzernen rechtwinklichten Dreyeckes zu ziehen pflegt: nur kömmt es darauf an, daß dieses Dreyeck genau rechtwinklicht sey. Man untersucht diese Richtigkeit, wenn man die eine Seite EC eines solchen Dreyeckes FEC an eine gerade Linie AB anlegt, und längst der anderen Seite eine Linie EF zieht; sodann wendet man das Dreyeck um, daß nämlich die Seite EC in die Lage ED komme, und zieht längst der anderen Seite wieder eine Linie; wenn nun die zwey gezogenen Linien einander decken, so ist das Dreyeck richtig; sollten hingegen diese zwey gezogenen Linien einen Winkel einschliessen, so ist das Dreyeck unrichtig, und muß verbessert werden.

261.

Fig. 10. 261. Zwey gerade Linien AB und CD, die überall gleichweit von einander entfernet sind, heißen gleichlaufend oder parallel. Da nun die Entfernungen der Punkte einer Linie von einer anderen Geraden nichts anders sind, als die Senkrechten, welche von den Punkten der einen Linie auf die andere gezogen werden, so folget, daß bey den Parallelen AB und CD alle Senkrechten AC, DB, GF u. s. w. die aus was immer für einem Punkte der Linie AB auf CD, oder aus was immer für einem Punkte der Linie CD auf AB gezogen werden, einander gleich seyn. Diese Gleichheit der Senkrechten giebt uns ferner zu erkennen, daß Parallelen niemals zusammenstoßen oder sich durchschneiden, wenn sie auch ins unendliche verlängert würden: einige Meßkünstler haben dieses für die Erklärung der Parallelen angenommen, und die Gleichheit der Entfernungen daraus gezogen.

262. Wenn zwey Parallelen AB und CD von einer Geraden EF geschnitten werden, so sind

I. Die **Wechselwinkel** (anguli alterni) m und n, r und s einander gleich. Denn man ziehe nur FG senkrecht auf AB, und EH senkrecht auf CD, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecken GFE und FEH die Hypothenuse EF = EF, und die Kathete FG = EH; folglich sind diese Dreyecke einander vollkommen gleich (259), und der Winkel $m = n$; da überdieß $n + r = 180^\circ$, und $m + s = 180^\circ$, so ist auch $n + r = m + s$, und $r = s$. Sollte nun der eine aus den Wechselwinkeln z. B. x (wenn die Parallelen AB und CD von der Geraden DB geschnitten werden) ein rechter Winkel seyn, so muß auch der andere y ein rechter Winkel seyn: und folglich muß jede Gerade DB auch auf CD senkrecht seyn, wenn sie auf die Parallele AB senkrecht ist, das ist; **wenn eine Gerade auf eine von zwey Parallelen senkrecht ist, so ist sie auch senkrecht auf die andere.**

II. Auch der äußere und innere Winkel auf der nämlichen Seite sind einander gleich; nämlich $m = p$, $F = r$,

n

$n = z$, u. s. w. denn $p = n$, und auch $m = n$; also auch $m = p$: imgleichen $F = s$, und auch $r = s$; also auch $F = r$; u. s. w. Fig. 10.

III: Die zwey inneren Winkel auf der nämlichen Seite enthalten zusammen 180°, oder sind zwey rechten Winkeln gleich, nämlich $m + r$, oder $n + s = 180^\circ$: denn $n + r = 180^\circ$; nun ist $n = m$; also auch $m + r = 180^\circ$.

Eben so findet man, daß $p = z$, $E = F$, $E + z = 180^\circ$ sey u. s. w. Und alles dieses findet auch statt, wenn drey, vier, oder mehr Parallelen von einer geraden Linie geschnitten werden.

263. Und umgekehrt wenn zwey Geraden AB und CD von einer dritten EF dergestalt geschnitten werden, daß I. entweder die Wechselwinkel z. B. $m = n$, II. oder der äußere und innere Winkel auf der nämlichen Seite einander gleich seyn; III. oder endlich daß die zwey inneren Winkel zusammen 180° enthalten, so sind die zwey Geraden AB und CD parallel. 11.

Denn es sey z. B. $m = n$, nämlich $AEF = m$; wäre nun AB nicht parallel zu CD, so könnte durch E eine andere Gerade ab zu CD parallel gezogen werden, und da wäre vermög dem vorhergehenden $aEF = m$; nun aber ist vermög der Voraussetzung $AEF = m$; es ist also auch $AEF = aEF$, das ist, der Theil AEF ist dem ganzen aEF gleich, wenn nicht AB, sondern eine andere Gerade ab durch den Punkt E parallel zu CD gezogen wäre, welches ungereimt ist, und nicht möglich seyn kann; es kann also auch nicht möglich seyn, daß außer der Geraden AB was immer für eine andere ab zu CD parallel seyn könne, wenn sie durch den Punkt E gezogen ist: wenn demnach $m = n$, so ist AB parallel zu CD. Auf die nämliche Art läßt sich erweisen, daß AB zu CD parallel sey, wenn eine der zwey anderen Bedingungen statt findet. Auch können wir daraus folgern, daß zu einer Geraden CD durch einen gegebenen Punkt E eine einzige Parallele gezogen werden könne.

Fig. 11. 264. Auf dem Papiere und auch auf dem Felde wird zu einer Geraden CD durch einen gegebenen Punkt E eine Parallele gezogen, wenn man aus dem gegebenen Punkte E die Senkrechte EH auf CD zieht, sodann aus einem beliebigen Punkte C der Geraden CD ebenfalls eine Senkrechte CK errichtet, CA = EH abschneidet, und endlich durch die Punkte A und E die Gerade AB zieht, so wird selbe parallel zu CD seyn; denn die zwey inneren Winkel ACH und CAE enthalten zusammen 180 Grade. Die Lage der Geraden AB wird auch gefunden, wenn man durch den gegebenen Punkt E eine Gerade EF dergestalt zieht, daß sie CD irgendwo in einem Punkte F durchschneidet, und sodann den Winkel pnq = rms, oder auch x = m verzeichnet (252); denn die durch p und E, oder durch E und t gezogene Gerade AB wird parallel zu CD seyn, weil die Wechselwinkel m und n, oder der äußere und innere Winkel auf der nämlichen Seite m und x einander gleich sind. In der Ausübung ist es sehr bequem auf dem Papiere die Parallelen durch Hilfe eines hölzernen rechtwinklichten Dreyeckes zu ziehen.

Und nun können wir auf dem Felde aus einem gegebenen Punkte E eine Senkrechte auf eine Gerade CD ziehen, wenn wir durch Hilfe der Wechselwinkel die Lage der Parallele AB bestimmen, und sodann in dem Punkte E die Senkrechte EH auf AB errichten (260. II.); denn die Linie EH wird auch auf CD senkrecht seyn, weil sie auf die Parallele AB senkrecht ist.

12. 265. Wenn man von einem Punkte des Umkreises mehrere Sehnen AB, AD, AE, AG zieht, so ist

I. Die Sehne AB, welche durch den Mittelpunkt geht, nämlich der Durchmesser größer, als jede andere Sehne AD, oder AE. Denn wenn man die Halbmesser CD, CE zieht, so ist $AC + CD > AD$; nun aber ist $AC + CD = AC + CB = AB$; es ist also auch $AB > AD$: eben so läßt sich erweisen, daß $AB > AE$ sey.

II.

II. Die übrigen Sehnen sind desto kleiner, je mehr sie sich von dem Durchmesser entfernen, nämlich $AE < AD$: denn CD oder $CE < CF + FD$; also auch $CE - CF < CF + FD - CF$ nämlich $FE < FD$; ferner ist $AE < AF + FE$; es ist also auch $AE < AF + FD$, wenn man FD statt FE substituiret, das ist $AE < AD$. Fig 12.

266. Wir folgeren aus diesem, daß in einem nämlichen halben Umkreise zu größeren Bögen auch größere Sehnen, zu kleineren Bögen auch kleinere Sehnen, und umgekehrt zu größeren Sehnen auch größere Bögen, zu kleineren Sehnen auch kleinere Bögen gehören. Jedoch folgt noch keineswegs daraus, daß zu einem zweyfachen, dreyfachen, nfachen Bogen auch eine 2fache, 3fache, nfache Sehne gehöre.

267. Wenn eine Sehne AB von einer Geraden GD geschnitten wird, und zwey von folgenden fünf Dingen statt finden, I. daß GD durch den Mittelpunkt gehe, II. daß GD auf der Sehne AB senkrecht stehe, III. daß die Gerade GD die Sehne AB, IV. daß sie den Bogen ADB, oder endlich V. daß sie den Winkel ACB in zwey gleiche Theile theile, so sind jederzeit auch die übrigen drey Dinge richtig. 13.

Denn es sey I. GD durch den Mittelpunkt C auf AB senkrecht gezogen, so ist der Punkt C der Senkrechten GD von A und B gleichweit entfernet, folglich ist jeder Punkt derselben von A und B gleichweit entfernet (258 I.) nämlich $EA = EB$, die Sehne $DA = DB$, der Bogen $DA = DB$ (247 III.) und folglich auch der Winkel $m = n$ (251.).

Es sey II. GD senkrecht auf AB, und $EA = EB$, so ist wie ehevor die Sehne $DA = DB$, $CA = CB$ der Bogen $DA = DB$, und der Winkel $m = n$; ferner ist auch die Sehne $GA = GB$, und der Bogen $GA = GB$; da nun der Bogen $GA = GB$, und $AD = BD$, so ist auch der Bogen $GA + AD = GB + BD$, nämlich $GAD = GBD =$ dem halben Umkreise; folglich ist GD ein Durchmesser, der durch den Mittelpunkt geht.

Fig. 13. Es sey III. GD durch den Mittelpunkt C gezogen, und theile entweder die Sehne, oder den Bogen, oder endlich den Winkel in zwey gleiche Theile, so wird in jedem Falle CA = CB, EA = EB, oder DA = DB, und folglich GD senkrecht auf AB seyn (258. II.) u. s. w.

268. Diese Eigenschaften setzen uns in den Stand folgende Aufgaben aufzulösen.

14. I. **Durch drey Punkte A, B, D, die nicht in einer geraden Linie liegen, und folglich ein Dreyeck ADB bestimmen, einen Kreis zu führen.** Dieses geschieht auf folgende Art; man verbinde die Punkte A, B, D durch die Geraden AB und BD, theile jede derselben durch die Senkrechten EF und GH in zwey gleiche Theile, so wird ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt C der Mittelpunkt des gesuchten Kreises seyn, der durch die drey Punkte A, B, D zu ziehen ist. Denn AB und BD sind Sehnen, welche durch die Senkrechten EF und GH in zwey gleiche Theile getheilet sind; folglich gehen beyde Senkrechten durch den Mittelpunkt (267.); nun aber ist nur der Punkt C also beschaffen, daß beyde Senkrechten EF und GH durch denselben gehen; folglich ist dieser Punkt C der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Sollten hingegen die drey Punkte A, B, D in einer geraden Linie liegen; so ist es für sich klar, daß die Senkrechten niemals sich durchschneiden können, weil sie mit einander parallel laufen: man stellt sich in diesem Falle vor, daß der Durchschnittspunkt der Senkrechten sich unendlich weit entferne; und in diesem Verstande kann man eine jede gerade Linie als einen Kreisbogen ansehen, dessen Halbmesser unendlich groß ist.

II. **Den Mittelpunkt eines Kreisbogens oder auch eines ganzen Umkreises zu finden.** Man nehme drey Punkte in dem Bogen an, verbinde sie mit zwey Sehnen, theile jede derselben durch eine Senkrechte in zwey gleiche Theile, so wird dadurch der Mittelpunkt, wie im vorigen Falle bestimmet werden. Zu einem ganzen Umkreise kann der Mittelpunkt auch auf folgende Art gefunden werden: man ziehe eine Sehne,

theile sie durch eine Senkrechte in zwey gleiche Theile, so wird Fig.
diese Senkrechte der Durchmesser seyn, welchen man demnach nur noch in zwey gleiche Theile zu zertheilen hat um den Mittelpunkt des gegebenen Kreises zu bestimmen.

III. **Einen Winkel ACB in zwey gleiche Theile zu zertheilen.** 15.
Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser den Bogen ADB, aus den Punkten A und B beschreibe man zwey Kreisbögen, die sich in E oder F durchschneiden, und ziehe die Gerade CF, so wird selbe den Winkel ACB in zwey gleiche Theile zertheilen, weil sie durch den Mittelpunkt C geht, und auf der Sehne AB senkrecht steht. Der Bogen AB hingegen wird in zwey gleiche Theile getheilet, wenn man seine Sehne AB durch die Senkrechte EF in zwey gleiche Theile zertheilet. Da der Winkel DCB oder der Bogen DB wieder auf die nämliche Weise in zwey gleiche Theile getheilet werden kann, so folgt daß man jeden Winkel oder jeden gegebenen Kreisbogen in 2, 4, 8, 16, 32.. gleiche Theile zertheilen könne. Sollte hingegen ein Bogen in 3, 5, 7.. gleiche Theile zu theilen seyn, so kann es nach den bisher gegebenen Gründen nicht anders als durch **Versuchen** (tentando) geschehen.

269. Eine Gerade AB, die in der nämlichen Ebene ei- 16.
nem Umkreise in einem einzigen Punkte D begegnet, und übrigens beyderseits gänzlich außer der Kreisfläche liegt, wird eine **Tangente**, (Berührungslinie) und der Punkt D der **Berührungspunkt** genennet.

Wenn man an den Berührungspunkt D einen Halbmesser CD zieht, so steht er senkrecht auf der Tangente. Denn dieser Halbmesser ist die kürzeste Linie, die aus dem Punkte C auf die Gerade AB gezogen werden kann; folglich steht er in dem Punkte D senkrecht auf AB (258. III.). Und umgekehrt, wenn die Gerade AB auf dem äußersten Punkte des Halbmessers senkrecht steht, so ist sie eine Tangente des Umkreises. Denn diese Senkrechte AB begegnet dem Umkreise in dem einzigen Punkte D, und liegt übrigens gänzlich außer

Fig. der Kreisfläche, weil ein jeder anderer Punkt derselben z. B.
16. A oder B weiter als D von dem Mittelpunkte C entfernet ist. Es kann demnach bey einer schon gezogenen Tangente der Berührungspunkt gefunden werden, wenn man aus dem Mittelpunkte eine Senkrechte auf die Tangente zieht; und durch einen gegebenen Punkt des Umkreises kann eine Tangente gezogen werden, wenn man am Ende des Halbmessers eine Senkrechte errichtet.

17. Sollte hingegen durch einen gegebenen Punkt A eine Tangente zu einem gegebenen Kreise gezogen werden, so beschreibe man aus A mit einem Halbmesser = AC einen Kreisbogen CD, und aus C mit einem Halbmesser = GF = CE = 2CB einen Kreisbogen ED; durch den Mittelpunkt C und durch den Durchschnittspunkt D ziehe man die Gerade CD, und endlich ziehe man durch den auf diese Art gefundenen Durchschnittspunkt B des Umkreises, und durch den gegebenen Punkt A die Gerade AB, so wird selbe in dem Punkte B den gegebenen Kreis berühren. Denn AB ist in dem äußersten Punkte des Halbmessers senkrecht auf CD oder auf CB, weil AC = AD, und BC = BD = $\frac{1}{2}$ DC = $\frac{1}{2}$ GF = $\frac{1}{2}$ CE (258. II.)

18. 270. Wenn sich zwey oder mehrere Kreise auf der nämlichen Ebene in einem einzigen Punkte berühren, so liegen ihre Mittelpunkte und der Berührungspunkt in einer geraden Linie.

Denn wenn man durch den Berührungspunkt M die gemeinschaftliche Tangente ET zieht, so stehen die Halbmesser MA, MC, MD, MB in dem nämlichen Punkte M in der nämlichen Ebene senkrecht auf ET; folglich fallen sie übereinander, und bilden eine einzige Gerade BD, weil aus einem Punkte M einer Geraden ET in der nämlichen Ebene eine einzige Senkrechte errichtet werden kann.

19. 271. Der Winkel m, nämlich ATB, welchen die Tangente AT und die Sehne TB in dem Berührungspunkte einschliessen, hat zu seinem Maaße die Hälfte des Bogens TDB, welchen die Sehne abschneidet, nämlich m = $\frac{1}{2}$TDB.

Um

Um dieses einzusehen ziehe man die Durchmesser Ee pa- Fig. rallel, und Dd senkrecht auf BT, und dann auch an den Be- 19. rührungspunkt T den Halbmesser CT. Und nun ist $m + x = 90^\circ$, und auch $n + y = 90^\circ$; folglich $m + x = n + y$; es ist aber $x = y$ (262. I.); folglich auch $m = n$: ferner ist $n = DT$; es ist also auch $m = DT$; und endlich ist $DT = \frac{1}{2}TDB$ (267); folglich auch $m = \frac{1}{2}TDB$. Eben so leicht ist es zu begreifen, daß der Winkel $aTB = \frac{1}{2}TdB$ (y); denn $ATB + aTB = 180^\circ = \frac{1}{2}TBdT = \frac{1}{2}TDB + \frac{1}{2}TdB$; nun aber ist $ATB = \frac{1}{2}TDB$; es ist also auch $aTB = \frac{1}{2}TdB$.

272. Der Winkel x am Umkreise, den zwey Sehnen 20. TB und TD einschliessen, hat zu seinem Maaße die Hälfte des Bogens, auf welchem seine Schenkel stehen, nämlich $x = \frac{1}{2}BD$.

Denn man ziehe nur die Tangente ATa, so ist $m + x + n = 180^\circ = \frac{1}{2}TBDET = \frac{1}{2}TFB + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}DET$; nun aber ist $m = \frac{1}{2}TFB$, und $n = \frac{1}{2}DET$; folglich $x = \frac{1}{2}BD$.

Wir ziehen aus diesem folgende Schlüße.

I. Der Winkel am Umkreise ist die Hälfte des Mittelpunktswinkels, nämlich $x = \frac{1}{2}BCD$. Denn $BCD = BD$; also auch $\frac{1}{2}BCD = \frac{1}{2}BD$; nun aber ist $x = \frac{1}{2}BD$; es ist auch $x = \frac{1}{2}BCD$.

II. Alle Winkel am Umkreise E, F, G, H, die auf 21. dem nämlichen Bogen ADB oder auf der nämlichen Sehne AB stehen, sind einander gleich. Denn jeder derselben hat zu seinem Maaße die Hälfte des Bogens ADB.

III. Jeder Winkel am Umkreise, der mit seinen Schen- 22. keln auf den Endpunkten des Durchmessers steht, ist ein rechter Winkel. Denn er hat zu seinem Maaße die Hälfte des halben Umkreises, nämlich $\frac{1}{2}$ von $180^\circ = 90^\circ$.

IV. In einem jeden Vierecke, welches in einem Kreise 23. eingeschrieben ist, enthalten jede zwey gegenüberstehenden Winkel zusammen 180°, nämlich $x + y = 180^\circ$, und auch $m + n = 180^\circ$. Denn $x = \frac{1}{2}MNB$, und $y = \frac{1}{2}MAGB$;

Fig. $\frac{1}{2}$MAGB; folglich $x + y = \frac{1}{2}$MNB $+ \frac{1}{2}$MAGB $=$
23. $\frac{1}{2}$MAGNM $= 180°$.

V. Zwey parallele Sehnen schliessen gleiche Bögen ein; nämlich DB $=$ CA. Denn man ziehe nur die Gerade CB, so ist $a = c$ (262. I.); nun aber ist $a = \frac{1}{2}$BD, und $c = \frac{1}{2}$AC; es ist also auch $\frac{1}{2}$BD $= \frac{1}{2}$AC, oder DB $=$ CA. Und umgekehrt, wenn die eingeschlossenen Bögen DB und CA gleich sind, so sind die Sehnen AB und CD parallel, weil in diesem Falle die Wechselwinkel a und c einander gleichen. Auf die nämliche Art kann man erweisen, daß die Tangente und eine parallele Sehne gleiche Bögen einschliessen; und umgekehrt, daß sie mit einander parallel laufen, wenn die eingeschlossenen Bögen einander gleich sind.

24. 273. Und nun sind wir im Stande an dem Endpunkte B einer Geraden AB eine Senkrechte GD zu errichten, wenn auch die Verlängerung der Geraden AB unmöglich wäre; und zwar auf folgende Art. Man schneide von B gegen A ein beliebiges Stück BE ab; aus B und E beschreibe man mit einem nämlichen Halbmesser zwey Kreisbogen, die sich in C durchschneiden; dann ziehe man ECF, mache CF $=$ CE, und führe durch F und B eine Gerade DG, so wird selbe in dem Punkte B senkrecht auf AB seyn, weil ABD ein rechter Winkel ist. Denn man bilde sich nur ein, daß aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser CE $=$ CB $=$ CF durch die Punkte E, B, F ein Kreis beschrieben sey, so wird man alsogleich einsehen, daß der Winkel EBF $=$ ABD am Umkreise mit seinen Schenkeln auf den Endpunkten des Durchmessers EF stehe, und folglich ein rechter Winkel sey.

25. 274. Ein Winkel FGC am Umkreise, den eine Sehne GF, und eine andere Gerade GC einschliessen, deren Verlängerung GD dem Umkreise wieder in einem anderen Punkte D begegnet, hat zu seinem Maaße die halbe Summe der Bögen GHF und GED, nämlich CGF $=$ $\frac{1}{2}$GHF $+ \frac{1}{2}$GED.

Denn

Denn $CGF + FGD = 180^\circ = \frac{1}{2}GFDEG =$ Fig.
$\frac{1}{2}GHF + \frac{1}{2}GED + \frac{1}{2}DBF$; nun aber ist $FGD =$ 25.
$\frac{1}{2}DBF$; folglich ist $CGF = \frac{1}{2}GHF + \frac{1}{2}GED$.

275. Ein Winkel m inner dem Umkreise hat zu seinem Maaße die halbe Summe der Bögen DB und EG, welche seine Schenkel beyderseits einschliessen, nämlich $m = \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}EG$.

Denn man ziehe nur GF parallel zu AB, so ist $n = \frac{1}{2}DBF = \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}EG$, weil $BF = EG$, oder $\frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}EG$; nun aber ist $n = m$; es ist also auch $m = \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}EG$. Eben so leicht ist es zu erweisen, daß $EAD = \frac{1}{2}ED + \frac{1}{2}GHB$ sey. 9

276. Ein Winkel $BAD = n$ außer dem Umkreise, den 26.
zwey Sekanten AB und AD einschliessen, hat zu seinem Maaße die halbe Differenz der eingeschlossenen Bögen, nämlich $n = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CE$.

Denn man ziehe nur die Parallele Sehne CF, so ist

$$m = \frac{1}{2}BF = \frac{BD - FD}{2} = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}FD =$$

$\frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CE$, weil $FD = CE$, oder $\frac{1}{2}FD = \frac{1}{2}CE$; *nun aber ist* $n = m$; *es ist also auch* $n = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CE$.

Eben so leicht ist es zu erweisen, daß $MAB = \frac{1}{2}BM - \frac{1}{2}MC$, imgleichen daß $MAN = \frac{1}{2}MDN - \frac{1}{2}MEN$ sey. Soll nun MAN ein rechter Winkel seyn, so muß der Bogen $MEN = 90^\circ$ seyn: denn es sey $MEN = x$, so ist $MBDN = 360 - x$; nun muß $\frac{360 - x}{2} - \frac{x}{2} = 90^\circ$ seyn; *folglich* $x = 90^\circ$.

Von den Vielecken.

277. Eine ebene Fläche von geraden Linien eingeschlossen heißt ein **Vieleck** (polygonum); eine jede einschliessende Linie heißt eine Seite, und alle Seiten zusammen werden

Fig. der **Umfang** (perimeter) des Vieleckes genennt. Es giebt
26. auch Flächen, die entweder bloß von krummen, oder theils von krummen, theils von geraden Linien eingeschlossen sind; allein wir handeln dermalen nur von den Vielecken, oder vielmehr nur von dem Umfange der Vielecke, die von geraden Linien eingeschlossen sind. Ein Vieleck heißt insbesondere ein **Dreyeck**, wenn es von drey, ein **Viereck**, wenn es von vier, ein **Fünfeck**, wenn es von fünf Seiten eingeschlossen ist; u. s. w. Von den Dreyecken haben wir die Benennungen schon gegeben, und merken hier nur noch an, daß zwey oder mehr Dreyecke einander **ähnlich** heißen, wenn die Winkel des einen den Winkel des anderen Dreyeckes wechselweise gleich sind, weil solche Dreyecke vollkommen auf eine gleiche Art bestimmet sind, und nur bloß vermög ihrer wirklichen Größe von einander können unterschieden werden (4); und daß in einem Dreyecke die Senkrechte von der Spitze eines Winkels auf die gegenüberstehende Seite gezogen die **Höhe**, und die Seite, auf welche die Senkrechte gezogen wird, die **Grundlinie** (basis) des Dreyeckes genennet werde. Bey den Vierecken aber kommen folgende Benennungen vor. Ein Viereck heiß ein **Parallelogram**, wenn jede zwey gegenüberstehenden Seiten parallel
27. sind (Fig. 27.. 30.). Ein Parallelogram von gleichen Sei-
28. ten und Winkeln wird ein **Quadrat** (Fig. 27.), ein Paral-
29. lelogram von gleichen Winkeln und ungleichen Seiten ein **Recht-**
30. **eck** (ABCD Fig. 28.), ein Parallelogram von gleichen Seiten
und ungleichen Winkeln ein **Rhombus** oder **Raute** (Fig. 29.), und endlich ein Parallelogram von ungleichen Seiten und Winkeln ein **Rhomboides** oder **länglichte Raute** (Fig. 30.) genennet. Die Senkrechte, welche von der einen auf die gegenüberstehende Seite eines Parallelograms gezogen wird, heißt die **Höhe**, und eine jede dieser zwey Seiten die **Grundlinie** des Parallelograms. Ein Viereck, in welchem nur zwey gegenüberstehende Seiten parallel sind, heißt ein **Trapezium** (Fig. 31.); läuft hingegen in einem Vierecke keine einzige Seite mit der anderen parallel, so heißt es ein **Trapezoi-**

des

des (Fig. 32.). Ueberhaupt werden die Vielecke in unregel- Fig.
mäßige, wenn weder die Seiten noch die Winkel am Um- 31.
fange einander gleich sind, in symetrische, wenn sie von ei- 32.
ner geraden Anzahl der Seiten umgeben werden, deren jede 33.
zwey gegenüberstehende einander gleich und parallel sind (Fig. 34.
27.. 30. 33.), und endlich in *regelmäßige* abgetheilt, in denen alle Seiten und Winkel einander gleich sind (Fig. 27 und 34.). Der Winkel an dem Umfange eines Vielecks von zwey Seiten eingeschlossen heißt der Vieleckswinkel oder Polygonwinkel (angulus polygoni); er ist *ausgehend* wie m, oder *eingehend* wie n (Fig. 33). Eine Gerade von einem Vieleckswinkel zu einem anderen über die Fläche des Vieleckes gezogen heißt eine Diagonale als AB Fig. 31. AC, AD, AE, AB Fig. 34., imgleichen AD, BE, CF Fig. 33.

278. In einem jeden Dreyecke ABC enthalten alle drey 35.
Winkel zusammen 180°, nämlich $m + x + z = 180°$.

Denn man ziehe nur durch den Scheitel C eines Winkels z zu der gegenüberstehenden Seite AB eine Parallele EF, so ist $n + z + y = 180°$; nun aber ist $y = x$, und $n = m$; *es ist also auch* $m + z + x = 180°$.

Wir ziehen *aus* diesem *folgende* Schlüße.

I. In einem Dreyecke ist nicht mehr *als* nur ein rechter, und um so mehr *auch* nur ein einziger stumpfer Winkel möglich; und in einem solchen Falle müßen die zwey übrigen Winkel beyde spitzig seyn.

II. In einem rechtwinklichten Dreyecke müßen die zwey spitzigen Winkel zusammen 90° enthalten; sollte demnach der eine bekannt z. B. = 50° seyn, so ist auch der zweyte bekannt und $= 90 - 50 = 40°$.

III. Wenn zwey Winkel in einem Dreyecke gegeben sind, so ist dadurch auch der dritte Winkel bestimmet; es sey z. B. $m = 60$, $x = 40$, so ist $z = 180° - (m + x) = 180° - 100° = 80°$.

Fig. 35. IV. Wenn zwey Winkel eines Dreyeckes zwey Winkeln eines anderen Dreyeckes wechselweise gleich sind, so ist auch der dritte Winkel dem dritten gleich, und die Dreyecke sind einander ähnlich: sollte in diesem Falle auch noch eine Seite des ersten einer Seite des zweyten Dreyeckes gleich seyn, so sind die Dreyecke einander vollkommen gleich.

V. Wenn zwey Geraden AD und BG einer Dritten AB dergestalt begegnen, daß die Winkel $m + x < 180°$ sind, so stossen die Geraden AD und BG auf dieser nämlichen Seite zusammen, wenn sie genugsam verlängert werden, und entfernen sich auf der entgegengesetzten Seite der Geraden AB immer mehr von einander, wenn die Winkel $DAB + GBA > 180°$ sind.

36. VI. Wenn man aus der Spitze eines Winkels C in einem Dreyecke ABC auf die gegenüberstehende Seite AB eine Senkrechte CD zieht, so fällt sie in das Dreyeck, wenn die anliegenden Winkel m, n spitzig sind; hingegen liegt die Senkrechte BE gänzlich außer dem Dreyecke, wenn der Winkel p ein stumpfer ist. Denn würde die Senkrechte in das Dreyeck fallen, und die Lage Be haben, so müßte das Dreyeck BeC einen rechten BeC und einen stumpfen Winkel BCe haben, welches nicht seyn kann. Eben so kann man erweisen, daß die Senkrechte CD in dem Dreyecke liegen müße.

279. Wenn man die Seite AC eines Dreyeckes ACB verlängert, so ist der äußere Winkel $BCE = q$ des Dreyeckes der Summe der zwey gegenüberstehenden Winkel gleich, nämlich $q = m + n$. Denn $m + n + p = 180°$, und auch $p + q = 180°$; folglich auch $p + q = m + n + p$, und endlich $q = m + n$.

37. 280. Aus diesem folgt, daß ein Winkel ABC zwischen zwey Parallelen der Summe der Winkel gleich sey, die seine Schenkel mit den Parallelen einschliessen, nämlich $q = m + n$.

Denn man verlängere nur AB bis in D, so ist $q = p + r$; nun aber ist $p = m$, und $r = n$; folglich auch $q = m + n$.

Hin-

Hingegen ist ein Winkel ABC außer zwey parallelen Fig.
der Differenz der zwey Winkel gleich, welche seine Schenkel 38.
mit den Parallelen einschliessen, nämlich $q = n - m$. Denn $p = q + r$, oder $q = p - r$; nun aber ist $p = n$ und $r = m$; folglich auch $q = n - m$.

281. In einem jeden Dreyecke steht einem größeren Win- 39.
kel auch eine größere Seite, einem kleineren Winkel auch eine kleinere Seite, und umgekehrt, entgegen.

Denn man bilde sich nur ein, daß um das Dreyeck ABC ein Kreis beschrieben sey (168), und es sey $A > C$, so ist auch $\frac{1}{2}BaC > \frac{1}{2}BcA$ (weil $A = \frac{1}{2}BaC$ und $C = \frac{1}{2}BcA$ vermög 272), oder $BaC > BcA$; es ist also auch die Sehne, oder die Seite $BC > BA$ (266). Imgleichen wenn $BC > BA$, so ist auch der Bogen $BaC > BcA$; folglich auch $\frac{1}{2} BaC > \frac{1}{2} BcA$, und endlich $A > C$ u. s. w.

282. Wir ziehen aus diesem folgende Schlüße:

I. In einem jeden Dreyecke sind gleichen Winkeln auch gleiche Seiten, und umgekehrt, entgegengesetzet.

II. Ein gleichseitiges Dreyeck ist auch gleichwinklicht und folglich regelmäßig; jeder Winkel desselben enthält $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$. Es kann demnach auf einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges oder gleichseitiges Dreyeck verzeichnet werden, wenn man aus den Endpunkten der gegebenen Linie mit einem Halbmesser, der dieser Geraden gleich ist, zwey Kreisbögen beschreibet, und ihren Durchschnittspunkt mit den Endpunkten der gegebenen Linie durch zwey Geraden verbindet.

III. In einem gleichschenklichten Dreyecke sind die den gleichen Schenkeln gegenüberstehenden Winkel einander gleich, und beyde spitzig; und umgekehrt, wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleichen, so ist es gleichschenklicht.

IV. Wenn in einem gleichschenklichten Dreyecke nur ein Winkel bekannt ist, so sind alsogleich auch die zwey übrigen bekannt.

V.

Fig. 39. V. Wenn in einem gleichschenklichten Dreyecke aus der Spitze des Winkels, den die gleichen Schenkel einschliessen, auf die gegenüberstehende Seite eine Gerade gezogen wird, und eines von folgenden drey Dingen statt findet: I. daß der Winkel, II. daß die gegenüberstehende Seite in zwey gleiche Theile getheilet sey, III. daß diese Gerade auf der gegenüberstehenden Seite senkrecht stehe, so müßen jederzeit auch die zwey übrigen richtig seyn: und umgekehrt, wenn zwey aus diesen drey Dingen statt finden, so ist das Dreyeck gleichschenklicht.

40. 283. Wenn bey zwey Dreyecken ABC und abc die Seiten des einen mit den Seiten des anderen Dreyeckes wechselweise parallel laufen, so sind diese Dreyecke einander ähnlich, das ist die Winkel des einen sind den Winkeln des anderen Dreyeckes wechselweise gleich, nämlich $C = c$, $A = a$, $B = b$.

Denn man verlängere nur eine Seite des ersten, und zwey Seiten des anderen Dreyeckes, bis sie einander durchschneiden, so ist $m = c$, und auch $m = C$, folglich $C = c$; imgleichen $n = a$, und auch $n = A$, also auch $A = a$; da nun $C = c$, und $A = a$, so ist auch $B = b$.

41. 284. Wenn ein Dreyeck abc auf ein ähnliches und grösseres ABC dergestalt aufgeleget wird, daß der gleiche Winkel b auf B, die Seite ba auf BA, und die Seite bc auf BC zu liegen komme, so wird die dritte Seite ac mit AC parallel laufen.

Denn $a = A$, oder $C = c$; nun sind a und A, oder c und C der äußere und innere Winkel auf der nämlichen Seite; folglich ac parallel zu AC (263.). Eben so könnte man erweisen, daß die Seite ab mit AB parallel laufen müßte, wenn c auf C, und ca auf CA geleget würde u. s. w.

42. 285. Alle Polygonwinkel (Vieleckswinkel) eines jeden Vieleckes, welches keine eingehenden Winkel hat, enthalten zusammen so vielmal 180°, als es Seiten oder Winkel giebt, weniger 360°.

Bey

Bey den Dreyecken ist dieser Satz einleuchtend, weil $180 = 3 . 180 - 360$ ist: aber er ist auch bey den übrigen Vielecken eben so richtig. Denn man bilde sich nur ein, daß aus einem inner dem Vielecke nach Belieben angenommenen Punkte P in alle Vieleckswinkel gerade Linien gezogen sind, so wird das Vieleck dadurch in so viele Dreyecke zertheilet, als es Seiten oder Winkel hat; nun enthält ein jedes Dreyeck 180°; folglich enthalten alle Dreyecke zusammen so vielmal 180° als Seiten oder Vieleckswinkel giebt: nun sind die Winkel dieser Dreyecke weniger den Winkeln um den Punkt P allen Vieleckswinkeln zusammen genommen gleich; die Winkel um den Punkt P aber sind $= 360^\circ$ (254); folglich sind alle Polygonwinkel eines Vieleckes, welches keine eingehenden Winkel hat, so vielmal 180° als es Seiten oder Winkel hat, weniger 360° gleich. Z. B. $A + B + C + D + E = 5 . 180 - 360 = 900 - 360 = 540^\circ$; denn $b + m + c + d + n + e + f + p + g + h + q + i + k + P + a = 5 . 180^\circ$; es ist also auch $a + b + c + d + e + f + g + h + i + k = 5 . 180^\circ - (m + n + p + q + P)$; nun aber ist $(m + n + p + q + P) = 360^\circ$, und $(a + b + c + d + \ldots\ldots) = A + B + C + D + E$; folglich $A + B + C + D + E = 5 . 180 - 360 = 540^\circ$. Fig. 42.

Es folgt aus diesem I. daß an einem Vielecke, welches keinen eingehenden Winkel hat, alle äußeren Winkel, welche durch die Verlängerung der Seiten entstehen, zusammen 360° enthalten. Denn es sey die Anzahl der Seiten oder Vieleckswinkel $= n$, die Summe aller inneren Winkel oder aller Vieleckswinkel $= s$, und die Summe aller äußeren Winkel $= x$, so ist $x + s = n . 180^\circ$; nun aber ist $s = n . 180 - 360$; folglich $x + n . 180 - 360 = n . 180^\circ$, oder $x = 360^\circ$.

II. Jeder Winkel in einem Quadrate und auch in dem Rechtecke ist ein rechter Winkel. Es kann demnach auf einer gegebenen Linie ein Quadrat oder ein regelmäßiges Viereck ver-

Fig. verzeichnet werden, wenn man an den Endpunkten der gegebenen Linie senkrechte Linien errichtet, jede derselben der gegebenen Geraden gleich macht, und endlich die dadurch bestimmten Punkte mit einer Geraden verbindet. Eben so kann aus zwey gegebenen Geraden ein Rechteck verzeichnet werden, wenn man an den Endpunkten der ersten senkrechte Linien errichtet, jede derselben der zweyten gegebenen gleich machet, und endlich die auf diese Art bestimmten zwey Punkte mit einer Geraden verbindet.

III. Jeder Polygonwinkel eines regelmäßigen Fünfeckes enthält $\frac{5 \cdot 180 - 360}{5} = 180 - 72 = 108^\circ$. Man kann demnach auf einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges Fünfeck verzeichnen, wenn man an den Endpunkten der gegebenen Linie durch Hilfe des Transporteurs Winkel von 108° errichtet, jeden Schenkel dieser zwey Winkel der gegebenen Geraden gleich machet, und endlich wieder an den Endpunkten dieser Schenkel Winkel von 108° verzeichnet. Jedoch diese Verzeichnung ist nur mechanisch, oder handwerksmäßig, und nicht geometrisch; wir werden weiter unten Gelegenheit haben die geometrische Verzeichnung eines regelmäßigen Fünfeckes zu zeigen.

IV. Mit einem Worte jeder Polygonwinkel eines regelmäßigen n Eckes enthält $\frac{n \cdot 180 - 360}{n} = 180 - \frac{360^\circ}{n}$.

43. 286. Wenn in einem Vierecke jede zwey gegenüberstehenden Seiten mit einander parallel laufen, so sind sie auch einander gleich. Denn man ziehe nur die Diagonale CB, so ist $m = n$, $p = q$, und $BC = BC$; also auch $CD = AB$, und $DB = AC$ (256. III.).

Und umgekehrt, wenn jede zwey gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, so sind sie auch parallel. Denn da $AB = CD$, $AC = BD$, und $BC = BC$, so ist auch $m = n$, und $p = q$; folglich AB parallel zu CD, und AC parallel zu BD (263.).

Und

Und endlich wenn nur zwey entgegengesetzte Seiten gleich Fig.
und parallel sind, so sind auch die anderen zwey gleich und parallel. 43.
Denn es sey AB gleich und parallel zu CD, so ist in den Dreyecken CAB und CDB die Seite AB = CD, BC = BC, und der Winkel n = m; folglich auch AC = BD, der Winkel p = q, und AC parallel zu BD.

287. Wir folgern aus diesen

I. Jedes Parallelogram wird durch die Diagonale BC in zwey vollkommen gleiche Dreyecke getheilet; und deswegen ist ein jedes Dreyeck ABC nichts anders als die Hälfte eines Parallelograms ABCD von der nämlichen Grundlinie AB und Höhe CF.

II. Jede der zwey Diagonalen AD und CB in einem Parallelograme wird in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte M wegen der Gleichheit der Dreyecke CMA und DMB in zwey gleiche Theile getheilet. Sollte nun das Parallelogram ein Rechteck seyn, wie ABCD (Fig. 28.), so ist MA 28.
= MB = MC = MD; es kann demnach auf einer viereckigten Fläche z. B. auf einem Bogen Papier abcd gar leicht ein Rechteck verzeichnet werden, wenn man die Diagonalen ac und bd zieht, sodann MA = MB = MC = MD machet, und endlich die Punkte A, B, C, D mit geraden Linien verbindet.

III. Jede durch den Durchschnittspunkt M der Diago- 43.
nalen AD und BC gezogene Gerade PQ theilet sowohl das Parallelogram, als auch sich selbst in zwey gleiche Theile. Dieses erhellet aus der Gleichheit der Dreyecke CMQ und PMB. Es ist demnach in einem jeden Parallelograme der Durchschnittspunkt der Diagonalen zugleich der **Mittelpunkt** der Grösse des Parallelograms; denn derjenige Punkt in einer ebenen Figur, durch den eine jede Gerade von was immer für einem Punkte des Umfanges zu einem anderen gezogen sowohl die Fläche als auch sich selbst in zwey gleiche Theile theilet, heißt der Mittelpunkt der Größe dieser nämlichen Figur.

Fig. 288. Nicht das Parallelogram allein, sondern jedes sy-
33. metrische Vieleck hat einen Mittelpunkt der Größe. Denn man ziehe nur die gerade entgegengesetzten Winkel durch Diagonalen AD, BE, CF zusammen, so wird man sehen, daß wegen der vollkommenen Gleichheit jeder zwey gerade entgegengesetzter Dreyecke AMB und DME, BMC und EMF u. s. w. jede Diagonale in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte M in zwey gleiche Theile getheilet sey; und daß nicht nur jede Diagonale, sondern auch jede andere gerade PQ sowohl sich selbst als auch die Fläche des symetrischen Vieleckes in zwey gleiche Theile theile. Daß hingegen die unsymetrischen Vielecke, wenn sie auch regelmäßig sind, keinen Mittelpunkt der Grösse haben, wird ein jeder selbst leicht einsehen können.

44. 289. Zwey Parallelograme ABDC und ECDF auf der nämlichen Grundlinie CD sind einander am Flächeninhalte gleich, wenn sie gleiche Höhen haben, oder zwischen zwey Parallelen stehen.

Denn das Dreyeck................ACE = BDF
Man subtrahire beyderseits BGE, so ist ACGB = EGDF
und addire beyderseits CGD, so ist ACDB = ECDF

290. Wir schliessen aus diesem

45. I. Daß auch zwey Dreyecke, die auf der nämlichen Grundlinie zwischen zwey Parallelen stehen, einander am Flächeninhalte gleich seyn, nämlich ADC = ECD. Denn ACDB = ECDF; also auch $\frac{1}{2}$ACDB = $\frac{1}{2}$ECDF, nämlich das Dreyeck ADC = ECD am Flächeninhalte. Eben so leicht ist es einzusehen, daß das Dreyeck ADE dem Dreyecke ACE am Flächeninhalte gleich sey, wenn man zu ED und EC aus dem Punkte A Parallelen führet.

46. II. Daß auch Parallelograme ABDC und EGHF, oder Dreyecke BCD und EGH zwischen zwey Parallelen, wenn sie gleiche Grundlinien CD = GH haben, einander am Flächeninhalte gleich seyn, ob sie schon nicht auf einerley Grundlinie stehen. Denn man ziehe nur CE und DF, so

ist

ist ACDB = ECDF, und auch EGHF = ECDF; folg- Fig.
lich auch ACDB = EGHF, und $\frac{1}{2}$ACDB = $\frac{1}{2}$EGHF, 46.
nämlich das Dreyeck BCD = EGH. Da nun Parallelograme und Dreyecke zwischen zwey Parallelen gleiche Höhen BM = EN haben, so können wir sagen, daß Parallelograme und auch Dreyecke, die gleiche Grundlinien und Höhen haben, einander am Flächeninhalte gleich seyn.

III. Daß Parallelograme von einerley Höhe sich am Flä- 47.
cheninhalte gegen einander verhalten, wie ihre Grundlinien, nämlich ADCB : EHGF = AD : EH, wenn diese zwey Parallelograme einerley Höhe haben. Denn man übertrage nur die Grundlinie des kleineren Parallelograms auf die Grundlinie des größeren z. B. bis N, so daß EN = AD wird, theile die Grundlinie EH des größeren Parallelograms in eine so große Anzahl gleicher Theile, daß der Punkt N mit einem Theilungspunkte übereinander falle, und ziehe sodann durch alle Theilungspunkte die Parallelen ab, NM, cd, u. s. w. Wenn nun EH in n gleiche Theile, deren jeder gleich Ea, getheilet ist, und der Punkt N mit dem mten Theilungspunkte übereinfällt, so ist $\frac{EH}{n} = Ea$, oder $n = \frac{EH}{Ea}$; und auch $\frac{EN}{m} = Ea$, oder $m = \frac{EN}{Ea}$; nun ist $m \cdot EabF = ENMF$, und $n \cdot EabF = EHGF$, oder $\frac{EN}{Ea} \cdot EabF = ENMF$, und $\frac{EH}{Ea} \cdot EabF = EHGF$, wenn wir für m und n ihre Werthe setzen; folglich $ENMF : EHGF = \frac{EN}{Ea} \cdot EabF : \frac{EH}{Ea} \cdot EabF$ (115); oder ENMF : EHGF = EN : EH (114); und endlich ADCB : EHGF = AD : EH, wenn wir ADCB für ENMF, und AD für EN substituiren.

Wenn das Verhältniß AD : EH irrational wäre, so müßte man die größere Grundlinie in Gedanken in eine unend-

Fig. liche Anzahl gleicher Theile zertheilen, damit die kleinere
47. Grundlinie genau bis auf einen Theilungspunkt reichet, wenn sie auf die größere übertragen wird; wäre z. B. AD : EH = $3 : \sqrt{65}$, so ist auch ABCD : EFGH = $3 : \sqrt{65}$.

291. Auch Dreyecke von einerley Höhe und verschiedenen Grundlinien verhalten sich am Flächeninhalte gegen einander, wie ihre Grundlinien, nämlich ABD : EFH = AD : EH.

Denn ABCD : EFGH = AD : EH; also auch $\frac{1}{2}$ABCD : $\frac{1}{2}$EFGH = AD : EH; nun ist $\frac{1}{2}$ABCD = ABD, und $\frac{1}{2}$EFGH = EFH; folglich ABD : EFH = AD : EH.

Einige Meßkünstler haben diesen Satz von den Dreyecken unmittelbar auf folgende Art erwiesen. Man bilde sich ein,
48. daß die Höhe CD eines Dreyeckes ABC in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilet sey; man ziehe in Gedanken durch die Theilungspunkte Parallelen zu der Grundlinie AB, so werden dadurch unendlich viele Trapezien entstehen, deren Summe dem Dreyecke ABC gleich ist. Die Summe dieser Trapezien läßt sich bestimmen, sie ist = AB . $\frac{1}{2}$CD. Denn die Trapezien, weil sie eine unendliche kleine Höhe haben, können für die Parallelen selbst angesehen werden, wenn man diesen Parallelen eine unendliche kleine Dicke oder Breite zueignet: nun wachsen diese Parallelen von der Spitze C bis zu der Grundlinie AB in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges (nämlich jede vorhergehende Parallele von der nächst darauf folgenden abgezogen läßt immer einerley Differenz zurück); das erste Glied dieser Reihe ist gleich Null = 0 nämlich die Spitze C des Dreyeckes, das letzte Glied ist die Grundlinie AB, und die Anzahl der Glieder ist die Höhe CD; folglich ist die Summe aller dieser Parallelen = (0 + AB) . $\frac{1}{2}$CD = AB . $\frac{1}{2}$CD (191.); es ist also auch die Summe aller Trapezien, oder der Flächeninhalt des Dreyeckes ABC = AB . $\frac{1}{2}$CD: eben so ist der Flächeninhalt des Dreyeckes ECB = EB . $\frac{1}{2}$CD; folglich ABC : ECB = AB . $\frac{1}{2}$CD : EB . $\frac{1}{2}$CD, (115.)

oder

oder ABC : EBC = AB : EB, das ist Dreyecke von gleichen Höhen und verschiedenen Grundlinien verhalten sich am Flächeninhalte gegen einander, wie ihre Grundlinien. Daß jede vorhergehende Parallele von der nächst darauffolgenden abgezogen immer einerley Differenz zurück lasse, wird ein jeder leicht einsehen, wenn er die unendlich kleinen und einander vollkommen gleichen Dreyecke längst den Seiten CA und CB in Erwegung zieht. Fig. 48.

292. Um ein jedes gegebenes regelmäßiges Vieleck ABDFGH kann ein Kreis dergestalt geführet werden, daß die Scheitel aller Winkel in dem Umkreise liegen. 49.

Denn man theile nur zwey nebenliegende Vieleckswinkel, z. B. HAB und ABD durch die Geraden AC und BC in zwey gleiche Theile, und ziehe von ihrem Durchschnittspunkte C in die Scheitel aller Vieleckswinkel die Geraden CD, CF, CG, CH, so ist einmal wegen dem gleichschenklichten Dreyecke ACB die Gerade CA = CB; ferner ist wegen der vollkommenen Gleichheit der Dreyecke ACB und BCD die Gerade CA = CD = CB, und der Winkel CDB = CAB = CBD = $\frac{1}{2}$ABD = $\frac{1}{2}$BDF; eben so ist wegen der Gleichheit der Dreyecke BCD und DCF die Gerade CF = CB = CD = CA u. s. w.; da nun CA = CB = CD = CF u. s. w. so sind die Scheitel aller Vieleckswinkel von dem Punkte C gleichweit entfernet; folglich liegen sie in einem Umkreise, der aus dem Durchschnittspunkte C mit einem Halbmesser CA = CB beschrieben wird.

293. Es folget aus diesem

I. Daß ein jedes regelmäßiges Vieleck durch die Geraden CA, CB, CD u. s. w. in so viele gleichschenklichte, und einander vollkommen gleiche Dreyecke zerfället werde, als es Seiten oder Vieleckswinkel hat.

II. Daß jede Seite des Vieleckes einen Bogen von $\frac{360}{n}$ Graden abschneide, wenn das Vieleck n Seiten enthält: oder der Mittelpunktswinkel eines regelmäßigen Vieleckes, z. B.

 ACB

Fig. 49. ACB ist von $\frac{360}{n}$ Graden, wenn das Vieleck n Seiten enthält. So ist der Mittelpunktswinkel in einem gleichseitigen Dreyecke, nämlich ACD oder ACG $= \frac{360}{3} = 120°$; der Mittelpunktswinkel in einem Vierecke $= \frac{360}{4} = 90°$, in einem Fünfecke $= \frac{360}{5} = 72°$; der Mittelpunktswinkel in einem regelmäßigen Sechsecke, nämlich ACB $= \frac{360}{6} = 60°$, und folglich CAB + CBA $= 180 - 60 = 120°$; nun aber ist das Dreyeck ACB gleichschenklicht, folglich der Winkel CAB $=$ ABC $= \frac{120}{2} = 60°$; es ist also das Dreyeck ACB auch gleichseitig, und AC $=$ AB $=$ CB, das heißt: Die Seite eines regelmäßigen Sechseckes ist dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises gleich; oder eine Sehne die dem Halbmesser gleichet, schneidet einen Bogen von 60° ab.

294. In ein jedes gegebenes regelmäßiges Vieleck kann ein Kreis eingeschrieben werden, so das denselben jede Seite berühret.

Denn man ziehe nur aus dem Mittelpunkte C des umgeschriebenen Kreises die Senkrechten CM, CZ, CP u. s. w. auf die Seiten DF, FG u. s. w. so werden alle diese Senkrechten einander gleich seyn, und folglich die Punkte K, L, M, u. s. w. in einem Umkreise liegen, wovon CK oder CL der Halbmesser, und AB, BD, DF u. s. w. Tangenten sind, weil die Dreyecke DCM, MCF, FCZ, ZCG, GCP u. s. w. alle einander vollkommen gleich sind.

Diese Einschreibung des Kreises ist bey einem jeden, auch unregelmäßigen, Dreyecke möglich; denn man theile nur zwey Winkel eines gegebenen Dreyeckes in zwey gleiche Theile, ziehe aus dem Durchschnittspunkte der Theilungslinien senkrechte Linien auf die Seiten des Dreyeckes, so werden diese drey Senkrechten einander vollkommen gleich seyn, und folglich in einem Umkreise liegen. Fig. 49.

295. Auch läßt sich in einen gegebenen Kreis ein jedes regelmäßiges Vieleck einschreiben, wenn man aus dem Mittelpunkte des Kreises einen Winkel verzeichnet, der dem Mittelpunktswinkel des verlangten regelmäßigen Vieleckes gleich ist, und sodann die Sehne des Bogens, den die Schenkel des verzeichneten Winkels abschneiden, auf dem Umkreise so oft herumträgt, als es sich thun läßt.

Dieses geschieht bey der Einschreibung eines regelmäßigen Dreyeckes, wenn man aus einem Punkte des Umkreises B mit dem Halbmesser des gegebenen Kreises einen Bogen ACD ziehet, der den gegebenen Umkreis in A und D durchschneidet, und sodann die Sehne AD von D in G oder von A in G überträgt; denn der Bogen AB + BD = 60 + 60 = 120° = dem Mittelpunktswinkel des regelmäßigen Dreyeckes, und da DG = AD, so ist auch der Bogen DFG = ABD = 120°, und endlich AHG = AHGFBA — ABDFG = 360 — 240 = 120°; folglich auch AG = AD = DG. Oder man theile den Halbmesser CB in dem Punkte Q durch die Senkrechte AD in zwey gleiche Theile, so wird AD die Seite des regelmäßigen Dreyeckes seyn; denn die Seite CQ = QB, QA = QA, der Winkel AQC = AQB; folglich AB = AC = CD = DB, der Bogen AB = BD = 60°, und endlich der Bogen ABD = 120°.

Theilet man nun die Bögen AHG, GFD, DBA in den Punkten H, F, B in zwey gleiche Theile, und verbindet die Punkte A, B, D, F, G, H durch gerade Linien, so wird in dem nämlichen Kreise auch ein regelmäßiges Sechseck eingeschrieben seyn; und so kann durch fernere Theilung der Bögen aus einem Sechsecke ein Zwölfeck, aus dem Zwölfecke ein Vierundzwanzigeck bestimmet werden u. s. w. Das regelmäßige Sechseck wird geschwinder in einen Kreis

Fig. eingeschrieben, wenn man den Halbmesser sechsmal auf dem
49. Umkreise herumträgt.

Ein regelmäßiges Viereck oder ein Quadrat wird in einen gegebenen Kreis eingeschrieben, wenn man zwey senkrechte Durchmesser BG und NE zieht, und ihre Endpunkte B, E, G, N mit geraden Linien verbindet. Theilet man nun einen jeden Bogen, den die Seite des eingeschriebenen Quadrats abschneidet, in zwey gleiche Theile, so wird man auch ein regelmäßiges Achteck einschreiben können; und so läßt sich ferner ein 16, 32, 64eck u. s. w. in einen Kreis einschreiben. Die Einschreibung eines Fünf-, Zehen-, Zwanzigeckes u. s. w. imgleichen eines 15, 30, 60ecks u. s. w. soll weiter unten vorkommen. Die Einschreibung der übrigen Vielecke aber läßt sich nach den Gründen der Elementargeometrie nicht anders verrichten, als durch Hilfe des Transporteurs, oder nur durch blosses Versuchen (tentando).

50. 296. Auch läßt sich um einen gegebenen Kreis ein jedes regelmäßiges Vieleck dergestalt beschreiben, daß jede Seite desselben den gegebenen Umkreis berühret, wenn man aus dem Mittelpunkte des Kreises einen Winkel ECF verzeichnet, der dem Mittelpunktswinkel des verlangten regelmäßigen Vieleckes gleich ist, sodann die Sehne EF durch die Senkrechte CG in zwey gleiche Theile zertheilet, die Schenkel CE und CF verlängert, durch den Punkt G die Parallele AB zu EF zieht, mit dem Halbmesser CA oder CB den Kreis AMNPB beschreibet, und endlich die Sehne AB in diesem Kreise so oft herumträgt als es sich thun läßt. Der Grund dieses Verfahrens ist aus dem vorhergehenden leicht einzusehen.

Von den Proportionallinien.

51. 297. Wenn man in was immer für einem Dreyecke ABC zu einer Seite BC eine Parallele DE führet, so werden dadurch die zwey übrigen Seiten in proportionale Theile

ge-

geschnitten, nämlich es wird AD : AB = AE : AC, oder auch AD : DB = AE : EC statt finden. Fig. 51.

Denn man ziehe nur die Geraden EB und DC, so ist das Dreyeck DEB = EDC am Flächeninhalte, weil diese zwey Dreyecke auf der nämlichen Grundlinie DE zwischen zwey Parallelen stehen; es ist also auch DEB + ADE = EDC + ADE, nämlich AEB = ADC; ferner ist AED : AEB = AD : AB, (A), weil diese zwey Dreyecke einerley Höhe HE haben; und auch AED : ADC = AE : AC, (B), weil auch diese zwey Dreyecke einerley Höhe GD haben (291.). Nun substituire man in der zweyten Proportion (B) AEB statt ADC,

so ist AED : AEB = AD : AB die erste Proportion (A),
und AED : AEB = AE : AC vermög der Substitution;
folglich auch AD : AB = AE : AC (115);
und AD : AB — AD = AE : AC — AE,
nämlich AD : DB = AE : EC.
Imgleichen AD : AE = DB : EC; wie auch AD : AE = AB : AC.

298. Und umgekehrt, wenn AD : AB = AE : AC, oder AD : DB = AE : EC statt findet, so läuft DE parallel mit BC.

Denn wäre DE nicht parallel zu BC, so könnte durch den Punkt D eine andere Parallele z. B. DG gezogen werden; und da wäre vermög dem vorhergehenden AD : AB = AG : AC, und auch vermög der Voraussetzung AD : AB = AE : AC; es wäre also in diesem Falle auch AG : AC = AE : AC; nun aber ist AC = AC; folglich auch AG = AE, welches nicht seyn kann; es kann demnach auch nicht seyn, daß außer DE eine andere DG durch den Punkt D parallel zu BC geführet werden könne. Wenn also AD : AB = AE : AC statt findet, so läuft DE parallel zu BC.

299. Bey zwey ähnlichen Dreyecken ABC und abc stehen die **gleichnamigen** Seiten (latera homologa), die nämlich den gleichen Winkeln entgegengesetzet sind, in Proportion; das ist, AB : AC = ab : ac, oder AB : ab =

Fig. 51. AC : ac, imgleichen AB : BC = ab : bc; AC : BC = ac : bc.

Denn man lege nur das kleinere Dreyeck abc dergestalt auf das größere ABC, daß der Winkel a den Winkel A decke, die gleichnamige Seite ab auf AB, und ac auf AC falle, so wird die Seite bc mit BC parallel laufen (284.), und es wird AD = ab, AE = ac seyn, wenn die Schenkel ab und ac bis D und E reichen: nun ist vermög dem vorhergehenden AD : AB = AE : AC, oder AB : AC = AD : AE; es ist also auch AB : AC = ab : ac. Würde man nun den Winkel b auf B, und die gleichnamige Seite bc auf BC auflegen, so würde ac mit AC parallel laufen, und vermög dem vorhergehenden folgende Proportion statt finden; ba : BA = bc : BC, oder ba : bc = BA : BC u. s. w.

300. Und umgekehrt, wenn die Seiten eines Dreyeckes abc mit den Seiten eines anderen Dreyeckes ABC in Proportion stehen, nämlich wenn AB : ab, = AC : ac = BC : bc statt findet, so sind die Dreyecke einander ähnlich.

Denn man mache nur AD = ab, und ziehe die Parallele DE, so ist AB : AD = AC : AE (297.), und auch AB : ab (oder AD) = AC : ac vermög der Voraussetzung; es ist also auch AC : AE = AC : ac, nämlich AE = ac; imgleichen AB : AD = BC : DE, weil die Dreyecke ABC und ADE einander ähnlich sind, und auch AB : ab (oder AD) = BC : bc vermög der Voraussetzung; folglich auch BC : DE = BC : bc, nämlich DE = bc. Da nun in den Dreyecken abc und ADE die Seiten AD = ab, AE = ac, DE = bc, so sind sie einander vollkommen gleich, das ist gleich und ähnlich, nämlich ADE ∽ abc; nun aber ist das Dreyeck ADE ∽ ABC; es ist also auch abc ∽ ABC.

Wir werden durch dieses Zeichen (∽) die Aehnlichkeit anzeigen.

301. Wenn in zwey Dreyecken ABC und abc die Winkel A = a, und ab : AB = ac : AC statt findet, das ist wenn die Seiten, die den gleichen Winkel einschliessen, in Proportion stehen, so sind die Dreyecke einander ähnlich. Fig. 51.

Denn man leze nur das Dreyeck abc dergestalt auf ABC, daß der Winkel a den Winkel A decke, die größere Seite ab auf AB bis D, und die kleinere ac auf AC bis E falle, so wird DE = bc, der Winkel ADE = b, und AED = c seyn: nun ist ab : AB = ac : AC; und ab = AD, ac = AE; es ist also auch AD : AB = AE : AC; folglich DE parallel zu BC (298.), und der Winkel AED = ACB, ADE = ABC; nun aber ist ADE = b, und AED = c; es ist also auch ABC = b, ACB = c; folglich ist das Dreyeck abc ∽ ABC.

302. Wenn man in einem Dreyecke ABC einen Winkel BAC durch die Gerade AD in zwey gleiche Theile theilet, so ist CD : DB = CA : AB. 52.

Denn man verlängere nur CA, mache AE = AB, und ziehe EB, so ist BE parallel zu DA, weil BAC = 2x = y + z = z + z = 2z, nämlich x = z (263); folglich CD : DB = CA : AE (297); nun aber ist AE = AB: folglich auch CD : DB = CA : AB.

Aus der Proportion CD : DB = CA : AB fließt auch folgende: CD + DB : CD = CA + AB : CA, nämlich CB : CD = CA + AB : CA, oder CA + AB : CA = CB : CD; imgleichen BA + AC : BA = BC : BD.

Und umgekehrt, wenn CD : DB = CA : AB, oder auch CA + AB : CA = CB : CD statt findet, so ist der Winkel CAB durch die Gerade AD in zwey gleiche Theile getheilet. Denn man verlängere nur CA, mache AE = AB, und ziehe BE, so ist DA parallel zu BE, weil vermög der Voraussetzung CA + AB, oder CA + AE, das ist CE : CA = CB : CD statt findet (298); folglich x = z; ferner ist das Dreyeck BAE gleichschenklich; folglich y = z;

nun

Fig. nun aber ist der Winkel $CAB = y + z = 2z$, oder
52. $CAB = 2x$, und folglich $x = \frac{1}{2}CAB$.

303. In einem jeden rechtwinklichten Dreyecke ABC ist
53. das Quadrat der Hypothenuse den Quadraten der beyden Katheten zusammengenommen gleich, nämlich $BC^2 = AB^2 + AC^2$, oder $a^2 = b^2 + c^2$, wenn wir $BC = a$, $AB = b$, und $AC = c$ setzen.

Um diese wichtige Wahrheit einzusehen, ziehe man aus der Spitze des rechten Winkels die Senkrechte AD auf die Hypothenuse BC, so ist das Dreyeck ABD ∽ ABC, weil $m = t + z = 90°$, und in dem Dreyecke ABD der Winkel $x = x$ in dem Dreyecke ABC; imgleichen ist auch ADC ∽ ABC, weil $n = t + z = 90°$, und $y = y$ (278. IV.); es findet demnach in den Dreyecken ABD und ABC folgende Proportion statt; $BC : AB = AB : BD$, oder wenn wir BD mit d benennen, $a : b = b : d$ (𝔄); imgleichen ist in den Dreyecken ADC und ABC, $BC : AC = AC : DC$, oder $a : c = c : a - d$ (𝔅), weil $DC = BC - BD = a - d$ ist.

Nun ist aus der Proportion 𝔄. . . . $ad = b^2$ } vermög (111.);
und aus der Proportion 𝔅. . $a^2 - ad = c^2$

es ist also auch durch die Addition $a^2 = b^2 + c^2$;
das ist $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Man kann diesen Satz auch auf folgende Art erweisen:

Auf eine jede Seite des rechtwinklichten Dreyeckes verzeichne
54. man ein Quadrat, ziehe die Senkrechte AD, und die Geraden AE, CF, AF, PE, so wird man bald einsehen, daß das Quadrat ABFH dem Rechtecke BPDE gleich seye; denn das Dreyeck FCB = BAE, weil die Seite BF = BA, BC = BE, und der Winkel $m + p = p + n$, nämlich der Winkel FBC = ABE (256. II.); nun aber ist das Dreyeck FCB = FAB am Flächeninhalte, und BAE = BPE (290.); es ist also auch FAB = BPE am Flächeninhalte, und auch 2FAB = 2BPE, das ist FHAB = BPDE, nämlich das Quadrat BH ist dem Rechtecke BD gleich.

gleich. Eben so kann man zeigen, daß CM = CD sey, Fig.
wenn man von A nach G und von B nach N gerade Linien zie- 54.
het. Da nun BH = BD, und CM = CD, so ist auch $BH + CM = BD + CD = BG$, nämlich $BA^2 + AC^2 = BC^2$. Es ist gewöhnlich ein Quadrat auf was immer für einer Geraden AC mit AC^2 oder CA^2, oder auch mit b^2 zu bezeichnen, wenn man die Gerade $AC = b$ setzet.

Diese zwey Sätze: **Das Quadrat der Hypothenuse ist den Quadraten der beyden Katheten zusammengenommen gleich**; und, *in ähnlichen Dreyecken stehen die gleichnamigen Seiten in Proportion*, sind ungemein fruchtbar und gleichsam unerschöpfliche Quellen, aus denen die wichtigsten Wahrheiten in alle Theile der gemeinen und höhern Meßkunst fließen.

304. Und umgekehrt, wenn in einem Dreyecke das Quadrat der größten Seite den Quadraten der beyden übrigen zusammengenommen gleich ist, so ist dieses Dreyeck rechtwinklicht; nämlich wenn $AB^2 = AC^2 + BC^2$, so ist $m = 90°$.

Denn man errichte nur auf AC in dem Punkte C die 55.
Senkrechte CD, und mache CD = CB, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke ACD vermög dem vorhergehenden $AD^2 = CA^2 + CD^2$, oder $AD^2 = AC^2 + CB^2$, (weil CD = CB und folglich $CD^2 = CB^2$ gemacht worden); nun aber ist auch vermög der Voraussetzung $AB^2 = AC^2 + CB^2$; folglich auch $AD^2 = AB^2$, oder AD = AB; da nun in den Dreyecken ACD und ACB die Seite AC = AC, CD = CB, und AD = AB, so sind sie einander vollkommen gleich, und $n = m = 90°$.

305. Aus der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2$ folget, daß auch $b^2 = a^2 - c^2$, und $c^2 = a^2 - b^2$ sey: es ist demnach in einem rechtwinklichten Dreyecke die Hypothenuse $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, die eine Kathete $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, und die andere $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Es sey z. B. die eine Kathete $b = 3$, und die andere $c = 4$,

so

Fig. so ist die Hypothenuse $a = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$;
55. folglich schliessen drey Seiten, die sich wie 3, 4, 5 verhalten, ein rechtwinklichtes Dreyeck ein. Man pflegt auch wirklich in der Ausübung eine Schnur nach diesem Verhältniße einzutheilen, und selbe zur Errichtung der Senkrechten auf dem Felde zu gebrauchen.

Außer diesen drey Zahlen 3, 4, 5, und ihren vielfachen $3n$, $4n$, $5n$ (z. B. 6, 8, 10; 9, 12, 15) giebt es unzählige, die auch ein rechtwinklichtes Dreyeck einschliessen; z. B. 5, 12, 13; denn $(13)^2 = (12)^2 + 5^2$, nämlich $169 = 144 + 25 = 169$; man findet alle diese Zahlen, wenn man zwey algebraische Ausdrücke aufsuchet, die beyde vollkommene Quadrate sind, und zusammen addiret wieder ein vollkommenes Quadrat zum Vorschein bringen: solche zwey Ausdrücke sind $(x^4 - 2x^2y^2 + y^4)$ und $4x^2y^2$; denn ihre Summe ist $(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$ auch ein vollkommenes Quadrat; und die Wurzeln dieser drey Quadrate sind $(x^2 - y^2)$, $(2xy)$, und $(x^2 + y^2)$.

setzen wir nun...... $x =$	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7
$y =$	1	2	1	3	2	4	1	5	2	4	6
so ist die 1te Kath... $x^2 - y^2 =$	3	5	15	7	21	9	35	11	45	33	13
die zweyte....... $2xy =$	4	12	8	24	20	40	12	60	28	56	84
und die Hypoth. .. $x^2 + y^2 =$	5	13	17	25	29	41	37	61	53	65	85

u. s. w. nämlich $(x; y) = (8; 1), (8; 3), (8; 5), (8; 7), (9; 2), (9; 4), (9; 8), (10; 1), (10; 3), (10; 7), (10; 9), (11; 2), (11; 4), (11; 6), (11; 8), (11; 10), (12; 1), (12; 5), (12; 7), (12; 11), (13; 2)$ u. s. w.

Die Formeln $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, und $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ geben uns zu erkennen, daß man zu zwey Katheten die Hypo-

pothenuse, und zu der Hypothenuse und einer Kathete je- Fig.
derzeit die andere Kathete durch die Rechnung bestimmen könne. 55.
Allein wir können dieses auch durch die Verzeichnung finden: wenn nämlich zu den gegebenen Katheten CD und CA die Hypothenuse durch die Verzeichnung zu suchen ist, so stelle man die zwey gegebenen Katheten unter einem rechten Winkel zusammen, und verbinde ihre Endpunkte durch eine Gerade AD, so wird selbe die gesuchte Hypothenuse seyn. Imgleichen aus der Hypothenuse und einer Kathete wird die andere Kathete durch die Verzeichnung gefunden, wenn man einen Schenkel eines rechten Winkels der gegebenen Kathete CA gleich machet, und sodann aus A mit einem der Hypothenuse gleichen Halbmesser einen Kreisbogen beschreibet, der den andern Schenkel in D durchschneidet; die Gerade CD wird sodann der gesuchten Kathete gleich seyn.

306. Wenn man an dem Endpunkte B einer gegebenen 56.
Geraden AB eine Senkrechte $BC = \frac{1}{2}AB$ errichtet, sodann die Hypothenuse AC ziehet, $CE = CB = \frac{1}{2}AB$, und $AD = AE$ abschneidet, so wird dadurch die gegebene Gerade AB in dem Punkte D nach dem äußeren und mittleren Verhältniße getheilet (media & extrema ratione secta); nämlich der größere Theil AD wird die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem kleineren Theile BD und der ganzen gegebenen Geraden AB seyn, das ist es wird $BD : DA = DA : BA$ sich verhalten.

Denn $AC^2 = AB^2 + BC^2$, oder $(AE + EC)^2 = (AD + BC)^2 = AB^2 + BC^2$, nämlich $AD^2 + 2BC.AD + BC^2 = AB^2 + BC^2$; also auch $AD^2 = AB^2 - 2BC.AD = AB^2 - AB.AD = (AB - AD).AB$, das ist $AD^2 = BD.AB$; und endlich $BD : AD = AD : AB$ (113.).

307. Wenn man den Halbmesser CB eines Kreises 57.
nach dem äußeren und mittleren Verhältniße, nämlich in dem Punkte D dergestalt theilet, daß $BD : DC = DC : BC$

sich

Fig. 57. sich verhält, und die Sehne BA = DC machet, so ist sie die Seite eines regelmäßigen Zehneckes.

Denn der Bogen AB oder der Winkel $n = 36^\circ = \frac{360^\circ}{10}$, welches ich also erweise; BD : DC = DC : BC vermög der Voraussetzung; nun aber ist DC = BA; folglich ist in den Dreyecken BDA und BAC, BD : BA = BA : BC, überdieß ist der Winkel p beyden Dreyecken gemein; es sind demnach diese zwey Dreyecke einander ähnlich (301.), und folglich $n = r$; nun aber ist das Dreyeck BAC gleichschenklicht; es ist also auch das Dreyeck BDA gleichschenklicht, nämlich $m = p = q + r$, und AB = AD = DC; folglich ist auch das Dreyeck ADC gleichschenklicht, und $n = q$; nun ist $m = n + q$, (279.) $= n + n = 2n$; es ist also auch $p = 2n$, und auch $(q + r) = 2n$, weil $m = p = (q + r)$ ist; endlich ist $n + p + (q + r) = 180^\circ$ (278.); folglich auch $n + 2n + 2n = 5n = 180^\circ$, nämlich der Mittelpunktswinkel $n = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ = \frac{360^\circ}{10}$, oder der Bogen AB ist der zehnte Theil des ganzen Umkreises, und die Sehne AB ist die Seite eines regelmäßigen Zehneckes, die man sodann zehnmal auf dem Umkreise herumtragen kann um ein regelmäßiges Zehneck einzuschreiben.

308. Setzen wir den Halbmesser CB $= a$, so ist die Seite des regelmäßigen Zehneckes BA $= \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}$.

Denn es sey die Seite BA = DC $= b$, so ist BD $= a - b$, und vermög dem vorhergehenden $a - b : b = b : a$; folglich $b^2 = a^2 - ab$, und $b = -\frac{1}{2}a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5} = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5})$.

Aus

Aus dieser Gleichung finden wir $a = \frac{b + b\sqrt{5}}{2}$, das ist wenn eine Seite eines regelmäßigen Zehneckes $= b$ ist, so ist der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises $= \frac{b + b\sqrt{5}}{2}$ $= \frac{1}{2}b + \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}b^2}$, welcher durch die Verzeichnung auf folgende Art gefunden wird. An dem Endpunkte F der gegebenen Seite FG errichte man die Senkrechte FE, mache $FE = \frac{1}{2}FG$, ziehe GE, und schneide $EM = FE = \frac{1}{2}FG$ ab, so ist GM der gesuchte Halbmesser; denn $GM = EM + EG = \frac{1}{2}FG + \sqrt{GF^2 + FE^2} = \frac{1}{2}FG + \sqrt{GF^2 + \frac{1}{4}GF^2} = \frac{1}{2}b + \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}b^2}$, wenn $GF = b$ gesetzet wird; man beschreibe demnach nur mit diesem Halbmesser aus F und G zwey Kreisbögen, die sich in C durchschneiden, und führe aus C mit eben diesem Halbmesser den Umkreis FGBF, so wird sich in demselben die Seite FG zehnmal herumtragen, und folglich auf der Geraden FG ein regelmäßiges Zehneck verzeichnen lassen. Fig. 57.

Da wir die Seite eines regelmäßigen Zehneckes gefunden haben, so wird es nicht mehr schwer seyn auch die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes zu bestimmen. Es sey wieder der Halbmesser des gegebenen Kreises $CD = CB = CA = a$, so ist die Seite des regelmäßigen Zehneckes $AD = DB = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}$; die noch unbekannte Seite des regelmäßigen Fünfeckes sey $AB = c$, $AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$, DE aber sey $= x$, und folglich $CE = CD - DE = a - x$; nun ist $AE^2 = AD^2 - DE^2$, nämlich $\frac{1}{4}c^2 = \left(\frac{-a + a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - x^2$ $= \frac{3a^2 - a^2\sqrt{5}}{2} - x^2$; ferner ist auch $AE^2 = AC^2 - CE^2$, nämlich $\frac{1}{4}c^2 = a^2 - (a - x)^2$, das ist $\frac{1}{4}c^2 =$ 58.

Fig. 58. $2ax - x^2$ (𝔄); es ist also auch $\frac{3a^2 - a^2\sqrt{5}}{2} - x^2 = 2ax - x^2$, nämlich $x = \frac{3a - a\sqrt{5}}{4}$, und $x^2 = \frac{7a^2 - 3a^2\sqrt{5}}{8}$; man substituire diese Werthe in der Gleichung (𝔄), so ist $\frac{1}{4}c^2 = \frac{3a^2 - a^2\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{7a^2 - 3a^2\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{5a^2 - a^2\sqrt{5}}{8}$, und $c^2 = \frac{5a^2 - a^2\sqrt{5}}{2} = a^2 + \frac{3a^2 - a^2\sqrt{5}}{2} = a^2 + \left(\frac{-a + a\sqrt{5}}{2}\right)^2 = a^2 + b^2$, weil die Seite des Zehneckes $AD = b = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}$ vermög dem vorhergehenden: da nun $c^2 = a^2 + b^2$, so ist das Quadrat der Seite des Fünfeckes den Quadraten des Halbmessers und der Seite des Zehneckes zusammengenommen gleich. Wenn man demnach an den Endpunkten eines Halbmessers CA′ des gegebenen Kreises die Senkrechten A′F und CN errichtet, A′F = ½A′C, FM = FA′, CG = CM abschneidet, und die Gerade GN ziehet, so ist sie die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes, welches sich in den gegebenen Kreis einschreiben läßt: denn CG ist die Seite eines regelmäßigen Zehneckes (307), und CN der Halbmesser; nun aber ist $GN^2 = CG^2 + CN^2$; folglich ist GN die Seite eines Fünfeckes.

Aus der Gleichung $c^2 = \frac{5a^2 - a^2\sqrt{5}}{2}$ findet man $a^2 = \frac{2c^2}{5 - \sqrt{5}} = \frac{2c^2.(5 + \sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})\ (5 + \sqrt{5})} = \frac{10c^2 + 2c^2\sqrt{5}}{20} =$

$5c^2$

Fig.

$\frac{5c^2 + c^2\sqrt{5}}{10}$; es ist demnach $a = \sqrt{\frac{5c^2 + c^2\sqrt{5}}{10}}$, 58.

das ist, wenn die Seite c eines regelmäßigen Fünfeckes gegeben ist, so ist der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises $a = \sqrt{\frac{5c^2 + c^2\sqrt{5}}{10}} = c\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$; es sey z. B. $c = 100$, so ist der Halbmesser $a = \sqrt{7236} = 85$ beynahe.

Wenn BP die Seite eines Sechseckes, und BQ die Seite eines Zehneckes, so ist PQ die Seite eines Fünfzehneckes; denn der Bogen PQ = PB — QB = $60° - 36° = 24° = \frac{360°}{15}$; folglich ist die Sehne PQ die Seite eines regelmäßigen Fünzehneckes.

Setzen wir die Seite eines in einen Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreyeckes AD = d (Fig. 49.), und den Halbmesser CA = a, so ist $d = a\sqrt{3}$; denn $AQ^2 = AC^2 - CQ^2$, nämlich $\frac{1}{4}d^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$; folglich $d = a\sqrt{3}$. 49.

Wir finden aus dieser Gleichung $a = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}d\sqrt{3}$. In dem nämlichen gleichseitigen Dreyecke ist die Höhe GQ = $\frac{1}{2}d\sqrt{3}$; denn $GQ = \sqrt{AG^2 - AQ^2} = \sqrt{d^2 - \frac{1}{4}d^2} = \sqrt{\frac{3}{4}d^2} = \frac{1}{2}d\sqrt{3}$.

Die Seite AB = e eines eingeschriebenen Quadrates ist $= a\sqrt{2}$; denn $AB^2 = AC^2 + BC^2 = a^2 + a^2$, und folglich $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = e$. Aus dieser Gleichung findet man $a = \frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}e\sqrt{2} = AC$; und folglich $AF = 2a = e\sqrt{2} = AB\sqrt{2}$. 59.

Fig. 59. Die Seite AD $= f$ eines regelmäßigen Achteckes ist $= a\sqrt{2-\sqrt{2}}$; denn EC $=$ AE $= \frac{1}{2}$AB $= \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, und DE $=$ DC $-$ EC $= a - \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; nun ist AD $= \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + (a - \frac{1}{2}a\sqrt{2})^2} = \sqrt{2a^2 - a^2\sqrt{2}} = a\sqrt{2-\sqrt{2}} = f$. Aus dieser nämlichen Gleichung findet man $a = \frac{f}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, oder $a^2 = \frac{f^2}{2-\sqrt{2}} = f^2 \cdot (1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$; folglich $a = f \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$. Es sey z. B. die Seite eines regelmäßigen Achteckes $f = 200$, so ist der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises $a = 261{,}32$ beynahe.

Gleichwie wir itzt aus der Seite des Viereckes die Seite des Achteckes gefunden haben, eben so kann ferner aus der Seite des Achteckes die Seite des Sechzehneckes, und aus dieser die Seite eines Zweyunddreyßigeckes u. s. w. bestimmet werden. Wir werden für die Bestimmung der Sehne eines halben Bogens, wenn die Sehne des ganzen Bogens nebst dem Halbmesser gegeben ist, eine allgemeine Formel hierher setzen; sie ist folgende: wenn der Halbmesser AC $= a$, und die Sehne AB eines Bogens $= b$ gesetzet wird, so ist die Sehne des halben Bogens AD $= \sqrt{2a^2 - a\sqrt{(4a^2 - b^2)}}$. Denn EC $= \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}$, und DE $=$ DC $-$ EC $= a - \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}$; nun ist $AD^2 = AE^2 + DE^2 = \frac{1}{4}b^2 + a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2} + a^2 - \frac{1}{4}b^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{4}} = 2a^2 - a\sqrt{4a^2 - b^2}$; folglich AD $= \sqrt{2a^2 - a\sqrt{(4a^2 - b^2)}}$. Z. B. bey einem regelmäßigen Sechsecke ist die Seite $b = a$; folglich ist die Seite eines regelmäßigen Zwölfeckes $= \sqrt{2a^2 - a\sqrt{3a^2}} = \sqrt{2a^2 - a^2\sqrt{3}} = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Setzt man weiters $b = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

so

so wird man die Seite eines regelmäßiges 24eckes finden u. s. w. Fig.

309. Wir Wollen noch in einigen regelmäßigen Vielecken die Senkrechte CD suchen, die aus dem Mittelpunkte C auf die Vieleckseite AB gezogen wird. Diese Senkrechte CD ist in dem Fünfecke $= \frac{1}{2}c\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$, wenn wir die Seite des Fünfeckes $AB = c$ setzen; denn $CD = \sqrt{CB^2 - DB^2}$; nun aber ist $DB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$, $DB^2 = \frac{1}{4}c^2$; und $CB =$ 60.

$$\sqrt{\frac{5c^2 + c^2\sqrt{5}}{10}},\ CB^2 = \frac{5c^2 + c^2\sqrt{5}}{10};\ \text{folglich } CD =$$

$$\sqrt{\frac{5c^2 + c^2\sqrt{5}}{10} - \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2}c\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

Bey dem Sechsecke ist $AB = BC = a$; folglich $CD = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

In dem Achtecke ist $BC = f\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$, wenn man die Seite $AB = f$ setzet; folglich $CD = \sqrt{f^2 + \frac{1}{2}f^2\sqrt{2} - \frac{1}{4}f^2} = \frac{1}{2}f\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

Eben so findet man die Senkrechte in dem Zehnecke $= \frac{1}{2}b\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$, wenn man die Seite $AB = b$ setzet; und in dem Zwölfecke ist diese Senkrechte $= \frac{1}{2}g\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$; wenn man die Seite eines regelmäßigen Zwölfeckes mit g benennet; u. s. w.

310. Wenn sich in einem Kreise zwey Sehnen durchschneiden, so ist das Produkt aus den Abschnitten der einen dem Produkte aus den Abschnitten der anderen Sehne gleich; nämlich $MP \cdot PN = FP \cdot PG$.

Denn die Dreyecke MFP und GPN sind einander ähnlich, weil der Winkel $m = n$, $F = N$, $G = M$ (272.); folglich $MP : FP = PG : PN$ (299), und $MP \cdot PN = FP \cdot PG$ (111.).

Fig. 61 311. Wenn man aus einem nämlichen Punkte zwey Sekanten an einen Umkreis zieht, so sind die Produkte aus den ganzen Sekanten in ihre Abschnitte außer dem Umkreise einander gleich, oder die Abschnitte verhalten sich umgekehrt wie die ganzen Sekanten, nämlich $AB . AE = AC . AD$, oder $AE : AD = AC : AB$.

Denn das Dreyeck $ABC \backsim ADE$, weil der Winkel $BAC = DAE$, $BCA = AED$, und $ABC = EDA$ (274.) folglich $AE : AD = AC : AB$, und $AE . AB = AD . AC$.

Eben so findet man, daß $AD : AT = AT : AC$, nämlich $AT^2 = AD . AC$, und $AT = \sqrt{AD . AC}$ statt finde, weil die Dreyecke ATD und ATC einander ähnlich sind.

Die Tangente AT ist demnach die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem Abschnitte außer dem Kreise.

Da aus dem nämlichen Grunde auch $At = \sqrt{AD . AC}$, so ist auch $AT = At$, das ist die zwey Tangenten, die aus dem nämlichen Punkte an einen Umkreis gezogen werden, sind einander gleich.

62. 312. Wenn man aus was immer für einem Punkte M des Umkreises eine Senkrechte MP auf den Durchmesser AB ziehet, so ist sie die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers, nämlich $AP : PM = PM : PB$.

Denn das Dreyeck $APM \backsim AMB$, und auch $BPM \backsim AMB$; folglich auch $APM \backsim BPM$; und $AP : PM = PM : PB$. Man kann diesen Satz auch also erweisen; $AP . PB = PM . PD$ (310); nun aber ist $PD = PM$ (267); folglich auch $AP . PB = PM^2$, und $AP : PM = PM : PB$.

Es sey der Halbmesser $AC = a$, so ist $AB = 2a$; der Abschnitt des Durchmessers zwischen dem Anfangspunkte A und der Senkrechten MP sey $= x$, so ist $PB = AB - AP = 2a - x$; und die Senkrechte PM sey $= y$:

sub-

substituiren wir nun diese Werthe, so ist $y^2 = x.(2a - x) = 2ax - x^2$ eine Gleichung, welche uns die bekannte Eigenschaft des Kreises ausdrücket, daß das Quadrat einer jeden Senkrechten PM dem Produkte aus den dazu gehörigen Abschnitten des Durchmessers gleich sey. Fig. 62.

Es ist gewöhnlich, daß man nicht nur allein bey dem Kreise, sondern auch bey einer jeden andern krummen Linie die Gerade AP eine Abscisse, und die Senkrechte PM eine Ordinate nennet.

313. Wenn man $CP = x$, d. i. Wenn man den Anfangspunkt der Abscissen in den Mittelpunkt setzet, so ist $AP = a - x$, und $PB = a + x$; folglich $y^2 = (a - x).(a + x) = a^2 - x^2$, und $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ (137), welches auch aus dem rechtwinklichten Dreyecke PMC erhellet, weil in demselben $PM^2 = MC^2 - CP^2$, nämlich $y^2 = a^2 - x^2$, und $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$. Das Zeichen $\pm$ bedeutet, daß zu einer jeden Abscisse CP zwey gleiche Ordinaten, nämlich PM und PD gehören, die aber nach entgegengesetzten Richtungen, die eine aufwärts, die andere abwärts zu ziehen sind: denn es ist aus dem Begriffe der positiven und negativen Größen bekannt, daß alle Senkrechten PD, pd, welche von der Geraden AB herunterwärts gezogen werden, negativ seyn müßen, wenn man die Senkrechten PM, pm, welche von der nämlichen Geraden AB hinaufwärts gezogen sind, für positiv annimmt; oder umgekehrt. Imgleichen jede Abscisse Cp von dem angenommenen Anfangspunkte C gegen der Rechten gerechnet, muß negativ seyn, wenn man die Abscissen CP von dem nämlichen Anfangspunkte gegen der Linken gezählet für positiv annimmt; oder umgekehrt.

Aus dieser zweyten Gleichung des Kreises, $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ können wir folgende, theils schon erläuterte, theils noch unerläuterte Eigenschaften herleiten:

Fig. 62. I. Die Ordinate in dem angenommenen Anfangspunkte der Abscissen, nämlich in dem Mittelpunkte des Kreises, ist dem Halbmesser gleich: denn man setze nur $x = 0$, so ist $y = \pm\sqrt{a^2} = \pm a$.

II. Zu zwey gleichen Abscissen, deren eine positiv, die andere negativ ist, gehören gleiche Ordinaten; z. B. wenn $CP = Cp = \pm x$, so ist $PM = pm$, $PD = pd$, und $MD = md$; zwey Sehnen MD, und md in dem nämlichen Kreise, welche von dem Mittelpunkt gleichweit abstehen, sind einander demnach gleich.

III. An den Endpunkten des Durchmessers sind die Ordinaten $= 0$; denn man setze nur $x = a$, und $x = -a$, so ist in beyden Fällen $y = 0$.

IV. Ueber die Endpunkte A und B des Durchmessers weiter hinaus sind keine Ordinaten möglich; denn man setze nur $x = (a + p)$, und $x = -(a + p)$, so ist in beyden Fällen die Ordinate $y = \pm\sqrt{-2ap - p^2}$, nämlich eingebildet oder unmöglich, wenn p eine noch so große, oder eine noch so kleine positive Größe bedeutet.

V. Jede Gerade CM aus dem angenommenen Anfangspunkte C zu was immer für einem Punkte M des Umkreises gezogen ist $= a$, und folglich sind alle Punkte des Umkreises von diesem Punkte C gleichweit entfernet: Denn $CM = \sqrt{CP^2 + PM^2} = \sqrt{x^2 + (a^2 - x^2)} = \sqrt{a^2} = a$.

Wenn nun der Halbmesser in Zahlen gegeben ist, z. B. $a = 10$, so kann man zu jeder in Zahlen angenommenen Abscisse die dazu gehörige Ordinate auch in Zahlen bestimmen: es sey $x = 6$, so ist $y = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$; es sey $x = 7$, so ist $y = \sqrt{100 - 49} = \sqrt{51} = 7{,}1414$ u. s. w.

Wenn wir diesen Ausdruck $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ nach (187) in eine unendliche Reihe verwandlen, so ist die Ordinate PM, die

die zu der Abscisse CP $= x$ gehöret, nämlich $y = a - \frac{x^2}{2a}$ Fig. 62.

$$- \frac{1 \cdot x^4}{2 \cdot 4 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a^7}$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^{10}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot a^9} - \ldots\ldots\ldots$$

314. Wenn man an dem Endpunkte M der Ordinate PM die Tangente TM ziehet, die Abscissenlinie CA verlängert, bis sie die Tangente durchschneidet, so wird das Stück der Abscissenlinie zwischen der Ordinate und dem Durchschnittspunkte der Tangente, nämlich die Gerade PT, die Subtangente genennet.

In dem Kreise ist die Subtangente PT $= \frac{a^2}{x} - x$; denn in den zwey ähnlichen Dreyecken TMP und PMC ist PT : PM = PM : PC; folglich PT $= \frac{PM^2}{PC} = \frac{y^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2}{x} - x$.

Setzen wir nun $x = 0$, so ist die Subtangente $= \frac{a^2}{0} = \infty$ (143.), welches gar leicht zu begreifen ist, weil in diesem Falle die Tangente mit der Abscissenlinie parallel läuft, und folglich dieselbe niemals durchschneidet: denn wenn man CP $= x = 0$ setzet, so verwandelt sich die Ordinate PM $= y$ in den Halbmesser CN, auf welchen die Tangente Nt senkrecht stehet; nun aber steht auch die Abscissenlinie CP auf dem nämlichen Halbmesser CN senkrecht; folglich lauft CP mit Nt parallel.

315. Vielecke, z. B. ABCDEF und abcdef heißen ähnlich, wenn sie gleichviele Polygonwinkel enthalten, die einander wechselweise gleich sind, und überdieß durch gleichna- 63.

Fig. mige Diagonalen, oder durch andere gleichnamige gerade Li-
63. nien in lauter ähnliche Dreyecke zertheilet werden können. Aus dieser Erklärung folgt:

I. Daß alle regelmäßigen Vielecke der nämlichen Gattung (z. B. alle Siebenecke) einander ähnlich sind; denn sie können durch gerade Linien, die aus ihren Mittelpunkten in die Spitzen der Vielecksminkel gezogen werden, in lauter ähnliche Dreyecke zertheilet werden.

II. Jede zwey Seiten des einen Vieleckes stehen mit den zwey gleichnamigen Seiten des anderen Vieleckes in einer Proportion; z. B. ba : bc = BA : BC, oder bc : ca = BC : CA; dieses erhellet aus der Aehnlichkeit der Dreyecke abc und ABC. Imgleichen dc : ca = DC : CA, und ca : da = CA : DA wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke acd und ACD; u. s. w. Da nun bc : ca = BC : CA, und auch dc : ca = DC : CA, so ist auch bc : dc = BC : DC (115.), nämlich, bey ähnlichen Vielecken sind die Seiten, welche gleiche Winkel einschliessen, einander proportional.

III. Der Umfang (perimeter) des einen Vieleckes verhält sich zum Umfange des anderen ähnlichen Vieleckes, gleichwie jede Seite des ersten zu der gleichnamigen Seite des zweyten Vieleckes, nämlich ab + bc + cd + de + ef + fa : AB + BC + CD + DE + EF + FA = ab : AB = bc : BC = fa : FA. Denn es ist vermög dem vorhergehenden ac : ab = AC : AB, oder ac : AC = ab : AB, und auch ac : AC = bc : BC; ac : AC = cd : CD; ac : AC = de : DE u. s. w. nämlich ab : AB, bc : BC, cd : CD, de : DE, u. s. w. sind gleiche Verhältniße, weil jedes derselben dem Verhältniße ac : AC gleichet; folglich ab + bc + cd u. s. w. : AB + BC + CD u. s. w. = ab : AB = bc : BC (116).

64. 316. Die Umfänge der regelmäßigen Vielecke von der nämlichen Gattung verhalten sich gegen einander, wie die Halbmesser der umgeschriebenen Kreise; z. B. wenn ab und AB

Seiten

Seiten von regelmäßigen Vielecken der nämlichen Gattung, Fig.
cb und CB aber die Halbmesser der umgeschriebenen Kreise sind, 64.
und der Umfang des ersten = p, und der Umfang des zweyten = P gesetzt wird, so findet folgende Proportion statt, p : P = cb : CB.

Denn die Dreyecke acb und ACB sind einander ähnlich; folglich cb : ba = CB : BA, oder cb : CB = ba : BA; nun aber ist vermög dem vorhergehenden p : P = ba : BA; es ist also auch p : P = cb : CB. Eben so kann man erweisen, daß sich die Umfänge der regelmäßigen Vielecke von der nämlichen Gattung gegen einander verhalten, wie die Halbmesser der eingeschriebenen Kreise, oder wie die Senkrechten cd und CD.

Sieht man nun die Kreise für regelmäßige Vielecke von einer unendlichen Anzahl Seiten an, so wird man leicht begreifen, daß sich auch die Umkreise gegen einander verhalten wie ihre Halbmesser, oder wie ihre Durchmesser; wie auch, daß ähnliche Bögen von verschiedenen Kreisen, oder Kreisbögen von ähnlichen Ausschnitten, in Rücksicht ihrer wirklichen Länge sich gegen einander verhalten wie ihre Halbmesser, nämlich der Bogen AEB : aeb = AC : ac. Dieser Satz ist auch schon aus der Entstehungsart des Kreises deutlich genug (246), weil alle Kreise einander ähnlich sind; denn sie sind auf eine gleiche Art bestimmet, und können bloß durch die Größe von einander unterschieden werden. Wir merken hier nur an, daß man zu jedem gegebenen Durchmesser den Umkreis nach diesem Satze finden könnte, wenn nur zu einem einzigen Durchmesser der zugehörige Umkreis einmal bekannt wäre. Z. B. wenn wir einmal überzeugt seyn werden, daß man den zu einem Durchmesser von 113 zugehörigen Umkreis = 355 setzen könne, so werden wir zu jedem Durchmesser d den Umkreis p durch folgende Proportion bestimmen können; $113 : 355 = d : p$, nämlich $p = \frac{355d}{113}$; und $d = \frac{113p}{355}$. Wir werden weiter

unten

Fig. unten das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise durch eine Näherung zu bestimmen Gelegenheit haben.

Von einigen Aufgaben über die Proportionallinien.

65. 317. Zu drey gegebenen Geraden a, b, c die vierte Proportionallinie $x = \frac{bc}{a}$ durch Verzeichnung zu finden.

Auflösung. Auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels schneide man $GM = a$, $GN = b$, $GP = c$ ab, ziehe MN, und durch P die Parallele PQ, so ist $GQ = x = \frac{bc}{a}$; denn $GM : GN = GP : GQ$, d. i. $a : b = c : GQ = \frac{bc}{a}$.

66. Wäre zu zwey gegebenen a und b die dritte Proportionale $x = \frac{b^2}{a}$ zu suchen, so mache man wieder $GM = a$, $GN = b$, $GP = b$, ziehe NM, und durch P die Parallele PQ, so ist GQ die gesuchte Proportionallinie $= \frac{b^2}{a}$.

67. 318. Zwischen zwey gegebenen Geraden a und b eine mittlere Proportionale $x = \sqrt{ab}$ zu finden.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade AM, schneide $AB = a$, $BD = b$ ab, auf dem Durchmesser AD beschreibe man den Halbkreis AED, und ziehe die Senkrechte BE, so ist sie die gesuchte mittlere Proportionale $x = \sqrt{ab} = \sqrt{AB \cdot BD}$ (312.)

68. Oder man ziehe eine Gerade $DB = b =$ der größeren gegebenen, schneide $BA = a$ ab, auf AD beschreibe man den Halbkreis AEB, ziehe durch den Punkt B die Tangente BE (269.) so ist diese Tangente die gesuchte mittlere Proportionale $x = \sqrt{ab} = \sqrt{AB \cdot AD} = BE$ (311.).

D

Oder

Oder endlich, man ziehe BD = b, beschreibe darauf Fig.
den Halbkreis BED, mache BA = a, ziehe die Senkrechte 69.
AE, und durch die Punkte E und B die Sehne BE, so ist selbe die gesuchte mittlere Proportionale zwischen BD und BA; denn in den ähnlichen Dreyecken BEA und BED ist BA : BE = BE : BD, nämlich $BE = \sqrt{BA \cdot BD}$.

319. *Eine gegebene Gerade AB in eine verlangte* 70.
Anzahl gleicher Theile, z. B. in fünf zu theilen.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade MN, und schneide von M gegen N fünf gleiche Theile M1, 1 2, 2 3, 3 4, 4 5 dergestalt ab, daß M5 > AB sey, (welches zwar in der Theorie nicht unumgänglich nothwendig, hingegen in der Ausübung nützlich ist) auf M5 errichte man ein gleichseitiges Dreyeck M5D, mache DC = AB, DF = AB, und ziehe CF, so ist auch CF = AB; endlich ziehe man die Geraden D1, D2, D3, D4, so wird dadurch die Gerade CF oder die gegebene AB in fünf gleiche Theile getheilet; nämlich Ca = $\frac{1}{5}$AB, Cb = $\frac{2}{5}$AB, u. s. w. Denn DM : DC = M1 : Ca, oder M5 : AB = M1 : Ca, oder auch M5 : M1 = AB : Ca; nun aber ist M5 : M1 = 5 : 1; es ist also auch 5 : 1 = AB : Ca; und folglich Ca = $\frac{1}{5}$AB u. s. w.

Eben dieses ist zu beobachten, wenn die Gerade AB nach einem gegebenen Verhältniße zu theilen wäre, z. B. wenn diese Gerade in zwey Theile zu zertheilen wäre, die sich wie 2 : 3 verhalten, so schneide man nur *auf* der Linie MN fünf = (2 + 3) gleiche Theile ab, und ziehe die Gerade D2, so ist CF = AB in dem Punkte b in zwey Theile dergestalt getheilet, daß Cb : bF = 2 : 3 sich verhält.

320. *Eine Linie in sehr viele, z. B. fünf Zolle oder* 71.
eine andere beliebige Länge in 1000 gleiche Theile zu theilen, d. i. einen geometrischen Maaßstab zu verfertigen.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade AB, trage von A gegen B 10 habe Zolle oder andere beliebige gleiche Theile auf, in A und B errichte man die Senkrechten AC und BD,

trage

Fig. 71. trage auf jede derselben von A gegen C, und von B gegen D 10 gleiche Theile von beliebiger Länge auf, durch diese Punkte ziehe man 10 gerade Linien, die alle zu AB parallel seyn werden; auf die letzte derselben, nämlich auf CD trage man wieder die 10 halbe Zolle von C gegen D auf, welche genau bis D reichen müßen, wenn die Senkrechten AC und CD richtig gezogen sind; die Theilungspunkte der beyden Linien AB und CD verbinde man mit den Geraden ab, 100 d, 200 e, u. s. w.; sodann theile man noch den ersten halben Zoll Ab und Ca in 10 gleiche Theile, und ziehe durch diese Theilungspunkte die Querlinien (Transversalen) am, 10 n u. s. w.; endlich schreibe man die Zahlen hin, wie sie in Fig. 71. zu sehen sind, so ist die Linie AB in 1000 gleiche Theile getheilet. Nämlich 7p z. B. enthält 7, a 10 enthält 10, a 30 enthält 30, 7v enthält 37, a 100 enthält 100, und a 500 enthält 500 solcher Theile, deren 1000 = AB sind; oder $7p = \frac{7}{1000}AB$, $7v = \frac{37}{1000}AB$ u. s. w. Denn in den zwey Dreyecken abm und a7p ist ab : bm = a7 : 7p, oder ab : a7 = bm : 7p; nun aber ist ab : a7 = 10 : 7; folglich 10 : 7 = bm : 7p; ferner ist $bm = \frac{1}{10} Ab = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} AB = \frac{1}{100} AB$; es ist also $10 : 7 = \frac{1}{100} AB : 7p$, und folglich $7p = \frac{7}{1000} AB$. Eben so leicht ist es einzusehen, daß $7v = \frac{37}{1000} AB$ sey; denn $7v = 7p + pv$; nun aber ist $7p = \frac{7}{1000} AB$, und $pv = a30 = \frac{3}{10} aC = \frac{3}{100} CD = \frac{30}{1000} AB$; folglich 7v =

$= \frac{7}{1000} AB + \frac{30}{1000} AB = \frac{37}{1000} AB$ u. s. w. Auf Fig. 71.
die nämliche Art sieht man ein, daß $xv = 537$ sey; denn $xv = x7 + 7p + pv = 500 + 7 + 30 = 537$ u. s. w.

Man sieht aus der Einrichtung dieses Maaßstabes deutlich ein, daß man eine Linie, welche z. B. 530 solcher Theile enthalten solle, deren $1000 = AB$ sind, von diesem Maaßstabe mit dem Zirkel abnehmen könne, wenn man eine Spitze in 500 einsetzet, und die andere bis 30 eröfnet; sollte eine Linie von 537 Theilen abgetragen werden, so eröfnet man den Zirkel von x bis v; wären endlich nur $536\frac{1}{2}$ Theile abzunehmen, so müßten die Zirkelspitzen in der Mitte der zwey Parallelen 6 6 und 7 7, und zwar die eine auf der Senkrechten 500 h, und die andere Spitze auf der Transversale 30 v eingesetzet werden, u. s. w.

Auch kann man untersuchen, wie viel Theile eine gegebene Gerade auf diesem Maaßstabe abschneide, wenn man die Zirkelspitzen in ihre Endpunkte einsetzet, und sodann diese Oefnung des Zirkels auf die Gerade CD also überträgt, daß die erste Spitze auf einem der Theilungspunkte 200, 300 u. s. w. eingesetzet sey, die zweyte aber zwischen C und a eintreffe: sollte nun diese zweyte Spitze zwischen C und a genau in einem Theilungspunkte z B. in 30, und die erste in 500 eintreffen, so würde die gegebene Linie = 530 seyn: sollte hingegen diese zweyte Spitze zwischen zwey Theilungspunkte, z. B. zwischen 30 und 40 eintreffen, so rücke man mit dem Zirkel so lange parallel herunter, bis diese Spitze genau auf eine Transversale eintrift; eräugnet sich nun dieses in dem Punkte v, nämlich wenn die eine Spitze in v auf der Transversale 30, die andere aber auf der Parallele 7 7 in x eintrift, so enthält die gegebene Gerade 537 Theile: würden hingegen die Spitzen nur in der Mitte der Parallelen 6 6 und 7 7 jedoch auf der nämlichen Senkrechten 500 und auf der Transversale 30 eintreffen,

Fig. 71. treffen, so würde auch die gegebene Linie nur $536\frac{1}{2} = 536,5$ Theile enthalten. Sollte die gegebene Linie, welche auf diesem Maaßstabe zu untersuchen ist, größer seyn als CD, so wird nur der 2te, 3te, oder 4te Theil davon auf den Maaßstab getragen, und diese Zahl mit 2, 3, oder 4 multipliciret um die Theile der ganzen gegebenen Linie zu erhalten. Wenn man nun Ca hundert Zolle, oder 100 Schuhe, oder 100 Schritte, oder auch 100 Klafter u. s. w. gelten läßt, so heißt diese Eintheilung ein **verjüngter** Maaßstab. Die Eintheilung durch Hilfe der Transversalen eines wirklichen Zolles in Linien und Punkte, imgleichen eines willkührlichen Durchmessers einer Bombe in 64, eines angenommenen Durchmessers einer Kanonkugel in 32 gleiche Theile, und mehrerer dergleichen Maaßstäbe überlasse ich dem eigenen Nachdenken der Anfänger.

321. Der eben beschriebene geometrische Maaßstab ist bey der Auflösung einiger geometrischen Aufgaben von einem großen Nutzen, wenn die Verzeichnung der gefundenen Gleichung einem Anfänger entweder gar nicht beyfällt, oder wenn sie weitläuftig seyn sollte; denn in diesem Falle untersuche man nur, wie viel Theile auf diesem Maaßstabe eine jede in der Aufgabe gegebene Linie enthalte, entwickle sodann in Zahlen den Werth der unbekannten Linie aus der gefundenen Gleichung, und nehme sodann diesen gefundenen Werth von dem Maaßstabe herunter, so wird man die gesuchte Linie erhalten. Z. B. zwischen den zwey gegebenen Linien a und b sollen zwey mittlere Proportionalen x und y gefunden werden: nun ist vermög der Bedingung der Aufgabe $a : x = x : y$, nämlich $y = \frac{x^2}{a}$; und $x : y = y : b$, d. i. $x : \frac{x^2}{a} = \frac{x^2}{a} : b$; folglich $x = \sqrt[3]{a^2b}$, und $y = \frac{(\sqrt[3]{a^2b})^2}{a} = \sqrt[3]{ab^2}$. Es sey auf dem geometrischen Maaßstabe $b = 333,3$, und $a = 72$, so ist

$x = 120$, und $y = 200$ beynahe; man nehme demnach Fig.
diese Theile nur von dem nämlichen Maaßstabe mit dem Zir- 71.
kel herunter, so werden sie die gesuchten Linien seyn.

Imgleichen: es ist die Seite eines regelmäßigen Zwölfeckes gegeben; man soll daraus den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises finden. Es sey die gegebene Seite $= g = 200$ Theilen eines geometrischen Maaßstabes, und der unbekannte Halbmesser sey $= a$, so ist $a\sqrt{2-\sqrt{3}} = g = 200$ (vermög 308), und $a = \frac{200}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$, oder $a^2 = \frac{40000}{2-\sqrt{3}} = \frac{40000 \cdot (2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})} = \frac{40000 \cdot (2+\sqrt{3})}{4-3} = 40000 \cdot (2+\sqrt{3}) = 40000 \cdot (3,73205) = 149282$, und endlich $a = \sqrt{149282} = 386,3 = 386\frac{1}{3}$ beynahe. Man nehme demnach nur die gefundenen $386\frac{1}{3}$ Theile auf dem nämlichen Maaßstabe, so wird man die Länge des gesuchten Halbmessers haben.

Wir wollen zur Uebung noch ein paar Aufgaben hierher setzen, deren Auflösung wir in der Folge nöthig haben werden, als:

322. **Aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyeckes ABC die Höhe desselben CD, und die Abschnitte AD und DB der Grundlinie zu finden.** 80.

Auflösung. Es sey die für die Grundlinie angenommene Seite $AB = b$, $AC = a$, und $BC = c$, die Höhe $CD = y$, und der erste Abschnitt $AD = x$, so ist der zweyte Abschnitt $DB = AB - AD = b - x$. Nun ist $CD^2 = AC^2 - AD^2$ vermög (303), und auch $CD^2 = CB^2 - DB^2$, nämlich $y^2 = a^2 - x^2$, und $y^2 = c^2 - (b-x)^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$; es ist also auch $a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$; folglich $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} = x = \frac{a^2 - c^2}{2b} + \frac{1}{2}b =$

Fig. 80. $\frac{(a+c).(a-c)}{2b} + \frac{1}{2}b = AD$. Man suche also nur zu $2b$, zu $a+c$, und zu $a-c$ die vierte Proportionale, addire zu derselben $\frac{1}{2}b$, trage diese gefundene Gerade von A in D, und verbinde diese Punkte D und C mit der Geraden CD, so ist die Höhe CD, und jeder Abschnitt AD und DB bestimmet: oder man untersuche die gegebenen Seiten auf einem Maaßstabe, und berechne daraus den Werth von $x = AD$; es sey z. B. $b = 140$, $a = 150$, $c = 130$, so ist $x = \frac{(150+130).(150-130)}{280} + 70 = 90$. Wäre hingegen $AB = b = 17$, $AC = a = 10$, und $CB = c$, $= 21$, so müßte $x = \frac{(10+21).(10-21)}{34} + \frac{17}{2} = -\frac{52}{34}$, nämlich negativ seyn; und dieses ist ein Zeichen, daß der Abschnitt AD auf der entgegengesetzten Seite liegen, und der Punkt D nicht zwischen A und B, sondern diesseits des Dreyeckes auf die Verlängerung von AB fallen müße, und daß folglich in diesem Falle das Dreyeck ABC einen stumpfen Winkel in A habe. Auch für die Höhe CD läßt sich ein allgemeiner Ausdruck finden: Denn da $y^2 = a^2 - x^2$, so ist, wenn wir für x^2 seinen Werth $\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2$ substituiren, und gehörig reduciren, $y = \sqrt{\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2}}$; so z. B. ist im vorigen Falle, da wir $a = 150$, $b = 140$, $c = 130$ angenommen haben, die Höhe $y = 120$.

323. Zwey parallele Sehnen AB und PQ eines Krei-
64. ses, nebst ihrem Abstande FD sind gegeben, man soll daraus den Halbmesser bestimmen.

Auf-

Auflösung. Es sey $AB = a$, $PQ = b$, $FD = c$, Fig. der Halbmesser $MC = CE = x$, und $ED = y$, so ist 64. $ME = 2x$, $DM = ME - DE = 2x - y$, $EF = ED + DF = y + c$, und $FM = ME - FE = 2x - y - c$. Nun ist $ED : DB = DB : DM$ (312.), und $EF : FQ = FQ : FM$, nämlich $y : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : 2x - y$, und $y + c : \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b : 2x - y - c$. In der ersten Proportion ist $2xy - y^2 = \frac{1}{4}a^2$, und in der zweyten $2xy + 2cx - 2cy - y^2 - c^2 = \frac{1}{4}b^2$; aus der ersten Gleichung findet man $y = x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}a^2}$, und aus der zweyten $y = x - c + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}b^2}$; folglich $x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}a^2} = x - c + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}b^2}$, d. i. $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}a^2} = - c + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}b^2}$.. A, und $x^2 - \frac{1}{4}a^2 = c^2 - 2c\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}b^2} + x^2 - \frac{1}{4}b^2$; nämlich $\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2 - c^2 = -2c\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}b^2}$.. B, wenn man beyde Theile der Gleichung A zum Quadrate erhebet und gehörig reduciret; und nun ist $(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2 - c^2)^2 = 4c^2x^2 - b^2c^2$, wenn man auch die Gleichung B quadriret; endlich ist aus dieser letzten Gleichung $x = \frac{\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2 - c^2)^2 + b^2c^2}}{2c}$; setzen wir nun $a = 60$, $b = 80$,

$$c = 10, \text{ so ist } x = \frac{\sqrt{(1600 - 900 - 100)^2 + 640000}}{20} =$$

$$\frac{\sqrt{360000 + 640000}}{20} = \frac{\sqrt{1000000}}{20} = \frac{1000}{20} = 50.$$

Wäre hingegen $AB = a$, und $ED = b$ gegeben, so findet man den Halbmesser $EC = x = \frac{\frac{1}{4}a^2 + b^2}{2b}$, weil $ED : DB = DB : DM$, nämlich $b : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : 2x - b$ statt findet (312.).

324. Die (320.) vorgetragene Eintheilung durch Hilfe 72. der Transversalen kann auch auf die in der Artillerie üblichen Mund- und Pöllerquadranten, Winkelmesser, und andere

 dere

Fig. 72. dere mathematische Instrumente, bey denen ein Grad eines Kreisbogens noch in mehrere gleiche Theile einzutheilen ist, in der Ausübung mit Vortheile angewendet werden, und zwar auf folgende Art.

Es sey BD ein Bogen eines Quadranten, der in den Punkten 1, 2, 3 u. s. w. in die einzelnen Grade getheilet ist; der Halbmesser dieses Bogens sey $AB = a$; man verlanget jeden Grad in n gleiche Theile zu theilen: um dieses zu erhalten, schneide man von dem Halbmesser AB ein beliebiges Stück $BC = b$ von B gegen A ab, ziehe durch C mit dem Halbmesser $AC = a - b$ den Bogen CE, bemerke auf demselben wieder die einzelnen Grade $1'$, $2'$, $3'$ u. s. w., und ziehe die Transversalen C1, $1'2$, $2'3$ u. s. w., dann beschreibe man aus A die parallelen Kreisbögen 10p, 20q, 30s u. s. w. mit den Halbmessern $A10 = \frac{na^2 - nab}{na - 1b}$, $A20 = \frac{na^2 - nab}{na - 2b}$, $A30 = \frac{na^2 - nab}{na - 3b}$ u. s. w., so wird der durch den Durchschnittspunkt g der Transversale C1 gezogene Halbmesser Ad einen, und Af zwey $n$te Theile des Bogens B1 abschneiden, z. B. der erste 10, und der zweyte 20 Minuten, wenn $B1 = 1^\circ$ und $n = 6$ angenommen wird u. s. w.

Denn es sey der unbekannte Halbmesser $A10 = x$, der Bogen $B1 = c$, $Bd = \frac{c}{n}$, weil der Halbmesser Ad einen $n$ten Theil des Bogens B1 abschneiden muß, wenn er durch den Durchschnittspunkt g der Transversale C1 und des ersten parallelen Kreisbogens 10p gezogen wird; nun findet in den zwey Ausschnitten BAd und 10Ag folgende Proportion statt, $AB : A10 = Bd : 10g$, oder $a : x = \frac{c}{n} : 10g$; folglich $10g = \frac{cx}{an}$; ferner ist in den Dreyecken C10g

und

und CB1 (weil man die kleinen Bögen 10g und B1 ohne in Fig. 72.
der Ausübung einen Fehler zu befürchten für gerade Linien
ansehen kann) CB : C10 = B1 : 10g oder CB : (A10 — AC) = B1 : 10g, nämlich $b : x - (a - b) = c : 10g$,
und $10g = \frac{cx - ac + bc}{b}$; folglich auch $\frac{cx}{an} = \frac{cx - ac + bc}{b}$, oder $bx = nax - na^2 + nab$, und endlich $x = \frac{na^2 - nab}{na - b}$.

Eben so findet bey der Bestimmung des zweyten Halbmessers A20 = y folgende Proportion statt; AB : A20 = Bf : 20h, nämlich $a : y = \frac{2c}{n} : 20h$; folglich $20h = \frac{2cy}{an}$; ferner CB : C20 = B1 : 20h, nämlich $b : y - (a - b) = c : 20h$, und es ist $20h = \frac{cy - ac + bc}{b}$; folglich auch $\frac{2cy}{an} = \frac{cy - ac + bc}{b}$, und endlich $y = \frac{na^2 - nab}{na - 2b}$.

Und auf die nämliche Art findet man für die Länge des dritten Halbmessers A30 = $\frac{na^2 - nab}{na - 3b}$ u. s. w.

Es sey nun auf einem geometrischen Maaßstabe AB = a = 1000, die Breite des Randes CB = b = 100, und $n = 6$, nämlich 1 Grad sey in 6 gleiche Theile, oder von 10 zu 10 Minuten zu theilen, so ist der Halbmesser AC = 900; A10 = 915,2; A20 = 931; A30 = 947,4; A40 = 964,3; A50 = 981,8; A60 = AB = 1000.

Fig. 72. Diese Eintheilung durch Hilfe der Transversalen kann hauptsächlich auf jene Gattungen der Winkelmesser vortheilhaft angewendet werden, bey denen ein mit einem kleinen Gewichte beschwerter frey hangender Faden auf dem Rande des Instruments die gesuchten Winkel anzeiget; es sey z. B. die Lage des Fadens AF, so ist der Bogen BF, oder der Winkel BAF = 2°, 50′. Wir haben bey der Bestimmung der Halbmesser die kleinen Bögen 10g, 20h.... B1 für gerade und parallele Linien angesehen, welches zwar nicht ganz richtig ist; jedoch können wir dieses thun, ohne in der Ausübung deswegen einen Fehler zu begehen, welches wir weiter unten in der Trigonometrie werden einsehen können.

325. Bey jenen Winkelmessern hingegen, bey denen ein bewegliches Lineal die gesuchten Winkel auf dem Rande bezeichnet, pflegt man die kleinen Theile eines Grades durch Hilfe des sogenannten **Verniers** oder **Nonius** auf folgende Weise zu bestimmen.

73. Es sey AB ein Stück des Randes von einem Winkelmesser, der schon in die einzelnen Grade abgetheilet ist, D oder E sey ein Stück des um den Mittelpunkt beweglichen Lineals, Dm oder Em die Mittel-oder Visierlinie, und mn ein an dem Ende des Lineals schief abgeschliffener Bogen, der sich samt dem Lineal um den Mittelpunkt des Instruments drehen läßt. Wenn man nun mit diesem Instrumente die Winkel bis auf die sechsten Theile eines Grades, oder von 10 zu 10 Minuten zu bestimmen verlanget, so mache man den Bogen mn = 7°, theile denselben in 6 gleiche Theile, und setze die Ziffern dazu, wie sie in Fig. 73 zu sehen sind, so wird man dadurch im Stande seyn den sechsten Theil eines Grades zu bestimmen, oder die Winkel von 10 zu 10 Minuten zu messen. Stellet man nun das bewegliche Lineal also, daß der Endpunkt m der Visierlinie Dm, oder der Nullpunkt des Verniers mit einem Theilstriche des Randes, z. B. mit 10° genau übereinstimme, so wird kein einziger Theilstrich des Verniers, außer dem letzten n, mit den

Theil-

Theilstrichen des Randes übereintreffen, sondern der Strich 10 des Verniers wird von dem Striche 9 des Randes um $\frac{1}{6}$ Grad = 10 Minuten, der Strich 20 von 8 Grad um $\frac{2}{6}$ Grad = 20 Minuten, der Strich 30 von 7 Grad um 30 Minuten entfernet seyn u. s. w., weil 6 Theile des Verniers um 1 Grad oder 60 Minuten größer sind als sechs Grade des Randes, und folglich ein Theil des Verniers um $\frac{1}{6}$ Grad = 10 Minuten, zwey Theile um 20, und drey Theile des Verniers um 30 Minuten größer seyn müßen, als 1, 2, oder 3 Grade des Randes u. s. w.; wenn man demnach das Lineal so weit fortrückete, daß der Theilstrich des Verniers 40 mit dem 6ten Grade übereinstimmte, so würde der Nullpunkt um 40 Minuten von 10 Graden weiter fortgerücket seyn. Da nun in der Lage des Lineals Em der Theilstrich 40 des Verniers mit einem Theilstriche des Randes genau übereintrift, und der Nullpunkt in zwischen 29 und 30 Grad weiset, so ist der Bogen von 0 Grad gerechnet, bis zum Nullpunkte des Verniers, oder der Winkel, welchen die Visierlinie Em mit der Linie FO in dem Mittelpunkte des Instruments einschließt = 29°, 40′. Fig. 73.

Würde es erforderlich seyn, die Winkel von 5 zu 5 Minuten zu unterscheiden, so müßte der Bogen des Verniers = 13° seyn, und in 12 gleiche Theile getheilet werden. Würde endlich der Bogen des Verniers = 61°, und in 60 gleiche Theile getheilet seyn, so könnte man auch die einzelnen Minuten mit demselben bestimmen. Jedoch, da ein so großer Bogen des Verniers etwas unbequem ist, so pflegt man bey solchen Winkelmessern, mit denen Minuten zu messen sind, jeden Grad an dem Rande des Instruments in 6 gleiche Theile, nämlich von 10 zu 10 Minuten durch Theilstriche zu theilen, giebt sodann dem Bogen des Verniers 11 solche Theile und theilet denselben in 10 gleiche Theile, so können auch auf diese Art die Winkel in Graden und einzelnen Minuten gemessen werden. Denn 1 Theil des Verniers ist in diesem Falle um $\frac{1}{10}$ größer als 1 Theil des Randes, nämlich um 1 Minuten,

Fig. weil ein Theil des Randes 10 Minuten enthält. Man könnte
73. dem Vernier auch nur 9 oder 5 Theile des Randes geben, wenn ein Theil des Randes in 10 oder 6 Theile zu zertheilen ist; nur müßte der Vernierbogen in diesem Falle an der entgegengesetzten Seite des Lineals angebracht werden, wie es ein jeder selbst leicht einsehen wird.

Die Eintheilung des Verniers sowohl als des Randes muß durch Versuchen geschehen, wenn man mit keiner Theilmaschine versehen ist. Man pflegt den 4ten Theil des Umkreises in 90 gleiche Theile, d. i. in die einzelnen Grade zu theilen, wenn man ihn erstens in 3 gleiche Theile durch Uebersetzung des Halbmessers von den beyden Endpunkten, d. i. durch Einschreibung zweyer Sehnen, deren jede dem Halbmesser gleichet, zweytens jeden dieser 3 Theile durch Versuchen in 5, drittens jeden dieser fünfzehen Theile in 3, und endlich viertens jeden dieser fünf und vierzig Theile wieder in 2 gleiche Theile theilet.

Daß die Eintheilung durch Hilfe des Verniers auch auf geradlinigte Maaßstäbe angewendet werden könne, wird ohne meiner Erinnerung ein Anfänger selber leicht begreifen.

74. 326. **Anf einer gegebenen Geraden ab ein Dreyeck zu verzeichnen, welches einem gegebenen Dreyecke ACB ähnlich ist.**

Auflösung. Man verzeichne den Winkel a = A, und b = B (252.), so ist das Dreyeck abc ∽ ABC (278. IV.)

Oder man untersuche die Geraden AB, AC, BC, ab auf einem geometrischen Maaßstabe, suche sodann durch die Rechnung zu AB, AC und ab eine vierte Proportionale, trage selbe von dem nämlichen Maaßstabe herunter, und beschreibe mit einem dieser gefundenen Geraden gleichen Halbmesser aus a den Kreisbogen mn; endlich suche man auch zu AB, BC, und ab eine vierte Proportionale, und beschreibe mit derselben aus b einen Kreisbogen pq; darauf verbinde man den Durchschnittspunkt c mit den Punkten a und b, so ist das Dreyeck abc ∽ ABC (300.).

Und auf die nämliche Weise kann auf einer gegebenen Geraden ab ein Vieleck verzeichnet werden, welches einem gegebenen ABCDEFA ähnlich ist, wenn man die Diagonalen AC, AD, AE ziehet, sodann auf der gegebenen Linie ab das Dreyeck abc ∽ ABC, auf der Linie ac das Dreyeck dac ∽ DAC, auf der Linie ad das Dreyeck ade ∽ ADE, und endlich auf der Linie ae das Dreyeck afe ∽ AFE entweder durch Uebertragung der Winkel, oder durch Hilfe der Proportionallinien verzeichnet, uud sodann die Punkte a, f, e, d, c, b mit geraden Linien verbindet. Fig. 63.

Oder auch, man übertrage die gegebene Gerade auf die gleichnamige Gerade des gegebenen Vieleckes, z. B. von A bis b′, ziehe aus A in alle Vieleckswinkel die Diagonalen AC, AD, AE, und sodann aus dem Punkte b′ die Parallele b′c′ zu BC, aus c′ die Parallele c′d′ zu CD u. s. w. so ist das Vieleck Ab′c′d′e′f′A ∽ ABCDEFA, weil die Dreyecke des einen den Dreyecken des andern Vieleckes wechselsweis ähnlich sind (315). Statt den Parallelen b′c′, c′d′ u. s. w. kann man die Diagonalen Ac′, Ad′ u. s. w. durch die Rechnung bestimmen, indem man sagt, AB : Ab′ = AC : Ac′; ingleichen AB : Ab′ = AD : Ad′ u. s. w. Wäre z. B. Ab′ = $\frac{1}{2}$AB, so darf man nur jede der Diagonalen in den Punkten c′, d′, e′, f′, in zwey gleiche Theile theilen, und die Punkte b′, c′, d′, e′, f′, A mit geraden Linien verbinden, um das Vieleck Ab′c′d′e′f′A ∽ ABCDEFA zu erhalten.

Die übrigen Methoden, ein Vieleck, oder eine Figur zu verzeichnen, welche einer gegebenen Figur ähnlich ist, als z. B. durch die Einschreibung der Quadrate, durch Hilfe zweyer Maaßstäbe: u. m. d. überlasse ich dem eigenen Nachdenken der Anfänger.

327. **Eine gerade Linie AB auf dem Felde zu messen, die nur an ihren Endpunkten, und nicht nach ihrer ganzen Länge zugängig ist.** 75.

Fig. 75. Auflösung. Man suche einen Punkt C außer der geraden AB von der Beschaffenheit auf, daß man von C nach A und B in gerader Linie kommen könne, messe CA und CB aus, trage von C bis a den $n$ten (z. B. den 10ten) Theil der Geraden CA, imgleichen von C bis b den eben sovielten Theil von CB, entweder auf die Schenkel CA und CB selbst, oder auf ihre Verlängerung, messe sodann die Gerade ab und multiplicire dieselbe mit n (z. B. mit 10, wenn man $Ca = \frac{1}{10}CA$, $Cb = \frac{1}{10}CB$ aufgetragen hat,) so wird dieses die Länge der Geraden AB seyn. Denn das Dreyeck acb ∽ ACB, (301.); folglich $Ca : CA = ab : AB$, d. i. $\frac{CA}{n} : CA = ab : AB$, oder $\frac{1}{n} : 1 = ab : AB$ und endlich $AB = n \times ab$.

76. **328. Eine Gerade AB, die nur an einem ihrer Endpunkte A zugängig ist, z. B. die Entfernung des Punktes A von B zu messen.**

Auflösung. Man errichte auf AB in dem Punkte A die Senkrechte AC von beliebiger Länge, messe AC, und trage auf ihre Verlängerung den $n$ten Theil von AC, nämlich $Ca = \frac{1}{n} AC$, errichte in a wieder eine Senkrechte ab von unbestimmter Länge, verlängere sodann die Richtung BC bis sie die Gerade ab in dem Punkte b durchschneidet, messe ab, und multiplicire dieselbe mit n, so wird dieses die Länge der Geraden AB, oder die Entfernung des Punktes A von B seyn.

Sollte es die Beschaffenheit des Bodens nicht zulassen die Senkrechten zu errichten, so nehme man den Punkt C dergestalt an, daß man von C nach B und A sehen, bis A messen, und beyde CB und CA rückwärts verlängeren könne, mache $Ca = \frac{1}{n} AC$, verzeichne den Winkel $m = p$ (252) und verlängere ab und BC bis sie einander in b durchschneiden,

den, messe sodann die Linie ab, und multiplicire dieselbe mit *n*, so wird auch dieses die Länge der Geraden AB seyn. Fig. 76.

Man kann auch $\frac{1}{n}$ AC von C gegen A, z. B. bis a' auftragen, den Winkel m' = p verzeichnen, sodann die Gerade a'b' messen, und selbe mit *n* multipliciren, um die Entfernung AB zu erhalten.

329. **Eine gerade Linie AB, d. i. die Entfernung zweyer Punkte A und B zu messen, wenn beyde unzugängig sind.** 75.

Auflösung. Man suche einen Punkt C von der Beschaffenheit, daß man von C nach A und B sehen könne, messe CA und CB nach (328.), mache Ca = $\frac{1}{n}$ CA, Cb = $\frac{1}{n}$ CB, messe sodann die Linie ab und multiplicire sie mit *n*, so ist dieses die Länge der Geraden AB.

330. **Einen unzugängigen Winkel, dessen Schenkel sich rückwärts verlängern lassen, z. B. einen Bollwerkswinkel CAB in zwey gleiche Theile zu theilen, um die Verlängerung der Kapitallinie PM sichtbar zu machen.** 77.

Auflösung. Man nehme in der Verlängerung der Gesichtslinien die Punkte D und E von der Beschaffenheit an, daß man von D nach E sehen könne, messe DE, EA und DA, suche zu (EA + AD), zu AD, und zu ED die 4te Proportionallinie, trage dieselbe auf DE von D bis F, so wird die durch A und F gezogene Gerade AM den Winkel EAD = CAB in zwey gleiche Theile theilen, und folglich die Verlängerung der Kapitallinie seyn (302.).

Oder man verzeichne den Winkel n = m, theile den Winkel bDa durch die Linie Dd in zwey gleiche Theile, verlängere Dd, bis sie AE in dem Punkte G durchschneidet, messe sodann die Gerade GD, theile sie in dem Punkte N in zwey gleiche Theile, so wird auch die durch A und N gezogene Gerade AM den Winkel GAD = CAB in zwey gleiche

Theile

Fig. 77. Theile theilen, und folglich die Verlängerung der Kapitallinie seyn. Denn $AED + ADE + EAD = 180^\circ$, und auch $AGD + ADG + GAD = 180^\circ$; folglich auch $AED + ADE + EAD = AGD + ADG + GAD$, nämlich $AED + ADE = AGD + ADG$, weil $EAD = GAD$; nun aber ist $AED = n = cDa$, und $ADE = bDc$; folglich $cDa + bDc$, nämlich $bDa = AGD + ADG$; es ist aber $ADG = bDd = \frac{1}{2}bDa$; folglich $bDa = AGD + \frac{1}{2}bDa$, und $AGD = bDa - \frac{1}{2}bDa = \frac{1}{2}bDa$; es ist also auch $AGD = ADG$, und das Dreyeck GAD ist gleichschenklicht: nun aber wird die Gerade GD durch AN in zwey gleiche Theile getheilet; es ist also auch der Winkel GAD in zwey gleiche Theile getheilet (282. V.).

Durch dieses Verfahren erhält man zugleich die Parallele DQ zu der Gesichtslinie AB, weil die Wechselwinkel n und m einander gleich sind. Und auf die nämliche Weise kann zu der anderen Gesichtslinie CA eine Parallele gezogen werden.

331. Diese vier letzten praktischen Aufgaben können durch geometrische Instrumente mit größerer Genauigkeit, und dabey in einer kürzeren Zeit aufgelöset werden, wie es in der Folge zu ersehen seyn wird. Ich habe sie hierhergesetzet, damit die Anfänger den Nutzen und Gebrauch der vorgetragenen Sätze einigermassen einsehen. Ich muß noch allhier vorläufig erinnern, daß die Entfernungen der Gegenstände auf der Oberfläche unserer Erde gemeiniglich durch den horizontalen (wagerechten) Abstand bestimmet werden.

Es wird aber die Lage einer geraden Linie horizontal genennet, wenn sie von der Richtung eines freyfallenden Körpers, oder von der Richtung eines freyhangenden mit einem Gewichte beschwerten Fadens (Senkels) senkrecht durchschnitten wird; und die Richtung eines freyfallenden Körpers, oder überhaupt, jede gerade Linie, die mit dieser Richtung übereintrift, heißt eine **Vertikallinie**. Sollte nun die horizontale Entfernung zweyer Gegenstände auf unebenem Boden durch die Meßkette bestimmet werden, so ist es erfor-

lich,

lich, daß die Kettenstäbe vertikal gehalten werden, die Kette selbst aber, so viel es das Augenmaaß zuläßt, horizontal ausgespannet sey. Wäre hingegen der horizontale Abstand zweyer Gegenstände mit der möglichsten Genauigkeit zu bestimmen, und folglich mit den Meßbalken auszumessen, so ist es unumgänglich nothwendig die Meßbalken durch Hilfe eines besonderen Instruments in die horizontale Lage zu bringen, weil man in diesem Falle mit dem blossen Augenmaaße nicht zufrieden seyn darf. Man erwählet dazu entweder die allgemein bekannte **Setzwage (Schrotwage)**, deren Genauigkeit leicht mit einem blossen Handzirkel untersuchet wird, oder auch die **Wasserwage mit der Luftblase**. Diese Wasserwage (libella) besteht aus einer gläsernen Röhre AB, welche bis auf eine Luftblase CD mit Weingeiste gefüllet, an beyden Enden hermetisch zugeschmolzen, und in ein dazu gehöriges Gehäuse von Messing EF befestiget ist: sie hat die Eigenschaft, daß die Luftblase in gleichen Lagen oder Neigungen der Röhre allemal wieder die nämliche Stelle einnimmt, bey der geringsten Veränderung derselben aber sogleich davon abweicht. Stellet man nun die Wasserwage mit der unteren Fläche des Gehäuses auf eine **horizontale Ebene**, und richtet die Röhre AB durch die Schraube y dergestalt, daß die Luftblase genau in der Mitte stehe, so sagt man, daß die Wasserwage **berichtiget (rektificiret)** sey. Stellet man sodann die berichtigte Wasserwage auf eine andere Ebene, z. B. auf die Mittellinie der oberen geraden Fläche eines Meßbalkens, und erhöhet oder erniedriget, (z. B. durch unterlegte Keile) das eine Ende dieses Balkens so lange, bis die Blase genau in der Mitte stehen verbleibet, so ist diese Mittellinie des **Balkens**, oder der **Balken selbst horizontal**. Die Berichtigung der Wasserwage mit der Luftblase, und überhaupt jener Instrumente, die mit dergleichen Wasserwagen versehen sind, (als z. B. Pöller-Mund- und Ricochet Quadranten, Ricochet Dioptern u. s. w.) kann in der Ausübung durch Hilfe eines dazu eingerichteten Rektificirbrettes

Fig. 78.

PQ

Fig. PQ sehr leicht geschehen, und zwar auf folgende Art. Man
78 setze die Wasserwage EF dergestalt auf die Ebene des Rektifi-
und cirbrettes PQ, welches auf einer festen und unbeweglichen Un-
79. terlage ruhet, daß das eine Ende E gegen P, und das andere F gegen Q stehe, und erhöhe oder erniedrige diese Ebene durch die Schraube R, bis die Blase in ihre angewiesene mittlere Stelle kömmt; sodann verwende man die Wasserwage, ohne das Rektificirbrett zu verrücken also, daß die Mittellinie der unteren Fläche des Gehäuses wieder auf der nämlichen Linie der Ebene PQ liege, und E gegen Q, F aber gegen P gerichtet sey: verbleibet nun bey dieser Wendung die Blase in ihrer Stelle, so ist die Wasserwage schon ehevor berichtiget gewesen, und folglich dadurch das Rektificirbrett in Horizont gebracht worden. Tritt aber die Blase nach der Wendung auf eine Seite, so weicht jene Linie der Ebene PQ, auf der die Wasserwage stehet, von dem Horizonte um einen gewissen Winkel ab; und wird die Blase durch die Schraube R wieder an ihre angewiesene Stelle gebracht, so beschreibet die nämliche Linie das Doppelte von jenem Abweichungswinkel, und weicht sodann um eben so viel wie zuvor, jedoch nach der entgegengesetzten Seite, von dem Horizonte ab. Hat man nun für diesesmal die Umdrehungen der Schraube R gezählet, und führet die Ebene PQ um die halbe Anzahl der gezählten Umdrehungen zurück, so ist jene Linie der Ebene PQ, auf der die Wasserwage steht, horizontal: man stelle demnach nur die Blase durch die Rektificirschraube y an ihre angewiesene Stelle, so ist die Wasserwage berichtiget.

Versucht man dieses durch eine zweyte Wendung der Wasserwage, und es trift nicht ein, weil etwa die Gewinde der Schraube R ungleich, oder vielleicht die gezählten Umdrehungen nicht genau halbiret sind, so wiederhole man die Arbeit, und verfahre wie zuvor, bis endlich die Blase nach jeder Wendung genau in ihrer angewiesenen mittleren Stelle ruhet. Es erhellet von selbsten, daß man bey den eingetheilten Instrumenten, (z. B. bey den Ricochet Quadranten) das beweg-

liche

liche Lineal, auf dem die Wasserwage befestiget ist, zuerst auf den Nullpunkt stellen, und sodann das Instrument gehörig auf das Rektificirbrett legen müße. Das Rektificirbrett kann von einem guten harten Holze verfertiget, und also eingerichtet werden, daß es für mehrere Instrumente zugleich dienet. Fig.

Zweyte Vorlesung.

Von den Eigenschaften der ebenen Flächen.

Von der Bestimmung des Flächeninhaltes geradlinigter Figuren.

332. Eine gegebene geradlinigte Figur wird ausgemessen, wenn man untersuchet, wie oft eine bekannte für die Einheit angenommene Fläche in derselben enthalten sey, das ist wie vielmal sich die bekannte Fläche in der gegebenen auszumessenden herumlegen lasse. Die Zahl nun, welche anzeiget, wie oft die bekannte Fläche in der gegebenen enthalten sey, bestimmet den Flächeninhalt der auszumessenden Fläche, wenn sie mit der für die Einheit angenommenen Fläche multipliciret wird. Die Fläche, womit geradlinigte Figuren ausgemessen werden, ist gemeiniglich ein Quadrat, dessen Seite bald einen Zoll, bald einen Schuh, bald eine Klafter, zuweilen auch bey der Bestimmung sehr großer Flächen (z. B. ganzer Provinzen) eine Meile beträgt; die erste Fläche heißt ein Quadratzoll, die zweyte ein Quadratschuh, die dritte eine Quadratklafter, u. s. w. 81.

333. Wenn die Seite des zum Maaßstabe angenommenen Quadrates *a* in der Grundlinie DC eines gegebenen Rechteckes *m*mal (z. B. 5mal), und in der Höhe DA desselben *n*mal

(z. B.

81. (z. B. 3mal) enthalten ist, so ist der Flächeninhalt des Rechteckes ABCD $= mn . a = 5 . 3 . a = 15 . a$.

Denn man theile nur die Grundlinien DC und AB in $m = 5$, und die Höhen DA und CB in $n = 3$ gleiche Theile, und verbinde die Theilungspunkte durch gerade Linien, so wird man augenscheinlich sehen, daß auf der Grundlinie DC eine Reihe von $m = 5$ gleichen Quadraten entstehe, deren jedes dem für den Maaßstab angenommenen Quadrate gleich ist, und daß $n = 3$ solche vollkommen gleiche Reihen übereinander stehen; es ist demnach die Anzahl aller eingeschriebenen Quadrate $= m . n = 5 \cdot 3 = 15$; nun ist ein edes solches Quadrat z. B. $b = a$; es ist also auch $mn . b = mn . a$; nun aber ist $mn . b =$ ABCD; es ist also auch $mn . a =$ ABCD $= 5 . 3 . a = 15a$.

334. Setzet man die Seite des für die Einheit angenommenen Quadrates $= s$, so ist DC $= ms$, und DA $= ns$, nämlich $m = \frac{DC}{s}$, und $n = \frac{DA}{s}$, wenn s in DC $m$mal, und in DA $n$mal enthalten ist; nun aber ist das Rechteck ABCD $= m . n . a$; es ist also auch ABCD $= \frac{DC}{s} \cdot \frac{DA}{s} . a = \frac{DC . DA . a}{s^2}$; setzet man ferner $s = 1$ (z. B. $s = 1$ Schuhe), so ist $a = 1$ Quadratschuhe, und folglich ABCD $=$ DC . DA Quadratschuhen; nämlich der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie in die Höhe oder Breite des Rechteckes, allwo für die Einheit das Quadrat auf derjenigen Linie genommen werden muß, mit der man die Grundlinie und Höhe des Rechteckes ausgemessen hat.

335. Da nun ein Quadrat nichts anderes ist, als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe, so ist der Flächeninhalt eines gegebenen Quadrates gleich dem Produkte einer

einer Seite desselben mit sich selbst multipliciret. Der Flä- Fig.
cheninhalt eines Quadrates, dessen jede Seite in der Länge 12 Zolle beträgt, das ist ein Quadratschuh, ist demnach $= 12 . 12 = 144$ Quadratzollen; eine Quadratklafter $= 6 . 6 = 36$ Quadratschuhen $= 36 . 144 = 5184$ Quadratzollen; u. s. w.

336. Würde die Länge der Grundlinie, und auch die Höhe eines Rechteckes, oder nur eine aus diesen zwey Abmessungen in Klaftern, Schuhen, Zollen, u. s. w. ausgedrücket seyn, so muß man diese zwey Abmessungen, damit sie beyde mit einer nämlichen Einheit gemessen sind, in Zolle verwandeln, wenn die kleinste gegebene Gattung aus Zollen besteht; sodann muß man diese zwey verwandelten Abmessungen mit einander multipliciren um den Flächeninhalt in Quadratzollen zu erhalten, und endlich dieses Produkt durch $36 . 144 = 5184$, den Rest aber durch 144 dividiren, um diesen nämlichen Flächeninhalt in Quadratklaftern und Quadratschuhen zu bestimmen. Man kömmt gemeiniglich in diesem Falle mit der Rechnung am geschwindesten zu Ende, wenn man die Größen der kleineren Gattung in Brüche von der größeren Gattung nach (60) verwandelt, und sodann die Multiplikation nach (61) verrichtet. Es sey z. B. die Grundlinie eines Rechteckes $= 4^\circ, 0^\prime, 9^{\prime\prime}$; und die Höhe $= 0^\circ, 3^\prime, 6^{\prime\prime}$; nun ist $4^\circ, 0^\prime, 9^{\prime\prime} = \frac{33^\circ}{8}$, und $0^\circ, 3^\prime, 6^{\prime\prime} = \frac{7^\circ}{12}$; folglich ist der Flächeninhalt $= \frac{33^\circ}{8} \cdot \frac{7^\circ}{12} = \frac{231}{96}$ Quadratklaftern $= 2\frac{13}{32}\,\square^\circ = 2\,\square^\circ$ und $\frac{13 \,.\, 36}{32}$ Quadratschuhen $= 2\,\square^\circ\; 14\frac{5}{8}\,\square^\prime$; und eben so lassen sich $\frac{5}{8}$ Quadratschuhe in $\frac{5 \,.\, 144}{8} = 90$ Quadratzolle verwandeln; es ist demnach der Flächeninhalt des gegebenen Rechteckes $= 2\,\square^\circ\; 14\,\square^\prime$ und $90\,\square^{\prime\prime}$.

Fig. 337. Einige praktischen Meßkünstler theilen die Quadratklafter in 6 Theile, die sie **Klafterschuhe** (oder Riemenschuhe) nennen; jeden solchen Theil zerfällen sie wieder in 12 gleiche Theile, und diese heissen sie **Klafterzolle**; u. s. w. Es ist demnach vermög dieser Benennung ein Klafterschuh $= \frac{36}{6} =$ 6 Quadratschuhen, ein Klafterzoll $= \frac{6}{12}$ Quadratschuhen $= \frac{6 \cdot 144}{12} =$ 72 Quadratzollen, eine Klafterlinie $= \frac{72}{12} =$ 6 Quadratzollen, ein Klafterpunkt $= \frac{6}{12}$ Quadratzollen $= \frac{6 \cdot 144}{12} =$ 72 Quadratlinien, weil 1 Quadratzoll = 144 Quadratlinien. Folglich enthält nach dieser Benennung ein Rechteck, dessen Grundlinie $= 4^{\circ}, 0', 9'' = \frac{33^{\circ}}{8}$, und Höhe $= 0^{\circ}, 3', 6'' = \frac{7^{\circ}}{12}$, einen Flächeninhalt von $\frac{33}{8} \cdot \frac{7}{12} = 2\frac{13}{32}$ Q° = 2 Quadratkl. und $\frac{13 \cdot 6}{32}$ Klafterschuhen = 2 Q° und $2\frac{7}{16}$ Klaftersch. = 2 Q° 2 Klaftersch. und $\frac{7 \cdot 12}{16}$ Klafterzollen = 2 Q° 2 Klaftersch. und $5\frac{1}{4}$ Klaftz. = 2 Quadratkl. 2 Klaftsch. 5 Klaftz. und 3 Klafterlinien, weil $\frac{1}{4}$ Klafterzoll $= \frac{1 \cdot 12}{4} =$ 3 Klafterlinien.

Eben diese praktischen Meßkünstler theilen einen Quadratschuh in 12 Schuhzolle, einen Schuhzoll, in 12 Schuhlinien, eine Schuhlinie in 12 Schuhpunkte; es ist demnach ein Schuhzoll $= \frac{144}{12} =$ 12 Quadratzollen, eine Schuhlinie

linie $= \frac{12}{12} =$ 1 Quadratzolle, ein Schuhpunkt $=$ Fig.
$\frac{1}{12}$ Quadratzoll $= \frac{1 \cdot 144}{12} = 12$ Quadratlinien. Wäre nun die Grundlinie eines Rechteckes $= 10', 5'', 3''' = \frac{167'}{16}$, und die Höhe $= 0', 9'' = \frac{3'}{4}$, so ist der Flächeninhalt desselben $= \frac{167}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{501}{64} = 7\frac{53}{64}$ Quadratschuhen $= 7$ Quadratschuhen und $\frac{53 \cdot 12}{64}$ Schuhzollen $=$ 7 Quadratschuhen und $9\frac{15}{16}$ Schuhzollen $= 7$ Quadratschuhen 9 Schuhzollen 11 Schuhlinien und 3 Schuhpunkten: oder dieser nämliche Flächeninhalt ist $= 7\frac{53}{64}$ Quadratschuhen $= 7$ Q' und $\frac{53 \cdot 144}{64}$ Q'' $= 7$ Q' und $119\frac{1}{4}$ Q'' $= 7$ Q' 119 Q'' und 36 Q''', weil $\frac{1}{4}$ Quadratzoll $= \frac{1 \cdot 144}{4} = 36$ Quadratlinien.

338. Der Flächeninhalt eines Parallelograms ABCD 82.
ist $=$ BC . AG $=$ BC . CE $=$ BC . BF $=$ AD . AG $=$ dem Produkte einer Seite multipliciret mit ihrem Abstande von der entgegengesetzten Seite.

Denn der Flächeninhalt des Parallelograms ABCD ist $=$ dem Rechtecke BFEC (289.); nun aber ist das Rechteck BFEC $=$ BC . BF $=$ BC . CE; es ist also auch der Flächeninhalt des Parallelograms ABCD $=$ BC . BF $=$ BC . CE $=$ AD . AG, weil BF $=$ AG $=$ EC, und BC $=$ AD.

339. Und der Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes ABC ist $= \frac{1}{2}$BC . AG $=$ dem halben Produkte aus der Grundlinie in die Höhe $=$ dem halben Produkte aus einer Seite in den Abstand des entgegengesetzten Winkels.

Fig. 82. Denn das Dreyeck ABC $= \frac{1}{2}$ABCD (287. I.); nun aber ist $\frac{1}{2}$ABCD $= \frac{1}{2}$BC . AG (weil ABCD $=$ BC . AG); es ist also auch das Dreyeck ABC $= \frac{1}{2}$BC . AG.

Aus der Gleichung ABC $= \frac{1}{2}$BC . AG folget AG $= \frac{ABC}{\frac{1}{2}BC}$, und BC $= \frac{ABC}{\frac{1}{2}AG}$, das ist wenn man den Flächeninhalt eines Dreyeckes mit der halben Grundlinie dividiret, so ist der Quotient $=$ der Höhe des Dreyeckes; dividiret man hingegen den Flächeninhalt durch die halbe Höhe, so ist der Quotient der Grundlinie gleich. Es sey z. B. der Flächeninhalt eines Dreyeckes $= 11\,\square^{\circ}\,12\,\square^{I} = \frac{34}{3}\,\square^{\circ}$, und die Grundlinie $= 5^{\circ}, 1^{I}, 6^{II} = \frac{21^{\circ}}{4}$, so ist die Höhe $= \frac{34}{3} : \frac{21}{8} = \frac{34}{3} \cdot \frac{8}{21} = \frac{272}{63} = 4\frac{20}{63}$ Klafter. Es ist aus diesem Beyspiele leicht zu ersehen, wie dergleichen Divisionen vorzunehmen seyn.

83. 340. Wenn man nun bey einem rechtwinklichten Dreyecke ABC eine Kathete für die Grundlinie annimmt, so wird die andere Kathete die Höhe dieses Dreyeckes seyn; folglich ist der Flächeninhalt eines rechtwinklichten Dreyeckes gleich dem halben Produkte aus den beyden Katheten $= \frac{1}{2}$AB . BC $= \frac{1}{2}ab$, wenn BC $= b$, und AB $= a$ gesetzet wird.

341. Wenn man die Höhe eines rechtwinklichten Dreyeckes in ∞ gleiche Theile Am, mn, np, u. s. w. in Gedanken zertheilet, durch die Theilungspunkte die Parallelen me, nf, pg. . . . und endlich die Senkrechten er, fs, gt, u. s. w. zieht, so ist die Summe aller eingeschriebenen Rechtecke mr $+$ ns $+$ pt $+ \ldots\ldots +$ xz $= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}$AB . BC $=$ dem Flächeninhalte des Dreyeckes ABC.

Denn

Denn da $Am = mn = np = \frac{AB}{\infty} = \frac{a}{\infty}$, so ist $An =$ Fig. 83.
$Am + mn = \frac{a}{\infty} + \frac{a}{\infty} = \frac{2a}{\infty}$, $Ap = \frac{3a}{\infty}$ u. s. w.
$Ax = \frac{(\infty - 1)a}{\infty} = \frac{\infty a}{\infty}$ vermög (143) $= a = AB$; ferner ist $AB : BC = Am : me$, nämlich $a : b = \frac{a}{\infty} : me$, folglich $me = \frac{ab}{a\infty} = \frac{b}{\infty}$; imgleichen $AB : BC = An : nf$, nämlich $a : b = \frac{2a}{\infty} : nf$, folglich $nf = \frac{2b}{\infty}$; eben so findet man $pg = \frac{3b}{\infty}$, u. s. w., und $xy = b$, weil wieder $AB : BC = Ax : xy$, nämlich $a : b = \frac{(\infty - 1)a}{\infty} : xy = \frac{(\infty - 1)ab}{\infty a} = \frac{\infty ab}{\infty a} = b$ statt findet. Nun ist das Rechteck $mr = mn \cdot me = \frac{a}{\infty} \cdot \frac{b}{\infty} = \frac{ab}{\infty^2}$, das Rechteck $ns = np \cdot nf = \frac{a}{\infty} \cdot \frac{2b}{\infty} = \frac{2ab}{\infty^2}$, das Rechteck $pt = pq \cdot pg = \frac{a}{\infty} \cdot \frac{3b}{\infty} = \frac{3ab}{\infty^2}$, u. s. w.; und das letzte Rechteck $xz = xy \cdot xB = \frac{a}{\infty} \cdot b = \frac{ab}{\infty} = \frac{\infty ab}{\infty^2}$; folglich ist die Summe aller dieser Rechtecke $= \frac{ab}{\infty^2} + \frac{2ab}{\infty^2} + \frac{3ab}{\infty^2} + \frac{4ab}{\infty^2} + \frac{5ab}{\infty^2} + \ldots + \frac{\infty ab}{\infty^2} = \frac{ab}{\infty^2} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + \infty) = \frac{ab}{\infty^2} \cdot \frac{1}{2}\infty^2 = \frac{1}{2}ab$ (weil die Summe der unendlichen Reihe aller natürlichen Zah-

 len

Fig. 83. len dem Produkte aus dem letzten Gliede in die halbe Anzahl der Glieder gleichet); nun ist $\frac{1}{2}ab$ = dem Flächeninhalte des Dreyeckes ABC; es ist also auch die Summe dieser eingeschriebenen Rechtecke = dem Flächeninhalte des Dreyeckes ABC.

Bey dem Anblicke der Fig. 83. scheint es unseren Sinnen, daß die Summe der eingeschriebenen Rechtecke kleiner seyn müßte, als das Dreyeck ABC, es scheint, daß man zu der gefundenen Summe der Rechtecke noch die Summe der unendlich kleinen einander vollkommen gleichen Dreyecke längst der Hypothenuse AC addiren müßte um den wahren Flächeninhalt des Dreyeckes ABC zu erhalten: allein dieses kömmt daher, weil in Fig. 83 die Parallelen eine endliche Entfernung haben, da die Höhe BA nur in eine endliche Anzahl gleicher Theile getheilet ist. Bildet man sich ein, daß die Theile Am = mn = np u. s. w. immer kleiner werden, so werden auch die Dreyecke Ame = erf = fsg, u. s. w. immer kleiner, und werden endlich gar verschwinden, wenn die Theile Am = mn = np = ... unendlich klein werden, weil in diesem Falle die Spitzen e, r, f, wie nicht weniger f, s, g, der Dreyecke erf, fsg, u. s. w. übereinander fallen, und jede zwey nebenliegenden Parallelen einander vollkommen gleich sind. Diese unendlich kleinen Dreyecke Ame, erf, fsg, ... yzC sind alle einander vollkommen gleich, jedes derselben ist $= \frac{ab}{2\infty^2}$, weil eines jeden solchen Dreyeckes Höhe Am = er = mn = fs = xy = $\frac{a}{\infty}$, und Grundlinie me = rf = sg = zC = $\frac{b}{\infty}$, und die Anzahl dieser Dreyecke ist = ∞; folglich ist ihre Summe $\frac{ab}{2\infty^2} . \infty = \frac{ab}{2\infty}$. Würde man nun diese Summe $\frac{ab}{2\infty}$ der Dreyecke zu der gefundenen Summe $\frac{ab}{2}$ der eingeschriebenen Recht-

ecke

ecke addiren, so wäre dem ungeachtet $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2\infty} = \frac{ab}{2} = ABC$, weil $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2\infty} = \frac{ab}{2} + 0 = \frac{ab}{2}$ (146). Fig.

Wenn nun jemand entweder aus Eigensinne, oder aus Mangel des Verstandes nicht einsehen könnte, daß $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2\infty} = \frac{ab}{2} + 0 = \frac{ab}{2}$, nämlich daß durch die Summirung der eingeschriebenen Rechtecke der wahre Ausdruck für den Flächeninhalte erhalten werde, so erwäge er nur, daß eben dadurch, weil man bey der Summirung der eingeschriebenen Rechtecke für das letzte Rechteck $BC \cdot xB = \frac{ab}{\infty}$ angenommen, da man doch eigentlich für die Anzahl der Rechtecke $mB = \infty - 1$, und für das letzte Rechteck $xy \cdot xB = \frac{(\infty - 1)b}{\infty} \cdot \frac{a}{\infty} = \frac{(\infty - 1)ab}{\infty^2}$ annehmen sollte, daß (sage ich) eben dadurch die unendlich kleinen Dreyecke längst der Hypothenuse in die Summe der eingeschriebenen Rechtecke miteingeflossen sind, ohne daß man daran dachte: denn man summire noch einmal (ohne daran zu denken, daß ∞ eine unendlich große Zahl bedeute) die eingeschriebenen Rechtecke, welche in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges fortwachsen, und addire dazu die Summe der kleinen Dreyecke längst der Hypothenuse, so ist

$$\left[\frac{ab}{\infty^2} + \frac{2ab}{\infty^2} + \frac{3ab}{\infty^2} + \frac{4ab}{\infty^2} + \frac{5ab}{\infty^2} + \ldots + \frac{(\infty - 1)\,ab}{\infty}\right] + \frac{ab}{2\infty} = ABC,$$

nämlich die Summe der eingeschriebenen Rechtecke mehr der Summe der Dreyecke

 längst

Fig. längst der Hypothenuse = dem Dreyecke ABC; das ist
83. $\left(\frac{\infty - 1}{2}\right) \times \left(\frac{ab}{\infty^2} + \frac{(\infty - 1)ab}{\infty^2}\right) + \frac{ab}{2\infty} =$
ABC, weil die Summe einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges = dem Produkte aus der Summe des ersten und letzten Gliedes in die halbe Anzahl der Glieder; oder
$$\left(\frac{\infty - 1}{2}\right) \times \left(\frac{ab}{\infty^2} + \frac{\infty ab - ab}{\infty^2}\right) + \frac{ab}{2\infty} =$$
$$\left(\frac{\infty - 1}{2}\right) \cdot \frac{ab}{\infty} + \frac{ab}{2\infty} = \frac{\infty ab}{2\infty} - \frac{ab}{2\infty} + \frac{ab}{2\infty} = \frac{ab}{2}$$
$= ABC = \frac{AB \,.\, BC}{2}$, wie im vorigen Falle: woraus deutlich abzunehmen ist, daß man durch die vorhergehende Summirung der eingeschriebenen Rechtecke den wahren Ausdruck für den Flächeninhalt erhalte.

Würde man die umgeschriebenen Rechtecke summiren, so wäre ihre Summe ebenfalls $= \frac{ab}{2} =$ dem Flächeninhalte des Dreyeckes ABC, wenn BA $= a$ in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilet ist; folglich ist in diesem Falle die Summe der umgeschriebenen Rechtecke der Summe der eingeschriebenen gleich.

84. 342. Die Summe der eingeschriebenen Rechtecke ist der Summe der umgeschriebenen auch noch gleich, wenn (Fig. 84.) ADC eine krumme Linie seyn sollte, vorausgesetzt, daß BA in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilet sey. Denn es sey AB $= a$, BC $= b$, mB $= \frac{a}{\infty}$, so ist das Rechteck Bn $= \frac{ab}{\infty}$; ferner sey die Summe der eingeschriebenen Rechtecke $= s$, und der umgeschriebenen $= S$, so ist $S = s +$ Bn $= s + \frac{ab}{\infty}$, wie es Fig. 84. deutlich zeiget, und endlich

lich $S = s$, weil $s + \frac{ab}{\infty} = s + 0 = s$. Da nun in Fig. 84.
der angenommenen Voraussetzung (daß nämlich BA in ∞ gleiche Theile getheilet sey) die Summe der eingeschriebenen Rechtecke der Summe der umgeschriebenen gleichet, so ist in der nämlichen Voraussetzung um so mehr jede derselben dem Flächeninhalte ABCDA gleich. Wir werden in der Folge öfters den Flächeninhalt krummlinigter Figuren durch die Summirung der eingeschriebenen Rechtecke bestimmen. Diese eingeschriebenen Rechtecke werden **Elemente** des Flächeninhaltes genennet.

343. Der Flächeninhalt eines Trapezes ABCD ist 85.
$= \frac{(AB + CD) . DE}{2} = \frac{(AB + CD) . BF}{2} =$ dem halben Produkte aus der Summe der zwey parallelen Seiten multipliciret mit ihrem Abstande.

Denn $ABCD = ABD + DBC$; nun aber ist ABD $= \frac{AB . DE}{2}$, und $BDC = \frac{DC . BF}{2} = \frac{DC . DE}{2}$; folglich ist $ABCD = \frac{AB . DE + DC . DE}{2} = \frac{(AB + DC) . DE}{2}$.

344. Und der Flächeninhalt eines jeden Viereckes ABCD 86.
ist $= \frac{AC . (ED + FB)}{2} =$ dem halben Produkte aus einer Diagonale in die Summe der Abstände der zwey entgegengesetzten Winkel.

Denn $ABCD = ACB + ACD$; nun aber ist ACB $= \frac{AC . FB}{2}$, und $ACD = \frac{AC . DE}{2}$; folglich ist ABCD $= \frac{AC . FB + AC . DE}{2} = \frac{AC . (DE + FB)}{2}$.

345. Der Flächeninhalt eines jeden regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange in den

Fig. Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, oder in die Senkrechte, welche aus dem Mittelpunkte auf was immer für eine Seite gezogen wird; z. B. wenn die Seite eines regelmäßigen *n*eckes $= l$, sein Umfang $= nl = p$, und die Senkrechte aus dem Mittelpunkte auf eine Seite gezogen $= a$, so ist der Flächeninhalt $= \frac{1}{2}ap$.

Denn man bilde sich nur ein, daß aus dem Mittelpunkte in alle Vielecks winkel gerade Linien gezogen seyn, so wird dadurch das regelmäßige *n*eck in *n* vollkommen gleiche Dreyecke zertheilet, deren jedes $= \frac{1}{2}al$; es ist demnach die Summe aller dieser Dreyecke, das ist der Flächeninhalt des regelmäßigen *n*eckes $= n \cdot \frac{1}{2}al = \frac{1}{2}anl = \frac{1}{2}ap$, wenn wir p statt nl substituiren.

346. Wir wollen die Ausdrücke für den Flächeninhalt einiger regelmäßigen Vielecke hierhersetzen; es ist nämlich:

49. I. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreyeckes ADG $= \frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$, wenn wir jede Seite desselben $= b$ setzen, weil $GQ = \sqrt{GD^2 - QD^2} = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}b^2} = \sqrt{\frac{3}{4}b^2} = \frac{1}{2}b\sqrt{3}$; und folglich $\frac{1}{2}AD \cdot GQ = \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}b\sqrt{3} = \frac{1}{4}b^2\sqrt{3} = AGD$.

II. Der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seite $= b$, ist $= b^2$.

III. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfeckes, dessen Seite $= b$, ist $= \frac{5}{4}b^2\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$; denn die Senk-
60. rechte CD in einem regelmäßigen Fünfecke ist $= \frac{1}{2}b\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$, wenn AB $= b$ gesetzet wird (309); und folglich ist das Dreyeck ACB $= \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}b\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{4}b^2\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$, und alle fünf Dreyecke, das ist der Flächeninhalt des regelmäßigen Fünfeckes $= \boxed{5 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}} = \frac{5}{4}b^2\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$.

$\frac{1}{4}b^2\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$

IV. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes, dessen Seite $= b$, ist $= \frac{3}{2}b^2\sqrt{3}$, weil die Senkrechte in einem regelmäßigen Sechsecke $= \frac{1}{2}b\sqrt{3}$.

V.

V. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Achteckes, dessen Seite $= b$, ist $= 2b^2\sqrt{3+2\sqrt{2}}$. Fig.

VI. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zehneckes, dessen Seite $= b$, ist $= \frac{5}{2}b^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

VII. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zwölfeckes, dessen Seite $= b$, ist $= 3b^2\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

347. Der Flächeninhalt eines jeden unregelmäßigen Viel- 63.
eckes abcdef wird erhalten, wenn man es durch die Diagonalen ae, ad, ac in lauter Dreyecke zertheilet, den Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes besonders berechnet, und sodann alle diese Inhalte zusammen addiret. Wenn man zwey Dreyecke auf einmal zusammen nimmt, das ist, wenn man die Vierecke fade, adcb nach (344) berechnet, so wird die Arbeit am geschwindesten zu Ende gebracht.

348. Die Kreisfläche ist gleich dem halben Produkte aus dem Umkreise in den Halbmesser, nämlich $= \frac{1}{2}ap$, wenn der Halbmesser $= a$, und der Umkreis $= p$ gesetzet wird.

Denn man kann den Kreis ansehen als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten, bey dem die Senkrechten aus dem Mittelpunkte auf die Vielecksseiten gezogen $=$ dem Halbmesser $= a$, und dessen Umfang $= p$; nun ist der Flächeninhalt eines solchen regelmäßigen Vieleckes $= \frac{1}{2}ap$; es ist also auch die Kreisfläche $= \frac{1}{2}ap$. Daß bey einem regelmäßigen Vielecke von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten die Senkrechte aus dem Mittelpunkte auf eine Vielecksseite gezogen dem Halbmesser des umgeschriebenen Kreises gleiche, ist leicht einzusehen. Denn es sey AB die Seite eines regelmäßigen Viel- 60.
eckes von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten, so ist AB $= \frac{1}{\infty}$, AD $= \frac{1}{2}$AB $= \frac{1}{2\infty}$, und folglich die Senkrechte

$$\mathrm{CD} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AD}^2} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \frac{1}{4\infty^2}} = \sqrt{\mathrm{AC}^2}$$

=

Fig. $= AC$, weil $AC^2 - \frac{1}{4\infty^2} = AC^2 - 0 = AC^2$.

349. Daß die Kreisfläche $= \frac{1}{2}ap$ sey, wenn man den
84. Halbmesser mit a, und den Umkreis mit p bezeichnet, läßt sich auch also erweisen. Es sey was immer für ein Bogen eines Kreises $EF = b$: man theile diesen in Gedanken in eine unendliche Anzahl gleicher Theile Ed, de, ef, so ist ein jeder solcher Theil $= \frac{b}{\infty}$; durch diese Theilungspunkte ziehe man die Halbmesser dB, eB, fB, so ist der Ausschnitt EBF dadurch in eine unendliche Anzahl gleicher Dreyecke EBd, dBe, eBf aufgelöset, weil man die unendlich kleinen Bögen Ed, de, ef für gerade Linien ansehen kann; nun ist ein jedes solches unendlich kleines Dreyeck $EBd = \frac{Ed \cdot Bc}{2}$ $= \frac{b}{\infty} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{2\infty}$; es ist also auch $\infty \cdot EBd = \infty \cdot \frac{ab}{2\infty} = \frac{ab}{2}$; nun aber ist $\infty \cdot EBd =$ dem Ausschnitte EBF; folglich ist auch $\frac{ab}{2} =$ dem Ausschnitte EBF, nämlich der Flächeninhalt eines Ausschnittes ist gleich dem halben Produkte aus dem Halbmesser in die Länge des Bogens: setzen wir nun $b = p$, das ist, theilen wir statt dem Bogen EF den ganzen Umkreis in ∞ gleiche Theile, so erhalten wir $\frac{ap}{2}$ für die ganze Kreisfläche; es ist demnach die ganze Kreisfläche gleich dem halben Produkte aus dem Halbmesser in die Länge des ganzen Umkreises = einem Dreyecke, dessen Grundlinie $= p$, und Höhe $= a$.

350. Wäre nun das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise bekannt, so könnte der Flächeninhalt eines jeden Kreises, und auch eines jeden Kreisausschnittes berechnet werden, wenn nur in dem letzten nebst dem Halbmesser auch

der Winkel bekannt ist. Es sey z. B. das Verhältniß des Fig.
Durchmessers zum Umkreise = 113 : 355, und die Länge eines gegebenen Halbmessers = 100', so ist 113 : 355 34.
$= 2 . 100' :$ Umkr.; folglich ist der Umkreis $= \frac{2 . 100 . 355}{113}$
$= 628,318'$; und der Flächeninhalt $= \frac{1}{2} . 628,318 . 100 =$
$31415,9$ Q' = 31415 Q' und $\frac{9.144}{10}$ Q'' = 31415 Q'
und 129,6 Q'', oder = 31415 Q' und 10,8 Schuhzollen. In dem nämlichen Kreise ist ein Kreisausschnitt, dessen Winkel 60 Grade beträgt, = 5235,9 Q', wenn man schließt $360° : 60° = 628,318$ (nämlich die Länge des ganzen Umkreises) : zur Länge des Bogens eines Ausschnittes von $60° = \frac{628,318 . 60}{360°}$, und sodann diese gefundene Länge mit dem halben Halbmesser multipliciret. Man erhält auch eben diesen Ausdruck, wenn man schließt $360 : 60 =$ 31415,9 Q' (nämlich die ganze Kreisfläche) : zum Flächeninhalte des Ausschnittes von 60° = 5235,9 Q'.

Wäre ein Kreisabschnitt AEBA zu berechnen, so muß 60.
man erstens den Flächeninhalt des dazu gehörigen Kreisausschnittes AEBCA, zweytens den Flächeninhalt des Dreyeckes ABC bestimmen, und sodann den zweyten Flächeninhalt von dem ersten abziehen, so wird der Ueberrest den Flächeninhalt des Kreisabschnittes AEBA gleich seyn.

351. Das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise 87.
können wir auf folgende Art durch eine Näherung bestimmen.

Es sey der Halbmesser eines Kreises CD = CB = CA $= a$, AC und BM senkrecht auf CD, und CM $= x$, so ist der Flächeninhalt des Stückes CMBAC $= ax -$

$$\frac{x^3}{2 . 3 . a} - \frac{1 . x^5}{2 . 4 . 5 . a^3} - \frac{1 . 3 . x^7}{2 . 4 . 6 . 7 . a^5} - \frac{1 . 3 . 5 . x^9}{2 . 4 . 6 . 8 . 9 . a^7} - \ldots.$$

Denn

Fig. 87. Denn man bilde sich nur ein, daß die Abscisse CM $= x$ in eine unendliche Anzahl gleicher Theile Cc $=$ ce $=$ em u. s. w. getheilet sey, ziehe durch die Theilungspunkte c, e, m,.. die Ordinaten cd, ef, mn, u. s. w. so ist Cc $= \frac{x}{\infty}$, cd $=$ $\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{\infty^2}}$; Ce $= \frac{2x}{\infty}$, ef $= \sqrt{a^2 - \frac{2^2 x^2}{\infty^2}}$; Cm $=$ $\frac{3x}{\infty}$, mn $= \sqrt{a^2 - \frac{3^2 x}{\infty^2}}$ u. s. w. CM $= x = \frac{\infty x}{\infty}$, MB $= \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \frac{\infty^2 x^2}{\infty^2}}$ vermög (313): wenn man nun jede dieser Ordinaten mit $\frac{x}{\infty}$ multipliciret, so erhält man eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Rechtecke, welche zusammen addiret dem Flächeninhalte CMBA gleich sind, nämlich, Cd + cf + en + ... qB = Cc . cd + ce . ef + ... + qM . MB $= \frac{x}{\infty} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{\infty^2}} + \frac{x}{\infty} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{2^2 x^2}{\infty^2}} +$ $\frac{x}{\infty} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{3^2 x^2}{\infty^2}} + \ldots + \frac{x}{\infty} \sqrt{a^2 - \frac{\infty^2 x^2}{\infty^2}} =$ CMBA, oder wenn man jede dieser Wurzelgrößen nach (187) in eine unendliche Reihe auflöset, und selbe mit $\frac{x}{\infty}$ multipliciret,

$$\text{so ist } \frac{x}{\infty} \cdot a - \frac{x}{\infty} \cdot \frac{x^2}{2.a.\infty^2} - \frac{x}{\infty} \cdot \frac{1.x^4}{2.4.a^3.\infty^4} - \frac{x}{\infty} \cdot \frac{1.3.x^6}{2.4.6.a^5.\infty^6}$$
$$- \frac{x}{\infty} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^8}{2.4.6.8.a^7.\infty^8} - \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{x}{\infty} \cdot a - \frac{x}{\infty} \cdot \frac{2^2.x^2}{2.a.\infty^2} - \frac{x}{\infty} \cdot \frac{1.2^4.x^4}{2.4.a^3.\infty^4} - \frac{x}{\infty} \cdot \frac{1.3\,2^6.x^6}{2.4.6.a^5.\infty^6}$$
$$- \frac{x}{\infty} \cdot \frac{1.3.5.2^8.x^8}{2.4.6.8.a^7.\infty^8} - \ldots\ldots\ldots$$

+

$$+\frac{x}{\infty}\cdot a-\frac{x}{\infty}\cdot\frac{3^2.x^2}{2.a.\infty^2}-\frac{x}{\infty}\cdot\frac{1.3^4.x^4}{2.4.a^3.\infty^4}-\frac{x}{\infty}\cdot\frac{1.3.3^6.x^6}{2.4.6.a^5.\infty^6}$$ Fig. 87.

$$-\frac{x}{\infty}\cdot\frac{1.3.5.3^8.x^8}{2.4.6.8.a^7.\infty^8}-\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x}{\infty}\cdot a-\frac{x}{\infty}\cdot\frac{4^2.x^2}{2.a.\infty^2}-\frac{x}{\infty}\cdot\frac{1.4^4.x^4}{2.4.a^3.\infty^4}-\frac{x}{\infty}\cdot\frac{1.3.4^6.x^6}{2.4.6.a^5.\infty^6}$$

$$-\frac{x}{\infty}\cdot\frac{1.3.5.4^8.x^8}{2.4.6.8.a^7.\infty^8}-\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x}{\infty}\cdot a-\frac{\infty^2.x^2}{2.a.\infty^2}-\frac{x}{\infty}\cdot\frac{1.\infty^4.x^4}{2.4.a^3.\infty^4}-\frac{x}{\infty}\cdot\frac{1.3.\infty^6.x^6}{2.4.6.a^5.\infty^6}$$

$$-\frac{x}{\infty}\cdot\frac{1.3.5.\infty^8.x^8}{2.4.6.8.a^7.\infty^8}-\ldots\ldots\ldots$$

$= CMBA.$

Bringet man nun die vertikalen Kolonnen dieses Ausdruckes in eine horizontale Lage, und reduciret gehörig:

so ist $\frac{ax}{\infty}+\frac{ax}{\infty}+\frac{ax}{\infty}+\frac{ax}{\infty}+\frac{ax}{\infty}+\ldots+\frac{ax}{\infty}$

$$-\frac{x^3}{2.a.\infty^3}\cdot\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots\ldots+\infty^2\right)$$

$$-\frac{1.x^5}{2.4.a^3.\infty^5}\cdot\left(1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\ldots+\infty^4\right)$$

$$-\frac{1.3.x^7}{2.4.6.a^5.\infty^7}\cdot\left(1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+\ldots+\infty^6\right)$$

$$-\frac{1.3.5.x^9}{2.4.6.8.a^7.\infty^9}\cdot\left(1^8+2^8+3^8+4^8+\ldots+\infty^8\right)$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$= CMBA.$

Und nun ist die Summe der ersten horizontalen Reihe des gegenwärtigen Ausdruckes $=\frac{ax}{\infty}.\infty = ax$, weil die Anzahl der Glieder dieser Reihe $=\infty$;

Die

Fig. 87. Die Summe der zweyten horizontalen Reihe $= - \frac{x^3}{2 \cdot a \cdot \infty^3} \cdot \left(\frac{1}{3}\infty^2 \cdot \infty\right) = - \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot a}$, vermög (202) oder auch (198. I.)

Die Summe der dritten horizontalen Reihe $= - \frac{1 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot a^3 \cdot \infty^5} \cdot \left(\frac{1}{5}\infty^4 \cdot \infty\right) = - \frac{1 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^3}$

Die Summe der vierten $= - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot a^5}$

Die Summe der fünften $= - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot a^7}$

Die Summe der sechsten $= - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^{11}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot a^9}$

Die Summe der siebenten $= - \ldots\ldots\ldots\ldots$

Folglich $CMBA = ax - \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot a} - \frac{1 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot a^7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^{11}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot a^9} - \ldots\ldots\ldots$

Ferner ist der Flächeninhalt des Dreyeckes $BCM = \frac{ax}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 2 \cdot a} - \frac{1 \cdot x^5}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^7}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^5} - \ldots$

Denn $BCM = \frac{MC \times MB}{2} = \frac{x \times \sqrt{a^2 - x^2}}{2} = \frac{x}{2} \cdot \left(a - \frac{x^2}{2 \cdot a} - \frac{1 \cdot x^4}{2 \cdot 4 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^4} - \ldots\ldots\right) = \frac{ax}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 2 \cdot a} - \frac{1 \cdot x^5}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^7}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^5} - \ldots$

Nun ist der Kreisausschnitt $BCA = CMBA - BCM$; folglich ist BCA

=

$$= \left\{ \begin{array}{l} ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{1.x^5}{2.4.5.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.7.a^5} - \ldots \\ -\left(\frac{ax}{2} - \frac{x^3}{2.2.a} - \frac{1.x^5}{2.2.4.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.2.4.6.a^5} - \ldots\right) \end{array} \right.$$ Fig. 87.

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{2.ax}{2} - \frac{2.x^3}{2.2.3.a} - \frac{1.2.x^5}{2.2.4.5\,a^3} - \frac{1.3.2.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} - \ldots \\ -\frac{ax}{2} + \frac{3.x^3}{2.2.3.a} + \frac{1.5.x^5}{2.2.4.5.a^3} + \frac{1.3.7.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} + \ldots \end{array} \right.$$

$$= \frac{ax}{2} + \frac{1.x^3}{2.2.3.a} + \frac{1.3.x^5}{2.2.4.5.a^3} + \frac{1.3.5.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} + \ldots$$

Es ist aber auch $BCA = \frac{BA\,.\,CA}{2} = \frac{az}{2}$, wenn wir die Länge des Bogens $BA = z$ setzen; folglich $\frac{az}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{1.x^3}{2.2.3.a} + \frac{1.3.x^5}{2.2.4.5.a^3} + \ldots\ldots$ und endlich

$$z = x + \frac{1.x^3}{2.3.a^2} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5.a^4} + \frac{1.3.5\,x^7}{2.4.6.7.a^6} + \frac{1.3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9.a^8} + \ldots$$

Setzen wir nun $x = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}CD$, so ist $z = \frac{a}{2} + \frac{1}{2.3.a^2}\cdot\frac{a^3}{2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.a^4}\cdot\frac{a^5}{2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.a^6}\cdot\frac{a^7}{2^7} + \ldots$

$$= a\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \ldots\right)$$

Es ist aber $AB = z = \text{arc } 30^\circ =$ dem Bogen von 30 Graden, wenn $x = CM = \frac{1}{2}CD$ gesetzet wird; denn es ist in diesem Falle wegen der Gleichheit der Dreyecke DMB und CMB die Sehne $BD = BC =$ dem Halbmesser; folglich der Bogen $BD = 60^\circ$ (293. II.), und der Bogen $AB = AD - BD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Es ist demnach die Länge eines Bogens von 30° in einem Kreise, dessen Halbmesser $= a$, nämlich:

Fig. 87.

$$\text{arc } 30^\circ = a.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} + \ldots\right);$$

es ist also auch $12.\text{arc } 30^\circ = 12.a.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \ldots\ldots\right)$,

nämlich $\text{arc } 360^\circ = 12a.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.11.2^{11}} + \ldots\ldots\ldots\right)$ = dem ganzen Umkreise.

Diese gefundene Reihe läßt sich in folgende Gestalt bringen; $\text{arc } 360^\circ = 12a.\left(\frac{1}{1.2^1} + \frac{1.1}{1.2.3.2^3} + \frac{1.1.3.3}{1.2.3.4.5.2^5} + \frac{1.1.3.3.5.5}{1.2.3.4.5.6.7.2^7} + \ldots\right)$, und endlich ist, wenn wir das erste Glied dieser letzten Reihe $\frac{1}{1.2^1} = A$, das zweyte $= B$, das dritte $= C$, das vierte $= D$, das fünfte $= E$ u. s. w. setzen,

$$\text{arc } 360^\circ = 12a.\left(\frac{1}{2} + \tfrac{1}{4}A.\frac{1.1}{2.3} + \tfrac{1}{4}B.\frac{3.3}{4.5} + \tfrac{1}{4}C.\frac{5.5}{6.7} + \tfrac{1}{4}D.\frac{7.7}{8.9} + \tfrac{1}{4}E.\frac{9.9}{10.11} + \tfrac{1}{4}F.\frac{11.11}{12.13} + \tfrac{1}{4}G.\frac{13.13}{14.15} + \tfrac{1}{4}H.\frac{15.15}{16.17} + \ldots\right)$$

Fig. 87.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Nun ist } \frac{1}{2} & = 0{,}5000000000 & = A \\
+ \tfrac{1}{4}A . \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} & = 0{,}0208333333 & = B \\
+ \tfrac{1}{4}B . \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} & = 0{,}0023437500 & = C \\
+ \tfrac{1}{4}C . \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 7} & = 0{,}0003487723 & = D \\
+ \tfrac{1}{4}D . \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 9} & = 0{,}0000593397 & = E \\
+ \tfrac{1}{4}E . \frac{9 \cdot 9}{10 \cdot 11} & = 0{,}0000109239 & = F \\
+ \tfrac{1}{4}F . \frac{11 \cdot 11}{12 \cdot 13} & = 0{,}0000021183 & = G \\
+ \tfrac{1}{4}G . \frac{13 \cdot 13}{14 \cdot 15} & = 0{,}0000004262 & = H \\
+ \tfrac{1}{4}H . \frac{15 \cdot 15}{16 \cdot 17} & = 0{,}0000000881 & = I \\
+ \tfrac{1}{4}I . \frac{17 \cdot 17}{18 \cdot 19} & = 0{,}0000000186 & = K \\
+ \tfrac{1}{4}K . \frac{19 \cdot 19}{20 \cdot 21} & = 0{,}0000000040 & = L \\
+ \tfrac{1}{4}L . \frac{21 \cdot 21}{22 \cdot 23} & = 0{,}0000000009 & = M \\
+ \tfrac{1}{4}M . \frac{23 \cdot 23}{24 \cdot 25} & = 0{,}0000000002 & = N \\
+ \tfrac{1}{4}N . \frac{25 \cdot 25}{26 \cdot 27} & = 0{,}0000000000 & = O \\
+ \tfrac{1}{4}O . \frac{27 \cdot 27}{28 \cdot 29} & = 0{,}0000000000 & = P \\
\hline
= \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}5235987755 &
\end{array}
$$

= 0,5235987756, wenn wir die letzte Ziffer, weil sie un-

Fig. 87. gewiß, und etwas zu klein seyn muß, hinweglassen, und dafür die vorhergehende um 1 vermehren; folglich ist arc $360^{\circ} = 12a . 0,5235987756$.

352. Wenn wir nun den Umkreis eines Kreises, dessen Durchmesser $= 1$, mit π bezeichnen, so ist $a = \frac{1}{2}$, arc $360^{\circ} = \pi$, und folglich $\pi = 12 . \frac{1}{2} . 0,5235987756 = 3,1415926536$, nämlich ein Umkreis, dessen Durchmesser $= 1$, ist $= 3,1415926536$; es verhält sich demnach ein jeder Durchmesser zu seinem Umkreise wie 1 zu 3,1415926536 vermög (316), oder wie 10000000000 : 31415926536; es ist aber dieses Verhältniß $= 7 : 22$ beynahe, oder $= 113 : 355$ sehr nahe (70.); das letzte Verhältniß 113 : 355 ist sehr leicht im Gedächtniße zu behalten, weil es aus den ersten drey ungeraden Zahlen 113355 zusammengesetzt ist. Das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise werden wir jederzeit mit $1 : \pi$ bezeichnen, das ist, es wird jederzeit $\pi = 3,1415926536$, oder auch $\pi = \frac{355}{113}$ bedeuten.

Und nun ist es leicht zu jedem gegebenen Halbmesser sowohl den dazu gehörigen Umkreis, als auch die Kreisfläche zu finden; es sey z. B. der gegebene Halbmesser eines Kreises $= m$ Schuhen; so ist der dazu gehörige Umkreis $= 2m\pi$ Schuhen, weil $1 : \pi = 2m$: zum Umkreise statt findet; und die Kreisfläche ist $= m^2\pi$ Quadratschuhen, weil die Kreisfläche dem halben Produkte aus dem Umkreise $2m\pi$ in den Halbmesser m gleich ist: setzen wir nun den Halbmesser $m = 2$ Schuhen, so ist der Umkreis $= 2 . 2 . \pi = 4 . 3,14159 \ldots\ldots = 12,56636$ Schuhen, und die Kreisfläche $= 12,56636$ Quadratschuhen.

Auch zu jeder gegebenen Länge eines Umkreises kann der dazu gehörige Halbmesser gefunden werden: es sey z. B. der gege-

gegebene Umkreis $= p$ Schuhen, und der unbekannte Halb- Fig. 87.
messer $= a$, so ist $p = 2a\pi$, und folglich $a = \frac{p}{2\pi}$ Schuhen
Und eben so kann aus dem gegebenen Flächeninhalte eines Kreises der Halbmesser gefunden werden; es sey z. B. der gegebene Flächeninhalt $= b$ Quadratsch., und der unbekannte Halbmesser $= a$, so ist $b = a^2\pi$, und folglich $a = \sqrt{\frac{b}{\pi}}$ Schuhen.

Wenn man zu der Zahl $\pi = 3{,}141592653 6$ den Logarithmus aufsuchet, so findet man $\log \pi = 0{,}4971499$; da nun ein zum Halbmesser a zugehöriger Umkreis $p = 2a\pi$, so ist $\log p = \log 2a + \log \pi = \log 2a + 0{,}4971499$, und $\log 2a = \log p - 0{,}4971499 =$ dem Logarithmus des Durchmessers. Imgleichen da eine zum Halbmesser a zugehörige Kreisfläche $b = a^2\pi$, so ist $\log b = 2.\log a + 0{,}4971499$; und $\log a = \frac{\log b - 0{,}4971499}{2}$.

353. Wenn man mehrere Glieder der unendlichen Reihe entwickelt, welche den zum Halbmesser a zugehörigen Umkreis ausdrücket (351.), so findet man einen noch genaueren Werth für π, nämlich $\pi = 3{,}1415926535$
8979323846264338327950288419716939937510 58
2097494459230781640628620899862803482534 21
170679821480865132723066470938446........;
allein es ist der vorige Werth von π schon so genau, daß man selten alle zehn Decimalstellen gebrauchet, man begnüget sich gemeiniglich nur mit den ersten fünf Decimalstellen $\pi = 3{,}14159$.

Die Annäherung zu dem Werthe von π erhält man auch, wenn man die Umfänge zweyer regelmässigen Vielecke von einer gleichen, und ziemlich großen Anzahl der Seiten berechnet,

Fig. 87. deren eines in einen gegebenen Kreis eingeschrieben, und das andere umgeschrieben ist; denn die halbe Summe dieser zwey Umfänge wird dem gegebenen Umkreise beynahe gleich seyn, weil der Umfang eines eingeschriebenen Vieleckes von einer großen Anzahl der Seiten nur um etwas sehr weniges kleiner, und der Umfang eines umgeschriebenen Vieleckes von eben so vielen Seiten nur um etwas sehr weniges größer ist, als der Umkreis des gegebenen Kreises. Das regelmäßige 96 Eck, oder noch besser das 192 Eck, kann dazu dienen, weil man die Seite dieses Vieleckes aus dem Sechsecke, und folglich aus dem Halbmesser berechnen kann.

Da nun die oben gefundene Reihe arc $360^\circ =$

$$12a.\Big(\overset{A}{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4}A.\overset{B}{\frac{1.1}{2.3}} + \tfrac{1}{4}B.\overset{C}{\frac{3.3}{4.5}} + \tfrac{1}{4}C.\overset{D}{\frac{5.5}{6.7}} + ..\Big)$$

niemals aufhöret, sondern ins unendliche fortläuft, und sich nicht vollkommen genau summiren läßt, so kann auch der Umkreis nicht vollkommen rektificiret, die Kreisfläche nicht vollkommen quadriret werden; jedoch da diese Reihe sehr schnell zusammen läuft, so läßt sich ihre Summe so genau bestimmen, als man es nur immer verlanget, und folglich läßt sich auch jeder Umkreis eines gegebenen Halbmessers so genau rektificiren, jede Kreisfläche so genau quadriren, als man es nur immer wünschen kann.

354. Wenn wir die gefundene Summe (351.) aller eingeschriebenen Rechtecke, oder Elemente des Stückes CMBA

$$= ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{1.x^5}{2.4.5.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.7.a^5} - \ldots$$

mit dem letzten Elemente qB $= \frac{x}{\infty}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ax}{\infty} -$

$$\frac{x^3}{2.a.\infty} - \frac{1.x^5}{2.4.a^3.\infty} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.a^5.\infty} - \ldots$$

ver-

vergleichen, so sehen wir alsogleich ein, daß man aus dem Fig. 87.
letzten Elemente, welches gleichsam die Stelle des allgemeinen
Gliedes in der unendlichen Reihe der Elemente vertritt, sehr
leicht die Summe aller Elemente, nämlich den Flächeninhalt
des Stückes CMBA bestimmen könne, wenn man nur jedes
Glied des letzten Elementes mit der Anzahl ∞ aller Elemente
multipliciret, und sodann mit dem Exponenten der veränderlichen Größe x dividiret. Wir werden in der Folge um die
Weitläuftigkeit zu vermeiden zuweilen die Summirung auf diese
Art vornehmen; das ist wenn wir bey einer unendlichen Reihe
der Elemente für das letzte Element ω einen Ausdruck von
dieser Gestalt erhalten, $\omega = \frac{Az^m}{\infty} + \frac{Bz^n}{\infty} + \frac{Cz^p}{\infty} + \ldots\ldots$
so werden wir aus diesem letzten Elemente alsogleich für die
Summe S aller Elemente folgenden Ausdruck annehmen,
$S = \frac{Az^m}{m} + \frac{Bz^n}{n} + \frac{Cz^p}{p} + \ldots\ldots$ Es sey z. B. der halbe Abschnitt PQN auf diese Art zu berechnen, so ist das letzte
Element, oder Rechteck $Qt = Qs \,.\, QN = \frac{x}{\infty}\sqrt{2ax - x^2}$,
wenn wir den Halbmesser $= a$, den Anfangspunkt der Abscissen in P, die Abscisse $PQ = x$, und $Qs = \frac{x}{\infty}$ setzen;
nun ist das letzte Element $Qt = \frac{x}{\infty}\sqrt{2ax - x^2} =$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{\infty} - \frac{2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{2\,.\,a^{\frac{1}{2}}.\,\infty} - \frac{1\,.\,2^{\frac{1}{2}}.\,x^{\frac{7}{2}}}{2.4.a^{\frac{3}{2}}.\,\infty} - \frac{1.3.2^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{9}{2}}}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}.\infty} - .$$

und die Anzahl aller Elemente $= \infty$; folglich die Summe aller Elemente, nämlich $QNPQ = \frac{2}{3}\,.\,2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} -$

$$\frac{2}{5}.\frac{2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{2\cdot a^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{7}.\frac{1\,.\,2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{2\,.\,4\,.\,a^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{9}.\frac{1\cdot 3\cdot 2^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,a^{\frac{5}{2}}} - \ldots\ldots$$

Fig. 87. Wenn wir diesen Ausdruck mit 2 multipliciren, so erhalten wir den Flächeninhalt des ganzen Abschnittes NRPN, der nur durch den Halbmesser des dazu gehörigen Kreises, und durch die Höhe des Abschnittes ausgedrücket ist.

Man erhält auch für den Flächeninhalt eines Abschnittes BEFAB einen Ausdruck, der nur durch den Halbmesser CA, und durch die Sehne BF ausgedrücket ist, wenn man von CMBA das Rechteck CMBE abzieht, den Unterschied ABEA mit 2 multipliciret, und sodann $\frac{1}{2}$BF statt CM substituiret; es ist nach gehöriger Reduktion $BEFAB = \frac{2z^3}{3 \cdot 2^3 \cdot a} + \frac{1 \cdot z^5}{5 \cdot 2^5 \cdot a^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot z^7}{4 \cdot 7 \cdot 2^7 \cdot a^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot z^9}{4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 2^9 \cdot a^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot z^{11}}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 2^{11} \cdot a^9} + \ldots$ wenn man $CA = a$, und die Sehne $BF = z$ setzet.

Von der Vergleichung und Verwandlung geradlinigter Figuren.

355. Wenn man die Grundlinie was immer für eines Dreyeckes mit B, die Höhe mit A, und den Flächeninhalt mit S bezeichnet, so ist $S = \frac{1}{2}A.B$; imgleichen wenn die Grundlinie eines andern Dreyeckes $= b$, die Höhe $= a$, und der Flächeninhalt $= s$ gesetzet wird, so ist ebenfalls $s = \frac{1}{2}a \,.\, b$ vermög (339.); es ist also auch $S : s = \frac{1}{2}A.B : \frac{1}{2}a.b = A.B : a.b$ (115), das ist, die Flächeninhalte der Dreyecke verhalten sich gegeneinander wie die Produkte aus den Grundlinien in ihre Höhen. Es folgt aus diesem

I. Daß Dreyecke von gleichen Grundlinien wie ihre Höhen, und Dreyecke von gleichen Höhen wie ihre Grundlinien sich verhalten; denn wenn man $B = b$ setzet, so ist $S : s = A.B : a.B = A.a$; imgleichen $S : s = B : b$, wenn $A = a$ gesetzet wird.

II. Daß bey zwey Dreyecken, deren Flächeninhalte einander gleichen, die Höhen mit den Grundlinien in einer verkehrten Proportion stehen; denn man setze nur $S = s$, nämlich $\frac{1}{2}A \, . \, B = \frac{1}{2}a \, . \, b$, so ist $\frac{1}{2}A : \frac{1}{2}a = b : B$ (113), oder $A : a = b : B$. Fig.

III. Daß Dreyecke, die einen gleichen Winkel haben, sich verhalten wie die Produkte aus den Seiten, welche den gleichen Winkel einschliessen, nämlich $ABC : abc = AB \times AC : ab \times ac$, wenn der Winkel $A = a$; denn 88.

$$ABC : abc = AB \times CD : ab \times cd = AB : ab \times \frac{cd}{CD},$$ wenn

cd und CD die Höhen sind; nun aber ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ACD und acd, $AC : ac = CD : cd$;

nämlich $\frac{ac}{AC} = \frac{cd}{CD}$; es ist also auch $ABC : abc =$

$$AB : ab \times \frac{ac}{AC} = AB \times AC : ab \times ac.$$

IV. Daß ähnliche Dreyecke sich gegen einander verhalten, wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten; z. B. $ABC : abc = BC^2 : bc^2 = AD^2 : ad^2 = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$; denn 40.

$$ABC : abc = BC \times AD : bc \times ad = BC : bc . \frac{ad}{AD};$$ nun

aber ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke, $ad : AD =$

$bc : BC$, nämlich $\frac{ad}{AD} = \frac{bc}{BC}$; es ist also auch $ABC : abc =$

$BC : bc . \frac{bc}{BC} = BC^2 : bc^2$; da ferner auch $BC : bc = AC : ac = AB : ab$, oder $BC^2 : bc^2 = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$ statt findet, so ist auch $ABC : abc = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$.

V. Daß alles dieses auch bey Parallelogramen statt finde, weil ein jedes Parallelogram nichts anderes ist, als das Doppelte eines Dreyeckes von der nämlichen Grundlinie und Höhe.

Fig. 63. 356. Die Flächeninhalte aller ähnlichen Vielecke verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten; z. B. $ABCDEF : abcdef = AB^2 : ab^2 = EF^2 : ef^2 = AD^2 : ad^2$, u. s. w.

Denn wenn man die ähnlichen Vielecke durch gleichnamige Diagonalen in Dreyecke zertheilet, so ist das Dreyeck $ABC : abc = AB^2 : ab^2$, das Dreyeck $ADC : adc = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$, weil $AC : ac = AB : ab$, oder $AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$ statt findet; eben so findet man $AED : aed = AB^2 : ab^2$; imgleichen $AFE : afe = AB^2 : ab^2$, u. s. w.; es ist also auch $(ACB + ADC + AED + \ldots) : (acb + adc + aed + \ldots) = AB^2 : ab^2$ (116), das ist $ABCDEF : abcdef = AB^2 : ab^2$; da ferner $AB : ab = AF : af = EF : ef$, oder $AB^2 : ab^2 = AF^2 : af^2 = EF^2 : ef^2$, u. s. w. statt findet, so ist auch $ABCDEF : abcdef = AF^2 : af^2 = EF^2 : ef^2$, u. s. w.

357. Die Flächeninhalte der regelmäßigen Vielecke von der nämlichen Gattung verhalten sich demnach wie die Quadrate der Seiten, wie die Quadrate der Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser von den umgeschriebenen, oder auch eingeschriebenen Kreisen. Die Kreisflächen selbst verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser, wie die Quadrate der Sehnen von ähnlichen Bögen; u. s. w.

89. 358. Wenn man auf den drey Seiten eines rechtwinklichten Dreyeckes ähnliche Figuren, z. B. gleichseitige Dreyecke, Halbkreise, oder andere ähnliche Vielecke verzeichnet, so ist die Figur auf der Hypothenuse der Summe der zwey Figuren auf den beyden Katheten zusammengenommen gleich; z. B. das Dreyeck $ABD = ACF + BCE$.

Denn $AB^2 : AC^2 = ABD : ACF = \frac{ABD \cdot AC^2}{AB^2}$, und

auch $AB^2 : BC^2 = ABD : BCE = \frac{ABD \cdot BC^2}{AB^2}$; folglich ist

ACF

$$ACF + BCE = \frac{ABD \,.\, AC^2}{AB^2} + \frac{ABD \,.\, BC^2}{AB^2} =$$ Fig. 89.

$$\frac{ABD \,.\, (AC^2 + BC^2)}{AB^2} = \frac{ABD \,.\, AB^2}{AB^2} = ABD\text{, weil}$$
$AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Eben so läßt sich erweisen, daß die halbe Kreisfläche ACBA der halben Kreisfläche auf AC mehr der halben Kreisfläche auf BC gleich sey, nämlich $Q + R + P = N + Q + P + M$; folglich auch $R = N + M$ wenn man beyderseits $Q + P$ abzieht, das ist die hyppokratischen Monden M und N sind zusammen dem rechtwinklichten Dreyecke R gleich.

359. Und nun können wir eine Figur verzeichnen, welche mehreren ähnlichen Figuren zusammengenommen am Flächeninhalte gleich, und zugleich ähnlich ist. Um dieses zu erhalten darf man nur zwey gleichnamige Seiten AB und BC 90.
der ersten zwey gegebenen ähnlichen Figuren unter einem rechten Winkel zusammenfügen, und die Hypothenuse AC führen, welche die gleichnamige Seite einer Figur vorstellet, deren Flächeninhalt dem Flächeninhalte der zwey ähnlichen Figuren auf den gleichnamigen Seiten AB und BC gleichet; wenn man sodann CD senkrecht auf AC setzet, selbe der gleichnamigen Seite der dritten ähnlichen Figur gleich macht, und die Hypothenuse AD zieht, so ist selbe die gleichnamige Seite einer Figur, welche den drey gegebenen zusammengenommen am Flächeninhalte gleich, und zugleich ähnlich ist, wenn man die Verzeichnung nach (326) vornimmt; u. s. w. Wären z. B. AB, BC, und CD Halbmesser von drey Kreisen, so ist die mit dem Halbmesser AD beschriebene Kreisfläche den drey andern zusammengenommen gleich.

360. Und eben so kann eine Figur verzeichnet werden, 69.
welche zwey ähnlichen Figuren ähnlich, und ihrem Flächenunterschiede gleich ist, wenn man auf einer Seite BD der grös-

seren

Fig. seren Figur einen Halbkreis zieht, in diesen Halbkreis aus dem
69. Endpunkte B des Durchmessers eine Sehne BE einschreibet, die der gleichnamigen Seite der kleineren gegebenen Figur gleich ist, sodann die Sehne DE zieht, und auf derselben als der gesuchten gleichnamigen Seite eine ähnliche Figur verzeichnet; denn wegen dem rechtwinklichten Dreyecke BDE ist die Figur auf ED = der ähnlichen Figur auf BD weniger der ähnlichen Figur auf BE.

361. Wir wollen diese Abhandlung von der Vergleichung und Verwandlung geradlinigter Figuren mit einigen Aufgaben beschliessen.

91. **I. Ein gegebenes Vieleck z. B. das Fünfeck ABCDE in ein Dreyeck von gleichem Inhalte zu verwandeln.**

Auflösung. Man ziehe die Diagonalen CA und CE, die Parallelen BF zu CA, und DG zu CE, und endlich CF und CG, so ist das Dreyeck FCG = ABCDE am Flächeninhalte. Denn BFA = BFC (290. I.), und auch BFA — BIF = BFC — BIF, nämlich FIA = BIC; imgleichen DGE = DGC, und auch DGE — DKG = DGC — DKG, nämlich GKE = DKC; nun ist ABCDE = AICKE + BIC + DKC; es ist also auch ABCDE = AICKE + FIA + GKE, wenn man für BIC und DKC ihre gleichen Werthe setzet; das ist ABCDE = FCG.

II. Ein Dreyeck, dessen Grundlinie b, und Höhe a gegeben sind, in ein Quadrat von gleichem Inhalte zu verwandeln.

Auflösung. Es sey die Seite des gesuchten Quadrats $= x$, so ist $x^2 = \frac{1}{2}ab$, und folglich $x = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$; man suche also nur zwischen $\frac{1}{2}a$, und b, oder zwischen a, und $\frac{1}{2}b$ die mittlere Proportionale nach (318), so ist selbe die gesuchte Seite des Quadrates, welches dem gegebenen Dreyecke am Flächeninhalte gleich ist.

Und

Und eben so läßt sich jedes gegebene Parallelogram in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandeln, wenn man zwischen der Grundlinie und Höhe des gegebenen Parallelogrames die mittlere Proportionale sucht, und auf derselben ein Quadrat verzeichnet. Fig.

Auch jede gegebene Kreisfläche läßt sich in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandeln, wenn man durch Hilfe eines geometrischen Maaßstabes eine gerade Linie verzeichnet, die dem halben gegebenen Umkreise gleichet, sodann zwischen dieser Geraden und dem Halbmesser eine mittlere Proportionale suchet, und auf derselben ein Quadrat verzeichnet. Wenn man den Durchmesser eines gegebenen Kreises in 44 gleiche Theile theilet, und 39 solcher Theile für die Seite eines Quadrates annimmt, so ist auch der Flächeninhalt dieses Quadrates beynahe der Kreisfläche gleich; denn es sey der Durchmesser eines gegebenen Kreises $= b$, und die Seite des gesuchten Quadrates, welches dem gegebenen Kreise am Flächeninhalte gleich seyn soll, sey $= x$, so ist $\frac{1}{4}b^2\pi = x^2$, und folglich $x = \frac{1}{2}b\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}b\sqrt{3{,}1415926536} = \frac{1}{2}b \,.\, 1{,}77245 = b \,.\, 0{,}88622 = \frac{88622b}{100000}$, oder endlich $x = \frac{39b}{44}$, wenn man den Bruch $\frac{88622}{100000}$ nach (70) in $\frac{39}{44}$ verwandelt.

III. **Ein gegebenes regelmäßiges Vieleck (z. B. ein gleichseitiges Dreyeck) in ein anderes etwann in ein regelmäßiges Sechseck von gleichem Inhalte zu verwandeln.**

Auflösung. Es sey die Seite des gegebenen gleichseitigen Dreyeckes $= b$, so ist sein Flächeninhalt $= \frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$ vermög (346. I.), und die Seite des gesuchten regelmäßigen Sechseckes sey $= x$, so ist der Flächeninhalt dieses Sechseckes $= \frac{3}{2}x^2\sqrt{3}$ vermög (346. IV.);

nun

Fig.

nun soll $\frac{3}{2}x^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$ seyn; folglich $x = \sqrt{\frac{b^2}{6}} = b\sqrt{\frac{1}{6}} = b\sqrt{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}b\sqrt{6}$.

Wäre das gegebene Vieleck unregelmäßig, oder zwar regelmäßig, aber also beschaffen, daß sich sein Flächeninhalt nicht algebraisch ausdrücken ließe, so müßte man alle erforderlichen Linien des gegebenen Vieleckes auf einem geometrischen Maaßstabe ausmessen um den Flächeninhalt nach (347.) bestimmen zu können, sodann müßte man diesen Flächeninhalt mit einem Buchstaben z. B. mit a bezeichnen, und $\frac{3}{2}x^2\sqrt{3} = a$ setzen, wenn das Vieleck in ein regelmäßiges Sechseck zu verwandeln wäre: aus dieser Gleichung findet man nun $x = \frac{1}{3}\sqrt{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{12a^2}$.

IV. **Ein regelmäßiges Vieleck z. B. ein Achteck zu verzeichnen, welches einen gegebenen Flächeninhalt $= a$ enthält.**

Auflösung. Es sey die Seite dieses Achteckes $= x$, so ist dessen Flächeninhalt $= 2x^2\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; nun muß vermög der Bedingung der Aufgabe $2x^2\sqrt{3+2\sqrt{2}} = a$ seyn; folglich $x = \sqrt{\frac{a}{2\sqrt{(3+2\sqrt{2})}}}$.

Wäre hingegen ein regelmäßiges Vieleck, dessen Flächeninhalt sich nicht algebraisch ausdrücken läßt, z. B. ein regelmäßiges Siebeneck von einem gegebenen Flächeninhalte zu verzeichnen, so beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis, verzeichne darein durch Versuchen ein regelmäßiges Siebeneck, messe bey demselben die erforderlichen Linien um den Flächeninhalt berechnen zu können; dann sage man: **der berechnete Flächeninhalt des verzeichneten regelmäßigen Siebeneckes verhält sich zu dem gegebenen Flächeninhalte, gleichwie das Quadrat einer Seite des verzeich-**

zeichneten Siebeneckes zu dem Quadrate der Seite des Fig.
gesuchten Siebeneckes, und verzeichne auf dieser gefundenen Seite ein regelmäßiges Siebeneck, so wird selbes den gegebenen Flächeninhalt enthalten. Oder auch der berechnete Flächeninhalt des verzeichneten regelmäßigen Siebeneckes verhält sich zu dem gegebenen Flächeninhalte, gleichwie das Quadrat des angenommenen Halbmessers zu dem Quadrate eines andern Halbmessers; wenn man nun mit diesem gefundenen Halbmesser einen Kreis beschreibet, und in denselben ein regelmäßiges Siebeneck verzeichnet, so wird selbes ebenfalls den gegebenen Flächeninhalt enthalten.

V. Es sind alle drey Seiten $AC = a$, $AB = b$, 80.
$BC = c$ eines Dreyeckes ABC gegeben, man soll seinen Flächeninhalt finden.

Auflösung. Es sey $AB = b$ die Grundlinie, so ist die Höhe $CD = \sqrt{\left(\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2}\right)}$ vermög (322.); folglich ist der Flächeninhalt $ABC =$

$$\tfrac{1}{2}AB\,.\,CD = \tfrac{1}{2}b\,.\sqrt{\left(\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b^2.(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}{4\,.\,4b^2}\right)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{2\cdot 2\,.\,2\,.\,2}\right)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\,.\,\frac{a+b+c-2a}{2}\,.\,\frac{a+b+c-2b}{2}\,.\,\frac{a+b+c-2c}{2}\right)}$$ vermög (39.) $= \sqrt{\left[\left(\frac{a+b+c}{2}\right).\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)\right]}$;

setzen

Fig. 80. setzen wir nun $\frac{a + b + c}{2} = s$, so ist der Flächeninhalt ABC $= \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$; das ist, wenn man von der halben Summe der drey Seiten eines Dreyeckes jede Seite abzieht, die drey gefundenen Differenzen sowohl untereinander, als auch mit der halben Summe der drey Seiten multipliciret, und aus dem Produkte die Quadratwurzel zieht, so ist dieses Resultat der Flächeninhalt des gegebenen Dreyeckes.

Es sey z. B. $a = 150$, $b = 140$, und $c = 130$ Klafter, so ist $s = 210$, $s - a = 60$, $s - b = 70$, $s - c = 80$ Klafter, und folglich der Flächeninhalt $= \sqrt{210.60.70.80} = \sqrt{70560000} = 8400$ Quadratklaftern. Eben so findet man den Flächeninhalt $= 8400$ Quadratklaftern, wenn $a = 210$, $b = 170$, und $c = 100$ Klafter wäre.

VI. **Ein gegebenes Vieleck in ein anderes ähnliches also zu verwandeln, daß der Flächeninhalt des gegebenen zu dem Flächeninhalte des verwandelten Vieleckes sich verhalte, wie m zu n z. B. wie 9 zu 4.**

Auflösung. Es sey eine Seite des gegebenen Vieleckes $= a$, z. B. $= 450$, und die gleichnamige Seite des gesuchten Vieleckes $= x$, so ist $a^2 : x^2 = m : n$, und folglich $x =$

$$\sqrt{\frac{a^2n}{m}} = \sqrt{\frac{a^2mn}{m^2}} = \frac{a}{m}\sqrt{mn} = \frac{450}{9} \cdot \sqrt{9.4} =$$

$50.\sqrt{36} = 50.6 = 300$; denn der Flächeninhalt des gegebenen Vieleckes verhält sich zu dem Flächeninhalte des gesuchten Vieleckes, wie a^2 zu x^2, (356); nun aber verhält sich auch vermög der Bedingung der Aufgabe der Flächeninhalt des ersten zum Flächeninhalte des zweyten Vieleckes wie m zu n; es ist also auch $a^2 : x^2 = m : n$.

VII.

VII. Ein Dreyeck CDF in n, z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen. Fig.

Auflösung. Man theile eine Seite CF des gegebenen Dreyeckes in den Punkten a, b, c, d in n gleiche Theile, verbinde diese Theilungspunkte mit dem entgegengesetzten Winkel durch gerade Linien, so wird dadurch das gegebene Dreyeck in n gleiche Theile getheilet seyn; denn alle n Dreyecke haben gleiche Grundlinien, und einerley Höhe; folglich sind sie einander am Flächeninhalte gleich. 70.

Wäre das Dreyeck in zwey Theile zu theilen, die sich wie m zu n z. B. wie 2 zu 3 verhalten, so theile man eine Seite in $m + n = 2 + 3 = 5$ gleiche Theile, und verbinde den $m$ten (in unserem Falle den 2ten) Theilungspunkt b mit dem entgegengesetzten Winkel durch die Gerade bD, so ist dadurch das Dreyeck in zwey Theile CbD, und DbF getheilet, die sich wie m zu n, das ist wie 2 zu 3 verhalten. Und eben dieses ist zu beobachten, wenn ein Dreyeck in mehrere Theile zu zertheilen wäre, die sich wie m, n, p u. s. w. verhalten.

Wäre ein Dreyeck abc in n z. B. in 3 gleiche Theile durch die Geraden mp und nq zu theilen, die mit ac parallel laufen, so findet man die Theilungspunkte durch folgende Proportion; $3 : 1 = ba^2 : bm^2$, und $3 : 2 = ba^2 : bn^2$, nämlich $bm = \sqrt{\frac{1}{3} ba^2}$, und $bn = \sqrt{\frac{2}{3} ba^2}$; denn das Dreyeck $bac : bmp = ba^2 : bm^2$ (355. IV.); nun aber ist auch $bac : bmp = 3 : 1$; es ist also auch $3 : 1 = ba^2 : bm^2$; u. s. w. 41.

Wäre endlich ein Parallelogram in mehrere Theile zu zertheilen, die sich wie m, n, p verhalten, so wird ein jeder leicht einsehen, daß man zwey entgegengesetzte Seiten nach diesem Verhältniße eintheilen, und die Theilungspunkte durch gerade Linien verbinden müße.

VIII. Eine geradlinigte Figur ABCDE in n, z. B. in 3 gleiche Theile zu theilen. 92.

Fig. Auflösung. Man ziehe die Diagonalen AD und AC,
92. die Senkrechten EH, DG, BF, messe diese Geraden aus, und berechne den Flächeninhalt der Figur ABCDE. Diesen in Zahlen gefundenen Flächeninhalt theile man durch die Division in n (in unserem Falle in 3) gleiche Theile, und einen solchen $n$ten Theil wieder in zwey gleiche Theile. Sodann ziehe man das Dreyeck ADE von dem $n$ten = 3ten Theile des ganzen berechneten Flächeninhaltes ab, und dividire diesen Ueberrest durch $\frac{1}{2}$AD, so ist der Quotient die Höhe eines Dreyeckes AID (339), welches zu ADE addiret einen $n$ten = 3ten Theil zum Vorschein bringt; man ziehe also nur in der Entfernung der gefundenen Höhe zu AD eine Parallele, so wird dadurch der Punkt I bestimmet, den man mit D verbinden muß um IDEA = $\frac{1}{3}$ABCDE zu erhalten. Ferner theile man die Hälfte des $n$ten = 3ten Theiles des ganzen Flächeninhaltes durch $\frac{1}{2}$DI, so ist der Quotient der Höhe eines Dreyeckes DIK gleich, dessen Flächeninhalt = $\frac{1}{2}$ · $\frac{1}{3}$ABCDE = $\frac{1}{6}$ABCDE; man ziehe also nur in der Entfernung der gefundenen Höhe zu DI eine Parallele, so wird dadurch der Punkt K bestimmet; darauf theile man die nämliche Hälfte des 3ten Theiles durch $\frac{1}{2}$DK, so ist der Quotient die Höhe eines Dreyeckes DKL, dessen Flächeninhalt = $\frac{1}{6}$ABCDE; man ziehe also nur in der Entfernung der gefundenen Höhe zu DK eine Parallele, so ist dadurch auch der Punkt L bestimmet; wenn man nun K und L verbindet, so ist DIKL = DIK + DKL = $\frac{1}{6}$ABCDE + $\frac{1}{6}$ABCDE = $\frac{1}{3}$ABCDE; und folglich ist dadurch auch der zweyte gesuchte Theil gefunden. Endlich ist BCLK = ABCDE — DIKL — AIDE = ABCDE — $\frac{1}{3}$ABCDE — $\frac{1}{3}$ABCDE = $\frac{1}{3}$ABCDE, und folglich ist dadurch auch der letzte gesuchte Theil bestimmet.

Wäre nun ADE > $\frac{1}{3}$ ABCDE, so ist es ganz begreiflich, daß man $\frac{1}{3}$ABCDE von ADE abziehen, und diesen

Ueber-

Ueberrest durch $\frac{1}{2}$AD dividiren müße um die Höhe eines Drey- Fig.
eckes zu finden, welches von ADE abgezogen den 3ten Theil 92.
des ganzen Flächeninhaltes zum Vorschein bringt.

Wäre endlich eine Figur in mehrere Theile zu zertheilen, die sich wie m, n, p verhalten, so ist es ebenfalls sehr leicht einzusehen, daß man selbe nach der gegebenen Vorschrift einmal in $(m + n + p)$ gleiche Theile zertheilen, und sodann m von solchen gleichen Theilen für den ersten, n für den zweyten, p für den dritten gesuchten Theil nehmen müße; u. s. w.

Die Ursache, warum der $n$te (in unserem Beyspiele der 3te) Theil des ganzen berechneten Flächeninhaltes wieder in zwey gleiche Theile getheilet werde, ist diese, damit die gesuchten Theile, in welche die gegebene Figur zu zertheilen ist, nicht durch Dreyecke, sondern vielmehr durch viereckigte Figuren ausgedrücket werden.

IX. **Ein Dreyeck ABC durch die Gerade DE, wel-** 93.
che durch den in der Seite AB gegebenen Punkt D geht, in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Es sey AB $= a$, die größere Entfernung des gegebenen Punktes D von einem der anliegenden Winkel sey AD $= c$, die diesem Winkel anliegende Seite AC $= b$, und AE $= x$, so ist das Dreyeck AED : ACB $=$ AE $\times$ AD : AC $\times$ AB $= cx : ab$, (355. III.); nun aber ist AED : ACB $=$ 1 : 2; folglich ist auch $cx : ab = 1 : 2$, und endlich $x = \frac{ab}{2c}$; wenn nun a, b, c durch einen Maaßstab bestimmet sind, so läßt sich nach eben diesem Maaßstabe $x =$ AE, und folglich der Punkt E bestimmen, der mit D zu verbinden ist, damit das Dreyeck durch die Gerade DE in zwey gleiche Theile getheilet werde.

Fig. 93. Der Werth von $x = \frac{ab}{2c}$ kann in folgende Proportion $c : \frac{1}{2}a = b : x$, nämlich AD : $\frac{1}{2}$AB = AC : x aufgelöset werden; theilet man nun AB in dem Punkte F in zwey gleiche Theile, ziehet CD, und durch F die Parallele FE zu CD, so ist AD : AF = AC : AE, das ist AD : $\frac{1}{2}$AB = AC : AE; und folglich AE = x.

94. X. **Ein gegebenes Dreyeck ABC durch zwey Senkrechte DM, und EG in 4 gleiche Theile zu theilen.**

Auflösung. Es sey BC = b, AH = a, HC = c, HB = d, und CG = e; durch G ziehe man nach der vorigen Aufgabe die Gerade GE, welche das Dreyeck ABC in zwey gleiche Theile theilet, so ist dadurch auch EF und FC bestimmet, weil $\frac{EF \cdot GC}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC \cdot AH}{2}$, nämlich $\frac{EF \cdot e}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{2}$, und folglich EF $= \frac{ab}{2e}$; und sodann ist FC $= \frac{bc}{2e}$, weil AH : HC = EF : FC, nämlich $a : c = \frac{ab}{2e}$: FC $= \frac{bc}{2e}$ statt findet. Ferner sey die Unbekannte BM = x von der Beschaffenheit, daß MD auf GE senkrecht stehe, daß die Gerade MD das Dreyeck ABC in zwey gleiche Theile theile, und das Dreyeck GKM = $\frac{1}{2}$EGC = $\frac{1}{4}$ABC sey, so ist DI $= \frac{ab}{2x}$, $\left(\text{weil } \frac{DI \cdot BM}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AH \cdot BC}{2}\right)$, BI $= \frac{bd}{2x}$, $\left(\text{weil AH } (a : \text{HB } (d = \text{DI} (\frac{ab}{2x} : \text{BI statt findet}\right)$; GM = BC − BG − MC = BC − $(b - e) - (b - x)$ = $b - b + e - b + x = e + x - b$, und KL $= \frac{ab}{4e + 4x - 4b}$,

weil

$\left(\text{weil } \frac{KL.GM}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{GC.EF}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{AH.BC}{2}\right)$; end- Fig. 94.
lich ist $GL = \frac{2e^2 - bc}{4e + 4x - 4b}$, (weil $EF : FG = KL : LG$, nämlich $EF \left(\frac{ab}{2e}\right) : CG - FC \left(e - \frac{bc}{2e}\right) = KL \left(\frac{ab}{4e + 4x - 4b}\right) : GL$ statt findet), und $LM = \frac{2x^2 - bd}{4e + 4x - 4b}$, (weil wieder $DI : IM = KL : LM$, nämlich $DI \left(\frac{ab}{2x}\right) : BM - BI \left(x - \frac{bd}{2x}\right) = KL \left(\frac{ab}{4e + 4x - 4b}\right) : LM$ sich verhält). Nun findet wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke GKL und KLM, weil der Winkel $GKM = 90°$, folgende Proportion ihre Richtigkeit; $GL : LK = LK : LM$, das ist $\frac{2e^2 - bc}{4e + 4x - 4b} : \frac{ab}{4e + 4x - 4b} = \frac{ab}{4e + 4x - 4b} : \frac{2x^2 - bd}{4e + 4x - 4b}$, oder $2e^2 - bc : ab = ab : 2x^2 - bd$; aus dieser Proportion erhalten wir folgende Gleichung, $2x^2(2e^2 - bc) - bd(2e^2 - bc) = a^2b^2$, und daraus endlich $x = \sqrt{\tfrac{1}{2}bd + \frac{a^2b^2}{4e^2 - 2bc}}$.

XI. Es ist der Flächeninhalt a, und der Umfang b eines rechtwinklichten Dreyeckes ACB gegeben; man soll die drey Seiten desselben finden. 55.

Auflösung. Es sey die eine Kathete $CA = x$, die andere $CB = y$, und die Hypothenuse $AB = z$, so ist $\frac{xy}{2} = a$, $x + y + z = b$, und $z^2 = x^2 + y^2$. Nun ist aus der ersten Gleichung $y = \frac{2a}{x}$; substituiret man die-

 sen

Fig. 55. sen Werth in der zweyten und dritten Gleichung, so ist $x + \frac{2a}{x} + z = b$, und $z^2 = x^2 + \frac{4a^2}{x^2}$, das ist $z = \frac{bx - x^2 - 2a}{x}$ aus der ersten, und auch $z = \sqrt{\frac{x^4 + 4a^2}{x^2}}$ aus der zweyten von diesen letzten Gleichungen; es ist also auch $\frac{bx - x^2 - 2a}{x} = \sqrt{\frac{x^4 + 4a^2}{x^2}}$, oder $\frac{b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 - 4abx + 4ax^2 + 4a^2}{x^2} = \frac{x^4 + 4a^2}{x^2}$, und endlich $x = \frac{4a + b^2 + \sqrt{16a^2 - 24ab^2 + b^4}}{4b}$; substituiren wir diesen Werth für x in der Gleichung $y = \frac{2a}{x}$, so ist $y = \frac{8ab}{4a + b^2 + \sqrt{16a^2 - 24ab^2 + b^4}} = \frac{4a + b^2 - \sqrt{16a^2 - 24ab^2 + b^4}}{4b}$. Es sey z. B. $a = 6$ Quadratschuhen, und $b = 12$ Schuhen, so ist die eine Kathete $x = 4$, die andere $y = 3$, und folglich die Hypothenuse $z = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ Schuhen.

Von der Lage und Stellung der Ebenen.

362. Wir haben schon einmal erinnert (245), daß eine Fläche, auf der sich durch was immer für zwey Punkte eine gerade Linie dergestalt ziehen läßt, daß sie nach ihrer ganzen Länge auf der Fläche liegt, eine Ebene genennt werde. Nun sollen auch einige Eigenschaften, die aus der verschiedenen Lage und Stellung der Ebenen entspringen, auseinander gesetzt werden. Bey dieser Untersuchung wird angenommen, daß

daß man jede Ebene nach allen Seiten in Gedanken soweit aus- Fig.
dehnen könne, als man es nur immer verlangt. Die vorzüglichen Eigenschaften der Ebenen sind folgende.

I. Es ist unmöglich, daß ein Theil AB einer geraden
Linie AC auf einer Ebene liege, und ein anderer Theil der- 95.
selben MN außer diese Ebene (das ist oberwärts, oder unterwärts) falle; denn würde der Theil MN außer die Ebene PQ fallen, und der Theil AB in dieser Ebene liegen, so wäre entweder PQ keine Ebene, oder AC keine gerade Linie, welches wider die Voraussetzung läuft.

II. Eine gerade Linie AC muß nach ihrer ganzen Länge auf der Ebene PQ liegen, sobald sie zwey Punkte z. B. A und B mit der Ebene gemein hat. Denn würde z. B. der Theil MN außer die Ebene fallen, so müßte ein Theil MN der Geraden AC außer die Ebene fallen, und ein anderer Theil derselben AB auf der Ebene liegen, welches unmöglich ist.

III. Ein Dreyeck CBG muß ganz auf der Ebene PQ liegen, sobald ein Theil von der Fläche desselben (z. B. NRB, oder GNR, oder GNC) auf der Ebene PQ liegt. Denn wenn z. B. GNR auf der Ebene PQ liegt, so hat die Seite GB mit der Ebene PQ zwey Punkte G und R gemein, und folglich liegt sie nach ihrer ganzen Länge in der Ebene PQ; nun hat auch die Seite CB zwey Punkte N und B mit der Ebene PQ gemein (weil B in der Geraden GB liegt), folglich liegt auch CB nach ihrer ganzen Länge in der Ebene PQ; und endlich hat auch CG die zwey Punkte C und G mit der Ebene PQ gemein (weil jener in der Geraden CB, und dieser in der Geraden GB, nämlich beyde in der Ebene PQ liegen), folglich liegt auch die dritte Seite CG nach ihrer ganzen Länge in der Ebene PQ: da nun alle drey Seiten des Dreyeckes BCG in der Ebene PQ liegen, wenn der Theil GNR in der nämlichen Ebene liegt, so liegt auch in der nämlichen Voraussetzung das Dreyeck selbst in der nämlichen Ebene. Eben so kann man erweisen, daß das ganze Dreyeck auf der

Fig. Ebene PQ liegen müße, wenn ein anderer Theil desselben,
95. z. B. NGC auf dieser Ebene liegt.

363. Wenn man nun durch einen Theil NBR des Dreyeckes BCG eine Ebene führen wollte, so würde diese Ebene mit der Ebene oder Fläche des Dreyeckes BCG, und folglich auch mit der Ebene PQ übereinander fallen, und mit derselben nur eine einzige Ebene ausmachen. Es wird also durch die Lage eines Dreyeckes die Lage oder Richtung einer Ebene gänzlich bestimmet; nun aber wird die Lage des des Dreyeckes durch die drey Punkte B, C, G bestimmet; es wird also auch durch die nämlichen drey Punkte die Lage der Ebene PQ bestimmet; das heißt durch drey **Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, läßt sich nur eine einzige Ebene führen.** Hingegen können durch drey Punkte, die in einer geraden Linie liegen, das ist durch eine einzige gerade Linie unzählige Ebenen geführet werden.

364. Auch ist es leicht einzusehen, daß zwey Geraden BC und BG, oder AC und HG, die sich durchschneiden, beyde in der nämlichen Ebene liegen, das ist, daß durch zwey sich durchschneidende gerade Linien nur eine einzige Ebene geführet werden könne. Denn man nehme nur auf den zwey sich durchschneidenden Geraden BC und BG die Punkte R und N, verbinde sie mit der Geraden NR, so liegt das ganze Dreyeck BNR in einer einzigen Ebene PQ; nun aber haben die zwey sich durchschneidenden Geraden HG und AC jede mit dieser Ebene PQ zwey Punkte gemein; folglich liegen sie beyde in dieser nämlichen Ebene PQ.

96. 365. Schneidet eine Gerade AB eine Ebene PQ dergestalt, daß sie auf allen Geraden senkrecht stehet, welche in dieser Ebene durch den Durchschnittspunkt können gezogen werden, so heißt sie **senkrecht auf die Ebene.**

366. Wenn eine Gerade AB auf zwey Geraden CB und DB in ihrem Durchschnittspunkte B zugleich senkrecht steht, so ist sie senkrecht auf jede Gerade z. B. auf HG, die in der nämlichen Ebene PQ durch den nämlichen Durchschnittspunkt B gezogen wird, das ist, sie ist senkrecht auf die Ebene PQ selbst. Fig. 96.

Denn man verlängere nur CB und DB, mache BC = BE = BD = BF, und ziehe CD, DE, EF, FC, AC, AD, AE, AF, AH, und AG, so ist einmal BH = BG, und FH = DG, weil HG durch den gemeinschaftlichen Durchschnitspunkt der zwey Diagonalen des Parallelograms CDEF gezogen ist (287. III.); sodann ist in den zwey Dreyecken CFA und EDA die Seite CF = ED, CA = EA, FA = AD (258. I.); folglich sind sie einander vollkommen gleich, und der Winkel AFC = ADE, oder AFH = ADG; ferner ist in den zwey Dreyecken FHA und DGA die Seite FA = DA, FH = DG, und der eingeschlossene Winkel AFH = ADG; es sind also auch diese zwey Dreyecke einander vollkommen gleich, und folglich HA = GA; und endlich ist in den zwey Dreyecken HBA und GBA die Seite BA = BA, BH = BG, HA = GA; es sind also auch diese Dreyecke einander vollkommen gleich, und der Winkel ABH = ABG = 90°; folglich steht AB in dem Punkte B senkrecht auf HG. Da nun dieses sich von einer jeden anderen Geraden erweisen läßt, die in der nämlichen Ebene PQ durch den Punkt B gezogen wird, so ist AB auf eine jede solche Gerade, und folglich auf die Ebene PQ selbst senkrecht.

Hier ist noch zu merken.

I. Daß man aus einem außer einer Ebene PQ angenommenen Punkte A eine einzige Senkrechte AB auf diese Ebene führen könne. Denn wäre noch eine andere Senkrechte z. B. AG möglich, so würde das Dreyeck ABG, wenn man die Punkte B und G mit einer Geraden verbindet, zwey rechte Winkel ABG und AGB haben, welches unmöglich ist.

Fig. 95. II. Daß auch aus einem in der Ebene PQ angenommenen Punkte B eine einzige Senkrechte BD auf diese Ebene könne errichtet werden. Denn wäre noch eine andere Senkrechte in dem nämlichen Punkte auf die nämliche Ebene z. B. BE möglich, so müßten beyde Geraden BD und BE auf einer Geraden GH in der nämlichen Ebene in dem nämlichen Punkte zugleich senkrecht stehen (wenn man nämlich durch die zwey sich durchschneidenden Geraden BD und BE in Gedanken eine Ebene führet, und sodann in der Ebene PQ die Gerade GH durch den Punkt B dergestalt zieht, daß sie auch in der durch B, D, E geführten Ebene liegt); und folglich müßte der Winkel $EBH = DBH = 90^\circ$, das ist, es müßte ein Theil dem Ganzen gleich seyn, welches unmöglich ist.

96. III Daß die Senkrechte AB aus allen Geraden die kürzeste sey, die aus dem Punkte A auf die Ebene PQ können gezogen werden, und daß sie folglich die Entfernung des Punktes A von der Ebene PQ bestimme.

97. 367. Der gemeinschaftliche Durchschnitt AB zweyer Ebenen DH und CG ist eine gerade Linie. Denn man verbinde nur zwey Punkte M und N des gemeinschaftlichen Durchschnittes (der einmal eine Linie seyn muß, weil die Ebenen keine Dicke haben) durch die Gerade MN, so liegt selbe nach ihrer ganzen Länge in beyden Ebenen zugleich, weil sie mit jeder derselben zwey Punkte gemein hat; nun aber ist diejenige Linie der gemeinschaftliche Durchschnitt der zwey Ebenen DH und CG, die nach ihrer ganzen Länge in beyden zugleich liegt; folglich ist die gezogene Gerade MN der gemeinschaftliche Durchschnitt der zwey Ebenen DH und CG; das ist, die gezogene Gerade MN fällt mit der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie AB übereinander, und macht mit derselben nur eine einzige Gerade aus.

368. Wenn man durch was immer für einen Punkt Fig.
F der Durchschnittslinie AB zweyer Ebenen CG und DH 97.
auf AB zwey Senkrechte FE und FI, die erste in der Ebene DH, und die zweyte in der Ebene CG, zieht, so heißt der Winkel EFI der Neigungswinkel der zwey Ebenen CG und DH. Ist nun dieser Neigungswinkel ein Rechter, das ist = 90°, so heissen die zwey Ebenen senkrecht auf einander; z. B. CG und PQ in Fig. 98., wenn MAD = 90°, sind senkrecht auf einander.

369. Wenn die Ebene CG auf der Ebene PQ senkrecht 98.
steht, und man zieht aus was immer für einem Punkte M der Ebene CG auf die Durchschnittslinie CT die Senkrechte MA, oder man errichtet aus dem Punkte A der Durchschnittslinie CT in der Ebene CG die senkrechte AM, so steht selbe senkrecht auf der Ebene PQ.

Denn man errichte nur in dem Punkte A in der Ebene PQ die Senkrechte AD auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie CT, so ist MAD der Neigungswinkel der zwey Ebenen PQ und CG, und folglich = 90°, weil diese zwey Ebenen vermög der Voraussetzung auf einander senkrecht stehen; nun aber ist auch MAC, oder MAT = 90°, weil MA auf CT senkrecht steht; es stehet also MA auf zwey Geraden in der Ebene PQ in ihrem Durchschnittspunkte zugleich senkrecht; folglich steht sie auch senkrecht auf allen Geraden, die durch den nämlichen Punkt A in der Ebene PQ können gezogen werden; nämlich sie steht senkrecht auf der Ebene PQ selbst (366.).

Und eben so läßt sich erweisen, daß jede andere Gerade ma auf der Ebene PQ senkrecht stehe, wenn sie in der Ebene CG auf die Durchschnittslinie CT senkrecht gezogen ist. Nun sind bey den zwey Geraden MA und ma, die in der nämlichen Ebene CG liegen, und auf der Ebene PQ senkrecht stehen, die Winkel MAa + maA = 90° + 90° = 180°; folglich laufen sie mit einander parallel (263).

370.

Fig. 370. Und umgekehrt, wenn die Ebene CG auf der
98. Ebene PQ senkrecht steht, und eine Gerade AM durch was immer für einen Punkt A der Durchschnittslinie CT auf die Ebene PQ senkrecht gezogen ist, so liegt selbe in der Ebene CG.

Denn würde diese Senkrechte AM außer der Ebene CG liegen, so könnte durch diesen Punkt A eine andere Senkrechte AN auf die Durchschnittslinie CT in der Ebene CG gezogen werden; nun würde diese Senkrechte vermög dem vorhergehenden auf der Ebene PQ senkrecht stehen; es würden also in dem nämlichen Punkte A zwey gerade Linien auf der Ebene PQ senkrecht stehen, welches unmöglich ist (366. II.); es ist also auch unmöglich, daß AM außer der Ebene CG liege, wenn sie in dem Punkte A auf PQ senkrecht steht.

99. 371. Wenn zwey sich durchschneidende Ebenen CD und EF beyde auf einer dritten Ebene PQ senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittslinie BA auf der nämlichen Ebene PQ senkrecht.

Denn man gedenke nur aus dem Durchschnittspunkte A eine Senkrechte AB auf die Ebene PQ, so muß diese Senkrechte vermög dem vorhergehenden nach ihrer ganzen Länge in den beyden Ebenen CD und EF zugleich liegen; folglich muß sie mit der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie dieser zwey Ebenen über einander fallen, und mit derselben nur eine einzige Gerade ausmachen; nun aber steht die gezogene Gerade AB auf der Ebene PQ senkrecht; es steht also auch die Durchschnittslinie der zwey Ebenen CD und EF auf der Ebene PQ senkrecht.

372. Wenn zwey Ebenen überall von einander gleichweit entfernet, das ist, wenn die Senkrechten, die man aus was immer für einem Punkte der einen Ebene auf die andere ziehen kann, alle einander gleich sind, so heissen die Ebenen **gleichlaufend**, oder **parallel**.

Es

Fig.

Es folgt aus diesem, daß zwey parallele Ebenen niemals zusammen stossen können, wenn man sie noch so weit ausdehnet, weil ihre Entfernung von einander immer unverändert bleibet. Auch ist es leicht einzusehen, daß die Wechselwinkel, daß die äußeren, und inneren Winkel auf der nämlichen Seite einander gleich seyn, wenn zwey parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden; imgleichen, daß eine Ebene, oder auch eine gerade Linie, wenn sie auf eine von mehreren parallelen Ebenen senkrecht geführet ist, auf allen den übrigen parallelen Ebenen senkrecht stehe; u. s. w.

373. Wenn zwey parallele Ebenen PQ und RS durch eine dritte Ebene AEDR durchschnitten werden, so laufen die Durchschnittslinien AE und RD mit einander parallel. 100

Denn die zwey geraden Durchschnittslinien AE und RD liegen beyde in der nämlichen Ebene AEDR, und sind also beschaffen, daß sie niemals zusammenstossen können, wenn man sie noch so weit verlängert, weil sie in den parallelen Ebenen PQ und RS liegen; folglich laufen sie mit einander parallel.

374. Wenn man aus einem außer der Ebene PQ gelegenen Punkte M auf die Ebene PQ mehrere gerade Linien MA, MB, MC, MG, MF, MN, ziehet, und sodann eine Ebene RS führet, die mit PQ parallel läuft, und die gezogenen Geraden in a, b, c, g, f, n durchschneidet, so stehen

I. Die Abschnitte sowohl untereinander, als auch mit den ganzen Geraden in Proportion; nämlich $Ma : Mb = aA : bB$, oder $Ma : Mb = MA : MB$, $Mb : Mc = MB : MC$, u. s. w. Denn wenn man durch die zwey sich durchschneidenden Geraden MA und MB eine Ebene MAB gedenket, so laufen die Durchschnittslinien ab, und AB mit einander parallel (373); und folglich findet in den zwey ähnlichen Dreyecken Mab und MAB folgende Proportion statt; $Ma : Mb = MA : MB$, oder $Ma : Mb = aA : bB$; und auch $Ma : ab = MA : AB$, u. s. w. Eben so läßt sich erweisen, daß $Mb : Mc = MB : MC$, oder $Mb : bc =$

MB

Fig. MB : BC u. s. w. statt finde, wenn man durch die zwey sich durchschneidenden Geraden BM und CM eine Ebene BMC gedenket.

II. Die zwey Vielecke ABCGF und abcgf sind einander ähnlich. Denn man zertheile nur diese Vielecke durch gleichnamige Diagonalen GA, GB, und ga, gb in lauter Dreyecke, so wird man alsogleich einsehen, daß das Dreyeck abg ∽ ABG, bgc ∽ BGC u. s. w., und daß folglich das Vieleck abcgf ∽ ABCFG sey (315.). Die Aehnlichkeit der Dreyecke abg und ABG erhellet aus folgenden Proportionen; Ma : MA = ab : AB, und auch Ma : MA = ag : AG; also auch ab : AB = ag : AG; ferner ist Mb : MB = bg : BG, und auch Mb : MB = ab : AB; also auch bg : BG = ab : AB = ag : AG; folglich ist das Dreyeck abg ∽ ABG (300). Eben so läßt sich erweisen, daß das Dreyeck bgc ∽ BGC, agf ∽ AGF sey, u. s. w.

III. Die Flächeninhalte dieser Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von dem Punkte M, nämlich abcgf : ABCGF = $Mn^2 : MN^2$, wenn MN aus dem Punkte M auf die zwey parallelen Ebenen PQ und RS senkrecht gezogen ist. Denn abcgf : ABCGF = $ab^2 : AB^2$; nun aber ist Mb : MB = ab : AB, oder $Mb^2 : MB^2 = ab^2 : AB^2$; es ist also auch abcgf : ABCGF = $Mb^2 : MB^2$; und endlich findet in den zwey ähnlichen Dreyecken Mbn und MBN, wenn die Punkte n mit b, und N mit B verbunden werden, wo die Senkrechte MnN die parallelen Ebenen RS und PQ durchschneidet, folgende Proportion statt; Mb : MB = Mn : MN, oder $Mb^2 : MB^2 = Mn^2 : MN^2$; folglich ist auch abcgf : ABCGF = $Mn^2 : MN^2$.

375. Da bey den Dreyecken bcg und BCG die Seiten des einen mit den Seiten des andern Dreyeckes wechselweise parallel laufen: und diese Dreyecke einander ähnlich

sind,

sind, so folgt, daß Dreyecke, deren Seiten mit einander Fig.
parallel laufen, auch noch ähnlich seyn müßen, wenn sie schon in verschiedenen Ebenen liegen. Daß dieser Satz bey Dreyecken, die in einer nämlichen Ebene liegen, statt finde, haben wir schon (283.) erwiesen.

376. Da überdieß in den ähnlichen Dreyecken bcg und BCG der Winkel c = C, und ihre Schenkel mit einander wechselweise parallel laufen, so folgt, daß auch zwey Winkel, deren Schenkel mit einander wechselweise parallel laufen, einander gleich seyn müßen, wenn sie schon in verschiedenen Ebenen liegen.

Man kann auch die Gleichheit der Winkel bcg und BCG erweisen, wenn man durch bc und bg auf RS senkrechte Ebenen leget, und selbe soweit ausdehnet, bis sie die Ebene PQ durchschneiden; und da diese Gleichheit auch bey den Winkeln gbc und GBC, wie auch bey den Winkeln BGC und bgc, statt findet, so läßt sich daraus die Aehnlichkeit der Dreyecke bgc und BGC folgeren, deren Seiten mit einander wechselweise parallel laufen, wenn sie schon in verschiedenen Ebenen liegen.

Dritte

Dritte Vorlesung.

Von den Eigenschaften der Körper.

Begriffe von den geometrischen Körpern, oder Einleitung in die Stereometrie.

Fig. 101 377. Ein Körper ABCcab von zwey vollkommen gleichen und parallelen Vielecken ABC, abc, und von so vielen Parallelogramen eingeschlossen, als jedes der zwey Vielecke Seiten hat, heißt ein **Prisma** (Ecksäule); die zwey vollkommen gleichen und parallelen Vielecke ABC, abc heissen die **Grundflächen**, und ihre Entfernung, das ist die Senkrechte von was immer für einem Punkte der einen Grundfläche auf die Ebene der andern Grundfläche (die man im erforderlichen Falle auch verlängern kann) gezogen heißt die **Höhe** des Prisma. Ein Prisma, dessen alle Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen, wird ein **Senkrechtes** genennt; stehen hingegen nicht alle Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht, so heißt es ein **schiefes** Prisma. Ein Prisma heißt **dreyeckigt**, **viereckigt**, **fünfeckigt**, u. s. w., nach dem die Grundflächen desselben Dreyecke, Vierecke, oder Fünfecke sind. Ein viereckigtes Prisma, dessen Grundflächen Parallelograme sind, und welches demnach von sechs Parallelogramen eingeschlossen ist, wird insbesondere ein **Parallelepipedum** genennt. Ein senkrechtes Parallelepipedum, dessen Grundflächen einander vollkommen gleich, und folglich Quadrate sind, heißt ein **Kubus** (Würfel), Fig. 1. Ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, wird ein **Cylinder**
102 (Rundsäule), und die Gerade, welche die Mittelpunkte der zwey Kreise verbindet, wird die Achse des Cylinders genennt. Ein

Cylinder

Fig.

Cylinder heißt senkrecht, wenn die Achse desselben auf den Grundflächen senkrecht, und schief, wenn die Achse desselben auf den Grundflächen schief steht. Wenn man von einem Prisma, oder Cylinder ein Stück dergestalt abschneidet, daß die Durchschnittsebene mit der Grundfläche nicht parallel läuft, so heißt der Ueberrest ein schief abgeschnittenes Prisma, oder Cylinder.

378. Da der Raum, den eine Fläche beschreibt, wenn sie sich anders, als nach ihrer Lage beweget, drey Ausdehnungen hat, und folglich ein Körper ist, so ist ganz begreiflich, daß ein Prisma ABCcab erzeuget werde, wenn sich ein Vieleck ABC mit 101
einem Punkte A längst einer Geraden Aa immer parallel fortbeweget, bis es in abc anlanget; und daß ein Cylinder entstehe, wenn eine Kreisfläche AMBN mit ihrem Mittelpunkte 102
längst einer Geraden AD bis D sich immer parallel fortbeweget. Ein senkrechter Cylinder entsteht auch, wenn ein Rechteck FB sich um eine Seite FE wie um eine unbewegliche Achse herumdrehet, bis es wieder in die vorige Lage kömmt. Diese Entstehungsart durch die Umdrehung findet bey einem schiefen Cylinder nicht statt, weil ein schiefer Cylinder, dessen Grundflächen Kreise sind, nichts anders ist, als ein senkrechtes elliptisches (Ovales) Prisma, welches an beyden Enden durch parallele Ebenen nach einer gewissen Richtung schief abgeschnitten ist, wie wir es in der Folge einmal sehen werden.

379. Eine Pyramide (Spitzsäule) ACGFM ist ein Körper, 100
der von einer ebenen Grundfläche, und von so vielen Dreyecken eingeschlossen ist, als die Grundfläche Seiten hat. Die senkrechte Entfernung MN der gemeinschaftlichen Spitze aller einschliessenden Dreyecke von der Ebene der Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide. Pyramiden heissen **dreyeckigt, viereckigt, fünfeckigt**, nachdem ihre Grundflächen Dreyecke, Vierecke, Fünfecke sind. Ueberdieß werden Pyramiden **regelmäßig** (oder vielmehr **gleichseitig**) genennt, wenn ihre Grundflächen regelmäßige Vielecke, und die einschliessenden Dreyecke alle einander gleich sind. Eine Pyramide ABC, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von 103

Fig. unendlich vielen unendlichen kleinen Seiten, nämlich ein Kreis
103 ist, wird ein **Kegel** genennt. Die Gerade CD, welche den Mittelpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet, heißt die **Achse**, und jede Gerade AC, BC von der Spitze an den Umkreis der Grundfläche gezogen, heißt die **Seite** des Kegels. Ein Kegel heißt **senkrecht**, wenn seine Achse auf der Grundfläche senkrecht, und **schief**, wenn die Achse auf der Grundfläche schief stehet. Pyramiden ACFfca Fig. 100, und Kegel ABFE Fig. 103, heissen **abgestutzet**, oder **abgekürzet**, wenn ihre Spitzen mit einer zu der Grundfläche parallelen Ebene abgeschnitten sind.

100 380. Eine Pyramide entsteht, wenn ein Vieleck ABCGF mit dem Punkte A längst einer Geraden AM sich bis M vollkommen parallel fortbeweget, und seine Seiten während dieser Bewegung immer **gleichförmig**, nämlich eben so abnehmen, wie die Entfernungen des Punktes A von M. Und ein Kegel ABC wird erzeuget, wenn ein Kreis AB mit seinem Mittelpunkte längst der Geraden DC sich immer parallel fortbeweget, und sein Durchmesser während dieser Bewegung eben so abnimmt, wie die Entfernung des Mittelpunktes D von dem angenommenen Punkte C, nämlich daß sich AB : EF = CD : CG, oder DB : GF = CD : CG verhalte, wenn der Punkt D in G *anlanget*. Wenn hingegen der Durchmesser der Grundfläche während der Bewegung des Kreises nicht gleichförmig, sondern nach was immer für einem anderen Gesetze abnimmt, so heißt der dadurch erzeugte Körper ein **Afterkegel**; und eben so wird ein Körper eine **Afterpyramide** genennet, der aus der parallelen Bewegung eines Vieleckes erzeuget wird, dessen Seiten nicht gleichförmig, sondern nach was immer für einem anderen Gesetze abnehmen. Ein senkrechter Kegel ABC entstehet auch, wenn sich ein rechtwinklichtes Dreyeck CDB um die eine Kathete CD als um eine unbewegliche Achse herumdrehet, bis es wieder in die vorige Lage kömmt. Diese Entstehungsart durch die Umdrehung eines Dreyeckes findet

bey

bey dem schiefen Kegel nicht statt, weil ein schiefer Kegel Fig. nichts anders ist, als eine senkrechte **elliptische** (ovale) Pyramide, welche durch eine ebene Fläche nach einer gewissen Richtung schief abgeschnitten ist, wie wir es einmal in der Folge sehen werden.

381. Eine **Kugel** oder **Sphäre** ist ein Körper, der 104
von einer einzigen krummen Fläche dergestalt eingeschlossen ist, daß alle Punkte desselben von einem in dem Körper angenommenen Punkte, welcher daher der Mittelpunkt heißt, gleichweit abstehen. Ein solcher Körper entsteht, wenn eine halbe Kreisfläche AEB sich um den Durchmesser AB herumdrehet. Die einschliessende krumme Fläche heißt die **Kugelfläche**, oder Oberfläche der Kugel. Jede Gerade durch den Mittelpunkt beyderseits bis an die Kugelfläche gezogen wird der Durchmesser der Kugel genennt. Ein Stück deB von einer Kugel durch eine ebene Fläche abgeschnitten heißt ein **Kugelabschnitt**; ein solcher Kugelabschnitt wird durch die Umdrehung des halben Kreisabschnittes Bce um seine Höhe erzeuget. Ein Körper dceBd, der durch die Umdrehung des Kreisausschnittes BCe um den einen Halbmesser CB entsteht, wird ein **Kugelausschnitt** genennt. Und ein Stück DdeE durch zwey parallele Ebenen aus einer Kugel ausgeschnitten, heißt endlich eine **Zone**; sie wird erzeugt, wenn sich das trapezförmige Stück CEec zwischen zwey parallelen Ordinaten eines Halbkreises um den Durchmesser AB herumdrehet.

382. Wenn eine Kugel durch eine ebene Fläche geschnitten wird, so ist der Schnitt jederzeit ein Kreis.

Wenn der Schnitt DE durch den Mittelpunkt der Kugel geführet ist, so ist ganz begreiflich, daß er ein Kreis sey, weil alle Geraden CD, CM, CE, welche aus dem Mittelpunkte C an den Umfang des Schnittes DNEM in der Ebene DE gezogen werden, zugleich Halbmesser einer nämlichen Kugel, und folglich einander vollkommen gleich sind. Wäre hingegen der Schnitt de nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geführet, so gedenke man eine Senkrechte Cc aus

Fig. 104 dem Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene de, ziehe durch diesen Punkt c mehrere Geraden cm, ce, cn in der Ebene de, und aus den Punkten des Umfanges m, e, n die Halbmesser der Kugel mD, eC, nC bis in den Mittelpunkt der Kugel C; und nun sind die Dreyecke mcC, ecC, ncC alle einander vollkommen gleich, weil sie rechtwinklicht sind, und über dieses eine gemeinschaftliche Kathete cC, und gleiche Hypothenusen Cm = Ce = Cn haben; es ist also auch cm = ce = cn, und folglich der Schnitt dnemd ein Kreis, dessen Mittelpunkt c ist.

383. Es ist leicht einzusehen, daß die Kugelschnitte, welche von dem Mittelpunkte einer nämlichen Kugel gleichweit abstehen, einander gleich, daß jene kleiner, welche weiter, und daß jene größer sind, welche weniger von dem Mittelpunkte entfernet sind. Die Kugelschnitte, welche durch den Mittelpunkt einer Kugel geführet sind, heissen **größte Kreise**; sie sind alle einander vollkommen gleich, weil sie gleiche Halbmesser haben. Jede zwey größten Kreise auf einer nämlichen Kugel, welche sich durchschneiden, theilen einander, sowohl in Rücksicht ihrer Flächen als auch in Rücksicht ihrer Umkreise, in zwey vollkommen gleiche Theile, weil ihre gemeinschaftliche Durchschnitts-oder Theilungslinie durch die Mittelpunkte beyder Kreise gehet.

384. Wenn man durch den Mittelpunkt C eines größten Kreises DMEN eine Senkrechte AB zieht, und selbe beyderseits bis an die Kugelfläche verlängert, so heißt sie die **Achse**, und ihre zwey äußersten Punkte A und B werden **Pole** des Kreises DMN genennet. Der Punkt B oder A ist auch zugleich der Pol eines jeden zu EMN parallelen Kreises. Es folgt aus diesem:

I. Jeder Punkt eines Umkreises DMEN ist von seinem Pole A gleichweit entfernet. Denn in den rechtwinklichten Dreyecken ACM, ACE, ACN ist CA = CA, CM = CE = CN; folglich sind diese Dreyecke alle einander gleich, und MA = EA = NA, u. s. w.

II.

II. Wenn ein größter Kreis BMAN durch den Pol B des Kreises DMEN gezogen ist, so steht er auf demselben senkrecht. Denn wenn man auf ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie MN in dem Punkte C zwey Senkrechten, eine in der Ebene MBN und die andere in der Ebene MEN errichtet, so wird dieser Winkel der Neigungswinkel der zwey erwähnten Kreisflächen seyn (368); nun aber ist dieser Winkel = 90°, weil BC auf DMEN senkrecht steht; folglich ist auch der Neigungswinkel dieser zwey Kreisflächen = 90°, und die zwey Kreisflächen stehen demnach senkrecht auf einander. Fig. 104

III. Und umgekehrt wenn ein größter Kreis BMA auf einem anderen größten Kreise DME senkrecht steht, so geht er durch den Pol des Kreises DME. Denn man errichte nur aus dem Mittelpunkte C der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie MN in der Ebene des Kreises MB die Senkrechte CB, so steht sie senkrecht auf der Ebene des Kreises DME (369.) und weil sie aus dem Mittelpunkte des Kreises CME gezogen ist, so ist ihr Endpunkt B der Pol des Kreises DME; nun aber geht der Kreis AMB durch den Punkt B, weil CB sein Halbmesser ist; folglich geht auch dieser nämliche Kreis durch den Pol des Kreises DME.

IV. Der Durchschnittspunkt B von zwey Bögen größter Kreise BM und BD, die auf einem dritten DME zugleich senkrecht stehen, ist der Pol des Kreises DME oder des Bogens DM. Denn die gemeinschaftliche Durchschnittslinie BCA der Ebenen BDA und BMA steht senkrecht auf der Ebene DME (371.), und geht zugleich durch den Mittelpunkt C; folglich ist ihr Endpunkt, nämlich der Durchschnittspunkt B der zwey Kreisbögen BM und BD der Pol des Kreises DME, oder des Bogens DM.

V. Wenn ein größter Kreis BMAN, oder ADBE durch den Pol B eines anderen größten Kreises DMN geführet ist, so ist der Bogen BM, oder BD, oder BN = 90°; denn der Winkel BCM, oder BCD, oder BCN = 90°; es ist aber der Bogen BM das Maaß des Winkels BCM, der Bogen BD

Fig 104 BD das Maaß des Winkels BCD; folglich ist auch der Bogen $BM = 90°$, $BD = 90°$, $BN = 90°$, u. s. w.

Da nun alle größten Umkreise auf der nämlichen Kugel einander gleich sind, so sind auch ihre vierten Theile, oder die Bögen von 90° einander gleich; und folglich der Bogen $BD = BM = BN$, u. s. w. Es ist demnach der Pol eines größten Umkreises auf einer nämlichen Kugelfläche von einem jeden Punkte des erwähnten Umkreises um 90° entfernet.

Und nun wird es nicht mehr schwer seyn zu einem auf der Kugelfläche gegebenen größten Umkreise DMEN den dazu gehörigen Pol A oder B zu finden, und auch aus einem angenommenen Pole A einen größten Umkreis DMEN auf einer gegebenen Kugel durch Hilfe des Tasterzirkels zu ziehen; das erste geschieht, wenn man aus zwey Punkten M und E des gegebenen größten Umkreises mit einem Halbmesser $MA = EA = \sqrt{CA^2 + CE^2} = \sqrt{2(CE)^2} = CE\sqrt{2} = \frac{1}{2}DE\sqrt{2}$ zwey sich in A durchschneidende Bögen auf der Kugelfläche zieht; und das zweyte, wenn man aus dem angenommenen Pole mit dem nämlichen Halbmesser $\frac{1}{2}DE\sqrt{2}$ einen Umkreis beschreibet.

385. Ein Winkel DBM, BNE, MBE u. s. w. von zwey Bögen größter Kreise auf der Kugelfläche eingeschlossen heißt ein sphärischer Winkel. Ein sphärischer Winkel DBM ist mit dem Neigungswinkel DCM der zwey größten Kreise DBEA und MBNA einerley; nun aber wird dieser Neigungswinkel durch den Bogen DM des größten Kreises DMEN gemessen, dessen Pol sich in der Spitze des sphärischen Winkels DBM befindet; es wird also auch ein sphärischer Winkel durch den Bogen eines größten Kreises gemessen, der aus der Spitze als aus einem Pole auf der dazu gehörigen Kugelfläche zwischen den Schenkeln des sphärischen Winkels in der Entfernung von 90° beschrieben wird. Da der Bogen dm des Parallelkreises dmen eben so viele Grade enthält als der aus dem

Pole

Pole beschriebene Bogen DM des größten Kreises DMEN, so könnte man auch sagen, daß der Bogen dm das Maaß des sphärischen Winkels DBM sey; allein es ist schon einmal gewöhnlich, daß man die sphärischen Winkel nur durch die Bögen von größten Umkreisen ausmesse. Fig. 104

Und nun ist es leicht einzusehen, daß sphärische Nebenwinkel zusammen 180° enthalten; wie auch daß sphärische Scheitelwinkel einander gleich seyn; u. s. w.

386. Wenn zwey Bögen BD und BM von größten Kreisen, die auf einer Kugelfläche durch einen nämlichen Punkt B gezogen sind, durch einen dritten Bogen DM eines größten Kreises geschnitten werden, ehe sie das zweytemal zusammenstossen, so entsteht ein krummlinigtes Dreyeck BDM, welches ein **sphärisches Dreyeck** genennet wird. Es ist demnach ein **sphärisches Dreyeck** nichts anders als ein Stück einer Kugelfläche von drey Bögen größter Kreise eingeschlossen. Da nun die Bögen BD und BM, ehe sie noch das zweytemal zusammenstossen, von einem dritten Bogen müßen geschnitten werden, wenn ein Dreyeck entstehen soll, und diese zwey Bögen in der Entfernung von 180° das zweytemal zusammen stossen (383.), so folgt, daß in dem Dreyecke BDM jeder der zwey Bögen BD und DM $<$ 180° seyn müße; und eben dieses läßt sich von DB und DM, und auch von MB und MD behaupten; es ist also jede Seite (oder Bogen) eines sphärischen Dreyeckes $<$ 180°. Ein sphärisches Dreyeck heißt **rechtwinklicht**, wenn es einen, oder mehrere rechte Winkel hat. Das Dreyeck BDM hat zwey rechte Winkel BDM und BMD, weil die Kreise DBEA und BMAN auf DMEN senkrecht stehen; wenn nun der Bogen DM $=$ 20°, so ist auch der Winkel DBM $=$ 20°, weil der Bogen DM den Punkt B zum Pole hat: es sind demnach in dieser Voraussetzung alle drey Winkel des sphärischen Dreyeckes BDM zusammen $= 90 + 90 + 20 = 100°$: der Winkel DBM kann größer und auch kleiner werden, ohne daß die zwey übrigen Winkel des sphärischen Dreyeckes BDM geändert werden; so z. B. enthalten alle drey Winkel in dem

Fig. 104 sphärischen Dreyecke MBE zusammen $90 + 90 + 160 = 340°$, weil wir $DBM = 20°$, und folglich $MBE = 180 - 20 = 160°$ gesetzet haben. Wir ersehen aus diesem, daß die Anzahl der Grade aller drey Winkel in einem sphärischen Dreyecke veränderlich sey: man kann demnach bey den sphärischen Dreyecken aus zwey gegebenen Winkeln den dritten nicht bestimmen.

387. Ein **körperlicher Winkel** (angulus solidus) ist ein Winkel, der von mehr als zwey geraden Linien eingeschlossen ist, welche alle in einem Punkte zusammen stossen, und davon je zwey und zwey in einer anderen Ebene liegen. So z. B. ist jedes Eck in einem Zimmer, jedes Eck an einem Würfel, jede Spitze an einer Pyramide ein körperlicher Winkel. Ein körperlicher Winkel besteht demnach aus verschiedenen ebenen Winkeln; alle diese ebenen Winkel zusammengenommen sind dem körperlichen Winkel gleich; sie müssen alle zusammen weniger als vier rechte Winkel oder $360°$ enthalten, weil sie in eine und eben dieselbe Ebene fallen müßen, sobald sie $360°$ enthalten.

388. Regelmäßige Körper werden jene genennet, die von gleichen regelmäßigen Vielecken, und von vollkommen gleichen körperlichen Winkeln eingeschlossen sind. Deren giebt es nur fünf. I. Die dreyeckigte gleichseitige Pyramide, die von vier gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen ist; sie heißt wegen den vier einschliessenden Flächen ein Tetraedrum; jeder körperliche Winkel an diesem Körper ist $= 3 . 60° = 180°$. II. Der **Würfel**, **Kubus**, oder **Hexaedrum** ist von 6 Quadraten eingeschlossen; jeder körperliche Winkel enthält demnach $3 . 90° = 270°$. III. Das **Oktaedrum** ist von acht gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen, davon je vier Dreyecke zusammen den körperlichen Winkel machen, der folglich $4 . 60° = 240°$ enthält; ein Oktaedrum ist nichts anders als das Doppelte einer viereckigten gleichseitigen Pyramide. IV. Das **Dodekaedrum** ist in zwölf regelmäßige Fünfecke eingeschlossen, davon je drey

zu-

zusammen den körperlichen Winkel machen, der folglich $3 . 180^{\circ}$ Fig.
$= 324^{\circ}$ enthält, weil jeder Vieleckswinkel in einem regelmäßigen Fünfecke $= \frac{5 . 180^{\circ} - 360^{\circ}}{5} = 108^{\circ}$ ist. V. Das Ikosaedrum ist in zwanzig gleichseitige Dreyecke eingeschlossen, davon je fünf zusammen den körperlichen Winkel machen, der daher $5 . 60^{\circ} = 300^{\circ}$ enthält. Andere regelmäßige Körper giebt es nicht; denn sechs gleichseitige Dreyecke, vier Quadrate, drey regelmäßige Sechsecke, wenn man sie mit ihren Vieleckswinkeln in einem Punkte zusammen fügen wollte um einen körperlichen Winkel zu machen, würden um den nämlichen Punkt herum schon 360° enthalten, und folglich in einer und eben derselben Ebene liegen; noch viel weniger würden mehr als vier Quadrate, mehr als drey regelmäßige Fünfecke, mehr als drey regelmäßige Sechsecke dazu taugen, weil sie gar nicht zusammen passen, und folglich keinen körperlichen Winkel einschliessen können; und da drey Vieleckswinkel von anderen regelmäßigen Vielecken auch schon über 360° steigen, so können sie ebenfalls keinen körperlichen Winkel einschliessen, und folglich auch keinen Körper allenthalben begränzen.

Von der Ausmessung der Oberflächen der Körper.

389. Die Oberfläche eines jeden senkrechten Prisma ABCcba ohne den beyden Grundflächen ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche multiplicirt mit der Höhe das ist mit einer Seite des Prisma; z. B. wenn die Höhe dieses Prisma $= p$ gesetzt wird, so ist die Oberfläche $= (AB + BE + EC + CD + DA) . p$. 101

Denn diese Oberfläche ist gleich der Summe der Rechtecke $Ba + Eb + Ce + Dc + Ad$; nun aber ist $Ba = AB . Bb = AB . p$, $Eb = BE . Ee = BE . p$, u. s. w. folglich ist die Summe dieser Rechtecke, das ist die Oberfläche dieses senkrechten Prisma $= AB . p + BE . p + EC . p + \ldots$

Fig. 101 $= (AB + BE + EC + \ldots) \cdot p =$ dem Produkte aus dem Umfange der einen Grundfläche in die Höhe oder Seite des senkrechten Prisma.

Wäre das Prisma schief, so müßte man ein jedes einschliessende Parallelogram besonders berechnen, und sodann die Flächeninhalte aller einfliessenden Parallelograme zusammen addiren um die Oberfläche des schiefen Prisma zu erhalten.

390. Da nun ein senkrechter Cylinder nichts anders ist, als ein senkrechtes Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, so ist auch die Oberfläche eines senkrechten Cylinders ohne den beyden Grundflächen dem Produkte aus dem Umkreise der einen Grundfläche in die Höhe des Cylinders gleich: das ist wenn wir den Durchmesser der Grundfläche mit b und die Höhe eines senkrechten Cylinders mit a bezeichnen, so ist seine krumme Oberfläche $= ab\pi$; setzen wir die Höhe $a = b =$ dem Durchmesser der Grundfläche des senkrechten Cylinders, so ist sodann seine krumme Oberfläche $= b^2\pi$, und folglich viermal so groß, als seine Grundfläche, weil diese $= \frac{1}{4}b^2\pi$ ist; die ganze Oberfläche eines solchen gleichseitigen Cylinders ist endlich $= b^2\pi + \frac{1}{4}b^2\pi + \frac{1}{4}b^2\pi = \frac{3}{2}b^2\pi$.

Die Oberfläche eines schiefen Cylinders läßt sich nach den bisher gegebenen Gründen noch nicht berechnen; sie ist zwar gleich dem Produkte aus dem Umfange des auf die Achse senkrechten Durchschnittes multipliciret mit der Achse des Cylinders; allein eben dieser Umfang läßt sich nach den bisher gegebenen Gründen noch nicht bestimmen, weil er eine Ellipse ist.

391. Die Oberfläche einer regelmäßigen Pyramide ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange der Grundfläche multipliciret mit der Senkrechten, welche aus der Spitze der Pyramide auf was immer für eine Seite der Grundfläche gezogen wird.

Denn die Oberfläche einer solchen Pyramide besteht aus so vielen gleichschenklichten einander vollkommen gleichen Dreyecken,

ecken, als die Grundfläche Seiten hat; nun ist ein jedes die- Fig.
ser Dreyecke gleich dem halben Produkte aus einer Seite der Grundfläche multipliciret mit der Senkrechten, welche von der Spitze der regelmäßigen Pyramide auf was immer für eine Seite der Grundfläche gezogen wird; es ist also auch die Summe dieser Dreyecke, das ist die Oberfläche der Pyramide, gleich dem halben Produkte aus der Summe aller Seiten, nämlich aus dem Umfange der Grundfläche multipliciret mit der Senkrechten, welche aus der Spitze der regelmäßigen Pyramide auf was immer für eine Seite der Grundfläche gezogen wird.

392. Da nun bey einer unregelmäßigen Pyramide die einschliessenden Dreyecke ungleich sind, so muß man ein jedes Dreyeck besonders berechnen, und sodann alle diese Dreyecke zusammen addiren um die Oberfläche einer solchen Pyramide zu erhalten.

393. Ein senkrechter Kegel kann als eine regelmäßige Pyramide angesehen werden (379); es ist also auch die Oberfläche eines senkrechten Kegels gleich dem halben Produkte aus dem Umkreise der Grundfläche in die Seite des Kegels.

Die Oberfläche eines schiefen Kegels läßt sich nach den bisher gegebenen Gründen noch nicht berechnen.

394. Die Oberfläche eines abgestutzten senkrechten Ke- 103
gels hingegen läßt sich bestimmen; **sie ist gleich dem Produkte aus der halben Summe der Umkreise beyder Grundflächen multipliciret mit der Seite des abgestutzten Kegels**; nämlich die Oberfläche ABFE $= \frac{1}{2}(2DB \,.\, \pi + 2GF \,.\, \pi)\, BF = (DB + GF)\, \pi \times BF = (a + b)\, c\pi$, wenn wir $DB = a$, $GF = b$, und $BF = c$ setzen.

Denn die Oberfläche ABFE = der Oberfläche ABC — der Oberfläche EFC; nun aber ist die Oberfläche ABC $= a\pi \,.\, BC = a\pi \,.\, (BF + FC) = a\pi \,.\, (c + FC) =$

$a\pi$

Fig. $a\pi \,.\, (c + \frac{bc}{a-b})$, (weil BP ($a - b$: BF (c = FG (b : FC = $\frac{bc}{a-b}$ statt findet); und die Oberfläche EFC = $b\pi$. FC = $b\pi \,.\, \frac{bc}{a-b}$; folglich ist die Oberfläche ABFE = $a\pi \,.\, (c + \frac{bc}{a-b}) - b\pi \,.\, \frac{bc}{a-b} = (a+b)c\pi$ = BF × (DB + GF)π = $\frac{1}{2}$(2DB . π + 2GF . π). BF.

395. Nun ist $(a+b)$ = DB + GF = 2 . QN = MN, wenn BF in N in zwey gleiche Theile getheilet, und MN parallel zu AB oder zu EF gezogen wird; es ist also auch die Oberfläche eines gestutzten senkrechten Kegels ABFE = 2QN . $c\pi$ = 2QN π . c = MN . π × BF = dem Umkreise von MN multipliciret mit der Seite BF.

Es ist leicht einzusehen, daß in der angenommenen Voraussetzung, 2QN = DB + GF nämlich QN = $\frac{DB+GF}{2}$ sey; denn QN = QR + RN = GF + $\frac{1}{2}$PB, weil FB : FN = 2 : 1 = PB : RN = $\frac{1}{2}$PB statt findet; es ist aber $\frac{1}{2}$PB = $\frac{1}{2}$(DB — DP) = $\frac{1}{2}$(DB — GF): folglich QN = GF + $\frac{1}{2}$(DB — GF) = $\frac{DB + GF}{2}$.

105 396. Wenn ein regelmäßiges symetrisches Vieleck sich um eine Achse herumdrehet, die durch einen Vieleckswinkel und durch den Mittelpunkt gezogen ist, so entsteht ein Körper, der ein Sphäroides (Afterkugel) genennet wird. **Die Oberfläche eines solchen Körpers ist gleich dem Produkte aus dem eingeschriebenen Umkreise multipliciret mit der Umdrehungsachse.**

Denn

Denn die Oberfläche eines solchen Körpers besteht aus Fig.
zwey Kegeloberflächen DAK, TBZ, und aus den Oberflä- 105
chen der abgestutzten Kegel DCLK, CF′L, F′PQ, u. s. w. Nun ist die Oberfläche eines jeden solchen abgestutzten Kegels, z. B. CDKL, gleich der Seite CD multiplicirt mit dem Umkreise von MN $= CD \times 2MG . \pi$ (395); es findet aber in den ähnlichen Dreyecken CID und MGH folgende Proportion statt; $CD : DI$ oder $EF = MH : MG$ nämlich $MG = \frac{EF . MH}{CD}$; folglich ist, wenn man statt MG seinen Werth setzet, diese nämliche Oberfläche $CDKL = CD \times \frac{2EF . MH}{CD} . \pi = 2MH . \pi \times EF = EF \times MV . \pi =$ dem Produkte aus dem eingeschriebenen Umkreise multipliciret mit der Höhe EF. Und eben so läßt sich erweisen, daß die Oberfläche $DAK = AE \times MV . \pi$, die Oberfläche $CF'L = FF' \times MV . \pi$, u. s. w.; folglich ist die Summe aller dieser Oberflächen, nämlich die Oberfläche des Sphäroides $= AE \times MV . \pi + EF \times MV . \pi + FF' \times MV . \pi + \ldots\ldots = (AE + EF + FF' + F'H + Hf' + f'f + fe + eB) \times MV . \pi = AB \times MV . \pi =$ dem Produkte aus der Achse in den eingeschriebenen Umkreis.

397. Wenn man sich einbildet, daß die Anzahl der Seiten des umgeschriebenen regelmäßigen Vieleckes ins unendliche vermehret, und folglich die Seiten desselben ins unendliche vermindert werden, so wird sodann der Umfang dieses regelmäßigen Vielecks den eingeschriebenen Umkreis, die Umdrehungsachse den Durchmesser, und die Oberfläche des Sphäroides die Kugelfläche decken; es ist aber in diesem Falle die Oberfläche des Sphäroides gleich dem Produkte aus dem Durchmesser in den eingeschriebenen Umkreis; es ist also auch die **Kugelfläche gleich dem Produkte aus dem Durchmesser multipliciret mit dem dazu gehörigen nämlich mit einem größten Umkreise der Kugel.**

398.

Fig. 398. Bey diesem Uebergange des Sphäroides in eine
105 Kugel wird ein Abschnitt CDAKL des Sphäroides in einen Kugelabschnitt, ein Stück PDKQ des Sphäroides zwischen zwey parallelen auf die Umdrehungsachse senkrechten Schnitten in eine Zone verwandelt: **folglich ist die Oberfläche eines Kugelabschnittes gleich dem Produkte aus dem größten Umkreise in die Höhe des Abschnittes; und die Oberfläche einer Zone ist gleich dem Produkte aus dem größten Umkreise der dazu gehörigen Kugel multipliciret mit der Höhe der Zone.**

399. Es folgt aus diesem

I. Daß die Kugelfläche viermal so groß sey, als der Flächeninhalt eines dazu gehörigen größten Kreises. Denn es sey der Halbmesser einer Kugel $= a$, so ist ein dazu gehöriger größter Umkreis $= 2a\pi$, und folglich die Kugelfläche $= 2a\pi \cdot 2a = 4a^2\pi$; der Flächeninhalt eines dazu gehörigen größten Kreises hingegen ist nur $= 2a\pi \cdot \frac{1}{2}a = a^2\pi$.

II. Daß die Kugelfläche der krummen Oberfläche eines umgeschriebenen gleichseitigen Cylinders gleich sey. Denn jede dieser Oberflächen ist gleich dem Produkte aus dem Umkreise
106 von AB oder MN multipliciret mit AF oder EK oder AB.

III. Daß die Kugelflächen sich gegeneinander verhalten wie die Quadrate der Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser, u. s. w. Denn es sey einer Kugel Halbmesser $= a$, ihre Oberfläche $= s$, und einer anderen Kugel Halbmesser $= A$, ihre Oberfläche $= S$, so ist $s = 4a^2\pi$, und $S = 4A^2\pi$, folglich $s : S = 4a^2\pi : 4A^2\pi = 4a^2 : 4A^2 = a^2 : A^2$.

IV. Daß die Kugelfläche, die ganze Oberfläche des umgeschriebenen Cylinders, und die ganze Oberfläche des umgeschriebenen gleichseitigen Kegels sich gegeneinander verhalten, wie $4 : 6 : 9$. Denn es sey der Halbmesser der Kugel $CK = a$, so ist die Kugelfläche $= 4a^2\pi$, die ganze Oberfläche des Cylinders $= 4a^2\pi + a^2\pi + a^2\pi = 6a^2\pi$, und die ganze Oberfläche des umgeschriebenen gleichseitigen Kegels ist

=

$= \frac{1}{2}IL . \pi \times ID + IL . \pi \times \frac{1}{4}IL = \frac{1}{2}ID . \pi \times ID +$ Fig.
$ID . \pi \times \frac{1}{4}ID = \frac{3}{4}ID^2 . \pi = 9a^2\pi$, weil $DK = DE +$ 106
$EC + CK = a + a + a = 3a$, und $ID^2 = DK^2 + IK^2 = DK^2 + \frac{1}{4}IL^2 = DK^2 + \frac{1}{4}ID^2$, das ist $ID^2 = \frac{4}{3}DK^2 = \frac{4}{3} . 9a^2 = 12a^2$, und endlich $\frac{3}{4}ID^2 . \pi = \frac{3}{4} . 12a^2 . \pi = 9a^2\pi$; folglich verhält sich die Kugelfläche zur ganzen Oberfläche des umgeschriebenen Cylinders, zur ganzen Oberfläche des umgeschriebenen gleichseitigen Kegels, gleichwie $4a^2\pi : 6a^2\pi : 9a^2\pi = 4 : 6 : 9$.

Und eben so läßt sich erweisen, daß die Kugelfläche, die ganze Oberfläche des eingeschriebenen gleichseitigen Cylinders, und die ganze Oberfläche des eingeschriebenen gleichseitigen Kegels sich gegeneinander verhalten wie 16, 12, 9.

400. Daß die Oberfläche einer Zone dem Produkte aus einem größten Umkreise in die Höhe, die halbe Kugelfläche dem Produkte aus dem größten Umkreise in den Halbmesser, die ganze Kugelfläche dem Produkte aus dem größten Umkreise in den Durchmesser, und die Oberfläche eines Kugelabschnittes dem Produkte aus einem größten Umkreise der dazu gehörigen Kugel in die Höhe des Kugelabschnittes gleich sey; läßt sich auch durch die Summirung der Elemente auf folgende Art erweisen.

Es sey DAPND der Durchschnitt oder Erzeugungskreis 87.
einer Kugel; ein Stück $CM = x$ des Halbmessers $= a$ sey in unendlich viele und gleiche Theile getheilet, und aus den Theilungspunkten die senkrechten Ordinaten CA, cd, ef..... qr, MB bis an den Umkreis gezogen, so sind die Elemente der Kugelfläche die unendlich kleinen Zonen, welche bey der Umdrehung durch die unendlich kleinen Bögen Ad, df.... rB erzeuget werden; diese Elemente von AC bis BM zusammengezählet oder summiret, geben die krumme Oberfläche der Zone, welche durch den Bogen AB erzeuget wird; das letzte, oder allgemeine Glied in dieser Reihe der Elemente ist die Oberfläche der Zone, welche durch den unendlich kleinen Bogen rB be-

Fig. beschrieben wird; es ist aber (394.) diese Oberfläche $= rB \times (MB + qr)\pi$, (weil man rB für eine gerade Linie, und die unendlich kleine Zone für einen abgestutzten Kegel ansehen kann), das ist diese Oberfläche ist $= rB \times (\sqrt{CB^2 - CM^2} + \sqrt{CB^2 - (CM - qM)^2}) . \pi = rB \times \left(\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - (x - \frac{x}{\infty})^2}\right) . \pi = rB \times (2\sqrt{a^2 - x^2}) . \pi =$ dem Elemente des Bogens multipliciret mit dem Umkreise der dazu gehörigen Ordinate MB; ferner findet wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke CBM und rBp folgende Proportion statt; $MB : BC = Bp$ oder $Mq : rB$, nämlich $\sqrt{a^2 - x^2} : a = \frac{x}{\infty} : rB = \frac{ax}{\infty\sqrt{a^2 - x^2}}$; folglich ist die nämliche Oberfläche oder Element $rB \times (2\sqrt{a^2 - x^2}) . \pi = \frac{ax}{\infty\sqrt{a^2 - x^2}} \times (2\sqrt{a^2 - x^2}) . \pi = 2a\pi . \frac{x}{\infty}$; eben so kann man erweisen, daß jedes der übrigen Elemente $= 2a\pi . \frac{x}{\infty}$ sey; es ist demnach die Summe aller dieser Elemente nämlich die Oberfläche der Zone, welche durch den Bogen AB erzeuget wird, $= 2a\pi . \frac{x}{\infty} + 2a\pi . \frac{x}{\infty} + 2a\pi . \frac{x}{\infty} + 2a\pi . \frac{x}{\infty} + .. = \infty \times 2a\pi . \frac{x}{\infty} = 2a\pi . x =$ dem größten Umkreise $2a\pi$ der Kugel multipliciret mit der Höhe x der Zone. Setzen wir nun $x = a$, so ist die halbe Kugelfläche $= 2a\pi . a = 2a^2\pi$, und folglich die ganze Kugelfläche $= 2a\pi . 2a =$ dem größten Umkreise multipliciret mit dem Durchmesser.

401.

401. Wenn man sich einbildet, daß ein größter Umkreis DMEN in n gleiche Theile getheilet sey, und daß durch diese Theilungspunkte und durch die Pole A und B größte Kreise gezogen werden, so wird dadurch die ganze Kugelfläche in n Theile getheilet, die alle einander vollkommen gleich seyn müßen, weil sie alle auf eine gleiche Art bestimmet sind (4). Es seyn nun D und M zwey von diesen Theilungspunkten, nämlich der Bogen DM $= \frac{DMEND}{n}$, so ist die Fläche ADBMA = dem $n$ten Theile der ganzen Kugelfläche $= \frac{DMEND \times AB}{n} = \frac{DMEND}{n} \times AB = DM \times AB$, wenn wir DM statt $\frac{DMEND}{n}$ substituiren; das ist, ein Stück der Kugelfläche von zwey größten Halbkreisen BDA und BMA eingeschlossen ist gleich dem Produkte aus dem Durchmesser AB in den Bogen DM des größten Kreises, der aus der Spitze B oder A beschrieben wird. Da nun dieser Bogen den sphärischen Winkel B oder A messet, so kann man auch sagen, daß ein Stück der Kugelfläche von zwey größten Halbkreisen eingeschlossen gleich sey dem Produkte aus dem Durchmesser der Kugel multipliciret mit dem sphärischen Winkel, welchen die zwey Halbkreise einschliessen. Fig. 104

Von der Ausmessung des Kubikinhaltes der Körper.

402. Der Kubikinhalt (volumen) eines Körpers ist nichts anders, als die Größe der Ausdehnung, die von der ganzen Oberfläche des Körpers eingeschlossen wird. Zwey Kugeln von einem nämlichen Durchmesser, die eine von Bley die andere von Eisen, haben einerley Kubikinhalt, obschon ihre Massen (massæ) das ist die Mengen der Materie, und auch ihre Gewichte verschieden sind.

Fig. 403. Der Kubikinhalt eines Körpers wird ausgemessen, wenn man untersuchet, wie oft ein bekannter für die Einheit angenommener Körper in demselben enthalten sey; das ist wenn man untersuchet, wie oft sich der bekannte für die Einheit angenommene Körper in dem auszumessenden herumlegen lasse: die Zahl nun, welche dieses anzeiget, bestimmet den Kubikinhalt des auszumessenden Körpers. Der für die Einheit angenommene Körper, mit dem andere Körper ausgemessen werden, ist gemeiniglich ein **Würfel**, oder Kubus, dessen Seite bald einen Zoll, bald einen Schuh, bald eine Klafter, zuweilen auch eine Meile beträgt, und der sodann in Rücksicht der Seite **Kubikzoll**, **Kubikschuh**, u. s. w. genennet wird.

107 404. Wenn die Seite des für die Einheit angenommenen Würfels m in der Länge AB der Grundfläche eines senkrechten Parallelepipedums $a$mal (z. B. 5mal), in der Breite AD der Grundfläche $b$mal (4mal), und in der Höhe AF oder BC oder DE des Parallelepipedums $c$mal (z. B. 3mal) enthalten ist, so ist der Kubikinhalt desselben $= a \,.\, b \,.\, c \times m$ $= 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, m = 60m$.

Denn man theile nur die Länge AB in a, die Breite AD der Grundfläche in b, und die Höhe AF des senkrechten Parallelepipedums in c gleiche Theile, wenn die Seite des für die Einheit angenommenen Würfels m in AB $a$mal, in AD $b$mal, und in AF $c$mal enthalten ist, und lege sodann in Gedanken parallele Ebenen durch die Theilungspunkte der Geraden AB zur Seitenfläche AE, durch die Theilungspunkte der Geraden AD zur Seitenfläche AC, und durch die Theilungspunkte der Geraden AF zu der Grundfläche DB, so wird dadurch der Kubikinhalt dieses Parallelepipedums in lauter vollkommen gleiche Würfel zertheilet; die Anzahl dieser Würfel ist $= a \,.\, b \,.\, c$, weil jede Schichte deren $a \,.\, b$ enthält, und c solcher Schichten übereinander liegen; es ist ein jeder von diesen Würfeln z. B. G $= m$ (weil sie vollkommen auf einerley Weise bestimmet sind); es ist also auch $a.b.c \times G = a.b.c \times m$; es ist aber $a.b.c \times G$ = dem Kubikinhalte des Parallelepipedums AG; folglich ist auch $a.b.c \times m$ = dem Kubikinhalte dieses nämlichen Parallelepipedums $= 5.4.3.m = 60m$, wenn man $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$ setzet. Fig. 107

405. Setzet man die Seite des für die Einheit angenommenen Würfels $= s$, so ist $AB = a.s$, $AD = b.s$, und $AF = c.s$, nämlich $\frac{AB}{s} = a$, $\frac{AD}{s} = b$, und $\frac{AF}{s} = c$, weil vermög der Voraussetzung s in AB $a$mal, in AD $b$mal, und in AF $c$mal enthalten ist; es ist demnach auch der Kubikinhalt des senkrechten Parallelepipedums $AG = \frac{AB}{s} \cdot \frac{AB}{s} \cdot \frac{AF}{s} \times m = \frac{AB.AD.AF}{s^3} \times m$, wenn man für a, b, und c ihre Werthe substituiret; setzet man ferner $s = 1$ z. B. $= 1$ Schuhe, so ist $m = 1$ Kubikschuhe, und der Kubikinhalt des Parallelepipedums $AG = AB.AD.AF$ Kubikschuhen: das ist der Kubikinhalt eines senkrechten Parallelepipedums ist gleich dem Produkte aus seinen drey Abmessungen, nämlich seiner Länge, Breite, und Höhe mit einander multipliciret; da überdieß $AB.AD$ = der Grundfläche BD, so kann man auch sagen, daß **der Kubikinhalt eines senkrechten Parallelepipedums gleich sey dem Produkte aus der Grundfläche BD multipliciret mit der Höhe AF**, allwo für die Einheit ein Würfel auf derjenigen Linie genommen werden muß, mit der die Länge, Breite, und Höhe des Parallelepipedums ausgemessen sind.

406. Da nun ein jeder Würfel nichts anders ist, als ein senkrechtes Parallelepipedum, bey dem alle drey Abmessungen einander gleich sind, so ist der Kubikinhalt eines jeden Würfels = einer Abmessung, nämlich einer Seite desselben, dreymal durch die Multiplikation angesetzet; ein Würfel z. B.,

Fig. dessen Seite = 6 Schuhen, das ist eine Kubikklafter ist $= 6.6.6 = 6^3 = 216$ Kubikschuhen; ein Würfel dessen Seite = 12 Zollen, nämlich ein Kubikschuh $= (12)^3 =$ 1728 Kubikzollen; ein Kubikzoll $= (12)^3 = 1728$ Kubiklinien, u. s. w.

407. Sind die Abmessungen eines senkrechten Parallelepipedums in Klaftern, Schuhen, und Zollen ausgedrücket, so muß man alle diese Größen in Zolle verwandeln, wenn die Zolle die kleinste gegebene Gattung seyn sollten, damit alle drey Abmessungen mit einer nämlichen Einheit gemessen sind, und sodann muß man diese drey Zahlen miteinander multipliciren um den Kubikinhalt in Kubikzollen zu erhalten; dieser Ausdruck wird sodann in Kubikklaftern und Kubikschuhe verwandelt, wenn man ihn mit $1728 . 216 = 373248$, und den Ueberrest mit 1728 dividiret.

Man wird gemeiniglich mit der Rechnung geschwinder fertig, wenn man die Größen der kleineren Gattung als Brüche von der größeren Gattung vorstellet (60), und sodann die Multiplikation nach (61) verrichtet. Es sey z. B. die Länge der Grundfläche eines senkrechten Parallelepipedums $= 7^\circ$ 3^{I}, die Breite $= 2^\circ\ 4^{\mathrm{I}}$, und die Höhe $= 0^\circ\ 5^{\mathrm{I}}\ 9^{\mathrm{II}}$; nun ist $7^\circ\ 3^{\mathrm{I}} = \frac{15^\circ}{2}$, $2^\circ\ 4^{\mathrm{I}} = \frac{8^\circ}{3}$, und $0^\circ\ 5^{\mathrm{I}}\ 9^{\mathrm{II}}$ $= \frac{23^\circ}{24}$; folglich ist der Kubikinhalt dieses Parallelepipedums $= \frac{15}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{23}{24} = \frac{5}{2} . 1 . \frac{23}{3} = \frac{115}{6} = 19\frac{1}{6}$ Kubikklaftern $= 19 K^\circ$ und $\frac{1 . 216}{6}$ Kubikschuhen $= 19 K^\circ$ und $36 K^{\mathrm{I}}$.

408. Die nämlichen praktischen Meßkünstler, welche die Quadratklafter in 6 Klafterschuhe (oder Riemenschuhe) abtheilen (337), pflegen auch die Kubikklafter in 6 Kubikklafter-

terschuhe, einen Kubikklafterschuh in 12 Kubikklafterzolle, Fig.
einen Kubikklafterzoll in 12 Kubikklafterlinien u. s. w. zu zerfällen; es ist nach dieser Benennung 1 Kub. Kl. Sch. $= \frac{1}{6} K^{\circ} = \frac{1}{6} . 216 K^{I} = 36$ Kubikschuhen; 1 Kub. Kl. Zoll $= \frac{1}{12}$ Kub. Kl. Sch. $= \frac{1}{12} \cdot 36 K^{I} = 3$ Kubikschuhen; 1 Kub. Kl. Linie $= \frac{1}{12}$ Kub. Kl. Z. $= \frac{1}{12} \cdot 3 K^{I} = \frac{1}{4} K^{I}$ $= \frac{1}{4} . 1728 K^{II} = 432$ Kubikzollen; 1 Kub. Kl. Punkt $= \frac{1}{12}$ Kub. Kl. Linie $= \frac{1}{12} \cdot 432 K^{II} = 36$ Kubikzollen. Nach dieser Benennung enthält nun das vorige Parallelepipedum 19 Kubkl. und 1 Kub. Kl. Sch. Imgleichen ein senkrechtes Parallelepipedum von folgenden drey Abmessungen $\frac{5^{\circ}}{2}, \frac{11^{\circ}}{4}, \frac{7^{\circ}}{6}$ enthält nach dieser Benennung $\frac{385}{48} K^{\circ} = 8 \frac{1}{48} K^{\circ} = 8 K^{\circ}$ und $\frac{1 \cdot 6}{48}$ Kub. Kl. Sch. $= 8 K^{\circ}$, 0 Kub. Klaft. Sch. und $\frac{6 \cdot 12}{48}$ Kub. Kl. Z. $= 8 K^{\circ}$, 0 Kub. Kl. Sch., und $1\frac{1}{2}$ Kub. Kl. Zoll $= 8 K^{\circ}$, 0 Kub. Kl. Sch., 1 Kub. K. Z., 6 Kub. Kl. Linien.

Nach der vorigen Benennung enthält eben dieses Parallelepipedum $8 \frac{1}{48} K^{\circ} = 8 K^{\circ}$ und $\frac{216}{48} K^{I} = 8 K^{\circ}$ und $4\frac{1}{2} K^{I} =$ $8 K^{\circ}$ $4 K^{I}$ und $864 K^{II}$.

Eben diese Praktischen Meßkünstler theilen einen Kubikschuh in 12 Kubikschuhzolle, einen Kubikschuhzoll in 12 Kubikschuhlinien, u. s. w. Es ist nach dieser Benennung 1 Kubikschuhzoll $= \frac{1}{12} K^{I} = \frac{1}{12} . 1728 K^{II} = 144 K^{II}$; 1 Kubikschuhlinie $= 12 K^{II}$, und 1 Kubikschuhpunkt $= 1$ Kubikzoll. Z. B. ein senkrechtes Parallelepipedum von folgenden drey Abmessungen $\frac{3^{I}}{2}, \frac{5^{I}}{12}, \frac{11^{I}}{4}$ enthält nach dieser Benennung $1 K^{I}$ 8 Kub. Sch. Zolle 7 Kub. Sch. Lin. und 6 Kub. Sch. Punkten.

409. Zwey parallelepipeda DFGA und EFHA von der 108
nämlichen Grundfläche und Höhe sind am Kubikinhalte einander gleich, sie mögen noch so verschieden geneigt seyn, wenn sie nur also beschaffen sind, daß sie genau zwischen zwey parallelen

Fig. rallelen Seitenebenen BCA und GER stehen, wenn sie mit
108 ihren gleichen Grundflächen gehörig übereinander gestellet werden.

Denn es ist in diesem Falle, wenn man durch die oberen Grundflächen BD und CE eine Ebene leget, das dreyeckigte Prisma GFH = DAE (weil diese zwey Prismen vollkommen auf einerley Art bestimmet sind); es ist also auch GFH — DPH = DAE — DPH, nämlich GFPQD = EAPQH; und auch GFPQD + FPQSR = EAPQH + FPQSR, nämlich das Parallelepipedum DFGA = EFHA am Kubikinhalte.

109 410. Zwey Parallelepipeda AB und AC von vollkommen gleichen Grundflächen und Höhen sind auch noch am Kubikinhalte gleich, wenn sie schon nicht also beschaffen sind, daß sie genau zwischen zwey parallelen Seitenebenen liegen, wenn sie mit ihren gleichen Grundflächen gehörig übereinander gestellet werden.

Denn man bilde sich nur ein, daß zwey solche Parallelepipeda AB und AC mit ihren vollkommen gleichen Grundflächen gehörig auf einander gestellet, und bey einem jeden zwey entgegengesetzte Seitenflächen, wie auch die oberen Grundflächen genugsam verlängert werden, so wird dadurch ein drittes Parallelepipedum AD von der nämlichen Grundfläche und Höhe zum Vorschein kommen; nun ist vermög dem vorhergehenden das Parallelepipedum AB = AD, und auch AC = AD (weil jedes dieser zwey Parallelepipeden AB und AC mit AD einerley Grundfläche und Höhe hat, und genau zwischen zwey parallelen Seitenebenen steht): es ist also auch das Parallelepipedum AB = AC am Kubikinhalte.

411. Es folgt aus diesem, daß ein wie immer schief stehendes Parallelepipedum einem senkrechten Parallelepipedum von gleicher Grundfläche und Höhe am Kubikinhalte gleich sey; es ist aber der Kubikinhalt eines senkrechten Parallelepipedums dem Produkte aus der Grundfläche in die Höhe gleich (405); folglich ist auch der Kubikinhalt eines schiefstehenden Parallele-

rallelepipedums dem Produkte aus der Grundfläche in die Höhe gleich. Fig.

412. Auch der Kubikinhalt eines jeden dreyeckigten Prisma ABF ist gleich seiner dreyseitigen Grundfläche ABC multipliciret mit der Höhe des Prisma DP. 110

Denn man lege nur durch die Gerade BE zur Seitenfläche AF eine parallele Ebene BG, durch die Gerade CF zur Seitenfläche AE eine parallele Ebene CG, und verlängere die Grundflächen ABC, DEF, so ist das Prisma ABF=BCG, weil sie vollkommen *auf einerley Art bestimmet* sind; nun ist ABF + BCG = dem Parallelepipedum ABHGD; folglich ist auch ABF + ABF = ABHGD, nämlich ABF $= \frac{ABHGD}{2}$; es ist aber ABHGD = ABHC × DP = 2ABC × DP; folglich ABF $= \frac{2ABC \times DP}{2} = ABC \times DP$, nämlich der Kubikinhalt eines dreyeckigten Prisma ABF ist gleich der dreyseitigen Grundfläche ABC multipliciret mit der Höhe DP des Prisma, es möge dieses Prisma senkrecht oder schiefstehend seyn.

413. Der Kubikinhalt eines jeden vieleckigten Prisma ist gleich dem Produkte aus seiner Grundfläche in die Höhe, nämlich ABCdb = ABECD × P, wenn wir die Höhe dieses Prisma = P setzen. 101

Denn man zertheile nur die zwey entgegengesetzten vieleckigten Grundflächen durch gleichnamige Diagonalen in lauter Dreyecke, und lege durch diese parallelen Diagonalen die Ebenen Ac, Ae, so ist ABCdb = AaeEB + AaeECc + AacCd = AEB × P + AEC × P + ACD × P = (AEB + AEC + AED). P = ABECD × P.

Es folgt aus diesem, daß Prismen von einerley Höhe am Kubikinhalte einander gleich seyn müßen, wenn nur ihre Grundflächen einander am Flächeninhalte gleich sind, wenn sie schon

Fig- aus Vielecken von verschiedener Gattung bestehen, und wie immer schiessiehend sind.

414. Da man nun einen Cylinder für ein Prisma ansehen kann, dessen Grundflächen regelmäßige Unendlichecke sind, so ist auch der Kubikinhalt eines jeden Cylinders dem Produkte aus seiner Grundfläche in die Höhe gleich. Es sey z. B. der Halbmesser der Grundfläche $= a$, und die Höhe des Cylinders $= b$, so ist die Grundfläche $= a^2\pi$, und der Kubikinhalt des Cylinders $= a^2b\pi$.

415. Es folgt aus diesem

I. Daß die Kubikinhalte der Prismen und Cylinder sich gegeneinander verhalten, wie die Produkte aus den Grundflächen in die Höhen, nämlich $S : s = AB : ab$, wenn des einen Prisma oder Cylinders Kubikinhalt $= S$, Grundfläche $= B$, Höhe $= A$, und des anderen Kubikinhalt $= s$, Grundfläche $= b$, und Höhe $= a$ gesetzet wird.

II. Daß Prismen und Cylinder von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen und von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen sich verhalten. Denn man setze nur $B = b$, so ist $S \cdot s = AB : aB = A : a$; imgleichen $S : s = AB : Ab = B : b$, wenn $A = a$ gesetzet wird.

III. Daß Prismen und Cylinder am Kubikinhalte einander gleich seyn, wenn ihre Grundflächen mit den Höhen in einer verkehrten Proportion stehen. Denn wenn $B : b = a : A$, so ist auch $AB = ab$, und folglich $S = s$.

IV. Daß man aus dem gegebenen Kubikinhalte und aus der Höhe eines Prisma oder Cylinders seine Grundfläche, und auch aus dem Kubikinhalte und aus der Grundfläche die Höhe desselben bestimmen könne. Denn wenn $s = ab$, so ist $a = \frac{s}{b}$, und $b = \frac{s}{a}$; es sey z. B. der Kubikinhalt eines

Cylin-

Cylinders $= s = 100$ K' 96K'', und die Höhe $a = 8'$ Fig. $6''\ 8'''$, so ist die Grundfläche $b = \frac{100\,K'\ 96K''}{8'\ 6''\ 8'''} =$ 114

$\frac{1801}{18}$ K' : $\frac{77'}{9} = \frac{1801}{154}$ Quadratschuhen; setzet man nun den Durchmesser der Grundfläche dieses Cylinders $= x$, so ist $\frac{1}{4}x^2\pi = \frac{1801}{154}$, und folglich $x = \sqrt{\frac{3602}{77\pi}} = 3{,}859$ Schuhen. Wenn man die gegebene Höhe $a = 8'\ 6''\ 8'''$ in Linien, und auch den gegebenen Kubikinhalt in Kubiklinien verwandelt, so erhält man nach vollbrachter Division die gesuchte Grundfläche in Quadratlinien, woraus sich sodann der unbekannte Durchmesser der Grundfläche in Linien ergiebt. Aus diesem Beyspiele erhellet, wie man sich bey dergleichen Divisionen zu verhalten habe.

416. Wenn bey dem senkrechten dreyeckigten Prisma ABEFC die Seite AB $= a$, AD $= b$, AC $= c$, und der Neigungswinkel CAB $= 90°$ gesetzet wird, so ist ABEFC $= \frac{ac}{2} \cdot b = \frac{abc}{2}$ vermög (412). 111

Man kann dieses auch durch die Summirung der Elemente auf folgende Weise finden. Man stelle sich vor, daß CA $= c$ in ∞ gleiche Theile getheilet, und daß ein solcher Theil $= \frac{AC}{\infty} = \frac{c}{\infty}$ sey; durch die Theilungspunkte gedenke man parallele Ebenen zu AE, so wird dadurch das Prisma ABEFC in seine Elemente aufgelöset, welche von dem Rücken CF angefangen bis auf die Grundfläche AE in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges fortwachsen; das letzte Glied in dieser Reihe der Elemente ist der Körper ABED $\times$ AG $= ab \cdot \frac{c}{\infty} = \frac{abc}{\infty}$, (denn man kann ihn für ein Parallelepipedum an-

Fig. 111 sehen, weil $GP = AB$ seyn muß, sobald man $AG = \frac{AC}{\infty}$ setzet), das erste Glied aber ist $= 0$, nämlich der Rücken CF selbst, und die Anzahl aller Glieder oder Elemente dieser arithmetischen Reihe ist $= \infty$; folglich ist vermög (191) ihre Summe $= \left(0 + \frac{abc}{\infty}\right) \cdot \frac{\infty}{2} = \frac{abc}{2} =$ dem Kubikinhalte des Prisma ABEFC.

Diese Elemente, die wir eben summiret haben, sind eigentlich nichts anders, als die eingeschriebenen Prismen oder Parallelepipeden, deren Grundflächen von dem Rücken CF angefangen bis auf die Grundfläche AE in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges fortwachsen, und deren Höhen unendlich klein und zwar alle einander gleich sind. Es erhellet daraus, daß in diesem Falle durch die Summirung der eingeschriebenen Prismen der wahre Ausdruck des Kubikinhaltes erhalten werde. Es ist dieser Fall mit (341) einerley, und eben deswegen läßt sich alles an diesem Orte angeführte auch hier anbringen.

112 417. Wenn man die Höhe $AE = a$ einer dreyeckigten Pyramide in m gleiche Theile zertheilet, sodann durch diese Theilungspunkte zur Grundfläche $BCD = b$ parallele Ebenen führet, und durch die Durchschnittslinien dieser geführten Ebenen und der Seitenfläche ACD zu der entgegengesetzten Seite AB parallele Ebenen leget, so ist die Summe der Kubikinhalte aller eingeschriebenen Prismen, welche auf diese Art zum Vorschein kommen $= \frac{(m-1).(2m-1).ab}{6m^2}$

Denn vermög (374. III.) ist AE^2 ($a^2 : AM^2$ ($\frac{a^2}{m^2}$ $=$ BCD (b : $SgN = \frac{b}{m^2}$, imgleichen AE^2 (a^2 : AR^2 ($\frac{2^2a^2}{m^2}$ $=$

Fig.

$= \mathrm{BCD}\ (b : \mathrm{PfQ} = \frac{2^2 b}{m^2}$, u. s. w. und endlich $\mathrm{AE}^2\ (a^2 : \mathrm{AF}^2$ 112
$\left(\frac{(m-1)^2}{m^2} = \mathrm{BCG}\ (b : \mathrm{FhG} = \frac{(m-1)^2 b}{m^2}\right)$; folglich ist das erste Prisma $\mathrm{NP} = \mathrm{SgN} \times \mathrm{MR} = \frac{b}{m^2} \cdot \frac{a}{m} = \frac{ab}{m^3}$ (weil $\mathrm{MR} = \frac{a}{m}$ die Höhe dieses Prisma ist), das zweyte Prisma $\mathrm{QL} = \mathrm{PfQ} \times \mathrm{RO} = \frac{2^2 b}{m^2} \cdot \frac{a}{m} = \frac{2^2 ab}{m^3}$, das dritte Prisma $= \frac{3^2 ab}{m^3}$, das vierte $= \frac{4^2 ab}{m^3}$, u. s. w., und endlich ist das letzte Prisma $\mathrm{GB} = \mathrm{FhG} \times \mathrm{TE} = \frac{(m-1)^2 b}{m^2} \cdot \frac{a}{m}$ $= \frac{(m-1)^2 ab}{m^3}$; es ist demnach die Summe aller dieser Prismen $= \frac{ab}{m^3} + \frac{2^2 ab}{m^3} + \frac{3^2 ab}{m^3} + \ldots + \frac{(m-1)^2 ab}{m^3}$
$= \frac{ab}{m^3} \cdot [(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (m-1)^2] =$
$\frac{ab}{m^3} \cdot [\frac{(m-1) . m . (2m-1)}{6}] = \frac{(m-1) . (2m-1) . ab}{6m^2}$, wenn wir $m - 1$ statt n in der Formel $s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ substituiren (198. I.)

418. Setzen wir nun $m = \infty$, so ist die Summe der Kubikinhalte aller dieser eingeschriebenen Prismen $= \frac{(\infty - 1) . (2\infty - 1) ab}{6\infty^2} = \frac{\infty . 2\infty . ab}{6\infty^2} = \frac{2ab}{6}$ $= \frac{1}{3} ab =$ dem dritten Theile des Produktes aus der Grundfläche b in die Höhe a der Pyramide; es ist aber in diesem

Falle

Fig. 112 Falle die Summe der Kubikinhalte aller eingeschriebenen Prismen dem Kubikinhalte der Pyramide ABCD gleich (weil die keilförmigen Körperchen längst der Seitenfläche ACD verschwinden, und die eingeschriebenen Prismen sich in die Elemente der Pyramide verwandeln, sobald ihre Anzahl unendlich groß, und folglich die Höhe eines jeden unendlich klein wird); es ist also auch $\frac{1}{3}ab$ = dem Kubikinhalte der Pyramide ABCD; *nämlich der Kubikinhalt einer dreyeckigten Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Produktes aus der Grundfläche in die Höhe der Pyramide, sie möge senkrecht oder schief stehend seyn.*

419. Nun läßt sich eine jede vieleckigte Pyramide in lauter dreyeckigte Pyramiden von einerley Höhe zerfällen, wenn man ihre Grundfläche in lauter Dreyecke zertheilet; es ist *demnach der Kubikinhalt einer jeden vieleckigten Pyramide gleich dem dritten Theile des Produktes aus der Grundfläche in die Höhe der Pyramide.*

113 Daß der Kubikinhalt einer Pyramide dem dritten Theile des Produktes aus der Grundfläche in die Höhe gleich sey, läßt sich auch also erweisen. Es sey ABG ein senkrechtes dreyeckigtes Prisma, AB $= a$, CD $= b$ und senkrecht auf AC, und AE $= c$, so ist das Prisma ABG $= \frac{1}{2}ab \cdot c = \frac{abc}{2}$; man gedenke durch E, F, C eine Ebene, so ist das Prisma ABG = der Pyramide ECFG + der Pyramide EABFC; nun sey x von der Beschaffenheit, daß $\frac{\text{EFG} \times \text{GC}}{x}$ = der Pyramide ECFG, und $\frac{\text{EABF} \times \text{DC}}{x}$ = der Pyramide EABFC (weil der Kubikinhalt einer jeden Pyramide ganz gewiß von dem Produkte der Grundfläche in die Höhe abhängt, und dabey kleiner seyn muß, als dieses Produkt), so ist das Prisma ABG $= \frac{\text{EFG} \times \text{GC}}{x} + \frac{\text{EABF} \times \text{DC}}{x} =$

ABC

$\frac{ABC . AE + EABF . DC}{x}$, nämlich $\frac{abc}{2} = \frac{\frac{1}{2}ab . c + ac . b}{x}$, Fig. 113
und endlich $x = 3$; es ist demnach die Pyramide
$ECFG = \frac{EFG . GC}{3}$, und die Pyramide EABFC
$= \frac{EABF \times DC}{3}$, nämlich jede ist gleich dem dritten Theile des Produktes aus der Grundfläche in die Höhe.

420. Auch der Kubikinhalt eines jeden (senkrechten oder schiefen) Kegels ist gleich dem dritten Theile des Produktes aus der Grundfläche in die Höhe, weil man einen Kegel für eine Pyramide ansehen kann, deren Grundfläche ein Kreis ist.

421. Es folgt aus diesem

I. Daß jede Pyramide dem dritten Theile eines Prisma, und auch jeder Kegel dem dritten Theile eines Cylinders von der nämlichen Grundfläche und Höhe gleich sey.

II. Daß Pyramiden und Kegel sich am Kubikinhalte gegen einander verhalten, wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

III. Daß Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen, und von gleichen Höhen wie ihre Grundflächen sich verhalten.

IV. Daß Pyramiden und Kegel am Kubikinhalte einander gleich seyn, wenn ihre Grundflächen mit den Höhen in einer verkehrten Proportion stehen. Alles dieses sieht man sehr leicht ein, wenn man der einen Pyramide Kubikinhalt $= S$, Grundfläche $= B$, Höhe $= A$, und der andern Pyramide Kubikinhalt $= s$, Grundfläche b, und Höhe $= a$ setzet.

V. Daß man aus dem gegebenen Kubikinhalte einer Pyramide oder eines Kegels und aus der Grundfläche die Höhe

Fig. Höhe, wie nicht weniger aus dem Kubikinhalte und aus der Höhe die Grundfläche bestimmen könne. Es sey z. B. der Kubikinhalt eines Kegels $= s =$ 10 K° 72 K', die Grundfläche $= b =$ 7 Q° 18 Q', und die Höhe $= x$, so ist $s = \frac{1}{3}bx$, und folglich $x = \frac{3.s}{b} = \frac{3 \times (10\,K^{\circ}\ 72\,K')}{7\,Q^{\circ}\ 18\,Q'}$ $= 3 \cdot \frac{31}{3} K^{\circ} : \frac{15}{2} Q^{\circ} = \frac{6}{1}\frac{2}{5}$ Klafter $= 4^{\circ}\,0'\,9''\,7'''\,2^{IV}$.

Man erhält eben diesen Werth für x, wenn man das gegebene s in Kubikzolle, und b in Quadratzolle verwandelt, und sodann gehörig reduciret.

422. Auch der Kubikinhalt einer abgestutzten Pyramide läßt sich aus den beyden gegebenen parallelen Grundflächen, und aus der Höhe bestimmen, wenn man die Höhe des abgeschnittenen Stückes der Pyramide aufsuchet, sodann die ergänzte Pyramide und auch den abgeschnittenen Theil berechnet, und endlich das zweyte Resultat von dem ersten abzieht. Es
114 sey z. B. AF eine abgestutzte Pyramide, ihre Höhe DM $= a$, die untere Grundfläche $= B$, und die obere parallele Grundfläche $= b$; man verlängere in Gedanken die Seiten AD, BE, CF, bis sie in dem Punkte P zusammenstossen, ziehe aus dem Punkte P auf die Ebene der Grundfläche ABC die senkrechte PN, so ist PN die Höhe der ergänzten Pyramide ACBP, und PQ ist die Höhe der abgeschnittenen Pyramide DEFP. Es sey PQ $= x$, so ist PN $=$ PQ $+$ QN $=$ PQ $+$ DM $= x + a$; es ist aber DEF : ABC $=$ $PQ^2 : PN^2$ (374. III.), nämlich $b : B = x^2 : x^2 + 2ax + a^2$; folglich auch $bx^2 + 2abx + a^2b = Bx^2$, das ist

$$x = \frac{ab + a\sqrt{Bb}}{B - b} = PQ, \text{ und } x + a = \frac{aB + a\sqrt{Bb}}{B - b} = PN;$$

und endlich der Kubikinhalt AF $=$ ABCP $-$ DEFP $=$

$$\tfrac{1}{3}ABC \,.\, PN - \tfrac{1}{3}DEF \,.\, PQ = \tfrac{1}{3}B \,.\, \frac{aB + a\sqrt{Bb}}{B - b} -$$

$$\tfrac{1}{3}b \,.\, \frac{ab + a\sqrt{Bb}}{B - b} = \tfrac{1}{3}a \,.\, (B + b + \sqrt{Bb}),$$ das ist der

Ku-

Kubikinhalt einer abgestutzten Pyramide wird erhalten, Fig.
wenn man zwischen der oberen und unteren Grundfläche eine mittlere geometrische Proportionale Fläche suchet, diese drey Flächen zusammen addiret, und ihre Summe mit dem dritten Theile der Höhe multipliciret.

Es ist leicht einzusehen, daß sich dieser Satz auf alle Gattungen der Pyramiden, und auch auf die Kegel erstrecke; nur ist es erforderlich, daß die beyden Grundflächen mit einander parallel laufen.

423. Auch der Kubikinhalt eines schief abgeschnittenen 115
dreyeckigten Prisma AECDFB läßt sich bestimmen; er ist gleich dem dritten Theile der Summe seiner drey parallelen Seiten multipliciret mit der senkrecht durchschneidenden Fläche MNP.

Denn der Kubikinhalt AECDFB ist = der viereckigten Pyramide AENMC + der dreyeckigten Pyramide MCNP + der dreyeckigten Pyramide MDNP + der viereckigten Pyramide MNFBD $= \frac{1}{3}\text{AENM}.\text{QP} + \frac{1}{3}\text{MNP}.\text{PC} + \frac{1}{3}\text{MNP}.\text{PD} + \frac{1}{3}\text{MNFB}.\text{QP} = \frac{1}{3}(\text{AENM} + \text{MNFB}).\text{QP} + \frac{1}{3}(\text{PC} + \text{PD}).\text{MNP} = \frac{1}{3}\text{AEFB}.\text{QP} + \frac{1}{3}\text{MNP}.\text{CD}$; setzen wir nun $\text{AB} = a$, $\text{EF} = b$, $\text{CD} = c$, die eine Seite der senkrecht durchschneidenden Fläche $\text{MN} = e$, und die Senkrechte $\text{QP} = f$, so ist $\text{AEFB} = \frac{a+b}{2}.e$, und $\text{MNP} = \frac{ef}{2}$; folglich ist $\text{AECDFB} = \frac{1}{3}.\frac{a+b}{2}.e.f + \frac{1}{3}.\frac{ef}{2}.c = \frac{1}{3}.\left(\frac{aef + bef + cef}{2}\right) = \left(\frac{a+b+c}{3}\right).\frac{ef}{2}$
$= \frac{\text{AB}+\text{EF}+\text{CD}}{3} \times \text{MNP}$.

424. Durch Hilfe dieses Satzes lassen sich nun die Kubikinhalte von mehreren unregelmäßigen Körpern berechnen; so z. B. ist der Kubikinhalt des schief abgeschnittenen viereckigten Prisma

ABGFC

Fig.
116 $ABGFC = \frac{1}{2}MN.PQ.\left(\frac{AD + BC + HE}{3}\right) + \frac{1}{2}PR.$
$PQ.\left(\frac{AD + HE + GF}{3}\right)$, wenn MNPR die senkrecht durchschneidende Fläche, und PQ die Entfernung der zwey parallelen Grundflächen nämlich die Höhe dieses Körpers vorstellet; denn durch die Ebene AHED wird dieses Prisma in zwey dreyeckigte schief abgeschnittene Prismen zerleget. Im-
117 gleichen der zeltförmige Körper ABDEC ist $=$ dem Dreyecke FGH. $\left(\frac{AB + ED + CP}{3}\right)$, wenn diese drey Seiten miteinander parallel laufen, und von FGH senkrecht durchschnitten sind.
118 Eben so ist der Kubikinhalt des Körpers AGHB Fig. 118., bey dem die einzigen vier Seiten AE, BF, DH, CG parallel laufen $= PMN.\left(\frac{DH + AE + CG}{3}\right) + PMQ.$ $\left(\frac{DH + AE + BF}{3}\right)$, wenn man sich vorstellet, daß durch die zwey parallelen Seiten DH und AE eine Ebene geleget, und der Durchschnitt MNPQ auf die vier parallelen Seiten senkrecht sey; u. s. w.

425. Wenn ein unregelmäßiger Körper also beschaffen ist, daß er sich weder in Pyramiden, noch in Prismen, noch in andere bekannte Körper zerlegen läßt, so pflegt man seinen Kubikinhalt durch verschiedene andere Kunstgriffe zu suchen, als z. B. durch das Einlegen in ein mit Wasser angefülltes senkrechtes Parallelepipedum, oder in einen mit Wasser gefüllten Cylinder. Man kann auch den Kubikinhalt eines Körpers aus seinem Gewichte bestimmen: z. B. es sey das Gewicht eines ausgebohrten metallenen Bombenpöllers $= 1000$ ℔, das Gewicht eines Kubikschuhes von diesem Metalle $= 400$ ℔, und der Kubikinhalt des Pöllers ohne der Bohrung $= x$ Kubikschuhen, so ist $x.400 = 1000$, und folglich $x = 2\frac{1}{2}$ K'.

Und

Und umgekehrt aus dem Kubikinhalte des Körpers, und aus dem Gewichte eines Kubikschuhes der Materie, woraus der Körper besteht, kann das Gewicht des Körpers bestimmet werden: es sey z. B. der Kubikinhalt eines Körpers $= a$ K', sein Gewicht $= x$ ℔, und das Gewicht eines Kubikschuhes der Materie des Körpers $= b$ ℔, so ist $x = ab$ ℔. Aus dieser Gleichung folgt auch $b = \frac{x}{a}$ ℔, das ist wenn man das Gewicht x eines Körpers durch seinen in Kubikschuhen ausgedrückten Kubikinhalt a dividiret, so erhält man das Gewicht eines Kubikschuhes der Materie, woraus der Körper besteht; dieses Gewicht eines Kubikschuhes von was immer für einer Materie wird auch sonst die eigenthümliche Schwere (gravitas specifica) dieser Materie genennet. Fig.

426. Der Kubikinhalt einer Kugel ist gleich dem dritten Theile des Produktes aus der Oberfläche multipliciret mit dem Halbmesser.

Denn man bilde sich nur ein, daß die Kugelfläche in eine unendliche Anzahl gleicher Theile (z. B. in unendlich kleine gleichseitige Dreyecke) getheilet sey, und daß aus den Spitzen dieser Dreyecke gerade Linien in den Mittelpunkt der Kugel gezogen werden, so wird dadurch die Kugel in lauter Pyramiden von einerley Höhe zertheilet; nun ist der Kubikinhalt einer jeden solchen Pyramide = dem dritten Theile des Produktes aus dem Halbmesser multipliciret mit dem unendlich kleinen Theile der Kugelfläche, welche dieser Pyramide zur Grundfläche dienet; es ist also auch die Summe aller Kubikinhalte dieser Pyramiden, nämlich der Kubikinhalt der Kugel = dem dritten Theile des Produktes aus dem Halbmesser multipliciret mit der Summe aller dieser unendlich kleinen Theile der Kugelfläche, das ist multipliciret mit der Oberfläche der Kugel.

427. Da sich eben dieses von einem Kugelausschnitte sagen läßt, so ist auch der Kubikinhalt eines Kugelausschnittes gleich

Fig. gleich dem dritten Theile des Produktes aus dem Halbmesser in die Oberfläche des Kugelausschnittes.

428. Setzen wir nun den Halbmesser einer Kugel $= a$ Schuhen, so ist eine größte Kreisfläche $= a^2\pi$, die Kugelfläche $= 4a^2\pi$ Q' (397.), und folglich der Kubikinhalt $= \frac{1}{3}a . 4a^2\pi = \frac{4}{3}a^3\pi$ K'; der Kubikinhalt der Halbkugel aber ist $= \frac{2}{3}a^3\pi$. So z. B. ist der Kubikinhalt unseres Erdballes, wenn man ihn für eine Kugel ansieht $= 2659074000$ geographischen Kub. Meilen, und die Oberfläche ist nach dieser Voraussetzung $= 9281922$ geographischen Quadr. Meilen, weil 15 geographische Meilen 1 Grad des größten Umkreises der Erdkugel ausmachen.

Daß der Kubikinhalt der Halbkugel $= \frac{2}{3}a^3\pi$ sey, läßt sich auch also erweisen. Eine Halbkugel entsteht, wenn sich
87. ein Viertelkreis DCA um den Halbmesser DC herumdrehet; bildet man sich nun ein, daß ein Stück CM des Halbmessers in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilet sey, und daß durch die Theilungspunkte senkrechte Ordinaten gezogen werden, so wird ein jedes der Rechtecke Cd, cf. . . . qB einen Cylinder beschreiben; diese Cylinder sind die Elemente der Zone, welche durch das Stück CMBA erzeuget wird; die Summe dieser Elemente läßt sich bestimmen, denn es ist der erste Cylinder, das ist das erste Element, welches durch das erste Rechteck Cd erzeuget wird, $= (cd)^2\pi . Cc$, das zweyte Element $= (ef)^2\pi . ce$, u. s. w., oder wenn wir $x = CM$, $Cc = ce = \frac{x}{\infty}$, und den Halbmesser $CD = a$ setzen, so ist das erste Element $= \left(\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{\infty^2}}\right)^2\pi . \frac{x}{\infty} = \frac{a^2x\pi}{\infty} - \frac{x^3\pi}{\infty^3}$, das zweyte Element $= (a^2 - \frac{2^2x^2}{\infty^2})\,\pi . \frac{x}{\infty} = \frac{a^2x\pi}{\infty} - \frac{2^2x^3\pi}{\infty^3}$, das dritte Element $= \frac{a^2x\pi}{\infty} - \frac{3^2x^3\pi}{\infty^3}$, u. s. w. und endlich

ist

ist das letzte Element $= (a^2 - x^2)\pi . \frac{x}{\infty} = (a^2 - \frac{\infty^2 x^2}{\infty^2})\pi . \frac{x}{\infty}$ Fig. 87

$= \frac{a^2 x\pi}{\infty} - \frac{\infty^2 x^3 \pi}{\infty^3}$; folglich ist die Summe aller dieser Elemente $= \left(\frac{a^2x\pi}{\infty} + \frac{a^2x\pi}{\infty} + \frac{a^2x\pi}{\infty} + \ldots\ldots\right)$

$- \frac{x^3\pi}{\infty^3}(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots+\infty^2) = \frac{a^2x\pi}{\infty}.\infty$

$- \frac{x^3\pi}{\infty^3}.\frac{\infty^2.\infty}{3} = a^2x\pi - \frac{1}{3}x^3\pi =$ dem Kubikinhalte der Zone, welche durch das trapezförmige Stück CMBA erzeuget wird. Setzen wir nun $x = a$, so ist $a^2x\pi - \frac{1}{3}x^3\pi = a^3\pi - \frac{1}{3}a^3\pi = \frac{2}{3}a^3\pi =$ dem Kubikinhalte der Halbkugel.

Es ist leicht einzusehen, daß man die Summe aller Elemente $a^2x\pi - \frac{1}{3}x^3\pi$ aus dem letzten Elemente $(a^2 - x^2)\pi . \frac{x}{\infty} = \frac{a^2x\pi}{\infty} - \frac{x^3\pi}{\infty}$, welches in dieser unendlichen Reihe der Elemente die Stelle des allgemeinen Gliedes vertritt, nach (354.) bestimmen könne.

429. Der Kubikinhalt eines um die Kugel umgeschriebenen Cylinders AG ist $= 2a^3\pi$, wenn wir den Halbmesser AK $=$ CE $= a$ setzen, und der Kubikinhalt der Kugel $= \frac{4}{3}a^3\pi$; folglich verhält sich der Cylinder AG zu der Kugel MN $= 2a^3\pi : \frac{4}{3}a^3\pi$, oder AG : MN $= 3 : 2$, nämlich MN $= \frac{2}{3}$AG, das ist die Kugel ist gleich zwey Drittheilen des umgeschriebenen gleichseitigen Cylinders. 106

Eben so läßt sich erweisen, daß der umgeschriebene gleichseitige Kegel, der umgeschriebene Cylinder, und die Kugel sich am Kubikinhalte verhalten, wie 9:6:4, nämlich daß die Verhältnisse dieser Körper den Verhältnissen ihrer ganzen Oberflächen gleich seyn (399. IV.).

430. Wenn wir bey dem Kugelausschnitte dCeBd die Gerade Bc $= x$ und den Halbmesser BC $= a$ setzen, so ist 104

Fig. die Oberfläche dBe $= 2a\pi x$ (398.), und folglich der Ku-
104 bikinhalt dieses Ausschnittes $= 2a\pi x \cdot \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a^2x\pi$; ziehen wir nun von diesem Kugelausschnitte den Kegel deC ab, so erhalten wir den Kubikinhalt des Kugelabschnittes dceBd; es ist aber der Kegel deC $= (dc)^2\pi \cdot \frac{1}{3}cC = (\sqrt{2ax-x^2})^2\pi \cdot \frac{1}{3}(a-x) = \frac{2a^2x\pi - 3ax^2\pi + x^3\pi}{3}$; folglich ist dieser Kugelabschnitt dceBd $= \frac{2a^2x\pi - 2a^2x\pi + 3ax^2\pi - x^3\pi}{3}$ $= ax^2\pi - \frac{1}{3}x^3\pi$. Aus der Gleichung $y^2 = 2ax - x^2$ $= (dc)^2$ findet man $a = \frac{y^2+x^2}{2x}$; folglich ist eben dieser Kubikinhalt $= \frac{xy^2\pi + x^3\pi}{2} - \frac{1}{3}x^3\pi = \frac{xy^2\pi}{2} + \frac{x^3\pi}{6}$; setzen wir de $= z = 2y$, so ist $y = \frac{1}{2}z$, und folglich eben dieser Abschnitt dceBd $= \frac{1}{8}xz^2\pi + \frac{1}{6}x^3\pi$.

119 431. Wenn der Halbmesser der Kugel CM$=a$, und CP$=x$ gesetzet wird, so ist die Zone ADEB$= a^2x\pi - \frac{1}{3}x^3\pi$ (428), und aus dem nämlichen Grunde, wenn CQ $= u$ gesetzet wird, ist die Zone AGFB $= a^2u\pi - \frac{1}{3}u^3\pi$; es ist also auch die Zone DGFE $= a^2u\pi - \frac{1}{3}u^3\pi - a^2x\pi + \frac{1}{3}x^3\pi$ $= \pi . \left(a^2u - a^2x + \frac{x^3-u^3}{3}\right)$.... A; setzen wir nun die Dicke dieser Zone PQ $= f$, den Halbmesser der größeren Grundfläche PE $= b$, und den Halbmesser der kleineren Grundfläche QF $= c$, so ist CQ $=$ CP $+$ PQ, nämlich $u = x + f$; es ist demnach auch die Zone DGFE $= \pi f . (a^2 - x^2 - fx - \frac{1}{3}f^2)$.... B, wenn man $x + f$ statt u in der Gleichung A substituiret; ferner ist auch CE$^2 =$ CP$^2 +$ PE^2, nämlich $a^2 = b^2 + x^2$; es ist also auch die Zone DGFE $= \pi f . (b^2 - fx - \frac{1}{3}f^2)$.... C, wenn man $b^2 + x^2$ statt a^2 in der Gleichung B setzet; endlich ist CF$^2 =$ QF$^2 +$ (CP $+$ PQ)^2, nämlich $a^2 = c^2 + x^2 + 2fx + f^2$,

und

und auch $b^2 + x^2 = c^2 + x^2 + 2fx + f^2$ (weil auch Fig.
$a^2 = b^2 + x^2$, das ist $CE^2 = PE^2 + CP^2$ statt findet); 119
es ist aus dieser Gleichung $fx = \frac{b^2 - c^2 - f^2}{2}$; substituiren wir nun diesen Werth in der Gleichung C, so ist endlich die Zone DGFE $= \frac{1}{6}\pi f.(3b^2 + 3c^2 + f^2)$ durch ihre Dicke und durch die Halbmesser ihrer Grundflächen ausgedrücket.

Eben diesen Ausdruck für den Kubikinhalt einer Zone erhält man, wenn schon eine Grundfläche diesseits und die andere parallele Grundfläche jenseits des Mittelpunktes der Kugel liegt.

Setzen wir in diesem Ausdrucke $c = 0$, so ist f=PM, und $\frac{1}{6}\pi f.(3b^2 + 3c^2 + f^2) = \frac{1}{2}fb^2\pi + \frac{1}{6}f^3\pi$ = dem Kugelabschnitte DME; setzen wir hingegen $f = 2a$ = MN, so ist b und $c = 0$, und $\frac{1}{6}\pi f.(3b^2 + 3c^2 + f^2) = \frac{4}{3}a^3\pi$ = dem Kubikinhalte der ganzen Kugel; setzen wir endlich $b = c = \frac{1}{2}f$, so ist $\frac{1}{6}\pi f.(3b^2 + 3c^2 + f^2) = \frac{5}{12}f^3\pi$ = dem Kubikinhalte einer Zone, deren Dicke und die Durchmesser beyder Grundflächen alle einander gleich sind.

432. Wenn man den Kubikinhalt einer Kugel, deren Halbmesser $= a$ ist, mit s und den Kubikinhalt einer anderen Kugel, deren Halbmesser $= A$ ist, mit S bezeichnet, so ist $s = \frac{4}{3}a^3\pi$, und $S = \frac{4}{3}A^3\pi$; folglich ist auch $s : S = \frac{4}{3}a^3\pi : \frac{4}{3}A^3\pi = a^3 : A^3 = 8a^3 : 8A^3 = (2a)^3 : (2A)^3 = d^3 : D^3$, wenn man die Durchmesser mit d und D bezeichnet; das ist die Kubikinhalte der Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser, oder ihrer Durchmesser, oder überhaupt wie die dritten Potenzen ihrer gleichnamigen Abmessungen. Nun aber verhalten sich auch die Kubikinhalte der Kugeln von einerley Materie wie ihre Gewichte; folglich **verhalten sich auch die Gewichte der Kugeln von der nämlichen Materie wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser oder ihrer Durchmesser**, und folglich auch die Durch-

 messer

Fig. messer wie die Kubikwurzeln der Gewichte. Es sey z. B. der Durchmesser einer 1pfündigen eisernen Kugel $= a$ Zollen, so ist der Durchmesser D einer $b$pfündigen Kugel $= a\sqrt[3]{b}$ Zoll, oder $\log D = \log a + \frac{1}{3}\log b$. Da nun bey der k. k. Artillerie, wenn man den Durchmesser einer 1pfündigen eisernen Kugel in Wienerzollen ausdrücket, $\log a = 0{,}2768850$, und $\frac{1}{3}\log 24 = 0{,}4600704$, so ist der Logarithmus des Durchmessers einer 24pfündigen eisernen Kugel $= 0{,}7369554$, und folglich der Durchmesser $D = 5{,}457$ Wiener Zollen $= 5$ Zollen 5 Linien 5,8 Punkten. Der Logarithmus des Durchmessers einer sogenannten 1pfündigen eisernen Grenade oder Bombe in Wiener Zollen ausgedrücket ist $= 0{,}4586165$; und der Logarithmus des Durchmessers einer 1pfündigen bleyernen Kugel in Wiener Zollen ausgedrückt ist $= 0{,}2176748$. Aus diesen Logarithmen können nun die Durchmesser aller bey der k. k. Artillerie gebräuchlichen Kugeln, Bomben, und Grenaden sehr leicht berechnet werden. Diese Logarithmen sind aus folgenden Gründen hergeleitet. 1) Nach dem bey der k. k. Artillerie vormals gewöhnlichen in 12 Zolle getheilten Nürnberger Schuhe ist der Durchmesser einer 1pfündigen eisernen Kugel $= 2{,}04$, der Durchmesser einer 1pfündigen Grenade $= 3{,}1$, und der Durchmesser einer 1pfündigen bleyernen Kugel $= 1{,}78$ Zoll festgesetzet. 2) Dieser Nürnbergerschuh ist $= 1299\frac{1}{4}$ solchen Theilen, deren der Pariserschuh 1440 enthält. 3) 100000 Pariserschuhe sind 102764 Wienerschuhen gleich. Es ist allhier wohl zu merken, daß das Gewicht, welches sich auf die angeführten Durchmesser beziehet, nicht Wienergewicht, sondern das ehevor bey der k. k. Artillerie gewöhnliche Nürnbergergewicht sey, welches sich zum Wienergewichte beynahe verhält wie $5 : 6$; es ist nämlich das Gewicht einer unsrigen sogenannten 24pfündigen eisernen Kugel nur $\frac{5}{6} \cdot 24 = 20$ Wienerpfunden beynahe. Das Gewicht von den zugerichteten Grenaden und Bomben hingegen ist nach

dem

dem Wienergewichte beynahe doppelt so groß, als es die Fig. gewöhnliche Benennung anzeugt; eine 10pfündige Bombe, und auch eine 10pfündige Haubitzgrenade wiegt beynahe 20, und eine 100pfündige Bombe wiegt beynahe 200 Wienerpfunde. Die Benennung 10, oder 100pfündig u. s. w. ist von einer gewissen Gattung der steinernen Kugeln, welche vor der Erfindung der Bomben gebräuchlich waren, beybehalten; eine solide steinerne Kugel von dem Durchmesser einer unsrigen 100pfündigen Bombe aus einer gewissen Gattung des Steines verfertiget hat vormals 100 Nürnbergerpfunde gewogen. Unser Wienergewicht ist also beschaffen, daß ein Wienerkubikschuh Regenwasser $56\frac{1}{2}$ ℔ wieget.

Aus dem angeführten Satze (die Gewichte der Kugeln von einerley Materie verhalten sich gegeneinander, wie die dritten Potenzen ihrer Durchmesser) folgt, daß das Gewicht einer Kugel 8mal größer wird, wenn man ihren Durchmesser verdoppelt, daß das Gewicht einer Kugel 64mal kleiner wird, wenn man ihren Durchmesser um 4mal kleiner macht, das ist durch 4 dividiret, mit einem Worte daß der Durchmesser einer $a$pfündigen Kugel $n$mal genommen den Durchmesser einer an^3pfündigen Kugel gebe; u. s. w. Dieses heißt bey den Artilleristen z. B. 1 ℔ umgeschlagen giebt 8 ℔; 1 ℔ halbirt giebt $\frac{1}{8}$ ℔ oder 4 Loth, p ℔ durch 4 getheilet geben $\frac{1}{2}p$ Lothe u. s. w.

433. Nicht bey den Kugeln allein, sondern bey allen ähnlichen Körpern verhalten sich die Kubikinhalte gegeneinander, wie die dritten Potenzen der gleichnamigen Abmessungen.

Denn man stelle sich nur zwey ähnliche Körper vor, z. B. zwey Pyramiden, die auf ähnlichen Grundflächen stehen, und von ähnlichen Dreyecken eingeschlossen sind, und setze den Kubikinhalt der ersten $= S$, den Kubikinhalt der zweyten Pyramide $= s$, die drey Abmessungen oder Faktoren, durch deren Multiplikation der Kubikinhalt der ersten Pyramide vorgestellet wird, bezeichne man mit A, B, C, und die drey ähnlichen Abmessungen oder Faktoren der zweyten Pyra-

Fig. mide mit a, b, c, so ist $S = ABC$, und $s = abc$; es ist also auch $S : s = ABC : abc$; es ist aber vermög der vorausgesetzten Aehnlichkeit der zwey Körper, $A : a = B : b$ nämlich $b = \frac{aB}{A}$, und $A : a = C : c$, nämlich $c = \frac{aC}{A}$, und auch $b . c = \frac{aB}{A} \cdot \frac{aC}{A}$ nämlich $bc = \frac{a^2BC}{A^2}$; folglich ist auch

$$S : s = A . B . C : a . \frac{a^2BC}{A^2} = A^3 : a^3 = B^3 : b^3 = C^3 : c^3,$$

weil $A : a = B : b$, und auch $A^3 : a^3 = B^3 : b^3$ statt findet.

Wir können allhier erinnern, daß ein Produkt aus drey Linien oder Dimensionen jederzeit einen Körper vorstelle, wenn die Einheit dieses Produkts durch einen Würfel auf derjenigen Linie ausgedrücket ist, mit der die drey Dimensionen ausgemessen sind. Es sey z. B. der Halbmesser der Grundfläche eines schiefen Kegels $= x$ Schuhen, der halbe Umkreis $= y$ Schuhen, und der dritte Theil der Höhe dieses Kegels $= z$ Schuhen, so ist dieser Kegel $= xyz$ Kubikschuhen; eben diese xyz Kubikschuhe sind auch einem senkrechten Parallelepipedum gleich, dessen Länge $= x$, Breite $= y$, und Höhe $= z$ Schuhen; u. s. w. Ein Produkt aus zwey Linien oder Dimensionen hingegen stellet eine Fläche vor, wenn die Einheit dieses Produktes durch ein Quadrat auf derjenigen Linie ausgedrücket ist, mit der die zwey Dimensionen ausgemessen sind. Und aus diesem Grunde pflegt man xyz, $2axy$, $3axz$, a^2x, $10x^3$, $\frac{x^4}{a}$, $\frac{a^2b^5}{c^4}$, $x^2\sqrt{ab}$, u. s. w. körperliche, hingegen ax, $2ab$, $\frac{4a^3}{x}$, $x\sqrt{a^2-x^2}$, u. s. w. Fläche, und endlich x, $3a$, $\frac{2x^3}{5a^2}$, $\frac{y^2\sqrt[3]{a^3+x^3}}{a^2-x^2}$, u. s. w. linearische Ausdrücke zu nennen, wenn durch jeden dieser Buchstaben eine Linie angezeiget ist.

434.

434. Wir wollen diese Abhandlung von den Körpern mit folgenden Aufgaben beschliessen. Fig.

I. **Es ist die Seite eines Würfels gegeben, man soll die Seite eines anderen Würfels finden, dessen Kubikinhalt sich zu dem gegebenen verhält, wie $n : m$.**

Auflösung. Man messe die gegebene Seite des Würfels mit einem genau ausgetheilten beliebigen Maaßstabe aus; es sey die Länge dieser Seite $= a = 5000$ Punkten z. B. nach dem Wienerschuhe, die unbekannte Seite des gesuchten Würfels aber sey $= x$; ferner sey der Kubikinhalt des gegebenen $= S$, und des gesuchten Würfels $= s$, so ist vermög der Bedingung der Aufgabe $S : s = m : n$; es ist aber $S : s = a^3 : x^3$; folglich ist auch $m : n = a^3 : x^3$ und endlich

$x = a \sqrt[3]{\frac{n}{m}}$; es sey z. B. $n = 2$, und $m = 1$, so

ist $x = 5000 \sqrt[3]{2} = 5000 . 1{,}25992 = 6299\frac{3}{5}$ Punkten des nämlichen Wienerschuhes. Man verzeichne demnach nur durch Hilfe eben dieses Maaßstabes eine gerade Linie von $6299\frac{3}{5}$ Punkten, so ist diese Gerade die gesuchte Seite des Würfels, der am Kubikinhalte zweymal so groß ist, als der gegebene Würfel.

Diese Aufgabe von der Verdopplung des Würfels hat in den uralten Zeiten den Meßkünstlern viel Kopfbrechens verursachet; sie suchten immer die unbekannte Seite des Würfels durch eine geometrische Verzeichnung zu bestimmen, weil ihnen die Kunstgriffe der heutigen Rechenkunst vielleicht nicht bekannt waren; wäre ihnen die dermalige Rechenkunst nebst dem geometrischen Maaßstabe bekannt gewesen, so hätten sie gewiß nicht so viel Mühe auf die Erfindung der geometrischen Verzeichnungen verwendet, weil es eine ausgemachte Wahrheit ist, daß die bey der Auflösung einer Aufgabe gesuchten Linien durch die Rechnung und mit Beyhilfe eines gut ausgetheilten

Fig. Määßstabes in der Ausübung viel genauer, als durch die geometrische Verzeichnung bestimmet werden.

II. **Man soll den Durchmesser einer gegossenen eisernen Kugel von 24 Wienerpfunden nach dem Wienerschuhe bestimmen, vorausgesetzt, daß z. B. ein Wienerkubikschuh des gegossenen Eisens 420 Wienerpfunde wiege.**

Auflösung. Es sey der Durchmesser dieser Kugel $= x$ Wienerschuhen, so ist ihr Kubikinhalt $= \frac{1}{6}x^3\pi$ Kubikschuhen; nun verhalten sich die Kubikinhalte der Körper von der nämlichen Materie, wie ihre Gewichte, nämlich $1\,K' : \frac{1}{6}x^3\pi\, K'$ $= 420$ ℔ : 24 ℔; folglich $x = \sqrt[3]{\frac{12}{35\pi}}$ Wienerschuhen, oder $\log x = \frac{1}{3}(\log 12 - \log 35 - \log\pi) = \frac{1}{3}(1{,}0791812 - 1{,}5440680 - 0{,}4971499) = -0{,}3206789 = \log 0{,}47788$, und endlich $x = 0{,}47788$ Wienerschuhen $= 5^{II}\ 8^{III}\ 10^{IV}$ beynahe.

III. **1 Wienerkubikschuh Kriegspulver wiegt 50 Wienerpfunde** (ziemlich genau und verläßlich); **man soll nun ein b ℔diges cylindrisches Pulvercimment nach dem Wienerschuhe bestimmen, bey dem der innere Durchmesser der Grundfläche sich zur inneren Höhe verhält, wie $m : n$.**

Auflösung. Man setze den inneren Durchmesser $= x$ Wienerschuhen, so ist die Höhe $\frac{nx}{m}$, weil $m : n = x$: Höhe sich verhält; und der Kubikinhalt dieses Cylinders ist $\frac{1}{4}x^2\pi \cdot \frac{nx}{m} = \frac{nx^3\pi}{4m} K'$; nun ist $1\,K' : \frac{nx^3\pi}{4m} K' = 50$ ℔ : b ℔, und folglich $x = \sqrt[3]{\frac{4mb}{50n\pi}}$; setzen wir nun $m = 1$, $n = 2$, $b = \frac{1}{4}$ ℔, so ist $x = \sqrt[3]{\frac{1}{100\pi}} = 0{,}1471$ Wie-

Wienerschuhen $= 1'' \, 9''' \, 2^{IV}$ = dem Durchmesser der Grund- **Fig.**
fläche eines 8löthigen Pulvercimments, dessen Höhe $= 2 \cdot (1'' \, 9''' \, 2^{IV}) = 3'' \, 6''' \, 4^{IV}$. Und auf die nämliche Weise können die Abmessungen aller übrigen Pulvercimenter berechnet werden, wenn man nur für m, n, und b ihre erforderlichen Werthe setzet.

IV. **Es ist die Seite einer vollkommen gleichseitigen viereckigten Pyramide gegeben, man soll die Seite eines Würfels finden, dessen Kubikinhalt dieser Pyramide gleich ist.**

Auflösung. Es sey die gegebene Seite der Pyramide $= a$, so ist nach vorgenommener Untersuchung, die ich dem eigenen Nachdenken des Lesers überlasse, der Kubikinhalt dieser Pyramide $= \frac{1}{6}a^3\sqrt{2}$; es sey ferner die unbekannte Seite des Würfels $= x$, so ist sein Kubikinhalt $= x^3$; nun ist vermög der Bedingung der Aufgabe $x^3 = \frac{1}{6}a^3\sqrt{2}$; folglich $x = \sqrt[3]{\frac{1}{6}a^3\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt[6]{18}}$.

V. **Es ist der Durchmesser einer Kugel gegeben; man soll die Seite eines Würfels von gleichem Inhalte finden.**

Auflösung. Es sey der gegebene Durchmesser der Kugel $= d$, und die gesuchte Seite des Würfels $= x$, so ist $x^3 = \frac{1}{6}d^3\pi$, und $x = d\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi} = d \cdot 0{,}805995977 = \frac{25d}{31}$ beynahe, wenn man den Bruch $0{,}805995977$ nach (70) in $\frac{25}{31}$ verwandelt; man theile demnach nur den Durchmesser der gegebenen Kugel in 31 gleiche Theile, so sind 25 solche Theile der gesuchten Seite des Würfels ziemlich genau gleich, welcher mit der Kugel einerley Kubikinhalt enthält.

VI.

Fig. 120 VI. Es sey DAQ eine Afterpiramide von der Beschaffenheit, daß sich die zur Grundfläche parallelen Schnitte am Flächeninhalte gegeneinander verhalten, wie ihre Entfernungen von dem Scheitel Q, nämlich der Schnitt DA : EF = PQ : RQ; die Grundfläche sey $= B$, und die Höhe dieser Afterpyramide sey $= a$ man soll ihren Kubikinhalt finden.

Auflösung. Man stelle sich vor, daß die Höhe PQ $= a$ in ∞ gleiche Theile getheilet sey, und daß durch diese Theilungspunkte zur Grundfläche parallele Ebenen geleget werden, so wird dadurch die Afterpyramide DAQ in ihre Elemente aufgelöset, die man für Prismen von einer unendlich kleinen Höhe $\frac{a}{\infty}$ ansehen kann; die Summe dieser Prismen oder Elemente ist der Afterpyramide DAQ gleich; es ist aber die Summe dieser Elemente $= \frac{B}{\infty} \cdot \frac{a}{\infty} + \frac{2B}{\infty} \cdot \frac{a}{\infty} + \frac{3B}{\infty} \cdot \frac{a}{\infty} + \dots + B \cdot \frac{a}{\infty} = \frac{aB}{\infty^2} (1+2+3+4+ \dots \infty) = \frac{1}{2}aB$; es ist also auch DAQ $= \frac{1}{2}aB$, nämlich der Kubikinhalt dieser Afterpyramide ist gleich dem halben Produkte aus der Grundfläche B multipliciret mit der Höhe a.

Und auf diese Art wird der Kubikinhalt von mehreren Körpern berechnet, welche sich in Elemente auflösen lassen, die untereinander ähnlich sind, und nach einem bekannten Gesetze auf einander folgen; man findet z. B. daß der Kubikinhalt DAQ $= \frac{2}{3}aB = \frac{2}{3}$ des Produkts aus der Grundfläche B in die Höhe a sey, wenn alle die Bögen DEQ, AFQ, u. s. w. Viertelkreise wären. Wir werden vielleicht noch einmal Gelegenheit haben von der Berechnung des Kubikinhalts solcher Körper zu handeln.

Vierte

Vierte Vorlesung.

Von der Trigonometrie.

Von den trigonometrischen Funktionen.

435. Jedes Dreyeck enthält ohne seinen Flächeninhalt in Fig. Erwägung zu ziehen sechs Stücke, nämlich drey Seiten, und drey Winkel. Sind nun aus diesen sechs Stücken bey einem geradlinigten Dreyecke I. zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel, oder II. zwey Winkel nebst einer Seite, oder III. alle drey Seiten, oder endlich IV. zwey Seiten nebst einem anliegenden rechten oder stumpfen Winkel gegeben, so ist dadurch jederzeit das Dreyeck bestimmet, und die drey übrigen Stücke können nach den bereits vorgetragenen Gründen durch die Verzeichnung gefunden werden. Durch zwey gegebene Seiten und einen anliegenden spitzigen Winkel wird ein geradlinigtes Dreyeck nicht jederzeit hinlänglich bestimmet; so z. B. können in Fig. 121. aus den gegebenen Längen der zwey Seiten MB 121 und MC und aus dem anliegenden spitzigen Winkel B zwey verschiedene Dreyecke MCB und MAB gezeichnet werden, wenn MC kleiner als MB, weil der aus M mit dem Halbmesser MC = MA beschriebene Umkreis die Gerade BD diesseits des Winkels B in zwey Punkten A und C durchschneidet. Wäre hingegen in diesem Falle die dem gegebenen spitzigen Winkel gegenüberstehende Seite ME größer als die anliegende MB, so ist dadurch auch das Dreyeck vollkommen bestimmet, denn der mit dem gegebenen Halbmesser ME beschriebene Umkreis schneidet sodann die Gerade

BD

Fig. BD diesseits des Winkels B nur in einem einzigen Punkte E. Durch drey gegebene Winkel wird endlich ein geradlinigtes Dreyeck niemals bestimmet; denn es sind unzählige gleichwink-
41 lichte Dreyecke z. B. bpm, bca, BCA, u. s. w. möglich, die alle in Rücksicht ihrer Seiten von einander sehr verschieden sind.

436. Die Wissenschaft aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, wodurch dasselbe bestimmet wird, die übrigen Stücke durch die Rechnung zu finden wird die **Trigonometrie** genennt; insbesondere heißt sie die **ebene** oder **geradlinigte Trigonometrie** (trigonometria plana), wenn sie sich mit geradlinigten Dreyecken beschäftiget: hingegen wird sie die **sphärische Trigonometrie** (trigonometria sphærica) genennt, wenn sie sphärische Dreyecke (386) zu ihrem Gegenstande hat. Die unbekannten Stücke eines bestimmten Dreyeckes werden aus den gegebenen drey Stücken durch Hilfe gewisser Linien berechnet, die in Zahlen ausgedrücket, und also beschaffen sind, daß sie uns die Winkel zu erkennen geben, sobald sie einmal bekannt sind, und welche daher **Funktionen der Winkel**, oder vielmehr **trigonometrische Funktionen** (trigonometrische Hilfslinien) heißen. Wir wollen alsogleich zu ihrer Erkenntniß schreiten.

122 437. Wenn man aus der Spitze C eines Winkels MCN mit einem beliebigen Halbmesser CA einen Umkreis beschreibet, und sodann aus dem Endpunkte B des Bogens AB eine Senkrechte BD auf den Durchmesser Aa zieht, welcher durch den anderen Endpunkt A eben dieses Bogens AB geht, so heißt diese Senkrechte BD der **Sinus** des Bogens AB, oder auch der Sinus des Winkels MCN, weil der Bogen AB die Größe des Winkels MCN bestimmet, und wird also bezeichnet sin arc AB = BD, *nämlich* **der Sinus des Bogens** (arcus) AB **ist gleich** BD. Verlängert man nun die Senkrechte BD, bis sie den Umkreis in F durchschneidet, so ist BD = $\frac{1}{2}$BF, und BAF = 2AB vermög (267); folglich

lich ist sin arc AB = $\frac{1}{2}$BF; es ist aber BF gleich der Seh- Fig.
ne des Bogens BAF, nämlich BF = chord arc ABF, 122
und $\frac{1}{2}$BF = $\frac{1}{2}$ chord arc BAF, oder $\frac{1}{2}$BF = $\frac{1}{2}$ chord arc 2AB, weil BAF = 2AB; folglich ist auch sin arc AB = $\frac{1}{2}$chord arc 2AB, das ist der Sinus was immer für eines Bogens AB ist nichts anders, als die Hälfte der Sehne des doppelten Bogens 2AB. Setzen wir nun den Bogen AB nämlich arc AB = a, so ist sin a = $\frac{1}{2}$ chord $2a$, und chord $2a$ = 2 sin a; oder auch chord b = 2 sin $\frac{1}{2}b$, und sin $\frac{1}{2}b$ = $\frac{1}{2}$chord b, wenn wir $2a = b$ setzen.

Die Sehne eines Bogens wurde vor Zeiten inscripta (eine eingeschriebene Linie), die Hälfte der Sehne semissis inscriptæ, oder abgekürzt s. ins. genennet, und daraus entstand wahrscheinlicher Weise das Wort sinus, welches man auf deutsch Bogenhöhe nennen könnte.

438. Wenn man aus dem Endpunkte A des Bogens AB auf den Durchmesser Aa die Senkrechte AT errichtet, so berühret diese Senkrechte den Umkreis in dem Punkte A (269); zieht man nun an den anderen Endpunkt B den Halbmesser CB, und verlängert denselben, bis er die Berührungslinie AT in dem Punkte T durchschneidet, so heißt das abgeschnittene Stück AT die **Tangente** des Bogens AB oder des Winkels MCN und wird also bezeichnet, AT = tang arc AB. Das Stück des verlängerten Halbmessers CT aber wird die **Sekante** eben dieses Bogens oder Winkels genennet, und also geschrieben CT = sec arc AB. Endlich heißt das Stück AD des Halbmessers zwischen dem Anfangspunkte A des Bogens AB, und zwischen seinem Sinus BD, der **Queersinus** (sinus versus), nämlich AD = sinvers arc AB.

Und eben so ist sin arc EB = BG, tang arc EB = EM, sec arc EB = CM, sinvers arc EB = EG.

439. Wenn der Bogen EB oder der Winkel ECB zu dem Bogen AB oder zu dem Winkel MCN hinzugefüget 90° hervorbringet, so heißt der Bogen EB das **Complement** (complementum) oder die **Ergänzung** zu 90° des Bogens

AB;

Fig. AB; und umgekehrt der Bogen AB heißt das Complement
122 des Bogens EB. Der Bogen EB wird auch das Complement des Bogens aB genennt, wenn EB von aB abgezogen 90° hervorbringet, und umgekehrt. Der Sinus BG, die Tangente EM, und die Sekante CM des Bogens EB nämlich des Complements von AB, wird der Cosinus, die Cotangente und die Cosekante des Bogens AB genennt; und umgekehrt der Sinus BD, die Tangente AT, und die Sekante CT des Bogens AB, nämlich des Complements von EB, heißt der Cosinus, die Cotangente, und die Cosekante des Bogens EB, und wird also bezeichnet, $BD = \cos \operatorname{arc} EB$, $AT = \cot \operatorname{arc} EB$, $CT = \operatorname{cosec} \operatorname{arc} EB$; imgleichen $\cos \operatorname{arc} AB = BG$, $\cot \operatorname{arc} AB = EM$, $\operatorname{cosec} \operatorname{arc} AB = CM$, $\operatorname{cosvers} \operatorname{arc} AB = EG$, u. s. w. Da nun $\cos \operatorname{arc} AB = BG$, und in dem Vierecke CDBG die Seite $BG = DC$, so ist auch $\cos \operatorname{arc} AB = DC$; eben so ist $\cos \operatorname{arc} EB = GC$: das ist der Cosinus eines Bogens ist nichts anders als das Stück des Halbmessers zwischen dem Sinus und zwischen dem Mittelpunkte. Imgleichen da $\cos AB = BG = \sin EB$, und $EB = AE - AB = 90^{\circ} - AB$; so ist $\cos AB = \sin (90^{\circ} - AB)$, oder wenn wir $AB = a$ setzen, $\cos a = \sin (90^{\circ} - a)$; und eben so ist $\sin AB = BD = GC = \cos EB = \cos (AE - AB) = \cos (90^{\circ} - AB)$, nämlich $\sin a = \cos (90^{\circ} - a)$.

Gleichwie man nun Kürze wegen anstatt der Sinus des Bogens AB ist gleich BD, und der Cosinus dieses nämlichen Bogens AB ist gleich DC zu schreiben pflegt $\sin \operatorname{arc} AB = BD$, $\cos \operatorname{arc} AB = DC$, eben so wird auch durch $AB = \operatorname{arc} \sin BD$, $AB = \operatorname{arc} \cos DC$ bezeichnet, daß zu dem Sinus BD der Bogen AB, daß zu dem Cosinus CD ebenfalls der Bogen AB zugehöre; imgleichen da $\operatorname{tang} \operatorname{arc} AB = AT$, und $EM = \cot \operatorname{arc} AB$, so ist auch $AB = \operatorname{arc} \operatorname{tang} AT$, $\operatorname{arc} \cot EM = AB$, u. s. w.

Diese

Diese Linien, Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten, Secanten, u. s. w., oder ihre Logarithmen (wenn man sich diese Linien durch Zahlen ausgedrückt vorstellet) sind es, welche man trigonometrische Funktionen nennet. Fig.

440. Und nun sind wir im Stande folgende Wahrheiten einzusehen.

I. Zwey Bögen AB und Ba, oder zwey Nebenwinkel ACB und BCa haben den nämlichen Sinus BD. Denn aus dem Endpunkte B des Bogens Ba kann auf den Durchmesser aA, welcher durch den anderen Endpunkt a eben dieses Bogens gehet, nur die einzige Senkrechte BD gezogen werden, welche Senkrechte = sin arc AB, und auch sin arc aB ist. Zu dem nämlichen Sinus BD gehören demnach zwey verschiedene Bögen zu, welche zusammen 180° gleich sind, und nur andere Nebenumstände müßen bestimmen, welcher aus beyden im erforderlichen Falle zu nehmen sey. 122

II. Die Sinus wachsen von 0° bis 90°, so daß in einem nämlichen Kreise der Sinus von 90° aus allen der größte wird; man nennt ihn gemeiniglich sinus totus (den ganzen Sinus), weil man ihn, als den größten Sinus, für eine ganze Einheit annehmen, und sodann alle die übrigen Sinus in Theilen desselben ausdrücken kann. Es ist leicht einzusehen, daß der sinus totus dem Halbmesser gleich sey; denn wenn arc AE = 90° wird, so ist sin arc AE = sin 90° = EC = dem Halbmesser des Kreises. Wir werden in der Folge den sinus totus jederzeit mit r bezeichnen. Von 90° bis 180° nehmen die Sinus wieder ab, so daß sin 180° = 0 wird, gleichwie sin 0° = 0 ist.

III. Die Cosinus nehmen von 0° bis 90° immer ab, so daß cos 90° = 0, hingegen cos 0° = dem Halbmesser = sintot = r sey; denn es ist augenscheinlich, daß der Cosinus CD des Bogens AB sich in CA = CE = sintot = r verwandelt, wenn der Punkt B in A fällt, nämlich wenn der Bogen AB = 0 wird, und daß dieser nämliche

Fig. 122 Cosinus CD des Bogens AB verschwinde, und folglich D in C falle, wenn der Punkt B in E fällt. Von 90° bis 180° fangen die Cosinus wieder an zu wachsen, so daß der Cosinus von 180° abermal = r wird. Nur haben die Cosinus der Bögen über 90° in Rücksicht der Cosinus von den Bögen unter 90° eine entgegengesetzte Lage, z. B. die Lage oder Richtung des Cosinus CD von dem Bogen AB unter 90° aus dem Mittelpunkte gerechnet gehet dem Anfangspunkte A des Bogens AB entgegen, und die Lage oder Richtung des Cosinus Cd von dem Bogen Ab über 90° aus dem nämlichen Mittelpunkte gerechnet gehet von dem nämlichen Anfangspunkte A des Bogens Ab hinweg; und aus dieser Ursache sind die Cosinus der Bögen über 90° oder die Cosinus der stumpfen Winkel negativ, da man die Cosinus der Bögen unter 90° für positiv annimmt. Da über dieses $CD = \cos \text{arc } AB$, und auch $CD = \cos \text{arc } aB$, $AB + aB$ aber zusammen $= 180°$ sind, so folgt, daß zwey Bögen, welche zusammen 180° gleich sind oder daß zwey Nebenwinkel den nämlichen Cosinus haben, und daß nur die Zeichen + und — zu erkennen geben, ob dem Cosinus CD der Bogen AB oder aB entspreche; man muß nämlich im erforderlichen Falle zu dem Cosinus + CD den Bogen AB, und zu dem Cosinus — CD den Bogen $aB = aEA - AB = 180° - AB$ nehmen.

IV. Die Tangente von 0° ist = 0, weil AT verschwindet, so bald B in A fällt, das ist, sobald $AB = 0$ wird; von 0° bis 90° wachsen die Tangenten dergestalt, daß $\text{tang } 90° = \infty$ wird, weil sodann der Halbmesser CE mit der Berührungslinie AT parallel läuft, und folglich dieselbe erst in einer unendlichen Entfernung, das ist, niemals durchschneidet. Von 90° bis 180° nehmen die Tangenten wieder ab, so daß abermal $\text{tang } 180° = 0$ wird; nur sind die Tangenten der Bögen über 90° negativ, wenn man die Tangenten der Bögen unter 90° für positiv annimmt,

weil

weil sie eine entgegengesetzte Lage haben. Und da abermal zwey Bögen, welche zusammen 180° gleich sind, die nämliche Tangente haben, weil tang arc AB = AT, und tang arc aB = at = AT ist, so folgt, daß auch in diesem Falle die Zeichen + und — zu erkennen geben, ob einer gegebenen Tangente ein Bogen über 90° oder unter 90° entspreche, nämlich zu der gegebenen Länge einer Tangente + AT gehört der Bogen AB, und zu der Tangente — at = — AT der Bogen aB = 180° — AB, das ist zu einer positiven Tangente gehört ein Bogen unter 90°, und zu einer negativen Tangente gehört ein Bogen über 90°, welchen man findet, wenn man den zu der nämlichen Tangente, als positiv betrachtet, zugehörigen Bogen unter 90° von 180° abzieht. Fig. 122

V. Die Cotangente von 0° hingegen ist = ∞, weil der Punkt M in eine unendliche Entfernung hinausrücket, sobald B auf A fällt. Von 0° bis 90° nehmen die Cotangenten ab, so daß cot 90° = 0 wird, weil EM immer kleiner wird, jemehr sich der Punkt B dem Punkte E nähert. Ueber 90° nehmen sie wieder zu, so daß cot 180° abermal unendlich wird; nur sind sie in diesem Falle negativ, weil sie auf der Linie EM nicht gegen M, sondern auf der entgegengesetzten Seite abgeschnitten werden. Auch ist es leicht einzusehen, daß zwey Bögen, welche zusammen 180° ausmachen, gleiche Cotangenten haben, die nur in dem Zeichen + und — von einander unterschieden sind, so daß zu einer positiven Cotangente ein Bogen unter 90°, und zu einer negativen Cotangente ein Bogen über 90° gehöre.

VI. Und eben so wächst die Sekante von 0°, wo sie dem Halbmesser gleich ist, bis 90°, wo sie unendlich groß wird; über 90° bis 180° nimmt sie wieder ab, so daß sec 180° abermal dem Halbmesser gleich wird. Die Cosekante hingegen ist bey 0° unendlich groß, bey 90° dem Halbmesser gleich, und bey 180° abermal unendlich groß.

Fig. 122 441. Setzen wir den Bogen $AB = a$, und den dazugehörigen Halbmesser $AC = r = BC = EC$, so ist $BD = \sin a$, und $CD = \cos a$; es ist aber $BD^2 + CD^2 = BC^2$, $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2}$, und $BD = \sqrt{BC^2 - CD^2}$; folglich ist auch

I. $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$, $\cos a = \sqrt{r^2 - \sin^2 a}$, und $\sin a = \sqrt{r^2 - \cos^2 a}$. Es ist gewöhnlich was immer für eine Potenz m von $\sin a$ durch $\sin^m a$ zu bezeichnen, welche man eigentlich durch $(\sin a)^m$ ausdrücken sollte.

Ferner ist in den ähnlichen Dreyecken CDB und CAT, $CD : DB = CA : AT$, nämlich $\cos a : \sin a = r : \operatorname{tang} a$; und folglich

II. $\operatorname{tang} a = r \cdot \frac{\sin a}{\cos a}$, $\sin a = \frac{\cos a \cdot \operatorname{tang} a}{r}$,

und $\cos a = \frac{r \cdot \sin a}{\operatorname{tang} a}$.

Setzen wir $a = \operatorname{arc} 90^\circ$, so ist $\operatorname{tang} a = \infty$, $\sin a = r$, $\cos a = 0$, und folglich $\infty = r \cdot \frac{r}{0} = \frac{r^2}{0}$, $0 = \frac{r^2}{\infty}$, und $0 \cdot \infty = r^2$.

Eben so ist in den ähnlichen Dreyecken CGB und CEM, CG oder $DB : GB$ oder $CD = CE : EM$, nämlich $\sin a : \cos a = r : \cot a$, und folglich

III. $\cot a = r \cdot \frac{\cos a}{\sin a}$, $\sin a = \frac{r \cdot \cos a}{\cot a}$,

und $\cos a = \frac{\sin a \cdot \cot a}{r}$.

Endlich ist auch $CD : CB = CA : CT$, und auch CG oder $BD : CB = CE : CM$, das ist $\cos a : r = r : \sec a$, und $\sin a : r = r : \operatorname{cosec} a$; folglich

IV.

IV. $\sec a = \frac{r^2}{\cos a}$, und $\operatorname{cosec} a = \frac{r^2}{\sin a}$ u. s. w. Fig. 122

Da ferner AD = CA — CD, und EG = CE — CG, so ist

V. $\operatorname{sinvers} a = r - \cos a$, und $\operatorname{cosvers} a = r - \sin a$.

Aus diesen Grundformeln, $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$, $\operatorname{tang} a = r . \frac{\sin a}{\cos a}$, $\cot a = r . \frac{\cos a}{\sin a}$, $\sec a = \frac{r^2}{\cos a}$, $\operatorname{cosec} a = \frac{r^2}{\sin a}$, $\operatorname{sinvers} a = r - \cos a$, können noch sehr viele hergeleitet werden, wenn man sie mit einander verbindet, das ist, wenn man z. B. den Werth von $\cos a$, oder $\sin a$ aus einer oder der anderen Formel nimmt, und denselben in allen übrigen substituiret. Z. B. da in der Formel II. $\sin a = \frac{\cos a \,.\, \operatorname{tang} a}{r}$, und in der Formel III. $\sin a = \frac{r . \cos a}{\cot a}$ gefunden worden, so ist auch $\frac{r . \cos a}{\cot a} = \frac{\cos a \,.\, \operatorname{tang} . a}{r}$, nämlich

VI. $\operatorname{tang} a \,.\, \cot a = r^2$, $\operatorname{tang} a = \frac{r^2}{\cot a}$, $\cot a = \frac{r^2}{\operatorname{tang} a}$, und $\operatorname{tang} a : r = r : \cot a$; da überdieß auch $\operatorname{tang} b \,.\, \cot b = r^2$, so ist auch $\operatorname{tang} a \,.\, \cot a = \operatorname{tang} b \,.\, \cot b$, und $\operatorname{tang} a : \operatorname{tang} b = \cot b : \cot a$.

Wir überlassen die weitere Ausführung dieser Formeln dem eigenen Fleiße der Anfänger, und müßen noch einige andere Formeln entwickeln, ehe wir zeigen können, wie man die Sinus, Cosinus, Tangenten, u. s. w., z. B. von Minute zu Minute von 0° bis 90° für einen nach Belieben angenommenen Halbmesser in Zahlen berechnet habe. Es ist aus dem vorhergehenden leicht einzusehen, daß es nur erforderlich sey die Sinus und Cosinus bis 45° zu berechnen um die Sinus und Cosinus bis 90° zu haben; denn ist z. B. einmal

Fig. sin 10° und auch $\cos 10^\circ$ gefunden, so ist auch zugleich $\cos 80^\circ$ und sin 80° ohne weitere Rechnung bekannt, weil $\cos 80^\circ = \sin (90^\circ - 80^\circ) = \sin 10^\circ$, und $\sin 80^\circ = \cos (90^\circ - 80^\circ) = \cos 10^\circ$ ist. Sind einmal die Sinus und Cosinus gefunden, so ergeben sich die Tangenten und Cotangenten sehr leicht nach den Formeln II. und III.

442. Folgende Formeln sind noch zu entwickeln.

I. $\sin (a + b) = (\sin a \,.\, \cos b + \sin b \,.\, \cos a) : r$
II. $\cos (a + b) = (\cos a \,.\, \cos b - \sin a \,.\, \sin b) : r$
III. $\sin (a - b) = (\sin a \,.\, \cos b - \sin b \,.\, \cos a) : r$
IV. $\cos (a - b) = (\cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b) : r$

123 Denn es sey arc $AB = a$, arc $BD = b$, der Halbmesser $AC = BC = r$, und $BK = BD$, so ist arc $AD = a + b$, arc $AK = a - b$, $BE = \sin a$, $EC = \cos a$, $DG = \sin b$, $GC = \cos b$, $DF = \sin (a + b)$, $FC = \cos (a + b)$, $KM = \sin (a - b)$, und $MC = \cos (a - b)$. Nun finden in den ähnlichen Dreyecken CEB, CPG und DGL folgende Proportionen statt

$CB : BE = CG : GP$ oder LF, folglich $LF = \frac{BE \,.\, CG}{CB}$,

$CB : CE = DG : DL$, folglich $DL = \frac{DG \,.\, CE}{CB}$;

es ist aber $LF + DL = DF$; folglich auch $DF = \frac{BE \,.\, CG}{CB} + \frac{DG \,.\, CE}{CB}$, nämlich I. $\sin (a+b) = \frac{\sin a \,.\, \cos b}{r} + \frac{\sin b \,.\, \cos a}{r} = (\sin a \,.\, \cos b + \sin b \,.\, \cos a) : r$; und $LF - DL = KM$, weil wegen der vollkommenen Gleichheit der Dreyecke DGL, GKH die Seite $DL = GH = LN$ ist; folglich auch $KM = \frac{BE \,.\, CG}{CB} - \frac{DG \,.\, CE}{CB}$, nämlich III.

sin

$\sin(a-b) = (\sin a . \cos b - \sin b . \cos a) : r$. Ferner ist Fig. 123

$CB : CE = CG : CP$, folglich $CP = \frac{CE . CG}{CB}$,

$CB : BE = DG : GL$, folglich $GL = \frac{BE . DG}{CB}$;

es ist aber $CP - GL = FC$ (weil $GL = PF$), und $CP + GL = CM$ (weil $GL = KH = MP$); folglich auch $FC = \frac{CE . CG}{CB} - \frac{BE . DG}{CB}$, und $CM = \frac{CE . CG}{CB} + \frac{BE . DG}{CB}$, nämlich II. $\cos(a+b) = (\cos a . \cos b - \sin a . \sin b) : r$, und IV. $\cos(a-b) = (\cos a . \cos b + \sin a . \sin b) : r$.

443. Setzen wir nun $b = a$, so ist vermög (442. I.).

I. $\sin 2a = \frac{2 . \sin a . \cos a}{r}$, und folglich $\sin a . \cos a = \frac{1}{2}r . \sin 2a$; und eben so findet man nach der Formel II. (442.)

II. $\cos 2a = (\cos^2 a - \sin^2 a) : r$, oder $\cos 2a = [\cos^2 - (r^2 - \cos^2 a)] : r$, nämlich $\cos 2a = (2\cos^2 a - r^2) : r$, und folglich $2\cos^2 a - r^2 = r . \cos 2a$, oder $\cos^2 a = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r . \cos 2a$, und endlich $\cos a = \sqrt{\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r . \cos 2a}$.

Setzen wir ferner in dieser letzten Formel $a = \frac{1}{2}c$, so ist

III. $\cos \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r . \cos c}$, und

IV. $\cos c = \frac{2 \cos^2 . \frac{1}{2}c - r^2}{r}$.

Sodann erhalten wir, wenn wir in dieser letzten Formel statt $\cos \frac{1}{2}c$ seinen Werth $r^2 - \sin^2 \frac{1}{2}c$ aus (441. I.) substituiren.

V. $\cos c = \frac{r^2 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}c}{r}$, und

VI. $\sin \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r . \cos c}$.

Fig. Die eben entwickelten Formeln IV. und V. werden uns in der Folge sehr gute Dienste leisten; so z. B. findet man durch Hilfe der Formel V, daß

VII. $\text{sinvers}\, c = \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}c}{r}$ sey; denn es ist vermög (441. V.) $\text{sinvers}\, c = r - \cos c$, und folglich $\text{sinvers}\, c = r - (r^2 - 2\sin^2 \frac{1}{2}c) : r = 2\sin^2 \frac{1}{2}c : r$, in dem man statt $\cos c$ aus V. seinen Werth substituiret.

Wenn man nun in den Formeln I. und II. (442.) $b = 2a$ setzet, und statt $\sin 2a$ und $\cos 2a$ die eben gefundenen Werthe I. und II. substituiret, so erhält man für $\sin 3a$ und $\cos 3a$ ihre Werthe, nämlich $\sin 3a = (3\sin a . \cos^2 a - \sin^3 a) : r^2$, $\cos 3a = (\cos^3 a - 3\cos a . \sin^2 a) : r^2$. Und eben so kann darauf $\sin 4a$, $\cos 4a$ gefunden werden, wenn man in den nämlichen Formeln I. und II. (442.) $b = 3a$, und für $\sin 3a$, $\cos 3a$ ihre Werthe setzet; u. s. w.

444. Und nun sind wir im Stande einzusehen, wie man für einen angenommenen Halbmesser die Sinus und Cosinus aller Bögen von 0° bis 90° etwann von Minute zu Minute habe berechnen können. Man hat nämlich bey dieser Berechnung den Halbmesser $r = 10000000000 = \sin\text{tot} = \sin 90°$ gesetzet, um die übrigen Sinus und Cosinus in solchen Theilen zu bestimmen, deren der Halbmesser oder sintot zehntausend Millionen enthält; und daraus folgt einmal $\sin 30° = 5000000000 = \frac{1}{2}r$, (denn $\sin 30° = \frac{1}{2}\text{chord } 60$ vermög (437), es ist aber $\text{chord } 60 = r =$ dem Halbmesser (293. II.), folglich auch $\sin 30° = \frac{1}{2}r$); sodann ist $\cos 30° = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, (denn $\cos 30° = \sqrt{r^2 - \sin^2 30°} = \sqrt{r - \frac{1}{4}r^2} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$); und dieß $\frac{1}{2}r\sqrt{3}$ ist zugleich $\sin 60°$, nämlich $\sin 60° = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, und $\cos 60° = \frac{1}{2}r$, weil 30 und 60 einander zu 90 ergänzen.

Ferner ist $\sin 18° = \frac{1}{4}r.(-1 + \sqrt{5})$; denn es ist $\sin 18° = \frac{1}{2}\text{chord } 36° =$ der halben Seite eines regelmäßigen Zehneckes, (weil die Seite eines regelmäßigen Zehn-

eckes

eckes einen Bogen von 36° abschneidet); es ist aber die Seite eines regelmäßigen Zehneckes $= \frac{1}{2}r.(-1+\sqrt{5})$, wenn man den Halbmesser $= r$ setzet (308.), nämlich chord $36^\circ = \frac{1}{2}r.(-1+\sqrt{5})$, und $\frac{1}{2}$chord $36^\circ = \frac{1}{4}r.(-1+\sqrt{5})$; folglich auch $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}r.(-1+\sqrt{5}) = \cos 72^\circ$; und daraus folgt $\cos 18^\circ = \frac{1}{4}r.\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; denn es ist $\cos 18^\circ = \sqrt{r^2-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{r^2-\frac{1}{16}r^2.(-1+\sqrt{5})^2}$ $= \sqrt{r^2-\frac{1}{16}r^2+\frac{2}{16}r^2\sqrt{5}-\frac{5}{16}r^2} = \sqrt{\frac{10}{16}r^2+\frac{2}{16}r^2\sqrt{5}}$ $= \frac{1}{4}r.\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sin 72^\circ$. Fig.

Sodann ist $\sin 15^\circ = \frac{1}{2}r.\sqrt{2-\sqrt{3}}$, und $\cos 15^\circ = \frac{1}{2}r.\sqrt{2+\sqrt{3}}$; denn es ist vermög (443. VI.) $\sin 15^\circ = \sin\frac{1}{2}.30^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}r.\cos 30^\circ} = \sqrt{\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}r.\frac{1}{2}r.\sqrt{3}}$ $= \sqrt{\frac{2}{4}r^2-\frac{1}{4}r^2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}r.\sqrt{2-\sqrt{3}} = \cos 75^\circ$; und $\cos 15^\circ = \sqrt{r^2-\sin^2 15^\circ} = \sqrt{r^2-(\frac{1}{2}r.\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}$ $= \sqrt{r^2-\frac{2}{4}r^2+\frac{1}{4}r^2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{4}r^2+\frac{1}{4}r^2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}r.\sqrt{2+\sqrt{3}}$ $= \sin 75^\circ$.

Aus dem $\sin 18^\circ$ und $\cos 18^\circ$, $\sin 15^\circ$ und $\cos 15^\circ$ findet man nun nach den Formeln III. und IV. (442.) $\sin(18^\circ-15^\circ) = \sin 3^\circ$, und auch $\cos(18^\circ-15^\circ) = \cos 3^\circ$; es ist nämlich $\sin 3^\circ =$ $\frac{1}{8}r.(\sqrt{10+5\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\sqrt{20+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}-2\sqrt{15}})$ $= 52335962{,}43$, und $\cos 3^\circ = \frac{1}{8}r.(\sqrt{10-5\sqrt{3}}$ $-\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{20+4\sqrt{5}+10\sqrt{3}+2\sqrt{15}})$ $= 9986295347{,}55$.

Aus diesen wird endlich nach den Formeln III. und VI. (443.) $\sin(1\frac{1}{2}^\circ)$ und $\cos(1\frac{1}{2}^\circ)$, und sodann $\sin\frac{3}{4}^\circ$ und $\cos\frac{3}{4}^\circ$ gefunden. Darauf wird nach den Formeln I. und II. (442.) $\sin(1\frac{1}{2}^\circ+\frac{3}{4}^\circ) = \sin 2\frac{1}{4}^\circ$ und auch $\cos 2\frac{1}{4}^\circ$, ferner $\sin 3\frac{3}{4}^\circ$, $\sin 4\frac{1}{2}^\circ$, $\sin 5\frac{1}{4}^\circ$, $\sin 6^\circ$, $\sin 6\frac{3}{4}^\circ$ .... nebst $\cos 3\frac{3}{4}^\circ$, $\cos 4\frac{1}{2}^\circ$, $\cos 5\frac{1}{4}^\circ$, $\cos 6^\circ$, $\cos 6\frac{3}{4}^\circ$, u. s. w. bis $\sin 45^\circ$ und $\cos 45^\circ$ bestimmet, und in Zahlen entwickelt. Und auf diese Art kommen einmal die Sinus und Cosinus von 0° bis 90° von

Fig. $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ Grad zum Vorschein, wenn man die Rechnung nur bis 45° fortsetzet. Da überdieß $\sin 45^\circ$ auch aus anderen Gründen bekannt ist, (es ist nämlich $\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \text{chord } 90^\circ =$ der halben Seite eines eingeschriebenen Quadrates $= \frac{1}{2} r\sqrt{2}$, und auch $\cos 45^\circ = \frac{1}{2} r\sqrt{2} = 70710678 12$) so dienet dieser Umstand zugleich zur Probe, ob bey der Berechnung der Sinus und Cosinus kein Fehler eingeschliechen sey. Diese Sinus und Cosinus von $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ Grad von 0° bis 90° sind alle außer dem $\sin 90^\circ$ und $\sin 30^\circ$ irrational, und lassen sich nur durch eine Annäherung so genau in Zahlen berechnen als man es immer verlangen kann.

Damit man nun die Sinus und Cosinus für alle einzelnen Minuten erhalte, ist es allerdings nothwendig einmal $\sin 1'$ zu finden; diesen hat man auf folgende Art erhalten. Aus dem $\sin \frac{3}{4}^\circ = \sin 45'$ findet man nach der Formel VI. (443) $\sin \frac{45'}{2}$, sodann $\sin \frac{45'}{4}$, ferner $\sin \frac{45'}{8}$, aus diesem $\sin \frac{45'}{16}$, endlich $\sin \frac{45'}{32} = 4090615{,}32$, und darauf $\sin \frac{45'}{64} = 2045307{,}7$. Und nun zeigte sich bey dieser Berechnung, daß bey dem angenommenen Halbmesser $r = 10000000000$ der $\sin \frac{45'}{64}$ in soweit der Hälfte des $\sin \frac{45'}{32}$ gleich sey (gleichwie $\frac{45'}{64}$ genau der Hälfte von $\frac{45'}{32}$ gleich ist) daß der Fehler keinen zehntausendmillionten Theil des Halbmessers betrage; und aus diesem Grunde hat man geschlossen, daß zwischen $\frac{45'}{32}$ und $\frac{45'}{64}$ bey dem angenommenen Halbmesser die Sinus mit den dazu gehörigen Bögen in einer Proportion stehen, und hat den $\sin 1'$ durch nachstehende Proportion gefunden; $\frac{45'}{64} : 1' = \sin \frac{45'}{64} : \sin 1'$, das ist $\frac{45'}{64} : 1' = 2045307{,}7 : \sin 1'$, und folglich $\sin 1' = \frac{64}{45} \cdot 204537{,}7 = 2908882{,}06$. Nachdem einmal $\sin 1'$ bekannt war, so konnte man die Sinus und Cosinus für alle einzelnen Minuten von $1'$ bis 90° nach den Formeln I. und II. (442.) berechnen. Es giebt sehr viele Vortheile, durch welche diese sehr beschwerliche Arbeit um vieles abgekürzet, und erleichtert wurde; allein es ist hier der Ort nicht diese Vortheile auseinander zu setzen.

Aus

Aus den gefundenen Sinus und Cosinus hat man die Fig.
Tangenten und Cotangenten nach den Formeln $\text{tang}\, a = r \cdot \frac{\sin a}{\cos a}$, und $\cot a = r \cdot \frac{\cos a}{\sin a}$ sehr leicht durch eine blosse Division berechnet. Diese berechneten Linien hat man nun in eine Tafel ordentlich eingetragen, und überdieß noch zu größerer Bequemlichkeit zu allen diesen in Zahlen ausgedrückten Linien ihre zugehörigen gemeinen Logarithmen mit zehn Decimalziffern aufgesuchet, und ebenfalls in die Tafeln ordentlich eingetragen. Da man nun bey der Berechnung dieser Linien $\sin\text{tot} = r = 10000000000$ angenommen, so folgt, daß $\log \sin\text{tot} = 10$ ohne Bruch sey.

Die Tafeln, in denen sich die berechneten trigonometrischen Funktionen befinden, sind unter dem Namen **Sinus-Tafeln** oder **trigonomerrische Tafeln** hinlänglich bekannt. In den meisten Auflagen der trigonometrischen Tafeln hat man sowohl bey den Sinus und Tangenten, als auch bey ihren zustimmenden Logarithmen die drey letzten Ziffern rechts hinweggelassen, und doch wegen größerer Bequemlichkeit (damit nämlich immer $\log \sin\text{tot} = 10$ sey) die Kennziffer der Logarithmen ungeändert gelassen, so daß nun zu den in Tafeln befindlichen Sinus, Cosinus, Tangenten, u. s. w. die daneben stehenden Logarithmen nur in Rücksicht der Dezimalziffern, und nicht in Rücksicht der Kennziffer übereinstimmen, welcher Umstand dem bequemen und richtigen Gebrauche von dergleichen Tafeln gar nicht nachtheilig ist, sondern vielmehr denselben befördert, wie es weiter unten erhellen wird.

In einigen trigonometrischen Tafeln befinden sich auch die Sekanten nebst ihren zustimmenden Logarithmen; allein diese sind in der That entbehrlich, weil $\sec a = \frac{r^2}{\cos a}$, $\log \sec a = 2 \log r - \log \cos a$, und $\text{cosec}\, a = \frac{r^2}{\sin a}$, $\log \text{cosec}\, a$

=

Fig. $= 2\log r - \log \sin a$. Wenn nun zu einer gegebenen Secante b der dazugehörige Bogen u zu suchen, nämlich wenn aus der Gleichung $\sec u = b$ der unbekannte Bogen u zu finden wäre, so setze man nur $\frac{r^2}{\cos u} = b$, so ist $\cos u = \frac{r^2}{b}$; man suche demnach nur in den Sinustafeln in der mit cosinus bezeichneten Spalte die Zahl $\frac{r^2}{b}$ auf, so sind die dazu gehörigen Grade und Minuten der gesuchte Werth von u; sollte in der Tafel die Spalte cosinus nicht anzutreffen seyn, so suche man diese nämliche Zahl $\frac{r^2}{b}$ in der Spalte sinus auf, und ziehe die dazu gehörigen Grade und Minuten von 90° ab, so ist der Ueberrest der Werth von u; und eben so kann zu einer gegebenen Cosecante, wie nicht weniger zu einem gegebenen log sec, log cosec, der dazu gehörige Bogen gefunden werden.

Und eben so sind die Queersinus entbehrlich, weil $\sin \operatorname{vers} a = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}a}{r}$, $\log \sin \operatorname{vers} a = 2\log \sin \frac{1}{2}a + \log 2 - \log r$, und $\log \sin \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(\log \sin \operatorname{vers} a + \log r - \log 2)$ vermög (443. VII.).

445. Die Sinus und Cosinus von 0° bis 90° hätte man durch unendliche Reihen um vieles leichter berechnen können, wenn man sintot $= r = 1$ gesetzet, und sodann alle die übrigen Sinus und Cosinus, welche nach dieser Voraussetzung ächte Brüche seyn müßten, in Decimalbrüchen also entwickelt hätte, daß etwann allenthalben noch die zehnte Decimalstelle zuverlässig wäre. Dieses kann auf folgende Art erhalten werden.

87 Es ist nach (351.), wenn man CD $=$ CA $= 1 =$ sintot, CM $= x$, und den Bogen AB $= z$ setzet,

$$z = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \cdots$$

aus

aus dieser Gleichung findet man nach (156.) Fig.

$$x = z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots;$$

es ist aber $x = \sin z$, weil $x = CM = EB = \sin AB = \sin z$ ist; folglich ist

$$\sin z = z - \frac{z^3}{2 . 3} + \frac{z^5}{2 . 3 . 4 . 5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots$$

Es sey z. B. $z = \text{arc } 1' = \frac{\pi}{10800} = 0{,}0002908882$, indem man den Halbmesser $= 1$ angenommen hat, so ist $\sin \text{arc } 1'$, nämlich $\sin 1' = 0{,}0002908882$ auch in der zehnten Decimalziffer noch vollkommen richtig, weil alle die übrigen Glieder auch an der eilften Stelle noch keine bedeutliche Ziffer geben; und auf diese Art könnten einmal die Sinus von sehr vielen kleinen Bögen etwann bis 8° oder 10° von Minute zu Minute berechnet werden.

Da ferner $\cos z = \sqrt{r^2 - \sin^2 z} = \sqrt{1 - \sin^2 z}$, so ist auch

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2 . 3 . 4} - \frac{z^6}{2 . 3 . 4 . 5 . 6} + \ldots\ldots;$$

wenn man den Werth von $\sin z$ nämlich die gefundene unendliche Reihe in die zweyte Potenz erhebet, selbe von 1 subtrahiret, und sodann die Quadratwurzel herauszieht. Und durch diese Reihe könnten die Cosinus von sehr vielen kleinen Bögen etwann bis 10° berechnet werden, welche zugleich die Sinus von 80° bis 90° wären.

Damit die zwey gefundenen Reihen bey der Berechnung der Sinus und Cosinus von größeren Bögen eine bequemere Gestalt erhalten, müßen selbe auf folgende Art eingerichtet werden. Man setze bey dem angenommenen Halbmesser die Länge des Bogens von $90^{\circ} = c$, und $z = \frac{m}{n} . c$, so ist

sin

Fig. $\sin z = \sin\frac{m}{n}.c$, und $\cos z = \cos\frac{m}{n}.c$, oder $\sin z = \sin\frac{m}{n}90^\circ$, und $\cos z = \cos\frac{m}{n}90^\circ$, weil der Bogen $c = 90^\circ$ ist; und nun substituire man in den gefundenen zwey Reihen $\sin\frac{m}{n}90^\circ$ statt $\sin z$, $\cos\frac{m}{n}90^\circ$ statt $\cos z$, und $\frac{m}{n}.c$ statt z, $\frac{m^2}{n^2}.c^2$ statt z^2, u. s. w. so ist

$$\sin\frac{m}{n}90^\circ = \frac{m}{n}.c - \frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{c^3}{2.3} + \frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{c^5}{2.3.4.5} - \frac{m^7}{n^7}\cdot\frac{c^7}{2..7} + ..$$

$$\cos\frac{m}{n}90^\circ = 1 - \frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{c^2}{2} + \frac{m^4}{n^4}\cdot\frac{c^4}{2.3.4} - \frac{m^6}{n^6}\cdot\frac{c^6}{2...6} + ..$$

es ist aber, da der Halbmesser $= 1$ gesetzet worden, der Bogen von 90 Graden $c = \frac{1}{2}\pi$, nämlich es ist $c = 1,57079632679$, $\frac{c^2}{2} = 1,23370055014$, $\frac{c^3}{2.3} = 0,64596409751$, u. s. w.; folglich ist auch nach gehöriger Substitution

$$\sin\frac{m}{n}90^\circ =$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \frac{m}{n}\cdot 1,57079632679 \\ \frac{m^5}{n^5}\cdot 0,07969262625 \\ \frac{m^9}{n^9}\cdot 0,00016044118 \\ \frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0,00000005692 \\ \frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0,00000000000 \end{array}\right. \quad - \left\{\begin{array}{l} \frac{m^3}{n^3}\cdot 0,64596409751 \\ \frac{m^7}{n^7}\cdot 0,00468175414 \\ \frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0,00000359884 \\ \frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0,00000000067 \\ \frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0,00000000000 \end{array}\right.$$

Fig.

$$\cos\frac{m}{n}90^\circ =$$

$$1+\left\{\begin{array}{l}\frac{m^4}{n^4}\cdot 0{,}25366950790\\ \frac{m^8}{n^8}\cdot 0{,}00091926027\\ \frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}00000047109\\ \frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}00000000007\\ \frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}00000000000\end{array}\right| - \left\{\begin{array}{l}\frac{m^2}{n^2}\cdot 1{,}23370055014\\ \frac{m^6}{n^6}\cdot 0{,}02086348076\\ \frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}00002520204\\ \frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}00000000639\\ \frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}00000000000\end{array}\right|$$

Wäre nun nach diesen Formeln z. B. $\sin 9^\circ$ zu berechnen, so setze man $\frac{m}{n}90^\circ = 9^\circ$, nämlich $\frac{m}{n} = \frac{9^\circ}{90^\circ} = \frac{1}{10}$, und substituire $\frac{1}{10}$ statt $\frac{m}{n}$, so wird man alsogleich $\sin 9^\circ = 0{,}15643446504$ erhalten, wenn man nur zwey positive, und zwey negative Glieder der vorhergehenden Reihe entwickelt. Wäre $\sin (59^\circ\ 30') = \cos (30^\circ\ 30')$ zu entwickeln, so müßte man $\frac{m}{n}90^\circ = 30^\circ 30' = 30\frac{1}{2}^\circ = \frac{61^\circ}{2}$, nämlich $\frac{m}{n} = \frac{61}{2.90} = \frac{61}{180}$ setzen, und in der zweyten Gleichung $\frac{61}{180}$ statt $\frac{m}{n}$ substituiren, und so würde man sehr geschwinde $\cos (30^\circ 30')$, nämlich $\sin (59^\circ 30')$ erhalten.

Da in diesen beyden Reihen $\frac{m}{n}$ niemals größer werden kann als $\frac{1}{2}$ (wenn man nämlich $\sin 45^\circ$, oder auch $\cos 45^\circ$ berechnen

Fig.

rechnen will, muß $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ gesetzet werden) so ist es leicht einzusehen, daß diese Reihen sehr schnell abnehmen, und daß folglich die Sinus und Cosinus auf diese Art um vieles leichter zu berechnen wären, als nach der vorigen Methode.

446. Die Sinus und Cosinus, welche man durch diese unendlichen Reihen erhalten hätte, würden zu einem Kreise gehören, dessen Halbmesser $= 1$ ist. Und aus diesen lassen sich die Sinus und Cosinus für einen jeden anderen beliebigen Halbmesser $= r$ einrichten, wenn man sie mit r multipliciret, weil überhaupt die trigonometrischen Linien von ähnlichen Bögen in verschiedenen Kreisen sich gegeneinander verhalten, wie die dazugehörigen Halbmesser. Denn in den ähnlichen Dreyecken
124 ecken BDC und bdc findet folgende Proportion statt, $bc : BC = bd : BD$, oder wenn wir $bc = 1$ und $BC = r$ setzen, $1 : r = bd : BD$; folglich $BD = r . bd$; imgleichen $bc : BC = at : AT$, nämlich $1 : r = at : AT$, folglich $AT = r . at$; u. s. w.

Und umgekehrt die für einen Halbmesser $= r$ berechneten Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. w. lassen sich für den Halbmesser $= 1$ einrichten, wenn man sie mit r dividiret. Z. B. da in einigen Sinustafeln $\sin tot = r = 100000,00$ und $\sin 1' = 29,09$, $\tang 89° = 5728996,2$ anzutreffen ist, so ist, wenn man $\sin tot = 1$ setzet, $\sin 1' = \frac{29,09}{100000,00}$

$$= 0,0002909, \tang 89° = \frac{5782996,2}{100000,00} = 57,289962,$$

u. s. w.

In dieser nämlichen Voraussetzung $\sin tot = 1$, ist $\log \sin 1' = 6,4637261 - 10 = 0,4637261 - 4$, $\log \sin 30° = 0,3010300 - 1$, u. s. w.; es ist in dergleichen Fällen gemeiniglich vortheilhafter die Subtraktion nur anzuzeigen, und nicht wirklich zu verrichten; und dieser Vortheil erstrecket sich auf alle Gattungen von Brüchen; so z. B. ist

log

$\log 0,4332 = 0,6366884 - 1$, $\log 0,04332 = 0,6366884 - 2$, $\log 0,004332 = 0,6366884 - 3$, $\log \frac{5}{144} = 0,5406075 - 2$; dieser letzte Logarithmus wird auf folgende Art erhalten. Fig.

$$\begin{array}{rcl} +\log 5 & = & 0,6989700 \\ & +2 & -2 \\ -\log 144 & = & -2,1583625 \\ \hline \log \frac{5}{144} & = & 0,5406075-2 \end{array}$$

Es werden nämlich zu der Kennziffer des Logarithmus vom Zähler so viele Einheiten hinzu addiret, und wieder rückwärts mit dem Zeichen — angesetzet, daß man den Logarithmus des Nenners wirklich abziehen könne.

Wäre nun $\sqrt[3]{\frac{5}{144}}$ zu suchen, so müßte man $\log \frac{5}{144} = 0,5406075 - 2$ in folgende Gestalt verwandeln $\log \frac{5}{144} = 1,5406075 - 3$, damit man die Division mit 3 wirklich verrichten könne, und so erhält man $\log \sqrt[3]{\frac{5}{144}} = 0,5135358 - 1 = \log 0,326239$, und folglich $\sqrt[3]{\frac{5}{144}} = 0,326239$, wenn man nämlich zu den Decimalziffern des Logarithmus 0,5135358 die dazu gehörige Zahl 326239 aufsuchet, sodann vorwärts so viele Nullen vorsetzet, als die hintenstehende negative Zahl Einheiten enthält, und endlich die erste Null von den übrigen Ziffern mit einem (,) absöndert; eben so findet man, daß zu dem Logarithmus $0,5135358 - 2$ die Zahl 0,0326239 zugehöre; imgleichen, daß dem Logarithmus $2,5135358 - 5 = 0,5135358 - 3$ die Zahl 0,00326239 entspreche; u. s. w.

Aus diesen Beyspielen ist es leicht zu ersehen, wie man die negativen Logarithmen vermeiden, und dadurch die Rechnung in vielen Fällen abkürzen könne; auch der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen.

447. Der Gebrauch der Sinustafeln läßt sich am besten erlernen, wenn man eine solche Tafel in die Hände nimmt, und sich die Einleitung, welche gemeiniglich solchen

Fig. Tafeln beygefüget ist, und auch die innere Einrichtung derselben bekannt machet. Wir merken davon nur folgendes an.

I. Zu einem Winkel oder Bogen, der nebst den Graden und Minuten auch Sekunden enthält, findet man in den Tafeln, die nur von Minute zu Minute berechnet sind, die zugehörige trigonometrische Linie oder ihren Logarithmus (mit einem Worte die trigonometrische Funktion) auf folgende Art:

60 Sekunden verhalten sich zu den gegebenen Sekunden, gleichwie die Differenz der Funktionen von dem nächst größeren und nächst kleineren Winkel in den Tafeln sich zu einer 4ten Proportionalzahl verhält; diese gefundene Proportionalzahl wird nun zu der Funktion des nächst kleineren Winkels addiret, wenn mit den Winkeln auch die Funktionen wachsen, oder davon abgezogen, wenn die Funktionen abnehmen, in dem die Winkel wachsen, so ist das Resultat die gesuchte Funktion von dem gegebenen Winkel, der nebst Graden und Minuten auch Sekunden enthält.

Z. B. Es sey zu suchen $\log \sin (53^\circ\ 28'\ 54'')$,

so ist........ $\log \sin (53^\circ\ 29') =$	9,9050852
und .... $\log \sin (53^\circ\ 28') =$	9,9049916
Differenz für 1' oder 60''........ =	+936
folglich $60'' : 54'' = 936 : x$, nämlich $x =$	842
und weil .... $\log \sin (53^\circ\ 28'')$.. =	9,9049916
die vierte Zahl x wegen .... 54'' =	+842
so ist........ $\log \sin (53^\circ 28' 54'') =$	9,9050758

Imgleichen es sey zu suchen $\log \cot (53^\circ 28' 54'')$

so ist .... .. $\log \cot (53^\circ 29')$ =	9,8694731
und......... $\log \cot (53^\circ 28')$ =	9,8697372
Differenz für 1' oder 60''...... =	− 2641
folglich $60'' : 54'' = -2641 : x$, nämlich $x =$	− 2377
und weil $\log \cot (53^\circ 28')$ =	9,8697372
die vierte Zahl x wegen...... 54'' =	− 2377
so ist........ $\log \cot (53^\circ 28' 54'') =$	9,8694995

II.

II. Zu einer gegebenen trigonometrischen Funktion, die in den Tafeln nicht genau anzutreffen ist, wird der dazu gehörige Winkel oder Bogen in Graden Minuten und Sekunden auf folgende Art gefunden: Fig.

Die Differenz der nächst größeren und nächst kleineren Funktion in den Tafeln verhält sich zu der Differenz zwischen der gegebenen und nächst kleineren Funktion, gleichwie sich 60″ zu einer 4ten Proportionalzahl verhalten; diese 4te Proportionalzahl giebt eine Anzahl von Sekunden, die man zu den Graden und Minuten der nächst kleineren Funktion **addiren, wenn mit den Winkeln auch die Funktionen wachsen,** oder davon **abziehen muß, wenn die Funktionen abnehmen indem die Winkel wachsen.**

Es sey z. B. 9,8807832 der Logarithmus des Cosinus eines gewissen Winkels, so findet man in den Tafeln, daß der zugehörige Winkel größer als 40° 32′, und kleiner als 40° 33′ sey;

denn es ist ...... $\log\cos(40^\circ\,33') = 9{,}8807215$
und .... $\log\cos(40^\circ\,32') = 9{,}8808296$
Differenz für 1′ oder 60″ .... $= \quad -1081$
der gegebene Logarithmus........... $= 9{,}8807832$
der nächst kleinere $\log\cos(40^\circ\,33') = 9{,}8807215$
Differenz .... $= \quad 617$
folglich $-101 : 617 = 60'' : x$, nämlich $x = -34''$
da nun nächst der kleineren Funktion $40^\circ\,33'$
und der 4ten Zahl x entsprechen $-34''$
so ist der gesuchte Winkel oder Bogen $= 40^\circ\,32'\,26''$

Fig. Imgleichen es sey 10,1948376 der Logarithmus von der Tangente eines gewissen Winkels,

so ist .... $\log \operatorname{tang}(57^\circ 27')$ =	10,1949767
und.......... $\log \operatorname{tang}(57^\circ 26')$ =	10,1946981
Differenz für $1'$ oder $60''$.. ..... =	+ 2786
der gegebene Logarithmus........ =	10,1948376
der nächst kleinere $\log \operatorname{tang}(57^\circ 26')$ =	10,1946981
Differenz.................... =	1395
folglich $2786 : 1395 = 60'' : x$ nämlich $x =$	$+30''$
da nun der nächst kleineren Funktion	$57^\circ 26'$
und der 4ten Zahl x entsprechen	$+30''$
so ist der gesuchte Winkel oder Bogen =	$57^\circ 26' 30''$

Der Grund von der angeführten Proportion beruhet in fol-
124 genden; es sey $MN = \operatorname{arc} 1' = \operatorname{arc} 60''$, und $Mm = \operatorname{arc} x''$, z. B. $Mm = \operatorname{arc} 25''$, so kann MmN für eine gerade Linie angesehen werden, und sodann ist das Dreyeck $Mnm \backsim MpN$; folglich $MN : Mm = pN : nm$, nämlich $60''$ verhalten sich zu $x'' = TN - QM$ (die Differenz der Funktionen z. B. der Sinus) sich zu nm verhält, welches gefundene nm zu QM addiret wird um Sm als den Sinus von Pm zu erhalten; imgleichen $pN : nm = MN : Mm$, oder $TN - QM : Sm - QM = 60'' : x''$, und diese gefundenen x'' werden zu PM addiret um Pm zu erhalten; u. s. w.

Diese Proportion ist bey den Sinus und Cosinus von allen großen und kleinen Winkeln, wie nicht weniger bey den Tangenten von allen Winkeln unter 45°, wenn sie noch so klein sind, so gut als vollkommen richtig; bey den Tangenten und deren Logarithmen nahe bey 90°, bey den Logarithmen der Sinus und der Tangenten von kleinen Winkeln hingegen entfernet sie sich etwas von der Wahrheit, und zwar hauptsächlich wenn man zu dem Winkel die Funktion suchet: aus dieser Ursache ist es sehr gut sich mit solchen Tafeln zu versehen, in denen die trigonometrischen Funktionen für die ersten

3 oder

3 oder 4, und auch für die letzten 3 oder 4 Grade des Quadranten von 10 zu 10 Sekunden berechnet sind. Fig.

448. Wir wollen aus den (442) gefundenen Gleichungen noch einige Formeln herleiten; als

I. $\sin a \,.\, \sin b = \frac{1}{2}r \,.\, \cos(a-b) - \frac{1}{2}r \,.\, \cos(a+b)$, wenn man II. von IV. in (442) abzieht, und gehörig reduciret.

II. $\cos a \,.\, \cos b = \frac{1}{2}r \,.\, \cos(a+b) + \frac{1}{2}r \,.\, \cos(a-b)$, wenn man II. und IV. in (442) addiret.

III. $\sin a \,.\, \cos b = \frac{1}{2}r \,.\, \sin(a+b) + \frac{1}{2}r \,.\, \sin(a-b)$, wenn man I. und III. in (442) zusammen addiret.

IV. $\sin b \,.\, \cos a = \frac{1}{2}r \,.\, \sin(a+b) - \frac{1}{2}r \,.\, \sin(a-b)$, wenn man III. von I. in (442) abzieht.

449. In diesen 4 letzten Formeln setze man $a+b=p$, und $a-b=q$, nämlich $a=\frac{1}{2}(p+q)$, und $b=\frac{1}{2}(p-q)$, so erhält man nachstehende vier Formeln

I. $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p+q) \,.\, \cos\frac{1}{2}(p-q) : r$, aus III.
II. $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p-q) \,.\, \cos\frac{1}{2}(p+q) : r$, aus IV.
III. $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q) \,.\, \cos\frac{1}{2}(p-q) : r$, aus II.
IV. $\cos q - \cos p = 2\sin\frac{1}{2}(p+q) \,.\, \sin\frac{1}{2}(p-q) : r$, aus I.

450. In den zwey letzten Formeln III. und IV. (449.) setze man $q = 0^{\circ}$, so ist $\cos q = \cos 0^{\circ} = \sin\mathrm{tot} = r$, und folglich

$$\text{I. } r+\cos p = \frac{2\cos^2\frac{1}{2}p}{r}, \text{ und II. } r-\cos p = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}p}{r};$$

$$\text{III. } \tan^2\tfrac{1}{2}p = \frac{r^2(r-\cos p)}{r+\cos p},$$ wenn man die Formel II. durch I. theilet, und gehörig reduciret. Aus den Formeln I. und II. findet man auch $\cos p = (2\cos^2\frac{1}{2}p - r^2) : r$, und $\cos p = (r^2 - 2\sin^2\frac{1}{2}p) : r$, welches mit (443. IV. und V.) einerley ist.

451. Ferner ist auch

$$\text{I. } \frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\tan\frac{1}{2}(p+q)}{\tan\frac{1}{2}(p-q)},$$ oder $\sin p + \sin q : \sin p - \sin q = \tan\frac{1}{2}(p+q) : \tan\frac{1}{2}(p-q)$; denn man

Fig. man dividire nur I. durch II. in (449), so ist $\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q}$
$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\,.\,\cos\frac{1}{2}(p-q):r}{2\sin\frac{1}{2}(p-q)\,.\,\cos\frac{1}{2}(p+q):r} = \frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)} \times \frac{\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\tang\frac{1}{2}(p+q)}{r} \times \frac{\cot\frac{1}{2}(p-q)}{r} = \frac{\tang\frac{1}{2}(p+q)}{\tang\frac{1}{2}(p-q)}$, weil vermög (441. II. und III.) $\tang a = r\,.\,\frac{\sin a}{\cos a}$, $\cot a = r\,.\,\frac{\cos a}{\sin a}$, oder $\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\tang a}{r}$, $\frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\cot a}{r}$, und nach (441.VI.) $\cot a = \frac{r^2}{\tang a}$.

II. $\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\tang\frac{1}{2}(p+q)}{r}$, wenn man in (449) I. durch III. theilet, und gehörig reduciret; u. s. w.

452. Aus (442) können noch nachstehende Formeln hergeleitet werden.

I. $\tang(a+b) = \frac{r^2\,.\,(\tang a + \tang b)}{r^2 - \tang a\,.\,\tang b}$; denn es ist $\tang(a+b) = r\,.\,\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$ vermög (441. II.), und folglich auch nach (442. I. und II.) $\tang(a+b)$
$= r\,.\,\frac{(\sin a\,.\,\cos b + \sin b\,.\,\cos a):r}{(\sin a\,.\,\cos b - \sin a\,.\,\sin b):r} = \frac{(r\,.\,\sin a\,.\,\cos b + r\,.\,\sin b\,.\,\cos a):\cos a\,.\,\cos b}{(\cos a\,.\,\cos b - \sin a\,.\,\sin b):\cos a\,.\,\cos b}$
$= \frac{\frac{r\,.\,\sin a}{\cos a} + \frac{r\,.\,\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a}\,.\,\frac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\tang a + \tang b}{1 - \frac{\tang a}{r}\,.\,\frac{\tang b}{r}} = \frac{r^2\,.\,(\tang a + \tang b)}{r^2 - \tang a\,.\,\tang b}$.

II.

Fig.

II. $\text{tang}\,(a-b) = \frac{r^2(\text{tang}\,a - \text{tang}\,b)}{r^2 + \text{tang}\,a\,.\,\text{tang}\,b}$, wenn man in (442) III. durch IV. dividiret, sodann Zähler und Nenner durch $\cos a\,.\,\cos b$ theilet, und endlich gehörig reduciret.

Und eben so findet man

III. $\cot\,(a+b) = \frac{r^2 - \text{tang}\,a\,.\,\text{tang}\,b}{\text{tang}\,a + \text{tang}\,b}$;

IV. $\cot\,(a-b) = \frac{r^2 + \text{tang}\,a\,.\,\text{tang}\,b}{\text{tang}\,a - \text{tang}\,b}$.

Nun setze man in den Formeln I. und III. $a = b$, so ist

V. $\text{tang}\,2a = \frac{r^2\,.\,2\text{tang}\,a}{r^2 - \text{tang}^2 a}$; und VI. $\cot 2a = \frac{r^2 - \text{tang}^2 a}{2\text{tang}\,a}$.

Aus den bereits entwickelten Formeln können noch viele andere hergeleitet werden, wenn man sie ferner durch die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, und Substitution mit einander verbindet, wenn man einen Bogen a, oder b, oder p einmal $= 90°$, ein andermal $= 0°$, einmal $= 30°$, ein andermal $= 45°$ setzet, und sich dabey erinnert, daß $\sin 90° = r$, $\cos 90° = 0$, $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = r$, $\sin 30° = \frac{1}{2}r$, $\cos 30° = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$, $\text{tang}\,45° = \frac{r\,.\,\sin 45°}{\cos 45°} = r$ sey, u. s. w. Daß $\text{tang}\,45° = r$ sey, erhellet auch daher, weil 124 das Dreyeck ATC gleichschenklicht, und folglich AT = AC = dem Halbmesser wird, so bald man den Bogen AB oder den Winkel ACT = 45° setzet. Alle diese trigonometrischen Formeln erhalten eine etwas einfachere Gestalt, wenn man den Halbmesser r, oder den sintot immer = 1 annimmt. Doch wir wollen uns bey einer so leichten Sache nicht länger aufhalten, und setzen nur noch folgendes her.

Fig. 453. Wenn man was immer für einen Kreisbogen $= z$, und seinen Halbmesser $r = 1$ setzet, so ist

$$\tang z = z + \frac{2z^3}{2.3} + \frac{16z^5}{2.3.4.5} + \frac{272z^7}{2.3..7} + \frac{7936z^9}{2.3..9} + \ldots\ldots ;$$

denn es ist in dieser Voraussetzung $\tang z = \frac{\sin z}{\cos z}$; folglich auch vermög (445)

$$\tang z = \frac{z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3....7} + \ldots\ldots}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \ldots\ldots}.$$

und endlich ist nach verrichteter Division

$$\tang z = z + \frac{2z^3}{2.3} + \frac{16z^5}{2.3.4.5} + \frac{272z^7}{2.3..7} + \frac{7936z^9}{2.3..9} + \ldots\ldots$$

Und eben so kann $\cot z$ durch eine unendliche Reihe ausgedrücket werden; diese zwey Reihen könnte man sodann eben so einrichten, wie es (445) bey dem $\sin z$ und $\cos z$ gezeiget worden, wenn es erforderlich wäre die Tangenten und Cotangenten zu berechnen.

Nun setze man $\tang z = y$, so ist

$$y = z + \frac{2z^3}{2.3} + \frac{16z^5}{2.3.4.5} + \frac{272z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots\ldots$$

Aus dieser Gleichung findet man

$$z = y - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 - \tfrac{1}{7}y^7 + \tfrac{1}{9}y^9 - \tfrac{1}{11}y^{11} + \ldots\ldots$$

wenn man $z = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + \ldots\ldots$ setzet, und nach (155) die unbekannten Größen $A, B, C, D\ldots\ldots$ bestimmet.

Da nun $y = \tang z$, so ist was immer für ein Kreisbogen

$$z = \tang z - \tfrac{1}{3}\tang^3 z + \tfrac{1}{5}\tang^5 z - \tfrac{1}{7}\tang^7 z + \ldots \text{A}$$

wenn der Halbmesser $= 1$ gesetzet wird.

Setzen

Setzen wir nun $z = \text{arc } 45°$, so ist $\text{tang } z = 45°$ Fig. $= 1 =$ dem Halbmesser, und folglich $\text{arc } 45° = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ $= 2 \cdot (\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \ldots)$; es ist aber $\text{arc } 45° = \frac{1}{4}\pi$, weil man den Halbmesser $= 1$ gesetzet hat; folglich auch $\frac{1}{4}\pi = 2 \cdot (\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots)$, oder

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{17 \cdot 19} + \ldots = \frac{1}{8}\pi,$$

das ist die Summe der unendlichen Reihe, von der wir (211) Erwähnung gemacht haben, ist $= \frac{1}{8}\pi = 0{,}392699o817$; wenn sich demnach diese Reihe vollkommen genau summiren ließe, so könnte auch der Werth von π vollkommen genau gefunden werden; und umgekehrt.

Setzen wir hingegen $z = \text{arc } 30° = \frac{1}{6}\pi$, so ist $\text{tang } z = \text{tang } 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; und folglich auch, wenn wir in der Gleichung A für z und $\text{tang } z$ ihre Werte $\frac{1}{6}\pi$ und $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ gehörig substituiren,

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{1 \cdot 3} - \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 3^2} + \frac{\sqrt{3}}{5 \cdot 3^3} - \frac{\sqrt{3}}{7 \cdot 3^4} + \frac{\sqrt{3}}{9 \cdot 3^5} - \frac{\sqrt{3}}{11.3^6} + \ldots\ldots$$

und aus dieser Gleichung findet man, wenn man jede zwey nebeneinander stehende Glieder auf eine gleiche Benennung bringet, und schicklich reduciret,

$$\pi = \frac{1}{1.3} \cdot \left(\frac{16\sqrt{3}}{3^1}\right) + \frac{2}{5.7} \cdot \left(\frac{16\sqrt{3}}{3^3}\right) + \frac{3}{9.11} \cdot \left(\frac{16\sqrt{3}}{3^5}\right) +$$
$$\frac{4}{13.15} \cdot \left(\frac{16\sqrt{3}}{3^7}\right) + \frac{5}{17 \cdot 19} \cdot \left(\frac{16\sqrt{3}}{3^9}\right) + \ldots\ldots$$

und endlich ist, wenn man nach der Ordnung die in Klammern eingeschlossenen Glieder mit A, B, C, D, ..., bezeichnet,

 $\pi =$

Fig.

$$\pi = \overset{A}{\frac{1}{1.3}\left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)} + \overset{B}{\frac{2}{5.7}\cdot\left(\frac{A}{9}\right)} + \overset{C}{\frac{3}{9.11}\cdot\left(\frac{B}{9}\right)} + \overset{D}{\frac{4}{13.15}\cdot\left(\frac{C}{9}\right)} + \overset{E}{\frac{5}{17.19}\cdot\left(\frac{D}{9}\right)} + \overset{F}{\frac{6}{21.23}\cdot\left(\frac{E}{9}\right)} + \overset{G}{\frac{7}{25.27}\cdot\left(\frac{F}{9}\right)} + \overset{H}{\frac{8}{29.31}\cdot\left(\frac{G}{9}\right)} + \overset{I}{\frac{9}{33.35}\cdot\left(\frac{H}{9}\right)} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Durch diese unendliche Reihe, die sehr schnell abnimmt, könnte die Annäherung zu dem Werthe von π sehr leicht und geschwinde berechnet werden.

Endlich setze man auch in der Gleichung A einmal a und dann b statt z, so ist $a = \operatorname{tang} a - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 a + \ldots\ldots$ oder $2a = 2.(\operatorname{tang} a - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 a + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 a - \frac{1}{7}\operatorname{tang}^7 a + \ldots)$, und $b = \operatorname{tang} b - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 b + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 b - \frac{1}{7}\operatorname{tang}^7 b + \ldots$ folglich auch durch die Addition

$$2a + b = \left\{\begin{matrix} 2.(\operatorname{tang} a - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 a + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 a - \frac{1}{7}\operatorname{tang}^7 a + \ldots) \\ + \operatorname{tang} b - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 b + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 b - \frac{1}{7}\operatorname{tang}^7 b + \ldots \end{matrix}\right\} \mathfrak{B}$$

Es sey in dieser Gleichung $\operatorname{tang} a = \frac{1}{3}$, und $\operatorname{tang} b = \frac{1}{7}$, so ist $2a + b = \text{arc } 45^\circ = \frac{1}{4}\pi$; denn in dieser Voraussetzung ist $\operatorname{tang}(2a + b) = \frac{\operatorname{tang} 2a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} 2a . \operatorname{tang} b}$ vermög (452. I.) $= \left(\frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a} + \operatorname{tang} b\right) : \left(1 - \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a} . \operatorname{tang} b\right)$ nach (452. V.) $= \left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} + \frac{1}{7}\right) : \left(1 - \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{7}\right) : \left(1 - \frac{3}{28}\right) = \frac{25}{28} : \frac{25}{28} = 1$ = dem Halbmesser; es ist aber auch $\operatorname{tang} \text{arc } 45^\circ = 1$ = dem Halbmesser; folglich auch $\operatorname{tang}(2a + b) = \operatorname{tang} \text{arc } 45^\circ$; und endlich $2a + b =$

arc

arc $45° = \frac{1}{4}\pi$, weil bey einem nämlichen Halbmesser zu gleichen Tangenten auch gleiche Kreisbögen zugehören, und bey dem Halbmesser = 1 der Bogen von 45° nämlich arc $45° = \frac{1}{4}\pi$ ist. Setzen wir nun in der Gleichung B die gefundenen Werthe, nämlich $2a + b = \frac{1}{4}\pi$, tang $a = \frac{1}{3}$, und tang $b = \frac{1}{7}$, so ist

$$\tfrac{1}{4}\pi = \begin{cases} 2.\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3.3^3} + \dfrac{1}{5.3^5} - \dfrac{1}{7.3^7} + \dfrac{1}{9.3^9} - \dfrac{1}{11.3^{11}} + \ldots\right) \\ + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{3.7^3} + \dfrac{1}{5.7^5} - \dfrac{1}{7.7^7} + \dfrac{1}{9.7^9} - \dfrac{1}{11.7^{11}} + \ldots \end{cases}$$

und endlich ist, wenn man in dieser Gleichung jede zwey nebeneinanderstehende Brüche auf eine gleiche Benennung bringet, und schicklich reduciret

$$\pi = 8.\begin{cases} \dfrac{26}{1.3}.\left(\dfrac{1}{3^3}\right) + \dfrac{58}{5.7}.\left(\dfrac{1}{3^7}\right) + \dfrac{90}{9.11}.\left(\dfrac{1}{3^{11}}\right) + \dfrac{122}{13.15}.\left(\dfrac{1}{3^{15}}\right) + \ldots \\ + \dfrac{73}{1.3}.\left(\dfrac{1}{7^3}\right) + \dfrac{169}{5.7}.\left(\dfrac{1}{7^7}\right) + \dfrac{265}{9.11}.\left(\dfrac{1}{7^{11}}\right) + \dfrac{361}{13.15}.\left(\dfrac{1}{7^{15}}\right) + \end{cases}$$

oder wenn man nach der Ordnung die in Klammern eingeschlossenen Glieder mit A, B, C, D . . . a, b, c, d . . . bezeichnet

$$\pi = 8.\begin{cases} \dfrac{26}{1.3}\overbrace{\left(\dfrac{1}{27}\right)}^{A} + \dfrac{58}{5.7}\overbrace{\left(\dfrac{A}{81}\right)}^{B} + \dfrac{90}{9.11}\overbrace{\left(\dfrac{B}{81}\right)}^{C} + \dfrac{122}{13.15}\overbrace{\left(\dfrac{C}{81}\right)}^{D} + \ldots \\ + \dfrac{73}{1.3}\overbrace{\left(\dfrac{1}{343}\right)}^{a} + \dfrac{169}{5.7}\overbrace{\left(\dfrac{a}{7^4}\right)}^{b} + \dfrac{265}{9.11}\overbrace{\left(\dfrac{b}{7^4}\right)}^{c} + \dfrac{361}{13.15}\overbrace{\left(\dfrac{c}{7^4}\right)}^{d} + \end{cases}$$

Diese doppelte Reihe (obschon die Zähler der Glieder um eine beständige Differenz, in der ersten um 32 und in der zweyten Reihe um 96 wachsen) läuft sehr schnell zusammen, und hat dabey eine gute Gestalt die Annäherung zu dem Werthe von π, wenn er noch nicht berechnet wäre, so weit zu treiben, als man es nur immer verlangen kann.

454.

Fig.

454. Auch für den $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\cos(a+b)$, $\tang(a+b)$, u. s. w. lassen sich unendliche Reihen finden. Es ist nämlich bey dem angenommenen Halbmesser 1
$\sin(a+b) = \sin a + b.\cos a - \frac{1}{2}b^2.\sin a - \frac{1}{6}b^3 \cos a + \ldots$
wenn man in der Formel I. (442.) statt $\sin b$ und $\cos b$ die unendlichen Reihen aus (445.) substituiret. Eben so ist
$\cos(a+b) = \cos a - b.\sin a - \frac{1}{2}b^2.\cos a + \frac{1}{6}b^3.\sin a + \ldots$

Doch genug von diesem Gegenstande; man muß auch den Anfängern etwas zum eigenen Nachdenken überlassen.

Von der Auflösung geradlinigter Dreyecke.

125 455. In einem jeden geradlinigten Dreyecke ABC verhalten sich die Seiten gegeneinander, wie die in den Tafeln berechneten Sinus der gegenüberstehenden Winkel, nämlich $AC : BC = \sin B : \sin A$, oder $AC : \sin B = BC : \sin A$.

Denn man stelle sich nur vor, daß aus A und B mit einem dem sintot in den Tafeln gleichen Halbmesser Am und Bp Kreisbögen beschrieben, und die Senkrechten mn, CD, pq gezogen seyn, so ist $Am = Bp = \text{sintot} = r$, $mn = \sin A$, und $pq = \sin B$ in den Tafeln; es finden aber in den ähnlichen Dreyecken Anm, ADC, und Bpq, BCD folgende Proportionen statt,

$$\left.\begin{matrix} Am : mn = AC : CD \\ Bp : pq = BC : CD \end{matrix}\right\} \text{nämlich} \left\{\begin{matrix} r : \sin A = AC : CD, \\ r : \sin B = BC : CD; \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \text{nun ist aus der ersten} \\ \text{und aus der zweyten} \end{matrix}\right\} \text{Proportion} \left\{\begin{matrix} \sin A \times AC = r \times CD \\ \sin B \times BC = r \times CD; \end{matrix}\right.$$

es ist also auch $\sin A \times AC = \sin B \times BC$, und endlich $\sin A : \sin B = BC : AC$, oder $AC : \sin B = BC : \sin A$; und eben so läßt sich erweisen, daß $AB : AC = \sin C : \sin B$, und auch $\sin A : BC = \sin C : AB$ statt finde.

Wäre das Dreyeck rechtwinklicht, wie z. B. DCB, so ist ebenfalls $BC : CD = Bp : pq$; es ist aber $Bp = r =$

sintot

sintot = sin 90° = sin D, und pq = sin B; folglich Fig.
BC : CD = sin DC (r : sin B; ingleichen 125
CD : DB = sin B : sin DCB, oder CD : DB = sin B : cos B, weil sin DCB = sin (90° — B) = cos B ist.

Und eben so findet dieser Satz auch bey einem stumpfwinklichten Dreyecke statt, wovon man sich gar leicht überzeugen kann, wenn mann die Figur dazu gehörig verzeichnet.

456. Aus zwey Winkeln und einer Seite, oder aus zwey Seiten und einem anliegenden Winkel kann demnach ein geradlinigtes Dreyeck jederzeit gänzlich aufgelöset oder berechnet werden, wenn nur in dem letzten Falle das Dreyeck durch die zwey Seiten und durch den anliegenden Winkel nach (435.) hinlänglich bestimmet ist.

Es sey z. B. in Fig. 74. der Winkel A = 103°, 74
B = 40°, und folglich der Winkel C = 180° — (103° + 40°) = 37°, die Seite AB aber sey = 240 Klaft., so kann die Seite BC aus folgender Proportion gefunden werden.

$$\sin C : AB = \sin A : BC, \text{ nämlich } BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C}, \text{ oder}$$

$$\log BC = \log AB + \log \sin A - \log \sin C;$$

nun ist $\log \sin A = \log \sin 103° = \log \sin (180° - 103°) = \log \sin 77°$ vermög (440. I.)

$$
\begin{array}{ll}
\text{nämlich } \log \sin A = \log \sin 77° = & 9{,}9887239 \\
\log AB = \log 240 \; \ldots\ldots = & 2{,}3802112 \\
\hline
 & 12{,}3689351 \\
\text{und } \log \sin C = \log \sin 37° = & 9{,}7794630 \\
\hline
\text{folglich } \log BC \; \ldots\ldots\ldots = & 2{,}5894721 \\
\end{array}
$$

und endlich $BC = 388{,}5725° = 388°3'5''2'''8''''$.

In dergleichen Fällen ist es sehr gut sich der dekadischen Ergänzung zu bedienen (24), weil es sehr leicht ist statt dem Logarithmus seine dekadische Ergänzung aus der Tafel herauszuschreiben; es ist nämlich in unserem Beyspiele

Fig. 74
$\log AB = \log 240 = 2{,}3802112$
$\log \sin A = \log \sin 77^{\circ} = 9{,}9887239$
Def. Erg. $\log \sin C \,..\, = 0{,}2205370$
folglich $\log BC \,......\, = \cancel{1}2{,}5894721$
und endlich $BC \,......\, = 388{,}5725^{\circ}$, wie ehevor.

Eben so kann die Seite AC durch folgende Proportion gefunden werden; $\sin C : AB = \sin B : AC$, und es ist $AC = \frac{AB . \sin B}{\sin C}$, oder $\log AC = \log AB + \log \sin B +$ D. E. $\log \sin C$.

Nachdem einmal alle drey Seiten des Dreyeckes gefunden sind, so kann die Höhe desselben entweder nach (322.), oder auch nur aus einer Seite und dem anliegenden Winkel auf
80 folgende Art gefunden werden. Es sey in Fig. 80. BC und auch der Winkel B gegeben, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke CDE (wenn man die Senkrechte CD auf AB gedenket) die Seite BC, der Winkel B, und auch der rechte Winkel D bekannt; folglich $\sin D : BC = \sin B : DC$, nämlich $r : BC = \sin B : DC$, und es ist $\log DC = \log BC + \log \sin B - 10$, weil $\log r = \log \sin tot = 10{,}0000000 = 10$ ist.

457 In einem jeden geradlinigten Dreyecke verhält sich die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der zwey gegenüberstehenden Winkel zu der Tangente der halben Differenz dieser nämlichen zwey
74 Winkel; z. B. in Fig. 74. findet folgende Proportion statt, $AC + AB : AC - AB = \tang \frac{1}{2}(B + C) : \tang \frac{1}{2}(B - C)$.

Denn vermög dem vorhergehenden ist
$AC : AB = \sin B : \sin C$; folglich auch
$AC + AB : AC - AB = \sin B + \sin C : \sin B - \sin C$ (denn da $a : aq = b : bq$ statt findet, so ist auch vermög (114) $a + aq : a - aq = b + bq : b - bq$ richtig); es ist aber $\sin B + \sin C : \sin B - \sin C = \tang \frac{1}{2}(B + C) : \tang \frac{1}{2}(B - C)$ nach (451. I.);

folglich

folglich auch $AC + AB : AC - AB = \tang \frac{1}{2}(B+C) : \tang \frac{1}{2}(B - C)$. Fig. 74

458. Aus zwey gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, welcher von 180° abgezogen die Summe der zwey gegenüberstehenden Winkel zu erkennen giebt, läßt sich demnach ein jedes geradlinigtes Dreyeck berechnen, wenn man durch die angeführte Proportion die Tangente der halben Differenz der zwey unbekannten Winkel suchet, und zu dieser gefundenen Tangente aus der Tafel die dazu gehörigen Grade und Minuten herausnimmt; diese Grade und Minuten zu der bekannten halben Summe der zwey unbekannten Winkel addiret geben den größeren Winkel, und eben diese in der Tafel gefundenen Grade und Minuten von der halben Summe der zwey unbekannten Winkel abgezogen bestimmen den kleineren Winkel, welcher der kleineren gegebenen Seite gegenüber steht; denn wir wissen, daß aus der gegebenen Summe $= s$, und der Differenz $= d$ zweyer Größen x und y die Größen selbst können gefunden werden, es ist nämlich die größere $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$, und die kleinere unbekannte Größe $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$. Nachdem einmal die Winkel B und C gefunden sind, so ist es sehr leicht die dritte noch unbekunnte Seite BC zu bestimmen.

Beyspiel. Da in dem Dreyecke AIC Fig. 72. die Seite $AI = AB = 1000$, die Seite $AC = 900$, und der Winkel $CAI = 1^\circ$, und folglich $\frac{1}{2}(ACI + AIC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 1^\circ) = 89^\circ\ 30'$ bekannt ist, weil man den Bogen $BI = 1^\circ$ gesetzet hat, so läßt sich der Winkel ACI auf folgende Art bestimmen; 72

$AI + AC : AI - AC = \tang \frac{1}{2}(ACI + AIC) : \tang \frac{1}{2}(ACI - AIC)$,

nämlich $1900 : 100 = \tang (89^\circ 30') : \tang \frac{1}{2}(ACI - AIC)$;

folglich $\tang \frac{1}{2}(ACI - AIC) = \frac{100 . \tang (89^\circ 30')}{1900} =$

tang

Fig. $\frac{(\text{tang}\,(89^\circ 30'))}{19}$, und es ist

$\log \text{tang}\, \frac{1}{2}(ACI - AIC) = \log \text{tang}\,(89^\circ 30') - \log 19$

nämlich $\log \text{tang}\; 89^\circ\, 30' = 12{,}0591416$

$\log 19 \ldots\ldots\ldots\ldots = \underline{1{,}2787536}$

$\log \text{tang}\, \frac{1}{2}(ACI - AIC) = 10{,}7803880$

und endlich $\frac{1}{2}(ACI - AIC) = 80^\circ\, 35'$

da nun $\frac{1}{2}(ACI + AIC) = \underline{89^\circ\, 30'}$

so ist $\ldots\ldots\ldots ACI = 170^\circ\, 5'$

und $\ldots\ldots\ldots\ldots AIC = 8^\circ 55'$

Nachdem einmal der Winkel ACI bekannt ist, so lassen sich die Halbmesser $A\,10 = Ag$, $A\,20 = Ah$, u. s. w. trigonometrisch auf folgende Art berechnen; in dem Dreyecke ACg ist $\sin g : AC = \sin C : Ag$, nämlich $\sin(9^\circ 45') : 900 = \sin(170^\circ\, 5') : Ag$, weil der Winkel $ACI = 170^\circ\, 5'$, $CAg = 10'$, und folglich $AgC = 180^\circ - (170^\circ 5' + 10') = 9^\circ 45'$; es ist demnach $Ag = \frac{900 \,.\, \sin(170^\circ\, 5')}{\sin(9^\circ\, 45')} = A10$;

nämlich $\log 900 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2{,}9542425$

$\log \sin(170^\circ\, 5') = \log \sin\, (9^\circ 55') = 9{,}2360726$

Dek. Erg. $\log \sin\, (9^\circ 45') \ldots\ldots = \underline{0{,}7712161}$

folglich $\log A10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2{,}9615312$

und endlich $A10 = 915{,}2$.

Eben so findet man $Ah = A20 = 931$ (weil in dem Dreyecke AhC der Winkel $C = 170^\circ\, 5'$, der Winkel $CAh = 20'$, und folglich der Winkel $AhC = 9^\circ\, 35'$, und auch die Seite AC bekannt ist); wie nicht weniger $A30 = 947{,}4$ u. s. w. Wir ersehen aus diesem, daß unsere gegebene Auflösung dieser nämlichen Aufgabe (324.) beynahe so gut als vollkommen richtig ist. Auch wird es nun nicht mehr schwer seyn zu untersuchen, um wie viel die vor Zeiten gewöhnliche Transversaleintheilung auf jenen Winkelmessern von der

Richtig-

der Richtigkeit abweiche, bey denen der Rand BC in voll- Fig.
kommen gleiche Theile CIO = IO 20 = 20 30, u. s. w. abgetheilet ist.

459. in einem jeden geradlinigten Dreyecke ABC ist I. 80
$\cos A = \frac{r.(AC^2 + AB^2 - BC^2)}{2AC.AB}$; II. in einem jeden geradlinigten Dreyecke ABC verhält sich das Produkt aus zwey Seiten AB × AC zu dem Produkte aus den Differenzen, wenn man einmal eine AB und dann die andere Seite AC von der halben Summe aller drey Seiten abzieht, gleichwie das Quadrat des ganzen Sinus zu dem Quadrate des Sinus von dem halben Winkel A, welchen die zwey Seiten AB und AC einschliessen, nämlich wenn man AB = b, AC = a, BC = c, und $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$ setzet, so findet folgende Proportion statt II. $ab : (s-a).(s-b) = r^2 : \sin^2\frac{1}{2}A$.

Denn es ist in dem rechtwinklichten Dreyecke ADC, wenn man die Senkrechte CD gedenket, AD : AC = sin DCA : sin ADC, oder AD : AC = cos A : sin ADC, weil CAD den Winkel DCA wegen dem rechten Winkel ADC zu 90° ergänzet; nun aber ist, weil wir AC = a, AB = b, BC = c gesetzet haben, AD = $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$ vermög (322) und sin ADC = r; folglich $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} : a = \cos A : r$, und es ist $\cos A = \frac{r.(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$, nämlich I. $\cos A = \frac{r.(AC^2 + AB^2 - BC^2)}{2AC.AB}$. Ferner ist auch nach (443.V.) $\cos A = \frac{r^2 - 2\sin^2\frac{1}{2}A}{r}$; folglich auch $\frac{r.(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab} = \frac{r^2 - 2\sin^2\frac{1}{2}A}{r}$; aus dieser Gleichung findet man nun $\sin^2\frac{1}{2}A$

Fig. 80 $= \frac{r^2}{ab}\cdot\left(\frac{c^2-a^2+2ab-b^2}{4}\right) = \frac{r^2}{ab}\cdot\left(\frac{c^2-(a-b)^2}{2.2}\right) =$
$\frac{r^2}{ab}\cdot\left(\frac{\overline{c+(a-b)}\times\overline{c-(a-b)}}{2.2}\right) = \frac{r^2}{ab}\cdot\left(\frac{a+c-b}{2}\times\frac{b+c-a}{2}\right) = \frac{r^2}{ab}\cdot\left(\frac{a+b+c-2b}{2}\times\frac{a+b+c-2a}{2}\right)$
$= \frac{r^2}{ab}\cdot\left(\overline{\tfrac{1}{2}(a+b+c)-b}\times\overline{\tfrac{1}{2}(a+b+c)-a}\right)$, nämlich
$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{r^2}{ab}\cdot(s-b).(s-a)$, und endlich II. $ab:(s-a).(s-b) = r^2:\sin^2\tfrac{1}{2}A$, wenn man diese letzte Gleichung in eine Proportion auflöset.

460. Auf die nämliche Weise findet man $\cos B = \frac{r.(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$, und $\sin^2\tfrac{1}{2}B = \frac{r^2.(s-b).(s-c)}{bc}$, oder

$\sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{r^2.(s-b).(s-c)}{bc}}$; u. s. w.

Es kann demnach aus drey gegebenen Seiten eines Dreyeckes jeder Winkel desselben durch die Rechnung sehr leicht gefunden werden; denn da $\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{r^2.(s-b).(s-a)}{ab}$, so ist $2\log\sin\tfrac{1}{2}A = 2\log r + \log(s-a) + \log(s-b) - \log a - \log b = 20 + \log(s-a) + \log(s-b) +$ D. E. $\log a +$ D. E. $\log b - 20$, (weil $2\log r = 20$ ohne Bruch, und wegen den zwey dekadischen Ergänzungen von der Kennziffer der Summe 20 Einheiten hinweggeworfen werden), nämlich es ist $2\log\sin\tfrac{1}{2}A = \log(s-a) + \log(s-b) +$ D. E. $\log a +$ D. E. $\log b$, und endlich $\log\sin\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}[\log(s-a) + \log(s-b) +$ D. E. $\log a +$ D. E. $\log b]$; das ist wenn aus drey gegebenen Seiten eines Dreyeckes was immer für ein Winkel desselben zu suchen ist, so addire man die drey gegebenen Seiten zusammen,

men, und subtrahire von der Hälfte dieser Summe ein- Fig. 80
mal eine und dann die andere aus den zwey Seiten, welche den gesuchten Winkel einschliessen, sodann addire man zu den Logarithmen dieser zwey Differenzen die dekadischen Ergänzungen von den Logarithmen der zwey Seiten, die den gesuchten Winkel einschliessen, so ist (ohne an der Kennziffer etwas zu ändern) die Hälfte dieser Summe der Logarithmus des halben gesuchten Winkels.

Beyspiel:

$$\begin{array}{l|l} AC = a = 150 & s = 210 \\ AB = b = 140 & a = 150 \\ BC = c = 130 & b = 140 \\ \hline 420 \mid 2 & s-a = 60 \\ 210 & s-b = 70 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log(s-a) = \log 60 \ldots\ldots = 1,7781513 \\ \log(s-b) = \log 70 \ldots\ldots = 1,8450980 \\ \mathfrak{D}.\mathfrak{E}. \log a = \mathfrak{D}.\mathfrak{E}. \log 150 = 7,8239087 \\ \mathfrak{D}.\mathfrak{E}. \log b = \mathfrak{D}.\mathfrak{E}. \log 140 = 7,8538720 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad 19,3010300 \mid 2 \\ \hline \log \sin \tfrac{1}{2}A \ldots\ldots\ldots = 9,6505150 \end{array}$$

folglich $\frac{1}{2}A = 26^\circ 33' 54''$, und endlich $A = 53^\circ 7' 48''$

Man kann in einem Dreyecke aus den gegebenen drey Seiten auch die Winkel berechnen, wenn man nach (322) einen AD oder den anderen Abschnitt BD bestimmet, und sodann folgende Proportion ansetzet, BC : sin D (r = BD : sinDCB, das ist BC : sintot = BD : cos B. Wenn man die größte aus den gegebenen drey Seiten für die Grundlinie annimmt, so können die Abschnitte auf folgende Art sehr leicht berechnet werden; die Grundlinie verhält sich zu der Summe der zwey übrigen Seiten, wie die Differenz dieser nämlichen zwey Seiten zu der Differnez der Abschnitte

 auf

Fig. auf der Grundlinie; die Hälfte dieser Differenz zu der
80 halben Grundlinie addiret giebt den größeren Abschnitt, und die Hälfte dieser gefundenen Differenz von der halben Grundlinie abgezogen giebt den kleineren Abschnitt, der an der kleineren Seite lieget. Man vergleiche diese Proportion mit (322.) und man wird alsogleich ihre Richtigkeit einsehen.

Aus der Gleichung $\cos A = \frac{r.(AC^2 + AB^2 - BC^2)}{2AC.AB}$

findet man $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - \frac{2AC.AB.\cos A}{r}}$ eine Formel, nach der sich aus zwey gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bey jedem geradlinigten Dreyecke die dritte Seite unmittelbar berechnen läßt; nur muß man in diesem Falle nicht vergessen das Zeichen — in + zu verändern, wenn $A > 90°$, und folglich $\cos A$ negativ ist (440. III.)

461. Die drey angeführten Sätze (455. 457. 459.) erstrecken sich auf alle Gattungen der geradlinigten Dreyecke, und sind hinlänglich um alle möglichen Fälle, die bey Auflösung der Dreyecke vorkommen, zu entwickeln. Nur ist noch anzumerken, daß der zweyte Satz (457.) bey den rechtwinklichten Dreyecken durch folgende Proportion um vieles abgekürzet wird.

In einem rechtwinklichten Dreyecke verhält sich die erste Kathete zu der zweyten, wie der ganze Sinus zu der Tangente des an der erstern Kathete liegenden Win-
125 kels; nämlich in dem rechtwinklichten Dreyecke ADC Fig. 125. ist $AD : DC = r : \text{tang}\, A$.

Denn $AD : DC = Af : fg$; es ist aber $Af = Am = \text{sintot} = r$, und $fg = \text{tang}\, A$; folglich $AD : DC = r : \text{tang}\, A$.

Und eben so läßt sich erweisen, daß $CD : AD = r : \text{tang}\, DCA$, oder $r : \text{tang}\, DCA = CD : AD$ statt finde.

462. Aus den gegebenen zwey Katheten, oder aus einer Kathete und einem spitzigen Winkel eines rechtwinklichten Dreyeckes lassen sich demnach alle übrigen Stücke desselben durch die Rechnung bestimmen. Fig.

Beyspiel. Bey einem k. k. zwölfpfündigen Feldstucke ist die über die zwey höchsten Punkte A und B gezogene Visirlinie AB auf einen Gegenstand C gerichtet, man verlanget den Erhöhungswinkel des Stuckes über diesen Gegenstand zu wissen. 126

Auflösung. Es sey DE die Mittellinie oder Achse des Stuckes, so ist der gesuchte Erhöhungswinkel $=$ CFG $=$ BFE $=$ ABP, wenn BP zu ED parallel gezogen wird; nun findet in dem rechtwinklichten Dreyecke ABP folgende Proportion statt, BP : AP $= r$: tang ABP; es ist aber vermög den eingeführten Tafeln zur Zeichnung des k. k. Geschützes BP $=$ 15 ganzen Kugeln-Durchmessern und $\frac{9\frac{1}{2}}{32}$ eines Durchmessers $= \frac{979}{2 \cdot 32}$ Durchmessern, und der Kern PA $= \frac{5\frac{5}{26}}{32}$ Durchmesser $= \frac{135}{26 \cdot 32}$ Durchmesser; folglich $\frac{979}{2.32} : \frac{135}{26.32}$ $= r$: tang ABP, oder $13 \cdot 979 : 135 = r$: tang ABP;

nun ist $\log r = 10$
$\log 135 \ldots \ldots = 2,1303338$
D.C. $\log 979 = 7,0092173$
D.C. $\log 13 \ldots = 8,8860567$

folglich log tang ABP $=$ 8,0256078
und endlich ABP $= 36'28'' = 36\frac{1}{2}$ Minut. beynahe

Dieser Winkel ABP heißt bey den Artilleristen der Kernwinkel.

Eben so kann der Erhöhungswinkel gefunden werden, wenn auf dem hinteren höchsten Punkte A in der Verlängerung

Fig. 126 von PA noch etwas z. B. $1\frac{1}{2}$ Wienerzoll aufgesetzet, und sodann über diesen Aufsatz und uber den vorderen höchsten Punkt die Visirlinie nach einem Gegenstande gerichtet wird; nur muß in diesem Falle BP und PA ebenfalls in Wienerzollen ausgedrücket werden um den Erhöhungswinkel berechnen zu können.

Auch kann der Aufsatz gefunden werden, damit das Stuck um einen gegebenen Winkel erhöhet sey, wenn über den gesuchten Aufsatz und über den vorderen höchsten Punkt die Visirlinie auf einen Gegenstand gerichtet wird; man sagt nämlich in diesem Falle **der ganze Sinus verhält sich zur Tangente des gegebenen Erhöhungswinkels, gleichwie BP zu dem gesuchten Aufsatze**; von diesem gefundenen Aufsatze muß man sodann den Kern PA abziehen um denjenigen Aufsatz zu erhalten, den man auf den hinteren höchsten Punkt aufsetzen muß, damit das Stuck um den gegebenen Winkel erhöhet sey, wenn die Visirlinie über den gefundenen Aufsatz und über den vorderen höchsten Punkt auf den Gegenstand gezogen wird.

Aus der Länge der Geraden BP und PA (oder aus BP und dem Kernwinkel ABP) und aus der Erhöhung der Schildpfannen-Einschnitte über die Bettung einer abgeprotzten Kanone läßt sich auch bestimmen, in welcher Entfernung von der Mündung der Kanone gegen den zu beschiessenden Gegenstand hinausgerechnet auf einem ebenen Boden die über die zwey höchsten Punkte des Metalles gezogene Visirlinie die Erde erreichen müße, damit die Achse der Kanone mit dem ebenen Boden parallel laufe, das ist (nach der Sprache des Artilleristen) damit das Stuck im Kern gerichtet sey, wenn ein solcher ebener Boden mit Schleiderschüssen (Gällschüssen) zu bestreichen ist.

Auch die **Abweichung** des **Zündloches** von der auf die Achse der Kanone senkrechten Richtung läßt sich durch den (161) vorgetragenen Satz bestimmen. Man findet z. B., daß bey allen denjenigen k. k. Kanonen, welche am Stoßboden mit dem ganzen Durchmesser der Bohrung abgerundet sind, der Abweichungswinkel des Zünloches $7\frac{3}{4}$ Grade betrage,

und

und daß man folglich die Kanonen um $7\frac{3}{4}°$ senken müße um Fig.
das Zündloch in eine vertikale Lage zu bringen, welches gemeiniglich bey der Einsetzung neuer Zündlöcher erforderlich ist.

463. Durch Hilfe der trigonometrischen Funktionen läßt 50
sich die Lehre von den regelmäßigen Vielecken auf eine allgemeine Art, und zwar sehr kurz zusammen ziehen. Es sey nämlich die Seite eines regelmäßigen nEckes $= AB = b$, der Mittelpunktswinkel $ACB = \frac{360°}{n} = v$, und der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises $AC = a$, so ist $a = \frac{br}{2\sin\frac{1}{2}v}$,

$b = \frac{2a \,.\, \sin\frac{1}{2}v}{r}$, und der Umfang $p = \frac{2an.\sin\frac{1}{2}v}{r}$.

Denn in dem rechtwinklichten Dreyecke AGC ist $\sin ACG : AG = \sin AGC : AC$, nämlich $\sin\frac{1}{2}v : \frac{1}{2}b = r : a$; und folglich $a = \frac{br}{2\sin\frac{1}{2}v}$, $b = \frac{2a \,.\, \sin\frac{1}{2}v}{r}$, und $nb = \frac{2an.\sin\frac{1}{2}v}{r}$ = dem Umfange.

Wenn man ferner den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, das ist die Senkrechte $CG = c$ setzet, so ist $c = \frac{br}{2\tang\frac{1}{2}v}$

Denn in dem rechtwinklichten Dreyecke AGC ist $CG:AG = \sin tot : \tang ACG$, nämlich $c : \frac{1}{2}b = r : \tang\frac{1}{2}v$, und folglich $c = \frac{br}{2\tang\frac{1}{2}v}$.

Der Flächeninhalt des Dreyeckes ABC ist $= \frac{1}{2}AB.GC = \frac{1}{2}bc = \frac{b^2r}{4\tang\frac{1}{2}v}$; da nun der Flächeninhalt eines regelmäßigen nEckes aus n solchen vollkommen gleichen Dreyecken besteht,

Fig.

besteht, deren eines $= \mathrm{ACB} = \frac{b^2 r}{4\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v}$, so ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen nEckes $s = \frac{nb^2 r}{4\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}v}$. Aus dieser Gleichung findet man auch $b = \sqrt{\frac{4s.\mathrm{tang}\frac{1}{2}v}{nr}}$, das ist aus dem gegebenen Flächeninhalt s eines regelmäßigen nEckes kann die Seite b desselben durch die Rechnung gefunden werden.

Man substituire statt b seinen vorigen Werth, so ist auch $s = \frac{na^2.\sin^2\frac{1}{2}v}{r.\mathrm{tang}\frac{1}{2}v} = \frac{na^2.\sin^2\frac{1}{2}v}{r} : \mathrm{tang}\frac{1}{2}v = \frac{na^2.\sin^2\frac{1}{2}v}{r} : \frac{r\,.\,\sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v} = \frac{na^2.\sin\frac{1}{2}v\,.\cos\frac{1}{2}v}{r^2} = \frac{na^2.\frac{1}{2}r\,.\sin v}{r^2}$ vermög (443. I.), nämlich $s = \frac{na^2\,.\sin v}{2r}$.

80 **464. In dem Dreyecke ABC ist die Seite $\mathrm{AB} = b$ nebst den daran liegenden Winkeln A und B gegeben; man soll den Flächeninhalt desselben bestimmen.**

Auflösung. Es sey die Höhe $\mathrm{CD} = x$, so ist $\mathrm{CD} : \mathrm{DA} = \mathrm{sintot} : \mathrm{tang\,DCA}$; nun ist $\mathrm{CD} = x$, $\mathrm{sintot} = \mathrm{r}$, und $\mathrm{tang\,DCA} = \mathrm{tang}(90^\circ - \mathrm{A}) = \cot \mathrm{A}$; folglich $x : \mathrm{DA} = r : \cot\mathrm{A}$, und es ist $\mathrm{DA} = \frac{x\,.\cot\mathrm{A}}{r}$; eben so ist $\mathrm{DB} = \frac{x\,.\cot\mathrm{B}}{r}$; es ist aber $\mathrm{DA} + \mathrm{DB} = \mathrm{AB}$, nämlich $\frac{x\,.\cot\mathrm{A}}{\mathrm{r}} + \frac{x\,.\cot\mathrm{B}}{r} = b$, folglich $x = \frac{br}{\cot\mathrm{A} + \cot\mathrm{B}} = \mathrm{CD}$; und nun ist der Flächeninhalt des Dreyeckes $\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB.CD} = \frac{1}{2}b.\frac{br}{\cot\mathrm{A} + \cot\mathrm{B}} = \frac{\frac{1}{2}b^2 r}{\cot\mathrm{A} + \cot\mathrm{B}}$

Es

Es ist bey dieser Auflösung wohl zu merken, daß vermög (440. V.) cot A oder cot B negativ seyn müße, wenn A oder B ein stumpfer Winkel wäre. Fig. 80

Imgleichen: es ist in dem Dreyecke CAB die Seite CA $= a$, AB $= b$, nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben, man soll den Flächeninhalt desselben bestimmen.

Auflösung. Es ist in dem rechtwinklichten Dreyecke ADC, wenn man die Senkrechte CD gedenket, $\sin D : AC = \sin A : CD$, das ist $r : a = \sin A : CD$, nämlich es ist die Senkrechte $CD = \frac{a \cdot \sin A}{r}$, und folglich der Flächeninhalt des Dreyeckes $ABC = \frac{1}{2}AB \times CD$ $= \frac{1}{2}b \times \frac{a \cdot \sin A}{r} = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sin A}{r} = \frac{1}{2}AC.AB \times \frac{\sin A}{r}$.

Ich halte es für überflüßig diese Aufgaben durch numerische Beyspiele zu erläutern, da ein Anfänger dieses selber leicht thun kann, und wirklich thun muß um sich den Gebrauch der Sinustafeln durch die Uebung geläufig zu machen.

Von der Auflösung der sphärischen Dreyecke.

465. Wenn man bey einem sphärischen Dreyecke (386.) ABC aus den drey Winkeln A, B, C, als aus so vielen 127
angenommenen Polen in der Entfernung von 90° die Bögen größter Kreise EF, DF, DE beschreibet (384.), so ist das sphärische Dreyeck DEF, welches auf diese Art zum Vorschein kömmt, von der Beschaffenheit, daß die Seiten dieses Dreyeckes DEF die Winkel des vorigen ABC, und die Winkel dieses Dreyeckes DEF die Seiten des vorigen sphärischen Dreyeckes ABC zu 180° ergänzen, nämlich $A + EF = 180°$, $B + DF = 180°$, $C + DE = 180°$, $D + BC = 180°$, $E + AC = 180°$, $F + AB = 180°$.

Denn da der Bogen EF den Punkt A zum Pole hat, so ist jeder Punkt desselben von A um 90° entfernet (384. V.), und folglich der Bogen $EA = 90°$; imgleichen da der Bo-

Fig. 127 gen DE den Punkt C zum Pole hat, so ist ebenfalls jeder Punkt desselben von C um $90°$ entfernet, und folglich auch der Bogen $EC = 90°$. Da nun $EA = 90°$, und $EC = 90°$, so ist E der Pol des Bogens AC oder GI, und folglich der Bogen $AC =$ dem Winkel AEC, und der Bogen $GI =$ dem Winkel $GEI = DEF = E$ (385.). Eben so läßt sich erweisen, daß F der Pol des Bogens PR, und D der Pol des Bogens HQ, und folglich $PR = F$, und $HQ = D$ sey. Da nun E der Pol des Bogens GI, und F der Pol des Bogens PR ist, so ist $EI = 90°$, $FR = 90°$, und $EI + FR = 180°$, oder $EI + IF + IR = 180°$, nämlich $EF + IR = 180°$; es ist aber $IR = A$; folglich auch $EF + A = 180°$, oder $A + EF = 180°$. Es erhellet eben so, daß $B + DF = 180°$, und auch $C + DE = 180°$ sey. Ferner ist $HC = 90°$ und $BQ = 90°$, weil vermög der Voraussetzung C der Pol von DE, und B der Pol von DF ist; folglich $HC + BQ = 180°$, oder $HC + BC + CQ = 180°$, nämlich $HQ + BC = 180°$; es ist aber $HQ =$ dem Winkel D, weil D der Pol von HQ ist; folglich auch $D + BC = 180°$. Es läßt sich eben so darthun, daß $E + AC = 180°$, und auch $F + AB = 180°$ sey.

466. Die Summe aller drey Winkel eines sphärischen Dreyeckes ABC ist kleiner als $540°$ oder 6 rechte Winkel, und größer als $180°$.

Denn wenn man nach (465.) das Dreyeck DEF gedenket, so ist $A + EF = 180°$, $B + DF = 180°$, $C + DE = 180°$, also $A + B + C + (EF + DF + DE) = 540°$, und folglich $A + B + C < 540°$. Da überdieß $(EF + DF + DE) < 360°$, so ist $A + B + C + (EF + DF + DE) - (EF + DF + DE) > 540° - 360°$, nämlich $A + B + C > 180°$.

Es ist leicht einzusehen, daß $EF + DF + DE < 360°$ sey, nämlich daß bey einem jeden sphärischen Dreyecke alle drey Seiten zusammen genommen weniger als einen ganzen Umkreis betragen.

betragen. Denn wenn man bey was immer für einem sphäri- Fig.
schen Dreyecke BDM Fig. 104. zwey Seiten BD und BM 104
verlängert bis sie in A zusammen stossen, so ist $DM < (DA + MA)$, und $(DA + MA) + BD + BM = 360°$ (𝔄); und folglich $DM + BD + BM < 360°$, wenn man in der Gleichung 𝔄 statt $(DA + MA)$ den Bogen DM setzet, welcher kleiner als $(DA + MA)$ ist.

467. In einem jeden rechtwinklichten sphärischen Drey- 128
ecke MRN verhalten sich die Sinus der Winkel gegeneinander, wie die Sinus der gegenüberstehenden Seiten, nämlich $\sin R : \sin M = \sin H : \sin P$, oder $\sin R : \sin H = \sin M : \sin P$, wenn der Winkel R, nämlich $NRM = 90°$ ist; imgleichen $\sin R : \sin H = \sin N : \sin B$, und $\sin M : \sin P = \sin N : \sin B$.

Denn man ziehe nur aus den Spitzen M, N, R der sphärischen Winkel in den Mittelpunkt der dazugehörigen Kugel die Halbmesser MC, NC, RC, und aus N die Senkrechte NG auf CR, so steht einmal NG senkrecht auf der Ebene CRM, weil die Ebene CNR wegen dem rechten Winkel R auf der Ebene CRM senkrecht steht (369.); sodann lege man durch die Gerade NG eine Ebene NFG senkrecht auf CM, so ist FG senkrecht auf CM und auf NG, und auch NF senkrecht auf CM, und folglich $NFG =$ dem Neigungswinkel der zwey Ebenen NMC, und RMC (368.) $=$ dem sphärischen Winkel M (385.), überdieß ist der rechte Winkel $NGF =$ dem rechten sphärischen Winkel R, und endlich ist $NF = \sin H$, und $NG = \sin P$ (437.). Nun ist in dem rechtwinklichten Dreyecke NGF vermög (455.) $\sin NGF : NF = \sin NFG : NG$; es ist aber $\sin NGF = \sin tot = \sin R$, $NF = \sin H$, $\sin NFG = \sin M$, und $NG = \sin P$; folglich auch $\sin R$ ($\sin tot : \sin H = \sin M : \sin P$).

Und eben so läßt sich erweisen, daß auch $\sin R : \sin H = \sin N : \sin B$ statt finde; und da $\sin R : \sin H = \sin M : \sin P$ sich verhält, so ist auch $\sin N : \sin B = \sin M : \sin P$.

468.

Fig. 468. Auch in einem jeden schiefwinklichten sphärischen
129 Dreyecke ABC Fig. 129, 130, und 131 verhalten sich
130 die Sinus der Winkel gegeneinander wie die Sinus der gegen-
131 überstehenden Seiten, nämlich $\sin A : \sin C = \sin BC : \sin AB$.

Denn man gedenke nur durch die Spitze eines Winkels B und durch den Mittelpunkt der dazugehörigen Kugel eine Ebene, die auf der Ebene des gegenüberstehenden Bogens AC senkrecht ist, so giebt diese senkrechte Ebene auf der Kugelfläche einen Bogen BD eines größten Kreises, der auf AC senkrecht steht, und welcher die Seite AC entweder in ihrer Verlängerung, oder zwischen A und C so durchschneidet, daß ADB und CDB zwey rechtwinklichte sphärische Dreyecke werden. Und nun ist

$$\left.\begin{array}{l} \sin ADB \; (r : \sin AB = \sin A : \sin BD \\ \sin CDB \; (r : \sin BC = \sin C : \sin BD \end{array}\right\} \text{vermög (467.)}$$

$$\text{nämlich} \left\{\begin{array}{l} r \times \sin BD = \sin AB \times \sin A \\ r \times \sin BD = \sin BC \times \sin C \end{array}\right.$$

folglich auch $\sin AB \times \sin A = \sin BC \times \sin C$,
und endlich $\sin A : \sin C = \sin BC : \sin AB$,
oder $\sin AB : \sin C = \sin BC : \sin A$.

Und eben so läßt sich erweisen, daß auch $\sin A : \sin B = \sin BC : \sin AC$ statt finde, wenn man von C einen senkrechten Bogen auf AB gedenket.

In einem jeden rechtwinklichten oder schiefwinklichten sphärischen Dreyecke kann demnach aus zwey Seiten und einem gegenüberstehenden Winkel der zweyte gegenüberstehende Winkel, und auch aus zwey Winkeln und einer gegenüberstehenden Seite die zweyte gegenüberstehende Seite durch die Rechnung gefunden werden, wenn man die drey gegebenen Stücke mit dem 4ten gesuchten gehörig in eine Proportion setzet; nur muß es in diesem Falle aus anderen Umständen bekannt seyn, ob das gesuchte 4te Stück größer oder kleiner als 90° sey. Die Kennzeichen, aus denen abzunehmen ist, ob das gesuchte Stück größer oder kleiner als 90° sey, werden weiter unten folgen.

469. In einem jeden rechtwinklichten sphärischen Drey- Fig.
ecke MRN verhält sich der ganze Sinus zum Sinus einer Ka- 128
thete, wie die Tangente des an dieser Kathete anliegenden Winkels zur Tangente der gegenüberstehenden Kathete, nämlich $\sin R (\sin tot : \sin B = \tang M : \tang P$, oder $\tang M : \tang P = \sin R (\sin tot : \sin B$.

Denn in den rechtwinklichten Dreyecken CGN und NGF

$$\left.\begin{array}{l} \text{ist } CG : GN = \sin tot : \tang NCG \\ \text{und } FG : GN = \sin tot : \tang NFG \end{array}\right\} \text{vermög (461.),}$$

$$\text{nämlich } \left\{\begin{array}{l} CG \times \tang NCG = GN \times \sin tot \\ FG \times \tang NFG = GN \times \sin tot \end{array}\right.$$

folglich $CG \times \tang NCG = FG \times \tang NFG$
und $CG : FG = \tang NFG : \tang NCG$;
es ist aber auch $CG : FG = \sin CFG (\sin tot : \sin FCG$ in dem rechtwinklichten Dreyecke CFG;
folglich auch $\sin tot : \sin FCG = \tang NFG : \tang NCG$,
und endlich $\sin tot (\sin R : \sin B = \tang M : \tang P$; weil $\sin tot = \sin R$, $\sin FCG = \sin B$, $\tang NFG = \tang M$, und $\tang NCG = \tang P$ ist.

Und eben so läßt sich erweisen, daß $\sin R (\sin tot : \sin P = \tang N : \tang B$ statt finde.

Wenn demnach in einem sphärischen rechtwinklichten Dreyecke zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, oder eine Seite mit den anliegenden Winkeln gegeben ist, so läßt sich jederzeit das ganze Dreyeck durch diesen, und den vorigen Satz sehr leicht berechnen.

132

470. In einem jeden rechtwinklichten sphärischen Dreyecke MRN verhält sich

I. Der ganze Sinus zum Cosinus einer Kathete, wie der Cosinus der anderen Kathete zum Cosinus der Hypothenuse, nämlich $\sin tot (\sin R : \cos P = \cos B : \cos H$

II. Der ganze Sinus zum Cosinus einer Kathete, wie der Sinus des anliegenden Winkels zum Cosinus des gegen-

über-

Fig. überstehenden Winkels, nämlich fintot (fin R : cos P = fin N : cos M.
132 Denn man verlängere nur MR bis F, so daß MF = 90° sey, ziehe sodann aus dem Pole M den Bogen FD, und verlängere RN und MN bis sie den Bogen FD durchschneiden, so ist ME = 90°, und steht senkrecht auf FD, weil es durch den Pol M des Bogens FD gezogen ist (384. II.); da überdieß die Bögen DR und DF beyde auf dem Bogen MF senkrecht stehen und folglich beyde durch den Pol des Bogens MF gehen (384. III.), und dabey nur der Punkt D derjenige ist, durch den beyde Bögen DR und DF dießeits des Bogens MF gezogen sind, so ist der Pol des Bogens MF der Punkt D, und folglich DR = 90° und auch DF = 90°. Nun ist in dem rechtwinklichten Dreyecke NED vermög (467.) fin E (fintot : fin ND = fin D : fin NE, und folglich auch fintot : cos (90° — ND) = cos (90° — D) : cos (90 — NE) vermög (439.); es ist aber cos (90° — ND) = cos (DR — ND) = cos NR = cos P, cos (90° — D) = cos (90° — RF) = cos (MF — RF) = cos B, und cos (90° — NE) = cos (ME — NE) = cos H; folglich auch I. fintot (fin R : cos P = cos B : cos H.

Ferner ist in eben diesem rechtwinklichten Dreyecke NED, fin E (fintot : fin ND = fin DNE : fin DE; es ist aber fin ND = cos P, fin DNE = fin MNR = fin N, und fin DE = cos EF = cos M; folglich auch II. fintot (fin R : cos P = fin N : cos M.

Und eben so läßt sich erweisen, daß fintot (fin R : cos B = fin M : cos N statt finde, wenn man die Figur dazu gehörig verzeichnet.

Der erste von diesen zwey Sätzen ist zu gebrauchen, wenn aus zwey gegebenen Seiten eines rechtwinklichten sphärischen Dreyeckes die dritte Seite zu suchen ist.

471. In einem jeden rechtwinklichten sphärischen Dreyecke verhält sich

I. Der ganze Sinus zur Cotangente eines der beyden übrigen Winkel, wie die Cotangente des anderen Winkels zum

Cosinus

Cosinus der Hypothenuse; nämlich sintot (sin R : cot M = cot N : cos H. Fig. 132

II. Der ganze Sinus zur Tangente der Hypothenuse, wie der Cosinus einer der beyden übrigen Winkel zur Tangente der anliegenden Kathete, nämlich sintot (sin R : tang H = cos M : tang B.

Denn in dem rechtwinklichten Dreyecke NED ist vermög (469.) sin E (sintot : sin EN = tang DNE : tang DE; es ist aber sin EN = cos H, tang DNE = tang MNR = tang N, und tang DE = cot EF = cot M; folglich auch sintot (r : cos H = tang N : cot M, und es ist $r \times$ cot M = tang N $\times$ cos H; ferner ist tang N $= \frac{r^2}{\cot N}$ (441. VI); und folglich auch $r \times \cot M = \frac{r^2}{\cot N} \times \cos H$, nämlich $r \times \cos H = \cot M \times \cot N$, und endlich I. r (sin R : cot M = cot N : cos H.

Sodann ist in eben diesem Dreyecke NED vermög (469.) sin E (r : sin ED = tang D : tang NE; es ist aber sin ED = cos EF = cos M, tang D = tang RF = cot B, und tang NE = cot H; folglich auch r (sin R : cos M = cot B : cot H, und es ist $r \times \cot H = \cos M \times \cot B$, und auch $r . \frac{r^2}{\text{tang } H} = \cos M \times \frac{r^2}{\text{tang } B}$ vermög (441. VI.) nämlich $r \times$ tang B = tang H $\times$ cos M, und endlich II. r (sin R : tang H = cos M : tang B.

Und eben so läßt sich erweisen, daß sin R (sintot : tang H = cos N : cos P statt finde, wenn man die Figur dazu gehörig verzeichnet.

Durch den ersten dieser zwey Sätze kann aus der gegebenen Hypothenuse und einem der zwey übrigen Winkel eines rechtwinklichten sphärischen Dreyeckes der zweyte Winkel, und durch den zweyten Satz die dem gegebenen schiefen Winkel anliegende Kathete gefunden werden.

472.

Fig. 472. Diese (467. 469. 470. 471.) vorgetragenen Sätze sind hinreichend aus was immer für drey gegebnen Stücken eines rechtwinklichten sphärischen Dreyeckes jedes der drey übrigen Stücke durch eine einzige Proportion zu finden. Ob das gesuchte Stück kleiner oder größer als $90°$ seyn müße, geben folgende Merkmale zu erkennen.

128 I. In einem jeden rechtwinklichten sphärischen Dreyecke MRN sind die Winkel an der Hypothenuse mit den gegenüberstehenden Katheten von einerley Art; und umgekehrt die Katheten sind mit den gegenüberstehenden Winkeln von einerley Art; das ist $M < 90°$ wenn $P < 90°$, oder $M > 90°$ wenn $P > 90°$; und auch $P < 90°$ wenn $M < 90°$, oder $P > 90°$ wenn $M > 90°$, wie auch $M = 90°$ wenn $P = 90°$ ist, u. s. w.

Dieses erhellet aus den Gleichungen $\text{tang}\, M = \frac{\text{fintot}.\text{tang}\, P}{\text{fin}\, B}$, und $\text{tang}\, P = \frac{\text{fin}\, B\,.\,\text{tang}\, M}{\text{fintot}}$, welche aus der Proportion $\text{fintot} : \text{fin}\, B = \text{tang}\, M : \text{tang}\, P$ hergeleitet sind (469.); denn setzt man in der ersten von diesen zwey Gleichungen $P < 90°$, so ist $\text{tang}\, P$ positiv, und auch $\frac{\text{fintot}\,.\,\text{tang}\, P}{\text{fin}\, B}$ nämlich $\text{tang}\, M$ positiv (weil fintot und fin B jederzeit positiv sind) und folglich $M < 90°$ vermög (440. IV.); setzet man $P > 90°$, so ist $\text{tang}\, P$ negativ, und auch $\frac{\text{fintot}\,.\,\text{tang}\, P}{\text{fin}\, B}$ nämlich $\text{tang}\, M$ negativ, und folglich $M > 90°$ (440. IV); setzet man endlich $P = 90°$, so ist $\text{tang}\, P = \infty$, und auch $\frac{\text{fintot}.\,\text{tang}\, P}{\text{fin}\, B}$ nämlich $\text{tang}\, M = \infty$, und folglich $M = 90°$. Eben so läßt sich darthun, daß $P < 90°$ wenn $M < 90°$, oder $P > 90°$ seyn müße wenn $M > 90°$ ist. Und eben dieses läßt sich von B und N erweisen.

II.

II. Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke MRN sind die Katheten **gleichartig** (nämlich beyde kleiner als 90° oder beyde größer als 90°) wenn die Hypothenuse $< 90°$; hingegen sind sie **ungleichartig** (nämlich eine aus den zwey Katheten $< 90°$ und die andere $> 90°$), wenn die Hypothenuse $> 90°$ ist; und endlich muß eine aus beyden Katheten $= 90°$ seyn, sobald die Hypothenuse $= 90°$ ist. Und umgekehrt die Hypothenuse ist $< 90°$, wenn die Katheten gleichartig, hingegen ist die Hypothenuse $> 90°$, wenn die Katheten ungleichartig sind, und endlich muß die Hypothenuse $= 90°$ seyn, sobald eine aus beyden Katheten $= 90°$ ist. Fig. 128

Dieses erhellet aus der Gleichung $\text{sintot} \times \cos H = \cos P \times \cos B$, welche aus der Proportion $\text{sintot} : \cos P = \cos B : \cos H$ hergeleitet ist (470. I.); denn setzet man in dieser Gleichung $H < 90°$, so ist $\cos H$ *positiv*, und also auch $\cos P \times \cos B$ *positiv*, welches nicht anders seyn kann, als daß entweder beyde $\cos P$ und $\cos B$ positiv oder beyde negativ, und folglich P und B entweder beyde kleiner als 90° oder beyde größer als 90° sind (440. III.); setzet man hingegen $H > 90°$, so ist $\cos H$ *negativ*, und also auch $\cos P \times \cos B$ negativ, welches nicht anders geschehen kann, als daß der eine aus den zwey Faktoren $\cos P$, $\cos B$ *positiv* und der andere *negativ*, und folglich einer aus den zwey Bögen P und B **kleiner** und der andere **größer** als 90° sey; ist endlich $H = 90°$, so ist $\cos H = 0$, und folglich auch $\cos P \times \cos B = 0$, nämlich entweder $\cos P$, oder $\cos B = 0$, und also entweder P oder $B = 90°$. Imgleichen setzet man P und B beyde größer oder beyde kleiner als 90°, so ist jederzeit $\frac{\cos P \,.\, \cos B}{\text{sintot}}$ nämlich $\cos H$ *positiv*, und folglich $H < 90°$; setzet man hingegen $P > 90°$ und $B < 90°$, oder $P < 90°$ und $B > 90°$, so ist $\frac{\cos P \,.\, \cos B}{\text{sintot}}$ nämlich $\cos H$ negativ, und folglich $H > 90°$; setzet man endlich $P = 90°$,

Fig. 128 so ist $\cos P = 0$, und auch $\frac{\cos P \,.\, \cos B}{\sin tot}$ nämlich $\cos H = 0$, und folglich $H = 90°$.

III. Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke MRN sind die Winkel an der Hypothenuse gleichartig, wenn die Hypothenuse $< 90°$, hingegen ungleichartig, wenn die Hypothenuse $> 90°$ ist, endlich muß einer von diesen zwey Winkeln $= 90°$ seyn, sobald die Hypothenuse $= 90°$ ist. Und umgekehrt die Hypothenuse ist $< 90°$, wenn beyde Winkel an derselben gleichartig, hingegen ist die Hypothenuse $> 90°$, wenn die zwey anliegenden Winkel ungleichartig sind, ist endlich einer van diesen zwey Winkeln $= 90°$, so ist auch die Hypothenuse $= 90°$.

Dieß folgt aus der Gleichung $\sin tot \times \cos H = \cot M \times \cot N$, welche aus der Proportion $\sin tot : \cot M = \cot N : \cos H$ hergeleitet ist (471. I.); denn setzet man in dieser Gleichung $H < 90°$, so ist $\cos H$ und auch $\cot M \times \cot N$ positiv, welches nicht anders seyn kann, als daß die Faktoren $\cot M$, $\cot N$ entweder beyde positiv, oder beyde negativ, und folglich die Winkel M und N beyde kleiner oder beyde größer als $90°$ sind (440. V.); setzet man hingegen $H > 90°$, so ist $\cos H$ und auch $\cot M \times \cot N$ negativ, welches nicht anders geschehen kann, als daß einer aus den zwey Faktoren $\cot M$, $\cot N$ positiv, der andere negativ, und folglich einer aus den zwey Winkeln M, N kleiner als $90°$, und der andere größer als $90°$ sey; setzet man endlich $H = 90°$, so ist $\cos H = 0$, und folglich auch $\cot M \times \cot N = 0$, nämlich entweder $\cot M$ oder $\cot N = 0$, und also entweder M oder $N = 90°$. Imgleichen setzet man M und N beyde kleiner oder beyde größer als $90°$, so ist jederzeit $\frac{\cot M \,.\, \cot N}{\sin tot}$ nämlich $\cos H$ positiv, und folglich $H < 90°$, setzet man hingegen einen aus den zwey Winkeln M, N größ-

ser

ser und den anderen kleiner als 90°, so ist $\frac{\cot M . \cot N}{\sin tot}$ Fig. 128
nämlich cos H negativ, und folglich $H > 90°$; setzet man endlich M oder N = 90°, so ist entweder cot M oder cot N = 0, und auch $\frac{\cot M . \cot N}{\sin tot}$ nämlich $\cos H = 0$, und folglich $H = 90°$.

Wir wollen die Auflösung der sphärischen rechtwinklichten Dreyecke durch ein paar Beyspiele erläutern. Als

Es sey zu einer gewissen Zeit der Abstand der Sonne 132
N von dem Frühlingspunkte M (die Länge der Sonne) **= 66° = MN = H, und die Neigung der Sonnenbahn** (Ekliptik) **gegen den Aequator 23° 28′ = dem sphärischen Winkel M; man soll daraus die Abweichung der Sonne** (den Abstand der Sonne von dem Aequator) **nämlich den senkrechten Bogen NR = P bestimmen.**

Auflösung. Es ist in dem rechtwinklichten sphärischen Dreyecke MRN vermög (467.) sin R (sintot : sin H = sin M : sin P, nämlich $r : \sin 66° = \sin 23° 28' : \sin P$;

$$\begin{aligned} \text{nun ist } \log \sin 66° &= 9{,}9607302 \\ \log \sin 23° 28' &= 9{,}6001181 \\ \log \sin r &= 10, \\ \hline \log \sin P &= 9{,}5608483 \end{aligned}$$

und endlich $P = 21° 20'$, weil $M < 90$ (472. I.); folglich ist die gesuchte Abweichung $P = 21° 20'$.

Die Proportion sin R (sintot : sin H = sin M : sin P giebt uns zu erkennen, daß man auch aus der Länge und Abweichung der Sonne die Neigung der Sonnenbahn, und auch aus der gegebenen Neigung der Sonnenbahn und aus der Abweichung der Sonne ihre Länge bestimmen könne.

Imgleichen. **Es sey aus der gegebenen Neigung der Sonnenbahn M = 23° 28′, und aus der Abweichung P = 21° 20′ der Sonne ihre gerade Aufsteigung B** (näm-

Fig. 132 lich der Abstand des Abweichungsbogens NR von dem Frühlingspunkte M) zu bestimmen.

Auflösung. Es ist in dem rechtwinklichten sphärischen Dreyecke MRN vermög (469.) $\tang M : \tang P = \sin\mathrm{tot} : \sin B$, nämlich $\tang 23^\circ 28' : \tang 21^\circ 20' = r : \sin B$;

nun ist $\log r = 10$
$\log\tang 21^\circ 20' = 9{,}5916812$
$\log\tang 23^\circ 28' = 9{,}6376106$

$\log\sin B = 9{,}9540706$
und endlich $B = 64^\circ 6' 40''$ beynahe;
folglich ist die gesuchte gerade Aufsteigung B der Sonne $= 64^\circ 6' 40''$ beynahe.

Diese nämliche gerade Aufsteigung der Sonne kann aus der gegebenen Länge $H = 66^\circ$ der Sonne, und aus der Neigung $M = 23^\circ 28'$ der Sonnenbahn durch die Proportion $\sin R$ ($\sin\mathrm{tot} : \tang H = \cos M : \tang B$ (471. II.), nämlich $r : \tang 66^\circ = \cos 23^\circ 28' : \tang B$ gefunden werden;

denn es ist $\log\tang 66^\circ = 10{,}3514169$
$\log\cos 23^\circ 28' = 9{,}9625076$
$\log r = 10$

$\log\tang B = 10{,}3139245$
und $B = 64^\circ 6' 40''$ beynahe,
wie ehevor. Es ist in diesem letzten Falle vermög (472) einleuchtend, daß $B < 90^\circ$, nämlich $B = 64^\circ 6' 40''$, und nicht $B = 180 - 64^\circ 6' 40''$ zu nehmen sey, weil einmal $P < 90^\circ$ seyn muß, da $M < 90^\circ$ ist, und sodann wegen $H < 90^\circ$ die Katheten gleichartig seyn müßen.

Auch kann die gerade Aufsteigung B der Sonne aus ihrer Länge $H = 66^\circ$ und Abweichung $P = 21^\circ 20'$ gefunden werden Denn es ist vermög (470. I.) $\cos P : r = \cos H : \cos B$, nämlich $\cos 21^\circ 20' : r = \cos 66^\circ : \cos B$;

nun

$$\begin{aligned}
\text{nun ist } \log r &= 10 \\
\log\cos 66^\circ &= 9{,}6093133 \\
\log\cos 21^\circ\, 20' &= 9{,}9691734 \\
\hline
\text{folglich } \log\cos B &= 9{,}6401399 \\
\text{und endlich } B &= 64^\circ\, 6'\, 40''
\end{aligned}$$ Fig. 132

Es ist demnach in diesem Falle die gerade Aufsteigung der Sonne $B = 64^\circ\, 6'\, 40''$, weil $H < 90^\circ$ und auch $P < 90^\circ$ angenommen ist (472. II).

Endlich sey aus der Länge der Sonne $= H = 66^\circ$ und aus der Neigung der Sonnenbahn $= M = 23^\circ\, 28'$ der Winkel N zu finden, welchen der Abweichungsbogen P mit der Sonnenbahn einschließt.

Auflösung. Vermög (471. I.) ist $\cot M : \sin\text{tot} = \cos H : \cot N$, nämlich $\cot 23^\circ\, 28' : r = \cos 66^\circ : \cot N$.

$$\begin{aligned}
\text{Nun ist } \log r &= 10 \\
\log\cos 66^\circ &= 9{,}6093133 \\
\log\cot 23^\circ\, 28' &= 10{,}3623894 \\
\hline
\text{folglich } \log\cot N &= 9{,}2469239 \\
\text{und endlich } N &= 79^\circ\, 59' \text{ beynahe.}
\end{aligned}$$

Der Winkel N, welchen der Abweichungsbogen P mit der Sonnenbahn einschließt, kann auch aus der Neigung der Sonnenbahn $= M = 23^\circ\, 28'$, und aus der Abweichung der Sonne $= P = 21^\circ\, 20'$ durch nachstehende Proportion gefunden werden, $\cos P : \cos M = \sin\text{tot} : \sin N$ (470. II.) nämlich $\cos 21^\circ\, 20' : \cos 23^\circ\, 28' = r : \sin N$;

$$\begin{aligned}
\text{nun ist } \log\sin r &= 10 \\
\log\cos 23^\circ\, 28' &= 9{,}9625076 \\
\log\cos 21^\circ\, 20' &= 9{,}9691734 \\
\hline
\text{folglich } \log\sin N &= 9{,}9933342 \\
\text{und endlich } N &= 79^\circ\, 59',
\end{aligned}$$

oder auch $N = 180^\circ - 79^\circ\, 59' = 100^\circ\, 1'$, wenn $H > 90^\circ$ wäre.

In nachstehender Tafel kann man die Auflösung der rechtwinklichten sphärischen Dreyecke mit einem Blicke übersehen.

Tafel für die Auflösung aller möglichen Fälle, welche bey einem

Fig. 132

Gegeben	Zu suchen	Proportion.	Vermög
H, M	B	ſintot : tang H = cos M : tang B	471. II.
	P	ſintot : ſin H = ſin M : ſin P	467.
	N	cot M : ſintot = cos H : cot N	471. I.
H, N	B	ſintot : ſin H = ſin N : ſin B	467.
	P	ſintot : tang H = cos N : tang P	471. II.
	M	cot N : ſintot = cos H : cot M	471. I.
H, B	P	cos B : cos H = ſintot : cos P	470. I.
	M	tang H : ſintot = tang B : cos M	471. II.
	N	ſin H : ſintot = ſin B : ſin N	467.
H, P	B	cos P : cos H = ſintot : cos B	470. I.
	M	ſin H : ſintot = ſin P : ſin M	467.
	N	tang H : ſintot = tang P : cos N	471. II.
B, M	P	ſintot : ſin B = tang M : tang P	469.
	H	cos M : tang B = ſintot : tang H	471. II.
	N	ſintot : cos B = ſin M : cos N	470. II.
P, N	B	ſintot : ſin P = tang N : tang B	469.
	H	cos N : tang P = ſintot : tang H	471. II.
	M	ſintot : cos P = ſin N : cos M	470. II.
B, P	H	ſintot : cos P = cos B : cos H	470. I.
	M	ſin B : ſintot = tang P : tang M	469.
	N	ſin P : ſintot = tang B : tang N	469.
M, N	H	ſintot : cot M = cot N : cos H	471. I.
	P	ſin N : cos M = ſintot : cos P	470. II.
	B	ſin M : cos N = ſintot : cos B	470. II.
P, M	B	tang M : tang P = ſintot : ſin B	469.
	H	ſin P : ſin M = ſintot : ſin H	467.
	N	cos P : cos M = ſintot : ſin N	470. II.
B, N	P	tang N : tang B = ſintot : ſin P	469.
	H	ſin N : ſin B = ſintot : ſin H	467.
	M	cos B : cos N = ſintot : ſin M	470. II.

das

in R rechtwinklichten sphärischen Dreyecke vorkommen können.

Das gesuchte ist $< 90°$, wenn	oder $> 90°$, wenn
H und M gleichartig. $M < 90°$ H und M gleichartig.	H und M ungleichartig. $M > 90°$ H und M ungleichartig.
$N < 90°$ H und N gleichartig. H und N gleichartig.	$N > 90$ H und N ungleichartig. H und N ungleichartig.
H und B gleichartig. H und B gleichartig. $B < 90°$	H und B ungleichartig. H und B ungleichartig. $B > 90°$
H und P gleichartig. $P < 90°$ H und P gleichartig.	H und P ungleichartig. $P > 90°$ H und P ungleichartig.
$M < 90°$ B und M gleichartig. $B < 90°$	$M > 90°$ B und M ungleichartig. $B > 90°$
$N < 90°$ P und N gleichartig. $P < 90°$	$N > 90°$ P und N ungleichartig. $P > 90°$
B und P gleichartig. $P < 90°$ $B < 90°$	B und P ungleichartig. $P > 90°$ $B > 90°$
M und N gleichartig. $M < 90°$ $N < 90°$	M und N ungleichartig. $M > 90°$ $N > 90°$
zweifelhaft. zweifelhaft. zweifelhaft.	zweifelhaft. zweifelhaft. zweifelhaft.
zweifelhaft. zweifelhaft. zweifelhaft.	zweifelhaft. zweifelhaft. zweifelhaft.

Fig. 132

 Außer

Fig. Außer den bereits vorgetragenen Sätzen sind noch nach-
129 folgende zu entwickeln, damit man im Stande sey auch jedes
130 schiefwinklichte Dreyeck zu berechnen.
131 473. Wenn der Bogen BD auf AC (auf der Grundlinie) senkrecht steht, so verhalten sich

I. Die Sinus der beyden Stücke AD und DC der Grundlinie AC umgekehrt wie die Tangenten der anliegenden Winkel, nämlich $\sin AD : \sin CD = \tan\mathrm{g}\, BCA : \tan\mathrm{g}\, BAC$.

II. Und die Cosinus der beyden Stücke der Grundlinie AC verhalten sich wie die Cosinus der anliegenden Seiten, nämlich $\cos AD : \cos CD = \cos AB : \cos BC$.

Denn in den rechtwinklichten Dreyecken ADB und CDB

$$\left.\begin{array}{l} \text{ist } \sin ADB\,(r : \sin AD = \mathrm{tang}\, BAC : \mathrm{tang}\, BD \\ \text{und } \sin BDC\,(r : \sin CD = \mathrm{tang}\, BCA : \mathrm{tang}\, BD \end{array}\right\} \text{vermög (469.)}$$

$$\text{nämlich} \left\{\begin{array}{l} r \times \mathrm{tang}\, BD = \sin AD \times \mathrm{tang}\, BAC \\ r \times \mathrm{tang}\, BD = \sin CD \times \mathrm{tang}\, BCA \end{array}\right.$$

folglich auch $\sin AD \times \mathrm{tang}\, BAC = \sin CD \times \mathrm{tang}\, BCA$
und endlich I. $\sin AD : \sin CD = \mathrm{tang}\, BCA : \mathrm{tang}\, BAC$.

Ferner ist in eben diesen zwey Dreyecken
$\sin ADB\,(r : \cos BD = \cos AD : \cos AB$, und
$\sin BDC\,(r : \cos BD = \cos CD : \cos BC$ (470. I.);
folglich auch $\cos AD : \cos AB = \cos CD : \cos BC$,
oder II. $\cos AD : \cos CD = \cos AB : \cos BC$.

474. Wenn der Bogen BD auf AC (auf der Grundlinie) senkrecht steht, so verhalten sich

I. Die Sinus der Winkel an der Spitze B, wie die Cosinus der Winkel an der Grundlinie, nämlich
$\sin ABD : \sin CBD = \cos BAC : \cos ACB$.

II. Und die Cosinus der Winkel an der Spitze B verhalten sich umgekehrt wie die Tangenten der anliegenden Seiten, nämlich $\cos ABD : \cos CBD = \mathrm{tang}\, BC : \mathrm{tang}\, AB$.

Denn in den zwey rechtwinklichten Dreyecken ADB und CDB ist vermög (470. II.) $\sin ADB\,(r : \cos BD = \sin ABD : \cos BAC$, und $\sin BDC\,(r : \cos BD = \sin CBD : \cos ACB$;

folg-

folglich auch $\sin ABD : \cos BAC = \sin CBD : \cos ACB$, Fig.
oder I. $\sin ABD : \sin CBD = \cos BAC : \cos ACB$. 129
Ferner ist in eben diesen zwey Dreyecken 130

$$\left.\begin{array}{l} \sin ADB (r : \mathrm{tang}\, AB = \cos ABD : \mathrm{tang}\, BD \\ \sin BDC (r : \mathrm{tang}\, BC = \cos CBD : \mathrm{tang}\, BD \end{array}\right\} \text{vermög (471. II.)}$$ 131

$$\text{nämlich} \left\{\begin{array}{l} r \times \mathrm{tang}\, BD = \mathrm{tang}\, AB \times \cos ABD \\ r \times \mathrm{tang}\, BD = \mathrm{tang}\, BC \times \cos CBD \end{array}\right.$$

folglich auch $\mathrm{tang}\, AB \times \cos ABD = \mathrm{tang}\, BC \times \cos CBD$
und endlich II. $\cos ABD : \cos CBD = \mathrm{tang}\, BC : \mathrm{tang}\, AB$

475. Ob bey einem schiefwinklichten Dreyecke ABC der senkrechte Bogen BD in das Dreyeck oder außerhalb desselben auf die Verlängerung von AC neben dem größeren Winkel an der Grundlinie hinausfalle, läßt sich gemeiniglich entscheiden, nachdem einmal entweder das Stück AD, oder der Winkel ABD berechnet ist; wenn nämlich $AD > AC$, oder $ABD > ABC$ gefunden wird wie Fig. 130., so fällt der senkrechte Bogen BD außerhalb des Dreyeckes auf die Verlängerung von AC über den größeren Winkel C an AC hinaus; hingegen fällt der senkrechte Bogen in das Dreyeck wie Fig. 129., wenn $AD < AC$, oder auch $ABD < AB$ durch die Rechnung gefunden wird.

Auch ist es leicht einzusehen, daß die Winkel A und C gleichartig, wenn BD in das Dreyeck fällt, und ungleichartig seyn müßen, wenn der senkrechte Bogen BD außerhalb des Dreyeckes fällt; denn in Fig. 129 sind in den rechtwinklichten Dreyecken ADB und CDB vermög (472. I.) die Winkel A und C mit BD von einerley Art, und folglich auch untereinander von einerley Art: und eben so sind in Fig. 130. in den rechtwinklichten Dreyecken ADB und CDB vermög (472. I.) die Winkel A und BCD mit BD, und folglich auch untereinander von einerley Art, und endlich A und ACB von verschiedener Art, weil der Winkel $ACB > 90°$ seyn muß, wenn sein Nebenwinkel BCD und auch $BAC < 90°$ ist. Und umgekehrt der senkrechte Bogen BD fällt in das Dreyeck, wenn die Winkel A und ACB gleichartig, er fällt außerhalb

Fig. serhalb des Dreyeckes, wenn diese Winkel an der Grundfläche ungleichartig sind.

133 476. In einem jeden sphärischen Dreyecke ABC Fig. 133. ist

$$\text{I. } \cos A = \frac{r^2 . \cos BC - r . \cos AB . \cos AC}{\sin AB . \sin AC}$$

II. In einem jeden sphärischen Dreyecke ABC verhält sich das Produkt aus den Sinusen von zwey Seiten AB und AC zum Produkte aus den Sinusen der Differenzen, wenn man einmal eine und dann die andere aus diesen zwey Seiten von der halben Summe aller drey Seiten abzieht, gleichwie das Quadrat des ganzen Sinus zum Quadrate des Sinus von dem halben Winkel A, welchen die zwey Seiten AB und AC einschliessen, nämlich $\sin AB \times \sin AC : \sin(S - AB) \times \sin(S - AC) = r^2 : \sin^2 \frac{1}{2} A$, wenn man $\frac{1}{2}(AB + AC + BC) = S$ setzet.

Denn es sey der Bogen BD auf AC senkrecht, so ist vermög (173. II.), $\cos AD : \cos CD = \cos AB : \cos BC$, und daraus findet man einmal $\cos CD = \frac{\cos BC . \cos AD}{\cos AB}$; es ist aber $\cos CD = \cos(AC - AD)$ nämlich es ist vermög (442. IV.) $\cos CD = (\cos AC . \cos AD + \sin AC . \sin AD) : r$; folglich auch $(\cos AC . \cos AD + \sin AC . \sin AD) : r = \frac{\cos BC . \cos AD}{\cos AB}$, oder $\cos AC + \sin AC . \frac{\sin AD}{\cos AD} = \frac{r . \cos BC}{\cos AB}$, und auch wenn wir statt $\frac{\sin AD}{\cos AD}$ aus (441. II.) seinen Werth $\frac{\operatorname{tang} AD}{r}$ substituiren, $\cos AC + \frac{\sin AC \operatorname{tang} AD}{r} = \frac{r . \cos BC}{\cos AB}$; aus dieser Gleichung ergiebt sich nun $\operatorname{tang} AD = \frac{r^2 . \cos BC - r . \cos AC . \cos AB}{\sin AC . \cos AB}$; es ist aber auch vermög (471. II.) $\operatorname{tang} AD = \frac{\operatorname{tang} AB . \cos A}{r}$, weil $r : \operatorname{tang} AB$

$=$

$= \cos A : \tang AD$ statt findet, oder es ist, wenn wir statt Fig. $\tang AB$ aus (441. II.) seinen Werth substituiren, $\tang AD$ 133
$= \frac{\sin AB . \cos A}{\cos AB}$; folglich auch $\frac{\sin AB . \cos A}{\cos AB} =$
$\frac{r^2 . \cos BC - r . \cos AC . \cos AB}{\sin AC . \cos AB}$; und aus dieser Gleichung findet man endlich I. $\cos A = \frac{r^2 . \cos BC - r . \cos AB . \cos AC}{\sin AB . \sin AC}$

Da nun $\cos A = \frac{r^2 . \cos BC - r . \cos AB . \cos AC}{\sin AB . \sin AC}$, und auch vermög (443. V.) $\cos A = \frac{r^2 - 2\sin^2 \frac{1}{2} A}{r}$, so ist auch $\frac{r^2 - 2\sin^2 \frac{1}{2} A}{r} = \frac{r^2 . \cos BC - r . \cos AB . \cos AC}{\sin AB . \sin AC}$, und aus dieser Gleichung ergiebt sich einmal $2\sin^2 \frac{1}{2} A = (r^2 . \cos AB . \cos AC + r^2 . \sin AB . \sin AC - r^3 . \cos BC) : \sin AB \times \sin AC$, und auch $2\sin AB . \sin AC . \sin^2 \frac{1}{2} A = r^3 . (\frac{\cos AB . \cos AC + \sin AB . \sin AC}{r} - \cos BC)$, oder wenn wir statt $(\cos AB . \cos AC + \sin AB . \sin AC) : r$ aus (442. IV.) seinen Werth $\cos (AC - AB)$ setzen, $2\sin AB . \sin AC . \sin^2 \frac{1}{2} A = r^3 . [\cos (AC - AB) - \cos BC]$; es sey nun $AC - AB = q$, und $BC = p$, so ist $2\sin AB . \sin AC . \sin^2 \frac{1}{2} A = r^3 . (\cos q - \cos p)$, und folglich auch, wenn wir aus (449. IV.) statt $\cos q - \cos p$ seinen Werth substituiren und die Gleichung durch 2 theilen, $\sin AB . \sin AC . \sin^2 \frac{1}{2} A = r^2 . \sin \frac{1}{2}(p+q) . \sin \frac{1}{2}(p-q)$; es ist aber $\frac{1}{2}(p+q) = \frac{1}{2}(BC + AC - AB) = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) - AB = (S - AB)$, und $\frac{1}{2}(p-q) = \frac{1}{2}(BC - AC + AB) = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) - AC = (S - AC)$, wenn wir $\frac{1}{2}(AB + AC + BC) = S$ setzen; folglich auch $\sin AB . \sin AC . \sin^2 \frac{1}{2} A = r^2 . \sin(S - AB) . \sin(S - AC)$,

und

Fig. und endlich II. $\sin AB \,.\, \sin AC : \sin(S - AB) \,.\, \sin(S - AC) = r^2 : \sin^2 \tfrac{1}{2} A$, wenn wir diese letzte Gleichung in eine Proportion auflösen.

127 477. In einem jeden sphärischen Dreyecke ABC Fig. 127. ist

$$\text{I. } \cos AB = \frac{r^2 . \cos C + r . \cos A . \cos B}{\sin A . \sin B}$$

II. In einem jeden sphärischen Dreyecke ABC verhält sich das Produkt aus den Sinusen von zwey Winkeln A und B zu dem Produkte aus den Cosinusen der Differenzen, wenn man einmal einen und dann den anderen aus diesen zwey Winkeln von der halben Summe aller drey Winkel abzieht, gleichwie das Quadrat des ganzen Sinus zum Quadrate des Cosinus von der halben Seite, welche zwischen den Winkeln A und B liegt, nämlich $\sin A \times \sin B : \cos(S - A) \times \cos(S - B) = r^2 : \cos^2 \tfrac{1}{2} AB$, wenn wir $\tfrac{1}{2}(A + B + C) = S$ setzen.

Denn man gedenke nur nach (465.) das Dreyeck DEF, so ist vermög (476. I.) $\cos F = \frac{r^2 . \cos DE - r . \cos EF . \cos DF}{\sin EF . \sin DF}$, es ist aber $\sin EF = \sin A$, $\sin DF = \sin B$, $\cos DE = - \cos C$, $\cos EF = - \cos A$, $\cos DF = - \cos B$, und $\cos F = - \cos AB$, [weil $EF + A = 180^\circ$, $DF + B = 180^\circ$, u. s. w. (465.), und überdieß die Winkel oder Bögen, welche zusammen 180° enthalten, den nämlichen Sinus und Cosinus haben, mit dem einzigen Unterschiede (440. III.), daß cos C, cos A u. s. w. negativ sey, wenn cos DE, cos EF für positiv angenommen wird]; folglich auch $- \cos AB = \frac{- r^2 . \cos C - r . \cos A . \cos B}{\sin A . \sin B}$, und endlich I. $\cos AB = \frac{r^2 . \cos C - r . \cos A . \cos B}{\sin A . \sin B}$.

Da

Da nun $\cos AB = \frac{r^2 . \cos C - r . \cos A . \cos B}{\sin A . \sin B}$, und Fig. 127

vermög (443. IV.) auch $\cos AB = \frac{2\cos^2 \frac{1}{2} AB - r^2}{r}$, so ist

auch $\frac{2\cos^2 \frac{1}{2} AB - r^2}{r} = \frac{r^2 . \cos C - r . \cos A . \cos B}{\sin A . \sin B}$; und

nun findet man aus dieser Gleichung $2 \sin A . \sin B . \cos^2 \frac{1}{2} AB$ $= r^3 \left(\cos C + \frac{\cos A . \cos B + \sin A . \sin B}{r} \right)$, und folglich auch wenn wir statt $(\cos A . \cos B + \sin A . \sin B) : r$ aus (442. IV.) seinen Werth $\cos (A - B)$ setzen, $2 \sin A . \sin B . \cos^2 \frac{1}{2} AB = r^3 . [\cos C + \cos (A - B)]$; es sey nun $C = p$, und $A - B = q$, so ist $2 \sin A . \sin B . \cos^2 \frac{1}{2} AB = r^3 (\cos p + \cos q)$, und also auch, wenn wir statt $\cos p + \cos q$ aus (449. II.) seinen Werth substituiren, und sodann die ganze Gleichung durch 2 theilen, $\sin A . \sin B . \cos^2 \frac{1}{2} AB = r^2 . \cos \frac{1}{2} (p + q) . \cos \frac{1}{2} (p - q)$; es ist aber $\frac{1}{2} (p + q) = \frac{1}{2} (C + A - B) = \frac{1}{2} (A + B + C) - B = S - B$, und $\frac{1}{2} (p - q) = \frac{1}{2} (C - A + B) = \frac{1}{2} (A + B + C) - A = S - A$, wenn wir $\frac{1}{2} (A + B + C) = S$ setzen; folglich auch $\sin A . \sin B . \cos^2 \frac{1}{2} AB = r^2 . \cos (S - B) . \cos (S - A)$, und endlich II. $\sin A . \sin B : \cos (S - A) . \cos (S - B) = r^2 : \cos^2 \frac{1}{2} AB$, wenn wir diese letzte Gleichung in eine Proportion auflösen.

Dieser Satz giebt uns auch zu erkennen, daß gleichwinklichte sphärische Dreyecke auf einer nämlichen Kugel auch in Rücksicht der Seiten einander vollkommen gleich seyn.

478. Durch die bisher entwickelten Sätze können nun die schiefwinklichten sphärischen Dreyecke auf folgende Art aufgelöset werden.

I. *Es sind in was immer für einem sphärischen Dreyecke alle drey Seiten gegeben; man soll einen aus den drey Winkeln finden.*

Auflö-

Fig. 127 Auflösung. Man addire die drey gegebenen Seiten zusammen, und subtrahire von der Hälfte dieser Summe einmal eine und dann die andere aus den zwey Seiten, welche den gesuchten Winkel einschliessen, sodann addire man zu den Logarithmen der Sinuse dieser zwey Differenzen die dekadischen Ergänzungen von den Logarithmen der Sinuse der zwey Seiten, welche den gesuchten Winkel einschliessen, so ist (ohne an der Kennziffer etwas zu ändern) die Hälfte dieser Summe der Logarithmus des Sinus von dem halben gesuchten Winkel, nämlich in Fig. 127. ist $\log \sin \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}[\log \sin(S - AB) + \log \sin(S - AC) + D.E. \log \sin AB + D.E. \log \sin AC]$, wenn wir $\frac{1}{2}(AB + AC + BC) = S$ setzen.

Denn es ist vermög (476. II.) $\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{r^2 . \sin(S - AB) . \sin(S - AC)}{\sin AB . \sin AC}$, folglich auch $2 \log \sin \frac{1}{2} A = 20 + \log \sin(S - AB) + \log \sin(S - AC) + D.E. \log \sin AB + D.E. \log \sin AC - 20$, weil $\log r^2 = 2 \log r = 2 . 10 = 20$ ist, und wegen den zwey dekadischen Ergänzungen von der Kennziffer der Summe 20 hinweggeworfen werden, nämlich es ist $\log \sin \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}[\log \sin (S - AB) + \log \sin(S - AC) + D.E. \log \sin AB + D.E. \log \sin AC]$. Und eben so ist $\log \sin \frac{1}{2} B = \frac{1}{2}[\log \sin (S - AB) + \log \sin(S - BC) + D.E. \log \sin AB + D.E. \log \sin BC]$.

Z. B. Wenn in dem Dreyecke ABC die Seite AB = 85° 10′, BC = 101° 30′, und AC = 95° 48′ wäre, so wird der Winkel B auf folgende Art gefunden.

AB =	85° 10′	S =	141° 14′
BC =	101° 30′	AB =	85° 10′
AB =	95° 48′	BC =	101° 30′
	282° 28′ | 2	S-AB =	56° 4′
S =	141° 14′	S-BC =	39° 44′

log sin

$\log \sin (S - AB) = \log \sin\ 56^\circ\ 4' = 9{,}9189146$ Fig.
$\log \sin (S - BC) = \log \sin\ 39^\circ 44' = 9{,}8056472$ 127
$\mathfrak{D}.\ \mathfrak{C}.\ \log \sin AB = \mathfrak{D}.\mathfrak{C}.\log \sin\ 85^\circ 10' = 0{,}0015471$
$\mathfrak{D}.\ \mathfrak{C}.\ \log \sin BC = \mathfrak{D}.\mathfrak{C}.\log \sin\ 101^\circ 30' = 0{,}0088073$

$19{,}7349162 | 2$

$\log \sin \frac{1}{2}B$ . . . . $9{,}8674581$

folglich $\frac{1}{2}B = 47^\circ\ 28'\ 30''$, und endlich $B = 94^\circ\ 57'$ beynahe. Und eben so können die zwey übrigen Winkel A und C berechnet werden.

II. Es sind in was immer für einem sphärischen Dreyecke alle drey Winkel gegeben, man soll eine aus den drey Seiten berechnen.

Auflösung. Man addire die drey gegebenen Winkel zusammen, und subtrahire von der Hälfte dieser Summe einmal einen und dann den anderen aus den zwey Winkeln, welche der gesuchten Seite anliegen, sodann addire man zu den Logarithmen der Cosinuse von diesen zwey Differenzen die dekadischen Ergänzungen von den Logarithmen der Sinuse der zwey Winkel, welche der gesuchten Seite anliegen, so ist (ohne an der Kennziffer etwas zu ändern) die Hälfte dieser Summe der Logarithmus des Cosinus von der halben gesuchten Seite; nämlich in Fig. 127. ist $\log \cos \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}[\log \cos (S - B) + \log \cos (S - B) + \mathfrak{D}.\ \mathfrak{C}.\ \log \sin A + \mathfrak{D}.\ \mathfrak{C}.\ \log \sin B]$ wenn wir $A + B + C = S$ setzen. Denn es ist vermög (477. II.) $\cos^2 \frac{1}{2}AB = \frac{r^2 . \cos (S - A) . \cos (S - B)}{\sin A . \sin B}$;
folglich auch $\log \cos \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} . [\log \cos (S - A) + \log \cos (S - B) + \mathfrak{D}.\ \mathfrak{C}.\ \log \sin A + \mathfrak{D}.\ \mathfrak{C}.\ \log \sin B]$. Und eben so ist $\log \cos \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} . [\log \cos (S - B) + \log \cos (S - C) + \mathfrak{D}.\ \mathfrak{C}.\ \log \sin B + \mathfrak{D}.\ \mathfrak{C}.\ \log \sin C]$.

Bey

Fig. 127 Bey dieser und der vorigen Aufgabe kann es niemals zweyfelhaft seyn, ob der gesuchte Winkel, oder Bogen kleiner oder größer als 90° sey; denn $\frac{1}{2}$B, und auch $\frac{1}{2}$AB muß jederzeit kleiner seyn als 90°, weil jeder Winkel und auch jede Seite in einem sphärischen Dreyecke kleiner seyn muß als 180°.

III. In einem sphärischen Dreyecke ABC sind zwey Winkel nebst einer gegenüberstehenden Seite gegeben, man soll die zweyte gegenüberstehende Seite finden; imgleichen man soll aus zwey Seiten, und einem gegenüberstehenden Winkel den zweyten gegenüberstehenden Winkel bestimmen; z. B. in Fig. 127. soll aus A, C, und AB die Seite BC, imgleichen aus AB, BC, und A der Winkel C gefunden werden.

Auflösung. Vermög (468.) ist $\sin C : \sin AB = \sin A : \sin BC$, und $\sin BC : \sin A = \sin AB : \sin C$; folglich $\sin BC = \frac{\sin A \,.\, \sin AB}{\sin C}$, und $\sin C = \frac{\sin A \,.\, \sin AB}{\sin BC}$. Es ist hier zweifelhaft ob BC, und auch C kleiner oder größer als 90° sey; und es wird im erforderlichen Falle nur aus anderen Nebenumständen entschieden, ob BC und C kleiner oder grösser als 90° zu nehmen sey.

Bey den noch übrigen Fällen, die bey der Auflösung der schiefwinklichten Dreyecke vorkommen, und nach den drey bereits vorgetragenen Aufgaben nicht können entwickelt werden, beobachte man folgende Regel:

Man gedenke von der Spitze eines Winkels auf die gegenüberstehende Seite einen senkrechten Bogen und zwar so, daß eines von den beyden rechtwinklichten Dreyecken, welche auf diese Art zum Vorschein kommen, zwey von den gegebenen drey Stücken enthalte: sodann verbinde man gehörig die (470 . . . 475.) erwiesenen Sätze, so werden sich daraus die gesuchten Stücke des schiefwinklichten Dreyeckes ergeben. Als

IV.

IV. Es sind in einem schiefwinklichten sphärischen Dreyecke zwey Seiten AB und AC nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben, man soll die dritte Seite BC finden. Fig. 129 130 131

Auflösung. Wenn man aus B den senkrechten Bogen BD auf AC gedenket, so findet man in dem rechtwinklichten Dreyecke ADB die Seite AD, indem man vermög (471. II.) sagen kann $\sin tot : \tan AB = \cos A : \tan AD$, nämlich $\tan AD = \frac{\cos A . \tan AB}{\sin tot}$, und es ist nach (472.) leicht zu entscheiden ob $AD < 90°$ oder $> 90°$ zu nehmen sey, wenn nämlich A und AB gleichartig sind, so ist $AD < 90°$, hingegen ist $AD > 90°$, wenn A und AB ungleichartig sind; und nun ist $CD = AC - AD$, wenn $AD < AC$ Fig. 129, oder $CD = AD - AC$, wenn $AD > AC$ gefunden wird, oder endlich $CD = AD + AC$ in Fig. 131. Sodann schliesset man nach (473. II.) $\cos AD : \cos CD = \cos AB : \cos BC$, und auf diese Art findet man $\cos BC = \frac{\cos AB . \cos CD}{\cos AD}$, und folglich auch den Bogen BC selbst, welcher $< 90°$, wenn A und CD gleichartig, oder $> 90°$ seyn muß, wenn A und CD ungleichartig sind; denn setzet man A und CD gleichartig, so ist auch CD und BD gleichartig (472. I.); und folglich $BC < 90°$ vermög (472. II.).

Es sey z. B. A der Nordpol, FG ein Stück des Aequators, AF ein Stück des Wiener = Meridians (Mittagskreises), und AG ein Stück des Petersburger = Meridians, so kann aus der Breite von Wien (dem Abstande von dem Aequator) $= FC = 48° 12' 36''$, aus der Breite von Petersburg $= GB = 59° 56'$, und aus dem Unterschiede ihrer Längen (aus dem Abstande ihrer Meridiane auf dem Aequator gemessen) $FG = 13° 57' 30''$, die Entfernung von Wien bis Petersburg gefunden werden, welche durch einen Bogen BC eines größten Kreises bestimmet wird, der durch Wien C und durch Petersburg B aus dem Mittel- 133

Fig. punkte des Erdballs geführet ist, wenn man unseren Erdball
133 für eine Kugel ansieht; denn in dem sphärischen Dreyecke ABC ist die Seite AC $= AF - FC = 90° - 48° 12' 36'' = 41° 47' 24''$, die Seite AB $= AG - GB = 90° - 59° 56' = 30° 4'$, und der Winkel $A = FG = 13° 57' 30''$ bekannt; folglich kann die Seite BC nach der eben entwickelten Aufgabe (IV.) gefunden werden, wenn man den senkrechten Bogen BD von Petersburg auf den Wiener-Meridian gedenket. Die ganze Rechnung wird auf folgende Art geführet: *es ist* $\tang AD = \frac{\cos A . \tang AB}{\text{sintot}}$, $CD = AC - AD$, $\cos BC = \frac{\cos CD . \cos AB}{\cos AD}$; und

$A = 13° 57' 30''$, $AB = 30° 4'$, $AC = 41° 47' 24''$.

$-\log$ sintot $= -10$	
$\log \cos A = 9{,}9869827$	$\log \cos CD = 9{,}9896444$
$\log \tang AB = 9{,}7626056$	$\log \cos AB = 9{,}9372385$
$\log \tang AD = 9{,}7495883$	$19{,}9268829$
$AD = 29° 19' 39''$	$\log \cos AD = 9{,}9404340$
$AC = 41° 47' 24''$	$\log \cos BC = 9{,}9864489$
$CD = 12° 27' 45''$	$BC = 14° 14' 19''\frac{1}{2}$

Da nun 1 Grad eines größten Kreises der Erdkugel 15 geographische Meilen beträgt, so ist die gesuchte Entfernung BC $= (14° 14' 19\frac{1}{2}'') . 15 = 213\frac{465}{800}$. geographische Meilen.

129 V. Es sind wieder zwey Seiten AB und AC nebst
130 dem eingeschlossenen Winkel A gegeben, man soll einen
131 von den übrigen beyden Winkeln z. B. C finden.

Auflösung. Es sey aus dem dritten Winkel B der Bogen BD senkrecht auf AC,

so ist (471. II.) sintot : tang AB $=$ cos A : tang AD;
sodann $CD = AC - AD$ Fig. 129, $CD = AD - AC$ Fig. 130.; oder $CD = AC + AD$ Fig. 131.,
und endlich (473. I.) sin CD : sin AD $=$ tang A : tang C.

VI.

VI. Es sind zwey Seiten AB und BC nebst einem gegenüberliegenden Winkel A gegeben, man soll den Winkel ABC finden, welchen die zwey gegebenen Seiten einschliessen. Fig. 129 130 131

Auflösung. Es sey aus dem gesuchten Winkel der Bogen BD senkrecht auf AC,
so ist (471. I.) $\cot A : \text{sintot} = \cos AB : \cot ABD$,
sodann (474. II.) $\tan g\, BC : \tan g\, AB = \cos ABD : \cos CBD$
und endlich $ABC = ABD + CBD$, wenn AB und BC gleichartig sind; im Gegentheile ist ABC = dem Unterschiede der zwey Winkel ABD und CBD.

VII. Es sind wieder zwey Seiten AB und BC nebst einem gegenüberliegenden Winkel A gegeben, man soll die dritte Seite AC finden.

Auflösung. Aus dem Winkel B, welcher der gesuchten Seite AC gegenüberliegt, sey BD senkrecht auf AC,
so ist (471. II.) $\text{sintot} : \tan g\, BA = \cos A : \tan g\, AD$,
sodann (473. II.) $\cos AB : \cos BC = \cos AD : \cos CD$
und endlich $AC = AD + CD$, wenn AB und BC gleichartig sind; im Gegentheile ist AC = dem Unterschiede der zwey gefundenen Stücke AD und CD.

VIII. Es sind zwey Winkel A und ABC nebst der zwischenliegenden Seite AB gegeben, man soll den dritten Winkel ACB finden.

Auflösung. Es sey BD auf AC senkrecht,
so ist (471. I.) $\cot A : \text{sintot} = \cos AB : \cot ABD$,
sodann $CBD = ABC - ABD$ Fig. 129., $CBD = ABD - ABC$ Fig. 130., oder $CBD = ABC + ABD$ Fig. 131.
und endlich (474. I.) $\sin ABD : \sin CBD = \cos A : \cos ACB$.

IX. Es sind wieder zwey Winkel A und ABC nebst der zwischen liegenden Seite AB gegeben, man sucht eine von den zwey übrigen Seiten, z. B. BC.

Fig. Auflösung. Es sey aus dem gegebenen Winkel ABC, wel-
129 cher der gesuchten Seite BC anliegt, BD senkrecht auf AC,
130 so ist (471. I.) $\cot A : \sin tot = \cos AB : \cot ABD$
131 sodann $CBD = ABC - ABD$ Fig. 129., $CBD = ABD - ABC$ Fig. 130., oder $CBD = ABC + ABD$ Fig. 131.
und endlich (474. II.) $\cos CBD : \cos ABD = \tang AB : \tang BC$.

X. Es sind zwey Winkel A und C nebst einer gegenüberliegenden Seite AB gegeben, man soll die Seite AC zwischen den gegebenen Winkeln finden.

Auflösung. Es sey der Bogen BD auf die gesuchte Seite AC senkrecht,
so ist (471. II.) $\sin tot : \tang AB = \cos A : \tang AD$,
sodann (473. I.) $\tang C : \tang A = \sin AD : \sin CD$,
und endlich $AC = AD + CD$, wenn A und C gleichartig sind, oder AC = dem Unterschiede der zwey gefundenen Stücke AD und CD, wenn A und C ungleichartig sind.

XI. Es sind wieder zwey Winkel A und C nebst einer gegenüberliegenden Seite AB gegeben, man sucht den dritten Winkel ABC.

Auflösung. Es sey aus dem gesuchten Winkel der Bogen BD senkrecht auf AC,
so ist (471. I.) $\cot A : \sin tot = \cos AB : \cot ABD$,
sodann (471. II.) $\cos A : \cos C = \sin ABD : \sin CBD$,
und endlich $ABC = ABD + CBD$, wenn A und C gleichartig sind, im Gegentheile ist ABC = dem Unterschiede der zwey gefundenen Winkel ABD und CBD.

Diese XI Aufgaben enthalten alle möglichen Fälle, die bey der Auflösung schiefwinklichter Dreyecke vorkommen können; man ist zwar genöthiget in den meisten Fällen zwey Proportionen anzusetzen um aus drey gegebenen Stücken das 4te zu bestimmen; allein man hat dabey den großen Vortheil, daß man unmittelbar die Logarithmen gebrauchen könne.

Nur in jenen schiefwinklichten Dreyecken, bey denen eine Seite $= 90^\circ$ ist, läßt sich aus drey gegebenen Stücken jedes der übrigen durch eine einzige Proportion berechnen. Es sey z. B.

in

in dem schiefwinklichten Dreyecke ABC Fig. 127. der Winkel A Fig. 127
nebst den beyden anliegenden Seiten AB und AC gegeben, von denen die eine $AC = 90°$ ist, so wird in diesem Falle etwa die dritte Seite BC durch eine einzige Proportion auf folgende Art gefunden: man gedenke nach (465.) das Dreyeck DEF, so ist in demselben nebst dem rechten Winkel E die Kathete EF mit dem anliegenden Winkel F gegeben, und der dritte Winkel D wird sodann nach (470.II.) durch die Proportion $\sin tot : \cos EF = \sin F : \cos D$, und folglich auch BC gefunden, weil $D + BC = 180°$, nämlich $BC = 180° - D$ ist. Ein gleiches ist bey den übrigen Fällen eines solchen schiefwinklichten Dreyeckes zu beobachten.

479. Man kann auch aus drey gegebenen Stücken eines sphärischen Dreyeckes das 4te unmittelbar durch eine einzige Gleichung ausdrücken; als in der vorigen Aufgabe IV. ist
$\cos BC = (r . \cos AB . \cos AC + \cos . A . \sin AB . \sin AC) : r^2$
wenn man aus der Gleichung (476. I.) cos BC entwickelt.

In der Aufgabe VIII. ist
$\cos ACB = (\sin A . \sin B . \cos AB - r . \cos A . \cos B) : r^2$
wenn man aus der Gleichung (477. I.) cos ACB suchet.

Und eben so können die übrigen Stücke durch Gleichungen ausgedrücket werden. Allein wir wollen uns nicht länger dabey aufhalten, weil diese Gleichungen die beträchtliche Unbequemlichkeit mit sich führen, daß man sie nicht unmittelbar durch Logarithmen entwickeln könne, und beschliessen diesen Gegenstand mit nachfolgendem Satze.

480. **Der Flächeninhalt eines jeden sphärischen Dreyeckes ABC ist gleich dem Ueberschusse seiner drey Winkel über 180° multipliciret mit dem Halbmesser der dazu gehörigen Kugel,** nämlich der Flächeninhalt $ABC = R . (A + B + C - 180°)$, wenn wir den Halbmesser der dazugehörigen Kugel mit R benennen, und unter $(A + B + C - 180°)$ die wirkliche Länge eines Bogens von einem größten Kreise auf der nämlichen Kugel verstehen, welcher Bogen in Rücksicht seiner Grade $= (A + B + C - 180°)$ ist. 134

 denn

Fig. 134 Denn man verlängere nur alle drey Seiten des Dreyeckes, bis jede derselben einen ganzen Umkreis ausmache, und gedenke die Durchschnittslinien dieser größten Kreise nämlich die Durchmesser Aa, Bb, und Cc, so ist wegen den gleichen Scheitelwinkeln AGb und aGB der Bogen $ADb = adB$, ingleichen der Bogen $AEc = aeC$, und auch $bc = BC$. Da nun in den zwey sphärischen Dreyecken AEcbDA und aeCBda die Seiten einander wechselweise gleich sind, so sind diese zwey Dreyecke vollkommen auf einerley Art bestimmet, und folglich $AEcbDA = aeCBda$. Ferner ist vermög (401.) das Stück der Kugelfläche zwischen den zwey größten Halbkreisen ABda und ACea gleich dem sphärischen Winkel A multipliciret mit dem Durchmesser der Kugel, nämlich $ABdaeCA = 2R.A$, das ist $ABC + aeCBda = 2R.A$, und folglich auch, wenn wir AEcbDA statt aeCBda substituiren, $ABC + AEcbDA = 2R.A$; eben so ist $BADbfCB = 2R.B$, oder $ADbfCA = 2R.B - ABC$, wenn wir beyderseits ABC abziehen; und auch $CBFcEAC = 2R.C$, oder $ABFcEA = 2R.C - ABC$.

Da nun $ABC + AEcbDA = 2R.A$

und $ADbfCA = 2R.B - ABC$

$ABFcEA = 2R.C - ABC$

so ist auch $ABC + ABFcEA + AEcbDA + ADbfCA = 2R.(A+B+C) - 2ABC$, wenn man die drey letzten Gleichungen zusammen addiret; es ist aber $ABC + ABFcEA + AEcbDA + ADbfCA =$ der Oberfläche der Halbkugel $= R.360^\circ = 2R.180^\circ$, wenn wir unter 180° die Länge eines größten halben Umkreises verstehen (400.); folglich auch $2R.180^\circ = 2R(A+B+C) - 2ABC$, und endlich $ABC = R.(A+B+C - 180^\circ)$.

Da sich ein jedes Vieleck auf einer Kugelfläche von größten Kreisbögen eingeschlossen in lauter sphärische Dreyecke auflösen läßt, so ist es ganz begreiflich, daß auch durch Hilfe dieses Satzes der Flächeninhalt eines jeden solchen Vieleckes sehr leicht zu berechnen sey.

Fünfte

Fünfte Vorlesung.

Von den Anfangsgründen der praktischen Meßkunst.

Von den wesentlichsten geometrischen und trigonometrischen Operationen auf dem Felde.

481. Aufgabe. **Einen geradlinigten Winkelmesser (Transporteur) zu verfertigen um durch Hilfe desselben einen auf dem Papiere gegebenen Winkel zu messen, und auch einen Winkel zu verzeichnen, der eine gegebene Anzahl der Grade enthält.** Fig.

Auflösung. 1) Man nehme aus was immer für einer Sinustafel die natürlichen Sinus von $\frac{1}{2}^\circ$, 1°, $1\frac{1}{2}^\circ$, 2°, $2\frac{1}{2}^\circ$, 3°, $3\frac{1}{2}^\circ \ldots 44\frac{1}{2}^\circ$, 45°, und multiplicire jeden Sinus mit 2, so sind diese Produkte die Sehnen der Bögen von 1°, 2°, 3°, 4°, $5^\circ \ldots 89^\circ$, 90° eines Kreises, dessen Halbmesser mit dem sintot in der Tafel einerley ist; denn es ist $\text{chord}\, b = 2 \sin \frac{1}{2} b$ vermög (437): aus diesen ist es nun leicht die Sehnen für jeden anderen beliebigen Halbmesser zu finden, weil sich gleichnamige Funktionen von ähnlichen Bögen gegen einander verhalten, wie die dazugehörigen Halbmesser (446); es ist am füglichsten bey der Verfertigung des geradlinigten Transporteurs den Halbmesser $= 500$ zu setzen, weil man sodann die gesuchten Sehnen aller Grade von 1 bis 90 ohne fernere Rechnung aus der Sinustafel herausschreiben kann, wenn nur sintot $= 1$, oder auch sintot $= 100000{,}00$ in der Sinustafel angenommen ist. Die Sehnen aller einzelnen Grade bis 90° eines Kreises, dessen Halbmesser $= 500$ ist, enthält nachstehende

Fig.

Sehnentafel

für die Verfertigung des geradlinigten Transporteurs oder Sehnenmaßstabs.

Grad	Sehne	Grad	Sehne	Grad	Sehne	Grad	Sehne	Grad	Sehne
1	8,7	19	165	37	317,3	55	461,7	73	594,8
2	17,5	20	173,6	38	325,6	56	469,5	74	601,8
3	26,2	21	182,2	39	333,8	57	477,2	75	608,8
4	34,9	22	189,8	40	342	58	484,8	76	615,7
5	43,6	23	199,4	41	350,2	59	492,4	77	622,5
6	52,3	24	207,9	42	358,4	60	500	78	629,3
7	61	25	216,4	43	366,5	61	507,5	79	636,1
8	69,8	26	225	44	374,6	62	515	80	642,8
9	78,5	27	233,4	45	382,7	63	522,5	81	649,4
10	87,2	28	241,9	46	390,7	64	529,9	82	656,1
11	95,8	29	250,4	47	398,7	65	537,3	83	662,6
12	104,5	30	258,8	48	406,7	66	544,6	84	669,1
13	113,2	31	267,2	49	414,7	67	551,9	85	675,6
14	121,9	32	275,6	50	422,6	68	559,2	86	682
15	130,5	33	284	51	430,5	69	566,4	87	688,4
16	139,2	34	292,4	52	438,4	70	573,6	88	694,7
17	147,8	35	300,7	53	446,2	71	580,7	89	700,9
18	156,4	36	309	54	454	72	587,8	90	707,1

135 2) Man ziehe eine gerade Linie AB, errichte die senkrechte AC, schneide von A bis C 12 gleiche Theile ab, und führe durch alle Theilungspunkte Parallelen zu AB.

3) sodann trage man auf AB und CD nach einem genau ausgetheilten geometrischen Maßstabe (bey dem ohngefähr $\frac{1}{2}$ oder auch $\frac{2}{3}$ Zoll in 100 Theile abgetheilet ist) aus der vorigen Sehnentafel die Längen der Sehnen von 1°, 2°, 3°.. 90°, und ziehe die Punkten durch Transversalen zusammen, wie

es

es Fig. 135 ausweiset, so ist der geradlinigte Transpor- teur fertig. Fig.

482. Nun kann durch Hilfe dieses Transporteurs ein auf dem Papiere gegebener Winkel ABD gemessen, das ist die Anzahl seiner Grade bestimmet werden, wenn man aus der Spitze B des Winkels zwischen seinen Schenkeln mit dem Halbmesser A 60 = C 60 Fig. 135. einen Kreisbogen AD beschreibet, und sodann die Sehne dieses Bogens AD auf den Transporteur überträgt, um zu sehen, wie viel Grade diese Sehne abschneide; wenn z. B. die Oeffnung des Zirkels, welche die Sehne des Bogens AD vorstellet, auf der Parallele 40 mit einer Spitze in 40 auf AC, und mit der andern auf der Transversale 25 25 eintrift, so enthält der Winkel ABD 25° 40′. Wäre hingegen der stumpfe Winkel CBD zu messen, so kann man die Anzahl seiner Grade durch Hilfe des Nebenwinkels ABD bestimmen. 136

Durch Hilfe eben dieses Transporteurs kann auf einer Geraden AB Fig. 136. aus dem Punkte B ein Winkel verzeichnet werden, der eine gegebene Anzahl Grade z. B. 25° 40′ enthält, wenn man aus B mit dem Halbmesser A 60 oder C 60 Fig. 135. einen unbestimmten Kreisbogen AD beschreibet Fig. 136, sodann von dem Transporteur die Sehne 25° 40′ aus A bis D in den Kreisbogen einschreibet, und endlich durch B und D eine gerade Linie führet. Hingegen wird ein stumpfer Winkel CBD durch Hilfe seines Nebenwinkels ABD verzeichnet. Den Grund dieses Verfahrens wird ein jeder leicht einsehen, wenn er sich nur erinnert, daß in einem jeden Kreise die Sehne von 60° dem Halbmesser gleich sey, und daß bey zwey Kreisbögen, die nur um einen Grad von einander unterschieden sind, die Differenzen der Bögen sich ziemlich genau eben so gegeneinander verhalten, wie die Differenzen der dazugehörigen Sehnen.

Anmerkung. Es ist ohne meiner Erinnerung leicht einzusehen, daß man durch Hilfe der vorigen Sehnentafel mittelst einer gehörig eingetheilten Schnur auf dem Felde je-

Fig. den Winkel sowohl messen als auch ausstecken könne, wenn man mit keinem Instrumente zum Winkelmessen versehen ist. Auch ist es ganz begreiflich, daß man bey den mit Diopterlinealen oder auch mit Fernröhren versehenen Winkelmessern statt der gewöhnlichen Eintheilung des Viertelkreises in 90 Grade den oben beschriebenen geradlinigten Transporteur anbringen könne.

137 483. Aufgabe. **Durch Hilfe der Meßinstrumente eine gerade Linie AB auf dem Felde zu messen, die nur an ihren Endpunkten, und nicht nach ihrer ganzen Länge sichtbar und zugängig ist.**

Auflösung. **Erstens durch Hilfe des Meßtisches.** Man suche einen Ort C von der Beschaffenheit, daß man von C nach A und B sehen und messen könne, stelle den Meßtisch daselbst horizontal, und stecke in einen Punkt desselben eine feine Nadel senkrecht ein, und zwar in denjenigen Punkt c des Meßtisches, der mit dem Punkte C auf der Erde übereinstimmet; sodann visire man mittelst des Meßlineals von c nach A und B, ziehe die unbestimmten Visirlinien ca und cb, trage auf selbe nach einem verjüngten Maßstabe die gemessenen Längen der Geraden CA und CB von c bis a und b, und untersuche wie viel Theile die Gerade ab auf dem nämlichen verjüngten Maßstabe abschneide, so wird man vermög der Aehnlichkeit der Dreyecke acb und ACB die Länge der Geraden AB erhalten.

Zweytens durch Hilfe eines Winkelmessers. Man messe den Winkel ACB und die Seiten CA und CB, so hat man in dem Dreyecke ACB zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bekannt; folglich kann man die dritte Seite durch die Rechnung bestimmen entweder durch die Formel AB =

$$\sqrt{\left(AC^2 + BC^2 \mp \frac{2.AC.BC.\cos ACB}{\sin tot}\right)} \text{ vermög } (460),$$

oder wenn man nach (458) einmal den Winkel A oder B berechnet, und sodann nach (456) die Seite AB bestimmet.

Drittens

Drittens durch die Verzeichnung. Man verzeichne Fig.
den gemessenen Winkel ACB auf einem Papiere und übertrage auf seine Schenkel nach einem verjüngten Maßstabe die gemessenen Längen der Geraden CA und CB von c bis a und b, so wird auf dem nämlichen Maßstabe die Gerade ab die wirkliche Länge von AB anzeigen.

484. Aufgabe. **Eine Gerade AB, die nur an einem** 138
ihrer Endpunkte A zugängig ist, z. B. die Entfernung des Punktes A von B zu messen.

Auflösung. **1tens durch Hilfe des Meßtisches.** Man suche einen Ort C von der Beschaffenheit, daß man von C nach A und B sehen, und CA messen könne, stelle den Meßtisch über C, visire von c nach A und B, und übertrage die gemessene Gerade CA nach einem verjüngten Maßstabe von c bis a; sodann stelle man den Meßtisch dergestalt in A, daß der Punkt a gerade über A zu stehen komme, die Linie ac aber in der Richtung der Geraden AC liege, und visire von a nach B, so wird die gezogene Visirlinie ab die vorige cb in dem Punkte b durchschneiden, und die Linie ab auf dem nämlichen verjüngten Maßstabe die Länge der Graden AB bestimmen, weil die Dreyecke acb und ACB einander ähnlich sind. Man kann auch den Meßtisch das erstemal über A und das zweytemal über C stellen.

2tens durch Hilfe eines Winkelmessers. Man messe die Standlinie AC, und beobachte an ihren Endpunkten die Winkel A und C, so ist dadurch in dem Dreyecke ACB auch der dritte Winkel B bestimmet, und die Seite AB wird sodann nach (456) gefunden.

3tens durch Verzeichnung. Man ziehe eine Gerade ac, trage auf selbe nach einem verjüngten Maßstabe die gemessene AC, und verzeichne an ihren Endpunkten die Winkel a = CAB, und c = ACB, so ist das Dreyeck acb ∽ ACB, und folglich kann die gesuchte Länge der Geraden AB auf dem nämlichen verjüngten Maßstabe durch Hilfe der Geraden ab bestimmet werden.

Fig. 139 485. Aufgabe. **Eine gerade Linie AB, das ist die Entfernung zweyer Punkte A nnd B zu messen, wenn beyde unzugängig sind.**

Auflösung. **1tens durch Hilfe des Meßtisches.** Man messe eine Grundlinie CD von der Beschaffenheit, daß man von C nach A, B und D, und auch von D nach C, A und B sehen könne; stelle sodann den Meßtisch über C, visire von C nach A, B und D, und trage die gemessene Gerade von c bis d; darauf stelle man den Meßtisch mit dem Punkte d über D dergestalt, daß dc genau in der Richtung von DC liege, und visire von d nach A und B, so werden die Visirlinien da und db die vorigen ca und cb in den Punkten a und b durchschneiden, und die Gerade ab wird wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke die gesuchte Länge von AB bestimmen.

2tens durch Hilfe eines Winkelmessers. Man messe die Standlinie oder Grundlinie CD, und beobachte an ihren Endpunkten die Winkel ACB und ACD, CDA und CDB, so hat man in dem Dreyecke ACD die Seite CD mit den anliegenden Winkeln ACD und ADC bekannt, folglich kann die Seite AD nach (456) gefunden werden; und eben so kann man in dem Dreyecke CDB aus der Seite CD und den anliegenden Winkeln die Seite BD berechnen; darauf sind in dem Dreyecke ADB zwey Seiten AD und BD samt dem zwischenliegenden Winkel bekannt; folglich kann die dritte Seite desselben AB nach (457) berechnet werden.

3tens durch die Verzeichnung. Man ziehe eine Gerade dc trage auf selbe nach einem verjüngten Maßstabe die gemessene DC, und verzeichne an ihren Endpunkten die beobachteten Winkel acb = ACB, bcd = BCD, adc = ADC, und bda = BDA so wird auf dem nämlichen Maßstabe mittelst der Geraden ab die gesuchte Länge von AB gefunden.

486. Aufgabe. **Zu einer unzugängigen Geraden AB durch einen gegebenen Punkt D auf dem Felde eine Parallele zu führen.**

Auflö-

Auflösung. **1tens durch Hilfe des Meßtisches.** Man verfahre nach der ersten Art der vorigen Aufgabe (485), ziehe sodann auf dem Meßtische eine Parallele df zu ab, und stecke selbe auf dem Felde aus z. B. von D bis F, so wird DF parallel zu AB seyn, wenn der Meßtisch richtig gestellet ist. Fig. 139

2tens durch Hilfe eines Winkelmessers. Man bestimme nach der 2ten oder 3ten Art der vorigen Aufgabe (485) den Winkel DAB, und verzeichne auf dem Felde in dem gegebenen Punkte D den Wechselwinkel ADF = DAB, so wird DF parallel zu AB seyn (263).

487. Aufgabe. **Durch einen auf dem Felde gegebenen Punkt D auf eine unzugängige Gerade AB eine Senkrechte zu fällen.**

Auflösung. Man führe nach der vorigen Aufgabe (486) durch den gegebenen Punkt D zu AB eine Parallele DF, errichte sodann aus dem Punkte D eine Senkrechte auf DF entweder durch Hilfe des Meßtisches, oder eines Winkelmessers, oder auch nach (260. II.) so wird selbe auch auf AB senkrecht seyn. Die Lage der Senkrechten wird auch gefunden, wenn man in D an DA einen Winkel ADG auf dem Felde aussteckct, welcher den bereits gefundenen Winkel DAB zu 90° ergänzet.

488. Aufgabe. **Es sey PQ eine zugängige und MN eine unzugängige gerade Linie; man soll in der Linie PQ einen Punkt A von der Beschaffenheit finden, daß die Gerade AB von A nach einem sichtbaren Merkmale B in der Geraden MN gezogen mit derselben einen gegebenen Winkel MBA einschliesse.** 140

Auflösung. Man suche auf der Geraden MN noch ein sichtbares Merkmal C, messe auf der Geraden PQ eine Standlinie DE, und bestimme sodann nach (485) die Gerade BE und den Winkel EBC, so ist dadurch auch der Winkel EBA gefunden, und in dem Dreyecke AEB ist sodann die Seite EB mit den anliegenden Winkeln AEB und EBA bekannt; folg-

lich

Fig. lich läßt sich daraus die Seite EA bestimmen, deren gefundene Länge man von E bis A auftragen muß, um den gesuchten Punkt A in der Linie PQ zu finden.

77 489. Aufgabe. **Einen unzugängigen Winkel, dessen Schenkel sich rückwärts verlängern lassen z. B. einen Bollwerkswinkel CAB in zwey gleiche Theile zu theilen, um die Kapitallinie PM sichtbar zu machen.**

Auflösung. Man nehme in der Verlängerung der Gesichtslinien die Punkte D und E von der Beschaffenheit an, daß man von D nach E sehen könne, beobachte die Winkel AED und ADE, so ist dadurch in dem Dreyecke ADE auch der dritte Winkel EAD, und folglich auch FAD $= \frac{1}{2}$EAD bekannt. Sodann messe man nach (484) die Seite AD, so ist in dem Dreyecke AFD die Seite AD mit den anliegenden Winkel bekannt; folglich kann die Seite FD gefunden werden, deren Länge man von D gegen E bis F aufträgt um den gesuchten Punkt F zu bestimmen; ist einmal der Punkt F gefunden, so kann die Richtung AF der Kapitallinie rückwärts soweit es erforderlich ist, verlängert werden.

141 490. Aufgabe. **Es sey AB eine gerade Linie in ihrer Verlängerung wegen zwischenliegenden Hindernissen unsichtbar; man soll zwey Punkte D und E auf dem Felde bestimmen, die in der Verlängerung von AB liegen.**

Auflösung. Man bestimme mittelst einer Grundlinie CF nach (485) die Gerade BC und den Winkel ABC so ist dadurch auch der Nebenwinkel CBE bekannt; ferner stecke man aus C an der Linie CB einen Winkel BCD von einer beliebigen Anzahl der Grade aus, so ist in dem Dreyecke BCD die Seite BC mit den anliegenden Winkeln bekannt, folglich kann dadurch die Seite CD gefunden, und ihre Länge auf den Schenkel CD von C bis D getragen werden, um den ersten Punkt D zu erhalten; und eben so wird der zweyte Punkt E bestimmet, weil in dem Dreyecke

EBC

EBC die Seite BC mit den anliegenden Winkeln bekannt Fig.
ist, und folglich CE sich daraus finden läßt.

491. Aufgabe. **Eine zugängige Höhe AB zu messen.** 142

Auflösung. Man messe die horizontale Länge einer und
Standlinie BC von C bis an den unteren Punkte B der aus- 143
zumessenden senkrechten Höhe BA, nämlich man bestimme BF, = DE Fig. 142., oder FC = ED Fig. 143., und beobachte in C mit einem vertikalgestellten Winkelmesser D den Höhenwinkel EDA, nachdem man nämlich das unbewegliche Visirlineal des Winkelmessers entweder mittelst einer genauen Schrottwage, oder mittelst einer Libelle (331), oder endlich mittelst eines angebrachten Pendels in eine horizontale Lage gebracht, und das bewegliche Lineal nach A gerichtet hat; ferner beobachte man auch den Höhen- oder Tiefenwinkel EDB; und nun ist in dem rechtwinklichten Dreyecke EDA nebst dem rechten Winkel auch die Seite ED und der Winkel EDA bekannt; folglich kann die Seite EA entweder durch die Rechnung nach (461), oder auch durch die Verzeichnung gefunden werden; ferner läßt sich in dem rechtwinklichten Dreyecke BED aus der Seite ED und dem Winkel EDB die Seite EB bestimmen, welche man in Fig. 142. zu EA addiren, und in Fig, 143. von EA abziehen muß um die gesuchte Höhe AB zu erhalten.

492. Aufgabe. **Eine unzugängige Höhe AB nämlich die Erhöhung des Punktes A über den Horizont des Punktes C zu messen.** 144

Auflösung. Man messe die horizontale Länge einer Standlinie CD, und beobachte an ihren Endpunkten die horizontalen Winkel BCD und CDB, so kann man daraus CB berechnen; ferner beobachte man auch den Höhenwinkel ACB, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke ABC die Seite BC nebst dem Winkel ACB bekannt; folglich läßt sich daraus die Seite AB, nämlich die Erhöhung des Punktes A über den Horizont des Ortes C bestimmen.

Wenn

Fig. 144 Wenn man bey der horizontalen Stellung des Winkelmessers die horizontalen Winkel BCD und BDC nicht beobachten kann, so muß man die Grundlinie CD auf einem ziemlich horizontalen Boden annehmen (wenn dieses nicht seyn kann, so muß man die Länge der geneigten Linie CD messen) und stellet an ihren Endpunkten die Fläche des Winkelmessers in die Ebene CAD um die schiefgeneigten Winkel ACD und ADC zu messen; sodann beobachtet man auch den Höhenwinkel ACB; und nun läßt sich in dem schiefgeneigten Dreyecke ACD aus der Seite CD und den anliegenden Winkeln die Seite CA berechnen; darauf ist in dem rechtwinklichten Dreyecke ACB die Hypothenuse AC nebst dem Winkel ACB bekannt, folglich läßt sich daraus die gesuchte Höhe AB bestimmen.

145 493. Aufgabe. **Es sey ABCDEFGH eine Figur auf dem Felde; man soll auf dem Papiere nach einem verjüngten Maßstabe eine Figur entwerfen, welche jener Figur auf dem Felde ähnlich ist, das ist man soll die Figur ABCDEFGH aufnehmen.**

Auflösung. **1tens durch Hilfe des Meßtisches.** Man messe eine Grundlinie AB, stelle den Meßtisch über A, und visire aus einem Punkte desselben a, der gerade über A liegt, nach B, C, D, E, F, G, H, und trage nach einem verjüngten Maßstabe die Länge der gemessenen Grundlinie auf die Visirlinie aB von a bis b; sodann stelle man mittelst des Zurückvisirens den Meßtisch dergestalt über B, daß der Punkt b gerade über B zu liegen komme, und die gezogene Visirlinie ab genau in der Richtung von AB sich befinde; in dieser Stellung des Meßtisches visire man nun aus b nach C, D, E, so werden die Visirlinien bC, bD, bE die vorigen ac, ad, ae, in den Punkten c, d, e, durchschneiden; und dadurch sind einmal die Punkte A, B, C, D, E auf dem Meßtische bestimmet, nämlich wegen der Aehnlichkeit der Dreyeck ist aedcb ∽ AEDCB. Wollte man aus eben diesem Punkte b auch nach H visiren, so würde diese neue Visirlinie bH die aus dem vorigen Standpunkte gezogene ah nur unter einem

sehr

sehr spitzigen Winkel durchschneiden, und der Durchschnitts- punkt könnte wegen diesem Umstande nicht in der erforder- lichen Genauigkeit bestimmet werden: derowegen stelle man den Meßtisch mit dem Punkte e gehörig über E, und vi- sire nach F, G, H, so werden diese Visirlinien ef, eg, eh, die aus dem Standpunkte A gezogenen af, ag, ah, in den Punkten f, g, h, durchschneiden, und die Figur abcdefgh ist sodann der Figur ABCDEFGH ähnlich; und nun läßt sich die wirkliche Länge einer jeden Geraden GH, EF, AG, HC, bestimmen, wenn man auf den zum Grunde gelegten verjüng- ten Maßstabe die Länge der gleichnamigen Geraden gh, ef, ag, hc untersuchet. Fig. 145

Die ähnliche Figur abcdefgh erhält man auch, wenn man die Geraden AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH auf dem Felde ausmißt, ihre Länge nach einem verjüngten Maßstabe auf die gezogenen Visirlinien ab, ac, ad, ae. . . . . aufträgt, und die dadurch bestimmten Punkte gehörig miteinander ver- bindet.

Es ist nicht unumgänglich nothwendig den zweyten Stand- punkt an dem andern Ende der gemessenen Grundlinie zu neh- men; man kann den Meßtisch an jede andere gezogene Visir- linie z. B. an die Linie AE in E dergestalt stellen, daß die gezogene Visirlinie ae genau in der Richtung AE mit dem Punkte a gegen A lieget, legt sodann bey dieser Stellung des Meßtisches das Meßlineal an den bestimmten Punkt b an, und visiret nach B, so wird die rückwärts gezogene Visirlinie be die vorige ae in dem Punkte e durchschneiden, und da- durch den Standpunkt E auf dem Meßtische wegen der Aehn- lichkeit der Dreyecke aeb und AEB bestimmen; sodann legt man bey der nämlichen Stellung des Meßtisches das Meßli- neal an e an, und visiret nach C, D, F, G, H um die Durch- schnittspunkte c, d, f, g, h zu erhalten. Dieses angeführte Ver- fahren den Standpunkt E auf dem Meßtische mittelst eines andern bereits schon bestimmten Punktes zu erhalten, wird das Rückwärtseinschneiden genennt, welches in der Ausübung

Fig. sehr oft vorkömmt. Wenn z. B. über FED hinaus noch
145 einige Gegenstände aufzunehmen wären, so müßte man in dieser Gegend einen schicklichen Ort für den folgenden Standpunkt wählen, und daselbst eine Meßfahne aufrichten; ferner muß man aus dem Standpunkte E sowohl auf die aufzunehmenden Gegenstände als auch auf die aufgerichtete Meßfahne visiren, und darauf den Meßtisch an den Ort der aufgerichteten Meßfahne mittelst des Zurückvisirens in die gehörige parallele Lage stellen; sodann schneidet man sich von einem oder mehreren bereits bestimmten Punkten rückwärts ein, und visiret aus diesem gefundenen Punkte des Meßtisches auf die nämlichen Gegenstände, auf welche man aus dem vorigen Standpunkte visiret hat, so wird sich dadurch ihre Lage auf dem Meßtische ergeben; u. s. w.

Man pflegt gemeiniglich auf dem ersten Standpunkte die Richtung der Magnetnadel auf dem Meßtische zu bemerken, damit man dadurch die Lage der aufgenommenen Figur in Rücksicht der Mittagslinie eines gewissen Ortes beynahe erkenne, vorausgesetzt, daß an diesem Orte die Abweichung der Magnetnadel bekannt sey. Die in dem ersten Standpunkte auf dem Meßtische bemerkte Richtung der Magnetnadel hat auch den Nutzen, daß man dadurch in einem jeden anderen Standpunkte den Meßtisch in Ermanglung anderer Hilfsmittel orientiren, nämlich denselben also stellen kann, daß alle in den vorigen Standpunkten auf dem Meßtische gezogenen Visirlinien, alle schon aufgenommenen Linien mit den dazu gehörigen Linien auf dem Felde parallel laufen; es wird dieses erhalten, wenn man die Magnetnadel an ihre bemerkte Richtung auf dem Meßtische stellet, und denselben so lange horizontal herumdrehet, bis die Magnetnadel ihre angewiesene Stelle einnimmt.

Den Umfang dieser nämlichen Figur könnte man aufnehmen, wenn man bey dem zweyten Standpunkte B die Linie BC ausmißt, und ihre Länge auf die gezogene Visirlinie bc nach dem angenommenen verjüngten Maßstabe aufträgt, sodann den Meßtisch mit dem bereits bestimmten Punkte c über C gehörig stellet, von c nach D visiret, die Linie CD ausmißt

mißt, und selbe gehörig aufträgt, um den Punkt D auf dem Fig.
Meßtische zu erhalten; und eben so verfährt man bey den 145
übrigen Punkten D, E, F, u. s. w. In den Waldungen, wo es keine freye Aussicht giebt, um die Punkten auf dem Meßtische mittelst der Durchschnitte von den Visirlinien zu bestimmen, ist man zuweilen gezwungen, auf diese Art einige Gegenstände aufzunehmen.

Zweytens durch Hilfe eines Winkelmessers. Man messe eine Grundlinie AB, und beobachte an dem einen Endpunkte derselben die Winkel HAG, GAF, FAE, EAD, DAC, CAB, und an dem andern Endpunkte die Winkel CBD, DBE, und in E die Winkel FEG, GEH, HEA; sodan ziehe man auf dem Papiere eine Gerade ab, trage auf selbe die Länge der gemessenen Grundlinie nach einem verjüngten Maßstabe, und verzeichne an beyden Endpunkten derselben die bekannten Winkel, so sind dadurch die Punkte a, b, c, d, e bestimmet; ferner verzeichne man in dem schon gefundenen Punkte e an der Linie ea die in E beobachteten Winkel, so sind dadurch auch die übrigen Punkte bestimmet.

Oder man berechne in den Dreyecken ACB, ADB, AEB aus der Seite AB und den daran liegenden Winkeln die Seiten AC, AD, AE, ferner berechne man auch in den Dreyecken AFE, AGE, AHE aus der schon gefundenen Seite AE und den daran liegenden Winkeln die Seiten AF, AG, AH; sodann verzeichne man aus einem Punkte a die in A beobachteten Winkel, und trage auf die Schenkel derselben nach einem verjüngten Maßstabe die Längen der Geraden AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, so wird wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke die dadurch erhaltene Figur abc defgh jener auf dem Felde ähnlich seyn. Man kann auch in den Dreyecken ACB, ADB, AEB, u. s. w. alle Seiten berechnen, und sodann die Punkte c, d, e, über der angenommenen Grundlinie ab mittelst der Durchschnitte von Kreisbögen bestimmen, wenn man aus a und b mit den gehörigen Halbmessern Kreisbögen beschreibet u. s. w.

 494. Bey

Fig. 146 494. Bey großen trigonometrischen Vermessungen ist es nicht rathsam die berechneten Dreyecke nach der angeführten Art mittelst des Transporteurs, oder mittelst der Durchschnitte der Seiten zu verzeichnen, weil ein jeder bey dem Auftragen begangene Fehler, so klein er auch ist, sich den übrigen Dreyecken mittheilet, und in der Folge beträchtlich werden kann. In solchen Fällen nimmt man eine Linie SN an, welche durch einen Standpunkt A und durch einen andern beliebigen Punkt N gezogen ist, berechnet die Senkrechten Ee, Dd, Ff, Cc, Bb, Ii, Gg, Hh, nebst den Abständen dieser Senkrechten von dem Punkte A nämlich Ae, Ad, Af, u. s. w. und verzeichnet mittelst dieser Senkrechten die berechnete Figur. Man ziehet nämlich auf dem Papiere eine Gerade SN, nimmt auf derselben A für den Standpunkt A an, und trägt nach einem verjüngten Maßstabe von A bis b den berechneten Abstand Ab errichtet aus b eine Senkrechte bB, und trägt auf selbe die berechnete Länge Bb der Senkrechten Bb, um den Punkt B zu erhalten; und eben so werden die übrigen Punkte C, D, u. s. w. bestimmet. Diese Art der Verzeichnung hat den Vortheil, daß wenn auch irgendwo bey der Bestimmung eines Punktes ein kleiner Fehler begangen wird, derselbe jederzeit nur für sich allein bleibet, und sich den übrigen Punkten nicht mittheilet.

Die Senkrechten Ee, Dd, Cc, Gg, u. s. w. nebst ihren Abständen von dem Punkte A können aus dem einmal berechneten Seiten und Winkeln der ganzen Figur auf folgende Art gefunden werden. Man beobachtet in A den Winkel, welchen eine aus A in was immer für einem bestimmten Punkte gezogene Gerade mit AN einschließt, man beobachte z. B. den Winkel NAB, so können in dem rechtwinklichten Dreyecke ABb aus der Hypothenuse AB und aus dem Winkel bAB die Seiten Ab und Bb berechnet werden, wenn man folgende Proportionen ansetzet; sintot : AB, = sin bAB : Bb, und sintot : AB = sin bBA (oder cos bAB) : Ab. Ferner ist in dem rechtwinklichten Dreyecke CAc die Hypothenuse AC nebst dem Winkel

CAc =

CAc = CAB — bAB bekannt; folglich können daraus die Fig.
S.iten Cc und Ac berechnet werden. Man ziehe von 180° 146
den Winkel bAB + BAG ab, so ist der Ueberrest = GAg, und folglich ist in dem rechtwinklichten Dreyecke GAg nebst der Hypothenuse auch der Winkel GAg bekannt, und Gg, Ag können sodann berechnet werden. Ferner ist GAH — GAg = HAh, und endlich HAh + IAH = IAi; es können demnach in den zwey rechtwinklichten Dreyecken HAh und IAi die Seiten Hh, Ah, und Ii, Ai gefunden werden. Um AF, Ff, und AD, dD zu erhalten gedenke man durch B eine Parallele BQ zu AN, so ist ABQ = 180° — NAB vermög (262. III): und ABQ — ABC — CBD = DBQ; und nun können in dem rechtwinklichen Dreyecke DQB die Seiten BQ und DQ berechnet werden; sodann ist BQ + bA = bd + bA = Ad, und bB — DQ = dQ — DQ = dD. Ferner ist DBF — DBQ = PBF; in dem rechtwinklichten Dreyecke BPF können demnach BP und PF gefunden werden, und es ist sodann BP + bA = Af, und PF + Bb = Ff. Man gedenke auch durch F eine Parallele FR zu AN oder BQ, so ist BFR = 180° — QBF, und endlich EFR = BFR — BFD — DFE; in dem rechtwinklichten Dreyecke EFR können demnach aus der Hypothenuse EF und aus dem Winkel EFR die Seiten FR, ER berechnet werden, und es ist sodann Ae = Af + FR, und eE = fF — ER; u. s. w.

Man gedenke durch A eine Senkrechte WO auf AN, und nenne die Gegend gegen N Nord, gegen S Süd, gegen O Ost, gegen W West, so können die berechneten Senkrechten und ihre Abstände von dem Punkte A auf folgende Art in eine kleine Tafel von drey Spalten eingetragen werden.

Fig. 146

Entfern.	Gegen Nord.	Gegen Ost.
A	0 Kl.	0 Kl.
B	1305	2411
F	2713	5906
D	3547	998
E	1812	4810
Entfern.	Gegen Nord	Gegen West
C	2153	1648
K	4236	1125
—	—	—
Entfern.	Gegen Sud.	Gegen West.
I	856	2704
H	2811	1613
—	—	—
Entfern.	Gegen Sud.	Gegen Ost.
G	1875	2019
.	—	—
,	—	—

Da es bey der Aufnahme einer großen Strecke auch erforderlich ist die Lage des berechneten trigonometrischen Netzes in Rücksicht der wirklichen Weltgegenden Ost, West, Sud, und Nord zu bestimmen, so kann man in A durch astronomische Hilfsmittel die Richtung der Mittagslinie suchen, und beobachtet daselbst den Winkel NAB, welchen die Mittagslinie in A mit einer nach B gezogenen Geraden AB einschließt, wenn AN die Lage der Mittagslinie seyn sollte; sodann kann man die senkrechten Entfernungen aller aufzunehmenden Punkte von der Mittagslinie, und die Abstände dieser Senkrechten von dem Punkte A eben so berechnen, wie es ehevor in Rücksicht der nach Belieben angenommenen Geraden AN gezeiget worden.

Anmerkung. Wenn sehr große Strecken, die schon einige Quadratmeilen enthalten, genau und richtig aufzunehmen sind, so muß man die Lage der Hauptpunkte nach der angeführten Art trigonometrisch bestimmen, man muß nämlich eine Tabelle nach der eben gegebenen Vorschrift verfertigen, worinnen die Hauptpunkte des trigonometrischen Netzes enthalten sind; darauf werden ordentlich die Dreyecke aus der Tabelle auf die Meßtische nach demjenigen verjüngten Maßstabe aufgetragen, welcher bey der aufzunehmenden Gegend zum Grunde gelegt ist; und sodann muß man endlich alle diejenigen Gegenstände, die sich in einem jeden Dreyecke besonders befinden, mit dem Meßtische aufnehmen. Diese Methode, eine große Strecke in Grund zu legen, führet den besondern Vortheil mit sich, daß einige

Feh-

Fehler die bey dem Gebrauche des Meßtisches sich einschlei- Fig.
chen, nur in einzelnen Dreyecken verbleiben, und sich den 145
übrigen gar nicht mittheilen. Die Fehler, welche bey dem Gebrauche des Meßtisches unvermeidlich sind, haben ihren Ursprung theils in der veränderlichen Ausdehnung des Papiers und auch des Meßtischblattes bey verschiedener Temperatur der Athmosphäre, theils in der Dicke der Anschlagnadeln, theils in der Breite der gezogenen Visirlinien, theils auch einigermassen in der Figur der Erde, weil man nämlich einen weit ausgedehnten Theil von der horizontalen Oberfläche der Erde, worauf man sich die Lage der aufzunehmenden Gegenstände im Grunde vorstellet, für eine krumme nicht aber für eine ebene Fläche ansehen muß; welches letztere doch der Feldmesser mit seinem Meßtische voraussetzet. Es wäre zu weitläuftig, und beynahe überflüßig, den Gebrauch und die Behandlung des Meßtisches, und verschiedene dazu gehörigen praktischen Vortheile allhier zu beschreiben, da man diese Geschicklichkeit keineswegs durch Bücherlesen in der Studierstube, sondern nur durch eine aufmerksame Ausübung auf dem Felde sich eigen zu machen im Stande ist. Bey der Bestimmung des trigonometrischen Netzes einer aufzunehmenden Gegend kann auch das Centriren der Winkel, und auch die Reduktion der schiefgeneigten Winkel auf den Horizont zuweilen vorkommen; weiter unten soll davon gehandelt werden.

495. Aufgabe. **Die Entfernung zweyer Punkte A und B Fig. 137 nebst der Richtung der Magnetnadel ist auf dem** 137
Meßtische gegeben; man soll dadurch die Lage des Standpunktes C bestimmen, von dem man nach A und B visiren kann.

Auflösung. Man stelle den Meßtisch mittelst der Magnetnadel dergestalt über C, daß ab mit der gleichnamigen AB parallel laufe, und lege sodann bey dieser Stellung des Meßtisches das Meßlineal, einmal an a, einmal an b, und visire bey der ersten Anlage nach A, bey der zweyten nach B, so werden sich auf dem Meßtische die bemerkten Visirlinien rück-

Fig. wärts in dem Punkte c durchschneiden, und dadurch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke acb und ACB die Lage des Punktes C in c bestimmen.

496. Aufgabe. **Die Länge einer unzugängigen Ge-**
147 **raden AB ist gegeben, man soll daraus die Lage der Punkte C und D bestimmen, von denen man nach A und B sehen kann.**

Auflösung. **1tens durch Hilfe des Meßtisches.** Man stelle den Meßtisch in C und visire nach A, B, D; sodann stelle man den Meßtisch in D dergestalt, daß die Visirlinie c′d′ genau in der Richtung CD liege, und visire aus einem beliebigen Punkte dieser Visirlinie d′ nach A und B, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke d′c′a′b ∽ DC′A′B; endlich trage man nach einem verjüngten Maßstabe die Länge AB auf die Gerade ba′ von b bis a, und verzeichne (326) die Figur bacd ∽ ba′c′d′, so ist dadurch die Lage der Punkte C und D nämlich die Länge von CA, CB, DA, DB, DC bestimmet.

2tens durch Hilfe eines Winkelmessers. Man beobachte in C die Winkel ACB, BCD, und in D die Winkel CDA, ADB; sodann nehme man für CD eine willkührliche Länge an, z. B. man setze CD = 1, und berechne nach dieser Voraussetzung AC, AD, CB, DB und AB; endlich schließe man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke; **die berechnete Länge AB verhält sich zu der wirklichen bekannten Länge AB, gleichwie jede andere berechnete AC, AD, CD, ... sich zu der wirklichen Länge von AC, AD, CD, ... verhält.** Man findet die Lage eben dieser zwey Punkte durch die Verzeichnung, wenn man an einer Geraden von willkührlicher Länge c′d′ die beobachteten Winkel verzeichnet, sodann BA nach einem verjüngten Maßstabe auf ba′ von b bis a aufträgt, und endlich nach (326) acdb ∽ a′c′d′b verzeichnet.

Es ist ohne meiner Erinnerung klar, daß diese Aufgabe auf die nämliche Art könne aufgelöset werden, wenn einer aus

den

den zwey Punkten C, D diesseits und der andere jenseits der Fig.
bekannten Linie AB liegen sollte. 148

497. **Aufgabe. A, B, C sind drey Oerter auf dem** 149
Felde, deren Lage gegeneinander bekannt ist; D ist ein 150
vierter Ort, von dem man nach A, B, C sehen, und 151
die Winkel m, n beobachten kann; man soll daraus die 152
Lage des Punktes D, nämlich die Entfernung DA, DB, 153
DC bestimmen.

Auflösung. Wenn nebst der Lage der drey Punkte A B, C auch noch die Richtung der Magnetnadel auf dem Meßtische gegeben ist, so kann der Standpunkt D nach (495) gefunden werden, allwo zugleich die dritte Visirlinie, wenn sie sich mit den zwey erstern genau in einem Punkte durchschneidet, zur Versicherung dienet, daß der Meßtisch richtig orientiret sey. Wenn hingegen die Richtung der Magnetnadel nicht gegeben ist, so wird die Lage des Punktes D auf folgende Art bestimmet.

Erster Fall, wenn der Ort D entweder in einer Seite des bekannten Dreyeckes ABC Fig. 148, oder auf der Verlängerung liegt Fig. 149.

Auflösung. Man beobachte den Winkel m, so sind in dem Dreyecke ADC alle drey Winkel nebst der Seite AC bekannt; folglich kann daraus DA und DC gefunden werden.

Ist das Dreyeck ABC Fig. 148, 149 auf dem Meßtische gegeben, so stelle man denselben dergestalt über D, daß die zu AB gleichnamige Linie genau in der Richtung AB liege, lege sodann das Meßlinial an den zu C gleichnamigen Punkt und visire nach C, so wird diese Visirlinie die zu AB gleichnamige Linie, welche man im erforderlichen Falle verlängern muß, durchschneiden, und dadurch die Lage des Punktes D auf dem Meßtische bestimmen.

Es ist gar nicht schwer zwischen zwey unzugängigen Punkten A und B Fig. 148 einen dritten Punkt D auf dem Felde zu finden, der mit A und B in einer nämlichen Geraden liegt. Zwey Männer werden dazu erfordert; der eine stellt sich in

Fig. einen beliebigen Punkt e und der andere in d auf die Verlän-
148 gerung von Ae; sodann marschirt der Mann e gegen der Gegend AB mit dem Auge seitwärts nach d sehend, und der Mann d folget ihm dergestalt nach, daß er beständig in der Verlängerung von Ae verbleibet; wenn nun e so weit vorgerückt ist, daß er den Mann d und den Punkt B in einer nämlichen geraden Linie erblicket, so bleibt er stehen, und die zwey Männer e und d befinden sich sodann beyde in der Geraden AB, der erste in E und der zweyte in D.

150 Zweyter Fall, wenn der Ort D außer dem bekann-
151 ten Dreyecke ABC liegt Fig. 150, 151.

Auflösung. Man stelle sich vor, daß durch die zwey äußersten Punkte A, C, und durch den gesuchten Punkt D ein Kreis geführet sey, und gedenke die Sehnen AE und CE, so ist $m = m'$, $n = n'$ (272 II.); nun kann in dem Dreyecke AEC aus der bekannten Seite AC und aus den daran liegenden Winkeln die Seite EC berechnet werden; sodann sind in dem Dreyecke EBC die zwey Seiten EC und BC nebst dem eingeschlossenen Winkel ECB bekannt; folglich kann dadurch der Winkel CBE Fig. 150 und auch CBD Fig. 151 gefunden werden; endlich sind in dem Dreyecke CBD alle drey Winkel nebst der Seite BC bekannt; folglich kann dadurch DC und DB und sodann auch DA gefunden werden.

Da in diesem Falle auch $p = p'$ und $q = q'$ (272. II.) so kann der Standpunkt D, wenn das Dreyeck auf dem Meßtische gegeben ist, auf folgende Art durch Verzeichnung gefunden werden. Man stellt den Meßtisch über D, Fig. 150., und visiret aus dem gerade darüber liegenden Punkte des Meßtisches nach A, B, C, um die Winkel m und n zu erhalten, sodann trägt man den links beobachteten Winkel m rechts, und den rechts beobachteten Winkel n links auf die Linie ac des gegebenen Dreyeckes um den Punkt e zu erhalten; darauf zieht man durch e und b eine unbestimmte gerade Linie, endlich verzeichnet man acd = aed, und cad = dec nämlich $p' = p$, und $q' = q$ so ist wegen dabc ∽ DABC in dem Durchschnittspunkte d die gesuchte Lage des Punktes D gefunden.

Wenn

Wenn es nun erforderlich ist aus dem Standpunkte D nach anderen Gegenständen zu visiren, um entweder einige schon bereits gezogene Visirlinien zu durchschneiden, oder um Visirlinien zu erhalten, die man in folgenden Standpunkten durchschneiden muß, so ist es allerdings nothwendig den Meßtisch in D zu orientiren; dieses erhält man, wenn man den Meßtisch mit dem bereits gefundenen Punkte d gerade über D stellet, das Meßlineal an d und c anleget, und den Meßtisch so lange herumdrehet, bis man durch die Dioptern des Meßlineals den Punkt C erblicket; sodann legt man bey dieser Stellung des Meßtisches das Meßlineal an da und db und untersuchet, ob man auch die zwey Punkte A und B genau in dieser Richtung erblicket, welches richtig eintreffen muß, wenn nur bey der Verzeichnung der Figur dabc kein Fehler eingeschlichen ist. Fig. 150

Aus Fig. 150 ist es leicht zu ersehen, daß die Lage der Geraden BD und auch des Punktes D unbestimmt bleibe, wenn die beobachteten Winkel m, n den bekannten Winkeln BCA, BAC des gegebenen Dreyeckes ABC gleich sind, oder welches einerley ist, wenn $m + n + ABC = 180°$ seyn sollte, weil in diesem Falle die Punkte B und E übereinander fallen.

Es ist schwer nach der angeführten Art in Fig. 150 den Punkt D auf dem Meßtische durch die Verzeichnung vollkommen genau zu bestimmen; man erhält seinen Endzweck leichter und richtiger, wenn man das gegebene Dreyeck auf dem Meßtische Fig. 151 mit einem dreyfüßigen Zirkel absticht, und selbiges auf die gezogenen Visirlinien DA, DB, DC dergestalt durch Versuchen überträgt, daß der Punkt a genau in der Visirlinie DA, b in DB, und c in DC liege; sodann nimmt man abermal mit dem dreyfüßigen Zirkel das Dreyeck a'Dc', und überträgt selbes auf die Linie ac um die gesuchte Lage des Punktes D auf dem Meßtische in d zu erhalten.

Auch läßt sich die Lage des Punktes D auf dem Meßtische mittelst eines durchsichtigen Papiers bestimmen; man zieht nämlich auf einem Stücke eines durchsichtigen Papiers Fig.

150.

Fig. 150 die Visirlinien DA, DB, DC, und leget sodann durch
150 Versuchen dieses nämliche durchsichtige Papier dergestalt auf das gegebene Dreyeck abc, daß die Visirlinie DA genau durch a, DB durch b, und DC durch c gezogen sey; endlich bemerket man in dieser Stellung des durchsichtigen Papiers den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der drey gezogenen Visirlinien auf dem Meßtische, so ist dadurch die gesuchte Lage des Punktes D auf dem Meßtische in d gefunden.

152 **Dritter Fall, wenn die drey gegebenen Punkte A, B, C in einer geraden Linie liegen Fig. 152.**

Auflösung. Man verfahre eben so, wie bey dem vorhergehenden zweyten Falle, so wird man die gesuchte Lage des Punktes D erhalten.

153 **Vierter Fall, wenn der Ort D in dem bekannten Dreyecke ABC liegt Fig. 153.**

Auflösung. Man stelle sich vor, daß durch den Ort D, und durch A und C ein Kreis geführet sey, und gedenke die Sehnen AE und CE, so ist $d' = d =$ der Ergänzung des gemessenen Winkels n zu $180°$, und $c' = c =$ der Ergänzung von m; nun kann in dem Dreyecke AEC aus der bekannten Seite AC, und aus den daran liegenden Winkeln die Seite EC gefunden werden; sodann sind in dem Dreyecke ECB die zwey Seiten EC und CB samt dem eingeschlossenen Winkel bekannt; folglich kann daraus der Winkel q und auch CBE gefunden werden; endlich sind in dem Dreyecke CDB alle drey Winkel samt der Seite BC bekannt, folglich kann daraus DC und DB, und dann auch DA gefunden werden.

Wenn die drey Punkte A, B, C Fig. 153 auf dem Meßtische gegeben sind, so kann man auf demselben die Lage des Punktes D durch Hilfe eines dreyfüßigen Zirkels, oder auch mittelst eines durchsichtigen Papiers eben so bestimmen, wie es bey dem zweyten Falle gezeiget worden.

498. Aus Fig. 154, 155, 156, 157 ist es deutlich zu ersehen, daß man die nach der vorigen Aufgabe (497) gesuchte Lage des Punktes D sehr leicht berechnen könne,

wenn

wenn nur einmal der Winkel x = BAD bekannt ist. Dieser Fig.
Winkel BAD kann aus dem gegebenen Dreyecke ABC und aus 154
den zwey beobachteten Winkeln m, n auf folgende Art gefun- 155
den werden. 156

Es sey die bekannte Seite AB $= a$, BC $= b$, der ein- 157
geschlossene bekannte Winkel ABC $= p$, und der gesuchte Winkel BAD $= x$, so ist (Fig. 154 und 157) BCD $= 360° - p - m - n - x = q - x$, Fig. 155 ist BCD $= p - m - n - x = q - x$, und Fig. 156 ist BCD $= 180° - m - n - x = q - x$;

nun ist $\sin m : a = \sin x :$ BD, nämlich BD $= \frac{a . \sin x}{\sin m}$,

und $\sin n ; b = \sin (q - x) :$ BD ;. . . BD $= \frac{b \sin (q - x)}{\sin n}$

folglich auch $\frac{a . \sin x}{\sin m} = \frac{b \sin (q - x)}{\sin n}$,

oder $\frac{a . \sin x}{\sin m} = \frac{b}{\sin n} . \left(\frac{\sin q . \cos x - \sin x . \cos q}{r}\right)$;(442. III.)

$$\frac{a . r . \sin n}{b . \sin m} = \frac{\sin q . \cos x}{\sin x} - \cos q,$$

$$\frac{a . r . \sin n}{b . \sin m . \sin q} + \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\frac{a . r^2 . \sin n}{b . \sin m . \sin q} + \cot q = \cot x.$$

Es ist bey dieser Formel wohl zu merken, daß $\cot q$ negativ sey, wenn $q > 90°$ ist, und daß $x > 90°$ seyn müße, wenn die berechnete Tangente des gesuchten Winkels negativ ausfällt.

Beyspiel.

Es sey Fig. 154 $p = 126° 40'$, $m = 25°$ $n = 36°$, $a = 621$ Kl. und $b = 919$ Kl. so ist $q = 172° 20'$; und nun kann x durch Hilfe einer Sinnstafel für den Halbmesser $r = 1$ auf folgende Art berechnet werden.

Es

Fig. 154

$$\begin{aligned}
&\text{Es ist } \log a &&= \log 621 &&= 2{,}7930916\\
&\log \sin n &&= \log \sin 36^\circ &&= 9{,}7692187-10\\
&\log r^2 &&= \log 1^2 &&= 0\\
&\log a.r^2.\sin n && &&= 2{,}5623103\\
&\text{Ferner } \log b &&= \log 919 &&= 2{,}9633155\\
&\log \sin m &&= \log \sin 25^\circ &&= 9{,}6259483-10\\
&\log \sin q &&= \log \sin 172^\circ 20' &&= 9{,}1251872-10\\
&\log b.\sin m.\sin q && &&= 1{,}7144510\\
&\log \frac{a.r^2.\sin n}{b.\sin m.\sin q} && &&= 0{,}8478593\\
&\frac{a.r^2 \sin n}{b.\sin m.\sin q} && &&= \ldots. +7{,}0446480
\end{aligned}$$

$\cot q = \cot 172^\circ 20' = -\cot 7^\circ 40' = -7{,}4287064$

folglich ist.................. $\cot x = -0{,}3840584$

und endlich $x = 111^\circ\ 0'\ 35''$, wenn man nämlich zu der Cotangente $0{,}3840584$ den zugehörigen Winkel $68^\circ\ 59'\ 25''$ aufsuchet und denselben wegen dem Zeichen — von 180° abziehet.

154 Da nun der Winkel $BAD = x = 111^\circ\ 0'\ 35''$, so ist $BCD = 61^\circ\ 19'\ 25''$ $ABD = 43^\circ\ 59'\ 25''$, $DBC = 82^\circ\ 40'\ 35''$ und die Seiten DA, DB, DC können demnach durch folgende Proportionen berechnet werden;

$$\left.\begin{aligned}&\sin m : a = \sin ABD : DA\\ &\sin 25^\circ : 621 = \sin 43^\circ\ 59'\ 25'' : DA\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin m : a = \sin x : DB\\ &\sin 25^\circ : 621 = \sin 68^\circ\ 59'\ 25'' : DB\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin n : b = \sin DBC : DC\\ &\sin 36^\circ : 919 = \sin 82^\circ 40'\ 35'' : DC\end{aligned}\right\}$$

499. Es kann sich bey dem Gebrauche dieser Formel

$\cot x = \frac{a.r^2.\sin n}{b.\sin m.\sin q} + \cot q$ und zwar bey Fig. 154 zutragen, daß $q > 180$ sey; in einem solchen Falle muß man 180° von q abziehen, und sodann zu dem Ueberreste in den

Sinus=

Sinustafeln den zugehörigen Sinus und die Cotangente auf- Fig.
suchen um $\sin q$ und $\cot q$ zu erhalten; es ist aber wohl zu 154
merken, daß ein solcher Sinus jederzeit negativ sey, und folglich $\frac{a.r^2.\ \sin n}{b.\sin m \sin q}$ das Zeichen — habe; hingegen ist die Cotangente in einem solchen Falle nur damals negativ, wenn der Ueberrest, nachdem man nämlich 180° von q abgezogen hat, größer als 90° ausfällt; ist aber dieser Ueberrest kleiner als 90°, so ist die entsprechende Cotangente positiv. Denn
aus Fig. 122 erhellet es ganz deutlich, daß der Sinus FD 122
eines jeden Bogens AEaF über 180° negativ sey, weil er in Rücksicht BD eine entgegengesetzte Lage hat; aus eben dieser Figur 122 ist es sehr leicht zu ersehen, daß die Cotangente EM eines Bogens AEaQ über 180° positiv sey, wenn $aQ < 90°$ ist; hingegen ist die Cotangente ES eines Bogens AEaR über 180° negativ, wenn $aR > 90°$ ist. Und eben so ist die Tangente AT von AEaQ positiv, und die Tangente AP von AEaR negativ. Man findet auch den Sinus, Cosinus, Tangente, und Cotangente eines Bogens über 180° aus den Formeln (442. I. II.) und (452. I. III.), wenn man $a = 180°$ setzet; es ist nach gehöriger Reduktion

I. $\sin(180° + b) = -\sin b$;
II. $\cos(180° + b) = -\cos b$;
III. $\mathrm{tang}(180° + b) = \mathrm{tang}\, b$;
IV. $\cot(180° + b) = \frac{r^2}{\mathrm{tang}\ b} = \cot b$.

In der Formel I. bleibt $\sin b$ immer negativ, es möge b kleiner oder größer als 90° seyn; hingegen wird bey den Formeln II. III. IV. das Zeichen verkehrt, wenn $b > 90°$ seyn sollte. Auf die nämliche Art findet man den Sinus, Cosinus, Tangente, und Cotangente eines Bogens über 360° u. s. w.

Vom

Fig. 158

Vom Centriren der Winkel.

500. Aufgabe. Bey den Dreyecken ABC Fig. 158. Nro. 1, 2, 3, 4, 5, 6, konnte wegen einigen Hindernissen der Winkel ACB nicht gemessen werden; man hat daher den Winkelmesser in D gestellet, und den Winkel ADB beobachtet; nun soll daraus der Winkel ACB gefunden werden.

Auflösung. Bey dem Dreyecke Nro. 1 ist $ADB = C + CAD$ vermög (279), und folglich $C = D - CAD$; bey Nro. 2 ist $C = D + CAD$; bey Nro. 3 ist $m + n = p + CAD + q + CBD$, und folglich $p + q = m + n - CAD - CBD$, nämlich $C = D - CAD - CBD$; bey Nro. 4 ist $m + n = p + CAD + q + CBD$, nämlich $C = D + CAD + CBD$; und endlich bey Nro. 5 ist $E = D + CAD$ und auch $E = C + CBD$, folglich auch $C + CBD = D + CAD$, nämlich $C = D + CAD - CBD$; hingegen ist bey dem 6ten Dreyecke $C = D - CAD + CBD$. Wenn man nun die Winkel CAD und CBD auf irgend eine Art bestimmen könnte, so wäre es sehr leicht aus dem gemessenen Winkel D den Gesuchten C zu finden. Die Winkel CAD und CBD können nach einer von folgenden zwey Methoden am füglichsten bestimmt werden.

I. Man nehme in der Linie AC einen beliebigen Punkt d von der Beschaffenheit, daß man von d nach A und D sehen könne, messe sodann die Winkel ADd und AdD, und ziehe ihre Summe von 180° ab, so giebt der Ueberrest den Winkel CAD; und eben so kann der Winkel CBD bestimmet werden

II. Man errichte aus dem Punkte D die Senkrechte Dd auf AD, und Dd′ auf BD, und messe diese Senkrechten Dd, Dd′ auf das genaueste; sodann berechne man die Seite AD aus der Seite AB und aus dem Winkel ABD Fig. 158 Nro 1, 2, welche schon aus einer vorhergehenden Messung, oder Berechnung für bekannt angenommen werden, indem man sagt: $\sin D : AB = \sin B : AD$; endlich findet in dem rechtwinklichten Dreyecke ADd folgende Proportion statt: $AD : Dd = \text{sintot} : \text{tang}\, dAD$, woraus man nun den Winkel dAD

oder

oder CAD bestimmet. Bey den Dreyecken 3, 4, 5, 6 werden die Seiten AD und BD nur beynahe aus folgenden Proportionen gefunden; Fig. 158

$\sin D : AB = \sin ABC : AD$,

$\sin D : AB = \sin CAB : BD$;

und aus den Seiten AD, BD findet man sodann die Winkel CAD und CBD, oder DAd und DBd′, wenn man sagt;

$AD : Dd = \sin tot : \tan DAd$,

$BD : Dd' = \sin tot : \tan DBd'$.

Die Seiten AD und BD werden durch die angeführten Proportionen keineswegs genau gefunden; jedoch hat dieser Fehler keinen merklichen Einfluß auf die Bestimmung des Winkels CAB oder CBD, wenn nur die Seiten AD und BD in Rücksicht der Senkrechten Dd und Dd′ sehr groß sind. Man setze z. B. die wirkliche Länge AD = 5000 Kl. und die Senkrechte Dd = 2 Kl. so ist der wahre Winkel DAd = DAC = $0° 1' 22,5''$; man setze weiter, daß man durch die Rechnung AD = 5050 Kl. gefunden hätte, so findet man sodann durch fernere Rechnung den Winkel DAd = DAC = $0° 1' 21,7''$; folglich nur um $\frac{8''}{10}$ zu klein.

Von der Reduktion der Winkel auf den Horizont.

501. Aufgabe. A, B, C sind drey Gegenstände, die in verschiedenen Horizonten liegen; man bringt den Winkelmesser in A in eine horizontale Lage um den horizontalen Winkel EAD zu beobachten, man kann aber in dieser Lage nach B und C nicht visiren, weil die Fernröhre des Winkelmessers bey dessen horinzontaler Stellung keine vertikale Bewegung leiden; man ist daher genöthiget den Winkelmesser in die schiefe Lage BAC zu bringen und den schiefgeneigten Winkel BAC zu beobachten; man soll den horizontalen Winkel EAD bestimmen. 159

Auflösung. Nachdem man den schiefgeneigten Winkel BAC beobachtet hat, so stelle man den Winkelmesser in eine vertikale Lage und messe den Höhenwinkel EAB, und den

Fig. Tiefenwinkel DAC. Aus diesen Höhen- oder Tiefenwinkeln
159 und aus dem schiefgeneigten Winkel kann in einem jeden Falle der horizontale Winkel sehr leicht auf folgende Art berechnet werden, ohne daß es erforderlich wäre nur eine einzige Seite des Dreyeckes für bekannt anzunehmen.

Man gedenke die Vertikallinie AZ, durch AZ und durch B die Vertikalebene AZS, ferner durch AZ und durch C die Vertikalebene AZT, durch A, B, C aber die schiefgeneigte Ebene AST; man gedenke auch aus dem Mittelpunkte A unter einem beliebigen Halbmesser AZ eine Kugelfläche, so werden auf dieser Kugelfläche die gemeinschaftlichen krummen Durchschnittslinien der angeführten drey Ebenen und der Kugelfläche, die Bögen größter Kreise ZT, SZ, ST, und diese das sphärische Dreyeck ZST erzeugen. Wenn man nun ferner durch A die horizontale Ebene QAP gedenket, so ist $ZP = 90°$, $ZQ = 90°$, $ST =$ dem gemessenen schiefgeneigten Winkel BAC, $QS =$ dem gemessenen Höhenwinkel EAB, und $PT =$ dem gemessenen Tiefenwinkel DAC; da nun $ZS = ZQ - QS = 90° - QS$, $ZT = ZP + PT = 90° + PT$, und ST nebst QS und PT gemessen worden, so sind in dem sphärischen Dreyecke ZST alle drey Seiten bekannt; folglich kann daraus der sphärische Winkel Z noch (478. I.) berechnet werden; es ist aber $Z = PQ$, und $PQ = QAP$, folglich auch $Z = QAP$, nämlich der sphärische Winkel Z ist gleich dem gesuchten horizontalen Winkel $QAP = EAD$. Da nun vermög (478. I.) $\log\sin\frac{1}{2} Z = \frac{1}{2}[\log(s-a) + \log(s-b) + \text{D.E.} \log\sin a + \text{D.} \log\sin b] = \log\sin\frac{1}{2} EAD$, wenn man $\frac{1}{2}(ZS + ZT + ST) = s$, $ZS = a$, $ZT = b$ setzet, so wird in einem jeden Falle aus den beobachteten Höhen- oder Tiefenwinkeln und aus dem schiefgeneigten Winkel der gesuchte horizontale Winkel nach folgender Regel gefunden.

Man addire den Tiefenwinkel zu 90°, und subtrahire den Höhenwinkel von 90° um zwey Bögen oder Winkel a und b zu erhalten; zu diesen zwey Winkeln addire man den schiefgeneigten Winkel und halbire ihre

Sum-

Summe. Dann subtrahire man von dieser halben Sum- Fig.
me einmal den Winkel a und einmal den Winkel b, und 159
addire zu den Logarithmen der Sinuse dieser zwey Differenzen die dekadischen Ergänzungen von den Logarithmen der Sinuse der zwey Winkel a und b, so ist (ohne an der Kennziffer etwas zu verändern) die Hälfte dieser Summe der Logarithmus des Sinus von dem halben gesuchten horizontalen Winkel; man suche demnach nur zu diesem gefundenen Logsin in der Tafel den zugehörigen Winkel, und dupplire denselben, so wird man den ganzen gesuchten horizontalen Winkel erhalten.

Es sey z. B. BAC = 95° 48′, EAB = 4° 50′ ein Höhenwinkel, und DAC = 11° 30′ ein Tiefenwinkel, so wird um den horizontalen Winkel EAD zu finden die Rechnung auf folgende Art angelegt:

von 90° 0′	zu 90° 0′	sch. W. 95° 48′
subtr. 4 50	add. 11 30	b = 101 30 add.
a = 85 10	b = 101 30	a = 85 10
		halbirt 282 28
s = 141° 14′		giebt s = 141 14

a = 85 10	0,0015471 = D. E. logsin a	addirt
b = 101 30	0,0088073 = D. E. logsin b	
56 4	9,9189146 = logsin $(s-a)$	
39 44	9,8056472 = logsin $(s-b)$	
	19,7349162 | halbirt	

47° 28′ 30″ 9,8674581 = logsin ½ EAD
94 57 0 = EAD = dem ges. horiz. Winkel.

Wenn beyde Gegenstände B und C höher, oder beyde niedriger als A liegen sollten, so ist es sehr leicht einzusehen, daß man im ersten Falle jeden Höhenwinkel besonders von 90° abziehen, und im zweyten Falle jeden Tiefenwinkel zu 90° addiren müßte um die zwey Winkel zu erhalten, welche wir mit a und b bezeichnet haben.

Fig. 159 Bey der trigonometrischen Aufnahme einer Reihe von Dreyecken muß diese Reduktion der Winkel auf den Horizont jederzeit vorgenommen werden, wenn man nicht unmittelbar die horizontalen Winkel messen kann, weil es erforderlich ist die Längen der Seiten aller Dreyecke in demjenigen Horizonte zu berechnen, worauf die Grundlinie gemessen worden.

Diese Methode die schiefgeneigten Winkel auf den Horizont zu reduciren führet den besondern Vortheil mit sich, daß, die Fehler, welche bey der Beobachtung der Höhen- und Tiefenwinkel gar leicht einschleichen, keinen merklichen Einfluß auf die Berechnung des gesuchten horizontalen Winkels haben. Man setze z. B. daß man den Höhenwinkel EAB um 10 Minuten zu klein nämlich EAB = 4° 40′, und den Tiefenwinkel um 20 Minuten zu groß nämlich DAC = 11° 50′ beobachtet habe, so wird sodann aus dem schiefgeneigten Winkel BAC = 95° 48′ der horizontale Winkel EAD = 94° 57′ 42″ und folglich nur um 42″ größer ausfallen als im vorigen Falle.

Von der Verbesserung der Höhen- und Tiefenwinkel, und von dem Unterschiede des wahren und scheinbaren Horizontes.

160 502. Es sey ACE ein Stück des Durchschnittes unserer Erdkugel; AC, EC zwey Halbmesser, und folglich die Richtungen der Schwerkraft, oder die Richtungen freyfallender Körper in A und E; AD sey senkrecht auf AC, und BF senkrecht auf BC, so ist AD eine durch den Punkt A gezogene Horizontallinie, und BF eine durch den Punkt B (z. B. durch den Gipfel eines Berges) gezogene Horizontallinie. Eine solche Horizontallinie, nämlich eine gerade Linie, welche auf der Richtung der Schwerkraft senkrecht steht, muß man eine **scheinbare Horizontallinie** nennen um sie von der **wahren Horizontallinie** zu unterscheiden, weil nur jene Linie, deren alle Punkte von dem Mittelpunkte der Erde gleichweit entfernt sind, nämlich der Bogen AE eine **wahre Horizontallinie** genennet wird. Und eben so heißt eine durch den

Punkt

Punkt A auf AC senkrecht gelegte ebene Fläche die scheinbare Fig. Horizontalfläche des Punktes A; hingegen wird eine durch 160 den Punkt A gelegte Fläche, deren alle Punkte gleichweit von C abstehen, nämlich ein Stück der Kugelfläche, die wahre Horizontalfläche des Punktes A genennt. Nur damals kann man von zwey oder mehreren Punkten sagen, daß sie im nämlichen wahren Horizonte liegen, wenn sie gleichweit von dem Mittelpukte der Erde entfernet sind. Wenn man aus A nach B, oder aus B nach A visiret, so heißt DAB der scheinbare Höhenwinkel, und FBA der scheinbare Tiefenwinkel; EAB und GBA hingegen heißen die wahren Höhen- und Tiefenwinkel, wenn man im zweyten Falle durch B den Kreisbogen oder wahren Horizont GB gedenket. Und eben so ist BD oder vielmehr die Senkrechte Bd die scheinbare Erhöhung des Punktes B über den Horizont des Punktes A. Das Stück ED des verlängerten Halbmessers zwischen dem wahren und scheinbaren Horizonte des Punktes A heißt der Unterschied oder vielmehr die Erhöhung des scheinbaren Horizontes für die Entfernung AE.

Wenn eine sehr weit entfernte Höhe nach (492) zu bestimmen ist, so ist es allerdings nothwendig aus dem beobachteten scheinbaren Höhenwinkel den wahren Höhenwinkel zu finden, und sodann muß man erst aus dem wahren Höhenwinkel und aus der horizontalen Entfernung die gesuchte Höhe berechnen. Wie aus einem scheinbaren Höhen- oder Tiefenwinkel der wahre zu finden sey, lehret folgende Aufgabe.

503. Aufgabe. **Aus dem gemessenen scheinbaren Höhen- oder Tiefenwinkel, aus der gegebenen horizontalen Entfernung AE zweyer Gegenstände A und B, und aus dem Halbmesser der Erde AC, den wahren Höhen- oder Tiefenwinkel zu finden.**

Auflösung. In Fig. 160 ist $EAB = DAB + EAD$, und $GBA = FBA - GBF$, hingegen ist Fig. 161 $EAB = EAD - DAB$; es ist aber $EAD = \frac{1}{2}C$, und auch $GBF = \frac{1}{2}C$ vermög (271.) weil DA und FB auf den Halbmessern in A

Fig. 160 161 und B senkrecht stehen, und die Umkreise EA, GB in A und B berühren; es ist demnach auch Fig. 160 EAB = DAB + $\frac{1}{2}$C, GBA = FBA — $\frac{1}{2}$C, und Fig. 161 EAB = $\frac{1}{2}$C — DAB. Setzen wir nun den Halbmesser der Erde AC = *a* und die horizontale Entfernung AE = *b*, welche mit dem Bogen AE, und auch mit AD einerley ist, so lange der Winkel C noch sehr klein ist, so kann der Winkel C auf folgende Art gefunden werden: es ist der ganze zu AC zugehörige Umkreis $= 2\,a\,\pi$ vermög (352.); ferner verhält sich $2\,a\,\pi : 360^\circ = b : C^\circ$, folglich $C = \frac{360b}{2\,a\,\pi} = \frac{180b}{a\pi}$ Grade $= \frac{10800b}{a\pi}$ Min. Nun ist für Deutschland $a = 3360500$ Wien. Kl. ziemlich genau, wenn man aus mehreren Bestimmungen das Mittel nimmt; folglich ist nach gehöriger Reduktion $C = 0{,}00102\,b$ Minuten, allwo die Entfernung AE = *b* in W. Klaftern ausgedrückt seyn muß; und endlich Fig. 160, EAB = DAB + 0,00051 *b* Min. GBA = FBA — 0,00051 *b* Min. und Fig. 161 EAB = 0,00051 *b* Min. — DAB. Es sey z. B. Fig. 160 der gemessene scheinbare Höhenwinkel DAB = $4^\circ\,57'$ und die horizontale Entfernung AE = *b* = 1960 Wiener Klafter, so ist der wahre Höhenwinkel EAB = $4^\circ\,57' + 0{,}00051 \times 1960$ Minut. $= 4^\circ\,57' + 1' = 4^\circ\,58'$.

Da der Unterschied zwischen dem wahren und scheinbaren Höhenwinkel in einer Entfernung von 1960 oder beynahe 2000 Wien. Klaft. erst eine einzige Minute beträgt, so ist es offenbar, daß man bey jenen Winkelmessern, mit denen aufs höchste einzelne Minuten können beobachtet werden, die angeführte Verbesserung in den meisten Fällen ausser Acht lassen könne, weil man selten auf Gegenstände visiret, die über 2000 Wien. Klafter entfernet sind. Um so mehr kann die Veränderung des scheinbaren Höhenwinkels ausser Acht gelassen werden, die von der Brechung der Lichtstrahlen verursachet wird, weil sie nach der wahrscheinlichsten Meinung nur $\frac{1}{12}$

des

des Mittelpunktswinkels beträgt; es ist nämlich aus sicheren Fig.
Erfahrungen bekannt, daß der Lichtstrahl von einem nahe am 162
Horizonte befindlichen Gegenstande B Fig. 162 nach einer etwas in die Höhe gebogenen krummen Linie in das Auge des Beobachters in A gelange; da nun der Beobachter in A die Lage des Gegenstandes B nach der letzten Richtung des Lichtstrahls, nämlich nach der Richtung der Tangente Ab beurtheilet, so wird dadurch der wirkliche scheinbare Höhenwinkel DAB um den Winkel BAb zu groß beobachtet: und dieser Refraktionswinkel BAb ist nach der wahrscheinlichsten Meinung $= \frac{1}{16}$ACE $= \frac{1}{8}$EAD. Nach eben dieser Meinung ist Bb $= \frac{1}{8}$ED (Siehe Tobias Mayer praktische Geometrie II. Theil §. 200. Seite. 311.)

504. Aufgabe. Für eine jede gegebene Entfernung 163
AD, welche man noch ohne merklichen Fehler = AB setzen kann, die Erhöhung des scheinbaren Horizontes nämlich BD zu finden.

Auflösung. $BD = \frac{AB^2}{AF}$; denn vermög (311) ist

$BD : AD = AD : DG$, folglich $BD = \frac{AD^2}{DG}$ oder $BD = \frac{AB^2}{DG}$

weil wir AB nur so groß angenommen haben, daß man ohne merklichen Fehler AD = AB setzen kann; ferner kann man auch in dieser nämlichen Voraussetzung ohne merklichen Fehler DG = BG = AF annehmen; und sodann ist $BD = \frac{AB^2}{BG} = \frac{AB^2}{AF}$.

Es sey z. B. AB = 200 W. Kl. so ist $BD = \frac{40000}{6721000}$ wenn man den Durchmesser der Erde AF = 6721000 setzet, nämlich es ist BD = 0,00595 W. Kl. = 5,14 Linien.

Diese Methode die Erhöhung des scheinbaren Horizontes für eine gegebene Entfernung zu bestimmen hat nicht die voll-

Fig. 163 kommene geometrische Schärfe, jedoch weicht sie bey nicht gar zu grossen Entfernungen, die in der Ausübung am gewöhnlichsten vorkommen, nicht merklich von der Wahrheit ab, wovon man sich auf folgende Art überzeugen kann. Es ist vollkommen genau $BD = CD - CB = CD - AC$; es ist aber in dem rechtwinklichten Dreyecke ACD die Hypothenuse $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2}$; folglich auch $BD = \sqrt{AC^2 + AD^2} - AC$; setzen wir nun wie im vorigen Falle $AD = 200$, und $AC = 3360500$ W. Kl. so ist $\sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{11292960290000} = 3360500,00596$, und folglich $BD = 3360500,00596 - 3360500 = 0,00596$ Kl. $= 5,15$ Linien; nämlich es ist die wahre Erhöhung des scheinbaren Horizontes für die Weite von 200 Kl. nur $\frac{1}{100}$ Linie grösser als sie nach der vorigen Art berechnet worden.

505. Nachdem man für eine bestimmte Entfernung z. B. für die Entfernung von 200 Kl. die Erhöhung des scheinbaren Horizontes $= 5,14$ Linien kennet, so kann für jede andere in W. Kl. gegebene Entfernung $= b$ die zugehörige Erhöhung $= x$ in Linien durch nachstehende Formel gefunden werden, $x = 0,0001285 b^2$ W. Linien. Denn in Fig. 163 ist vermög dem vorhergehenden $BD = \frac{AB^2}{AC}$, und $MN = \frac{AM^2}{AC}$, folglich auch $BD : MN = \frac{AB^2}{AF} : \frac{AM^2}{AF}$, oder $AB^2 : AM^2 = BD : MN$; setzen wir nun $AB = 200$ W. Kl., so ist $BD = 5,14$ Linien, setzen wir ferner $AM = b$ W. Kl. und die zugehörige Erhöhung des scheinbaren Horizontes $MN = x$ Linien, und substituiren diese Werthe in der Proportion, so ist endlich $200^2 : b^2 = 5,14 : x$, nämlich $x = \frac{5,14 b^2}{40000} = 0,0001285 b^2$ W. Lin. So z. B. findet man nach dieser Formel in einer Entfernung von 1000 W. Kl. die Erhöhung des scheinbaren Horizontes $= 128,5$ Linien $= 10$ Zoll $8\frac{1}{2}$ Linie. Nach dieser Formel kann man die Erhöhungen des schein-

scheinbaren Horizontes für verschiedene Entfernungen etwan von Fig.
50 Klaftern angefangen bis 1000 Klafter berechnen, und in eine Tafel ordentlich eintragen.

Da es in der Ausübung gemeiniglich erforderlich ist nur für verschiedene Entfernungen unter 400 Kl. die zugehörige Erhöhung des scheinbaren Horizontes zu bestimmen, so kann man selbe in einem solchen vorkommenden Falle jederzeit sehr leicht ohne merklichen Fehler berechnen, wenn man geradezu annimmt, daß in einer Entfernung von 200 W. Kl. die Erhöhung des scheinbaren Horizontes 5 W. Linien betrage, und sodann folgende Proportion ansetzet: das Quadrat von 200 verhält sich zum Quadrate der in Klaftern gegebenen Entfernung, gleichwie 5 Linien zur gesuchten Erhöhung in Linien.

Vom Nivelliren.

506. Nivelliren (abwägen) heißt die Höhenunterschiede von mehreren gegebenen Punkten einer Linie oder einer Gegend mittelst horizontaler Visirstrahle durch die wirkliche Ausmessung bestimmen. Wenn z. B. der Punkt B in einer sehr großen Entfernung von A nur um etwas weniges über
den wahren Horizont des Punkts A erhöhet wäre Fig. 164, 164
so ist es offenbar, daß man diese Erhöhung nach (492.) nicht mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmen könnte; jedoch ist es zuweilen erforderlich diese Erhöhung LB oder den Höhenunterschied der zwey Punkte A und B, nämlich den Unterschied ihrer Abstände von dem Mittelpunkte der Erde auf das genaueste zu bestimmen. Und dieses geschieht durch das Nivelliren auf folgende Art: aus einem in der Mitte zwischen A und L befindlichen Punkte P gedenke man die Vertikallinie PC, und aus einem Punkte derselben C die Visirstrahlen CD und CE, welche durch irgend ein Hilfsmittel beide in dem nämlichen scheinbaren Horizont des Punktes C gebracht sind; in A und B bemerke man auf vertikal gestellten Latten die Punkte D und E, wo die in einem nämlichen scheinbaren Horizonte

Fig. 164 gestellten Visirstrahle CD, CE die Latten treffen, und messe die Höhen AD, BE, so ist AD — BE = BL = AH = dem Höhenunterschiede der zwey Punkte A und B. Denn man gedenke nur durch C den wahren Horizont FCG, durch B den wahren Horizont BH, und durch A den wahren Horizont AL, so ist FD = GE (weil der Punkt P und auch C in der Mitte zwischen den Vertikallinien AD und BE angenommen ist, und in gleichen Entfernungen von dem nämlichen Punkte die Erhöhungen des scheinbaren Horizontes gleich sind); ferner ist auch wegen den concentrischen Kreisbögen oder wahren Horizonten, HF=BG, AH=LB, und AF=LG; folglich auch AF + FD = LG + GE, nämlich AD = LE; es ist aber LE — BE = LB; folglich auch AD — BE = LB.

Wären die zu nivellirenden Punkte M und B von P nicht gleich weit entfernet, so müßte man für die Entfernungen PM und PL, oder CN und CE die Erhöhungen des scheinbaren Horizontes QN und GE nach (505) berechnen, jene QN von der gemessenen Höhe des Visirstrahls MN, und diese GE von BE abziehen, und sodann diese verbesserten Höhen MQ und BG von einander subtrahiren um den Höhenunterschied BL zu erhalten.

Wenn der Punkt P genau in der Mitte zwischen A und L sich befindet, so ist es nicht unumgänglich nothwendig, daß die Visirstrahlen CD und CE beyde im nämlichen scheinbaren Horizonnte liegen, sondern es ist hinlänglich, wenn sie nur beyderseits mit der Vertikallinie gleiche Winkel eCP = dCP einschließen; denn es ist alsdann noch immer Ad — Be = LB, weil in den zwey vollkommen gleichen Dreyecken DCd und CEe die Seiten Dd und Ee einander gleich sind.

507. Das Instrument, wodurch man einen Visirstrahl in den scheinbaren Horizont bringet, wird ein **Nivellirinstrument**, eine **Nivellirwage**, oder **Wasserwage** genennt. Das einfachste Nivellirinstrument ist die sogenannte **Wasserwage** im **eigentlichen Verstande**. Diese Wasserwage besteht aus einer blechernen an beiden Enden aufwärts gekrümmten Röhre MN,

bey

bey der an beiden Enden gläserne hohle Cylinder P, Q ein- Fig.
gekittet sind Fig. 165. Durch Hilfe dieser Wasserwage 165
wird ein Visirstrahl in den scheinbaren Horizont gebracht, wenn man die Röhre mit Wasser füllet, und über die beyden Oberflächen desselben durch die gläsernen Cylinder P, Q, visiret, weil das Wasser die Eigenschaft hat, daß die Oberfläche desselben in mittheilenden Röhren sich in den nämlichen Horizont stellet. Diese Wasserwage hat die vorzügliche Eigenschaft, daß sie beym Gebrauche niemals einer Berichtigung bedarf; nur führet sie die beträchtliche Unbequemlichkeit mit sich, daß man mit derselben auf größere Entfernungen als etwa 20 Klafter nicht mehr hinlänglich scharf visiren kann.

Ausser einem Nivellirinstrument sind auch noch zwey Nivellirlatten zur Ausübung erforderlich; sie sind ohngefähr 2 Klafter lang, nach ihrer ganzen Länge in Schuhe, Zolle und Linien eingetheilet, und also beschaffen, daß sich an jeder derselben ein viereckigtes Zielbrett auf- und niederwärts bewegen, und in jeder Stelle mit einer Schraube befestigen läßt; die vordere Fläche des Zielbretes ist durch zwey senkrechte Linien in vier gleiche Theile getheilet, wovon zwey entgegen gesetzte Theile schwarz und die übrigen zwey Theile weiß überstrichen werden. Es ist für die Ausübung sehr bequem, wenn die Abmessungen des Zielbrettes an beyden Nivellirlatten einerley sind.

508. Aufgabe. **Den Höhenunterschied zweyer Punkte A und B durch Nivelliren zu finden, wenn sie so beschaffen sind, daß man mit einer dazwischen gestellten Wasserwage C nach beyden visiren kann.**

Auflösung. Man schicke einen Gehilfen mit einer Nivellirlatte nach A und den anderen nach B, visire von P über die Oberflächen P, Q nach E, und lasse daselbst den Gehilfen bey vertikalgestellter Latte das Zielbrett durch verabredete Zeichen in eine solche Lage bringen, daß der Visirstrahl genau in den Zielpunkt treffe; in dieser Lage wird nun das Zielbrett befestiget, und die Anzahl Schuhe, Zolle und Linien von B

bis

Fig. bis an den unteren Rand des Zielbrettes gezählet, wenn die
165 Abmessungen des Zielbrettes an beyden Nivellirlatten einerley sind, im Gegentheile muß man die ganze Entfernung von B bis auf den Zielpunkt messen; das nämliche geschieht in A, nachdem man auch von Q über die Oberflächen Q, P nach D visiret hat; sodann wird die Erhöhung des Zielbrettes an der Nivellirlatte BE von der Erhöhung AD abgezogen, so giebt der Ueberrest den gesuchten Höhenunterschied bB = aA: denn bB = bE — BE, es ist aber bE = AD, wenn man zwischen den Senkrechten AD, bE die Parallelen aB, Ab zu dem Horizonte DE gedenket, folglich auch bB = AD — BE.

509 Ausser der oben beschriebenen Wasserwage Fig. 165 giebt es noch sehr viele andere Einrichtungen der Nivellirwagen, wodurch man ebenfalls entweder durch die Oberfläche eines stillstehenden Wassers, oder durch einen freyhangenden Perpendikel (Senkel), oder endlich mittelst der Wasserwage mit der Luftblase Fig. (78) einen horizontalen Visirstrahl erhält. Damit man nun mit einem Nivillirinstrumente auf große Entfernungen genau visiren könne, ist es allerdings erforderlich bey demselben ein Fernrohr anzubringen, welches aus einem Ocular ꝛ und einem Objectivglase besteht, in deren gemeinschaftlichen Brennpunkte sich ein sehr feines Fadenkreuz befindet.

Für die Ausübung ist die Wasserwage mit der Luftblase
166 und dem einfachen Fernrohre sehr bequem Fig. 166; AB ist das Fernrohr, bey A das Ocularglas, und bey B das Objectivglas; MN die gläserne Röhre mit der Luftblase in einem messingenen Gehäuse, welches auf das messingene Fernrohr dergestalt befestiget ist, daß es sich mittelst der Rectificirschraube y etwas höher und niedriger nach Erforderniß stellen läßt; C ist ein Zirkelgewinde, ab ein Arm von Eisen oder Messing unter dem Zirkelgewinde an die Hülse D befestiget, x die Elevationsschraube, wodurch sich das Fernrohr samt der darauf befindlichen Röhre mit der Luftblase nach Belieben erhöhen

oder

oder erniedrigen läßt, nachdem man dieses Instrument auf ein Fig.
dazugehöriges Stativ gesetzet hat.

510. Dieses eben beschriebene Nivellirinstrument muß jederzeit bey einer vorzunehmenden Nivelliroperation berichtiget (rectificiret) werden, nämlich man muß selbes also einrichten, daß man mittelst desselben an einem jeden beliebigen Orte einen horizontalen Visirstrahl erhalten könne, welches nach einer von folgenden zwey Arten sehr leicht geschehen kann.

Erste Berichtigungsmethode. Fig. 167 Man messe 167
auf einem ziemlich ebenen Boden die horizontale Länge einer Linie PQ etwan von 200 Klaf. und bemerke genau auf der Hälfte derselben den Punkt C; darauf stelle man die Nivellirwage in C dergestalt, daß das Zirkelgewinde derselben genau über C zu stehen komme, in P und Q aber lasse man Nivellirlatten Vertikal über die bemerkten Punkte P, Q aufrichten; sodann richte man das Objectivglas b des Nivellirrohrs gegen QE, bringe mittelst der **Elevationsschraube** x die Luftblase an ihre angewiesene mittlere Stelle, und lasse in dieser Stellung den Visirstrahl auf der Latte QE in N anmerken; nach diesem verwende man bey unverrucktem Stative das Nivellirrohr, damit das Objectivglas b gegen PD gerichtet sey, bringe abermahl mittelst der **Elevationsschraube** die Luftblase an ihre angewiesene mittlere Stelle, und lasse in dieser Stellung den Visirstrahl auch an der Latte PD in M anmerken und zugleich PM ausmessen, so stehen die zwey Punkte M und N in einerley wahren Horizonte, weil die Entfernungen PC und CQ vermög der Voraussetzung einander gleich sind und beyde Visirstrahle mit der Vertikallinie in C gleiche Winkel einschließen. Nun übertrage man das Nivellirinstrumente nach P, stelle es daselbst dergestalt nieder, daß der Anfang des Fernrohrs beym Ocularglase gerade über den bemerkten Punkt P zu stehen komme, das Objectivglas aber gegen QN gerichtet sey, bringe in dieser Stellung das Fernrohr nach dem Augenmasse beynahe in eine horizontale Lage, und messe die Erhöhung der Achse des Fernrohrs nämlich die Erhöhung des Fa-

den,

Fig. denkreußes über den bemerkten Punkt P, das ist man messe
167 PD; sodann übertrage man den Unterschied zwischen PD und PM auf die Latte QE von dem bemerkten Punkte N bis E aufwärts, wenn D höher liegt als M, oder von E abwärts, wenn D niedriger liegen sollte als M, so sind wegen MD = NE auch die Punkte D und E beyde in einem nämlichen wahren Horizonte; ferner berechne man für die Entfernung pQ = DE nach (505) die Erhöhung des scheinbaren Horizontes, welche für pQ = 200 W. Klaft. nur 5 Linien beträgt, und übertrage dieselbe von dem bereits gefundenen Punkte E jederzeit aufwärts bis e, so befinden sich dadurch die zwey Punkte D und e beyde in einer durch D geführten scheinbaren Horizontallinie; endlich richte man mittelst der Elevationsschraube das Fernrohr auf den Punkt e, so steht der Visirstrahl desselben im scheinbaren Horizonte: steht nun bey dieser Stellung des Fernrohrs die Luftblase an ihrer angewiesenen mittleren Stelle, so wäre das Nivellirinstrument schon ehevor berichtiget, und zu einer vorzunehmenden Nivellíroperation allerdings tauglich, wenn es sonst keinen Fehler hat; steht hingegen bey dieser letzten Richtung des Fernrohrs die Luftblase nicht an ihrer angewiesenen mittleren Stelle, so muß man bey dieser nämlichen Stellung des Fernrohrs ohne dasselbe aus seiner Lage zu verrucken die Luftblase mittelst der Rectificirschraube y an ihre angewiesene mittlere Stelle bringen, so ist dadurch endlich das Nivellirinstrument berichtiget, man kann nämlich sodann durch Hilfe dieses berichtigten Nivellirinstruments an jedem Orte einen horizontalen Visirstrahl erhalten, wenn man nur mittelst der Elevationsschraube das Fernrohr in eine solche Lage bringet, daß die Luftblase ihre angewiesene mittlere Stelle einnimmt, und daß zwar solange, als an dem Fadenkreuße, an der Lage der Gläser, und an der Rectificirschraube keine Aenderung vorgegangen.

Wäre bey dem Nivellirinstrumente statt der Luftblase ein Perpendikel angebracht, so müßte man eben so verfahren, und bey der letzten Richtung des Fernrohrs die Lage des Perpendikels

dikels mit einem Merkmale bezeichnen; und sodann erhält man Fig.
mittelst eines solchen Instruments jederzeit einen horizontalen Visirstrahl, wenn man das Fernrohr in eine solche Lage bringet, daß der Perpendikel seine bezeichnete Richtung einnimmt.

Es ist ohne meiner Erinnerung klar, daß man die Winkelmesser, bey denen entweder eine Luftblase oder ein Perpendikel angebracht ist um die Höhen- und Tiefenwinkel zu messen, auf die nämliche Art, berichtigen könne.

Zweyte Berichtigungsmethode. Fig. 168. Man mes- 168
se die horizontale Länge einer Linie PR etwan von 400 Kl. theile PR in Q, und QR in S in zwey gleiche Theile; lasse in q und r Nivellirlatten aufrichten, über S aber stelle man das zu berichtigende Nivellirinstrument, und visire von C einmal nach a und einmal nach b, nachdem man in beyden Fällen mittelst der Elevationsschraube die Luftblase an ihre angewiesene Stelle gebracht hat, so stehen die zwey angemerkten Visirpunkte a und b beyde in einem nämlichen Horizonte. Sodann stelle man das Instrument über den Punkt P visire ohne auf die Luftblase Acht zu haben von D auf den bemerkten Punkt b und lasse bey dieser Richtung auf der Latte q den Punkt m anmerken, auf den der Visirstrahl Db trifft; ferner übertrage man am von m bis n jederzeit auf die entgegengesetzte Seite, so stehen auch die zwey Punkte D und n beyde in einem nämlichen Horizonte, weil wegen den gleichen Wechselwinkeln mDn = mba die Linie Dn zu ab Parallel läuft; denn in den zwey Dreyecken Dmn und bma, ist am = mn, mb = mD, und der Winkel Dmn = bma, folglich sind sie einander vollkommen gleich und der Winkel mDn = mba. Nun richte man das Fernrohr auf den Punkt n, wenn für die Entfernung PQ die Erhöhung des scheinbaren Horizontes unmerklich ist; im Gegentheile übertrage man die zugehörige Erhöhung des scheinbaren Horizontes von dem Punkt n aufwärts, und richte das Fernrohr auf diesen gefundenen Punkt, so ist dadurch der Visirstrahl in den scheinbaren Horizont gebracht; endlich bringe man bey dieser letzten Richtung des Fernrohrs

die

Fig. 168 die Luftblase mittelst der Rectificirschraube an ihre angewiesene mittlere Stelle, so ist dadurch das Nivellirinstrumente berichtiget.

Anmerkung. Man muß bey der ersten Berichtigungsmethode auf den Nivellirlatten jederzeit denjenigen Punkt anmerken, welcher mit dem Zielpunkte des Brettes übereinstimmet, wenn man den Visirstrahl auf den Zielpunkt gerichtet hat; wollte man aber lieber den unteren Rand des Brettes an den Nivellirlatten anmerken, so müßten bey dieser ersten Berichtigungsmethode auch die Visirstrahlen an den unteren Rand des Brettes gerichtet werden. Hingegen bey der zweyten Berichtigungsmethode und bey wirklichen Nivelliroperationen wird der Visirstrahl jederzeit auf den Zielpunkt gerichtet, und die Erhöhung des unteren Randes des Zielbrettes an jeder Latte bemerket, wenn das Zielbrett an beyden Nivellirlatten einerley Abmessungen hat.

Die oben beschriebene Nivellirwage wird ein Nivellirinstrument *mit einem einfachen Fernrohre* genennt, um selbe von andern Nivellirwagen zu unterscheiden, welche entweder mit zwey parallelen Fernröhren, oder auch nur mit einem einzigen Fernrohre versehen sind, bey welchem aber zwey Objectivgläser dergestalt angebracht sind, daß man von beyden Seiten das Oculargias einschieben könne. Da es nicht gar leicht ist bey einer jeden vorzunehmenden Nivelliroperation die richtige Uebereinstimmung der Achsen von beyden Objectivgläsern und der in beyden Brennpunkten angebrachten Kreutzfäden an solchen Nivellirinstrumenten zu untersuchen, so wird derjenige am besten handeln, der mit einem solchen Instrumente eine Nivelliroperation auszuführen hat, wenn er sich desselben nur wie eines Nivellirinstruments mit einem einfachen Fernrohre bedienet, und selbes auf die oben beschriebene Art berichtiget. Wenn man z. B. mit einem Nivellirinstrumente, dessen Fernrohr mit zwey Objectivgläsern versehen ist, eine Nivelliroperation auszuführen hat, so kann man sich vornehmen das Ocularglas immer an derjenigen Seite stehen zu lassen,

sen, wo die Elevationsschraube angebracht ist, und muß so- Fig.
dann von dieser Seite das Nivellirinstrument eben so berichtigen, als ob es nur mit einem gewöhnlichen einfachen Fernrohre versehen wäre.

Es giebt auch Nivellirwagen mit der Luftblase bey denen statt dem Fernrohre doppelte horizontale Diooptern angebracht sind. Dergleichen Nivellirwagen werden auf folgende Art berichtiget. Man läßt in einer Entfernung von 30 oder 40
Klaftern Fig. 169 eine Nivellirlatte AB aufstellen, bringt 169
mittelst der Elevationsschraube die Luftblase an ihre angewiesene mittlere Stelle, und läßt die Höhe des Visirstrahls Am anmerken; sodann verwendet man die Wasserwage so, daß die Diopter a gegen der Latte gekehret sey, bringet abermal die Luftblase mittelst der Elevationsschraube an ihre angewiesene mittlere Stelle, und läßt wieder die Höhe des Visirstrahls An anmerken: sind nun beyde Visirhöhen vollkommen gleich, so ware die Wasserwage schon ehevor berichtiget; sind hingegen die Visirhöhen ungleich, so weichen die zwey Visirstrahle nach entgegen gesetzten Richtungen von der Horizontallinie bp gleichviel ab; derowegen theile man den Unterschied mn auf der Latte in p in zwey gleiche Theile, richte den Visirstrahl nach p, bringe bey dieser Richtung des Diopterlineals die Luftblase mittelst der Rectificirschraube an ihre angewiesene mittlere Stelle, so ist dadurch ein solches Nivellirinstrument berichtiget.

511. Aufgabe. **Den Höhenunterschied zweyer Punkte** 170
A und B zu finden, die so weit von einander entfernet sind, daß man aus einem einzigen Zwischenstande nicht nach beyden Punkten visiren kann. Fig. 170.

Auflösung. 1) Man lasse eine Latte durch einen Gehilfen in A, und in einer schicklichen Entfernung C durch einen anderen Gehilfen ebenfalls eine Latte in C aufrichten, das Nivellirinstrument aber stelle man nach dem Augenmasse beyläufig in die Mitte zwischen A und C in Nro. 1, damit man die Erhöhung des scheinbaren Horizontes ausser Acht lassen

Fig. 170 könne; sodann bringe man den Visirstrahl des berichtigten Nivellirinstruments in den scheinbaren Horizont einmal gegen F und einmal gegen G, und lasse jeden Gehilfen seine Visirhöhe, nämlich die Erhöhung des unteren Randes des Zielbrettes über den Boden, aufschreiben.

2) Man schicke den vorderen in C gestandenen Gehilfen mit seiner Latte weiter auf eine schickliche Entfernung nach D, den zweyten in A gestandenen Gehilfen aber lasse man seine Latte über den Punkt C aufrichten, und stelle das Nivellirinstrument beyläufig in die Mitte zwischen C und D in Nro. 2, visire sodann nach I und H, und lasse abermal jeden Gehilfen seine Visirhöhe aufschreiben.

3) Und dieses beobachte man auch in den folgenden Standpunkten, nämlich der vordere nun in D gestandene Gehilfe wird weiter nach E geschicket, der hintere nun in C gestandene Gehilfe stellet seine Latte auf den Punkt D, das Instrument aber wird in Nro. 3 aufgerichtet; u. s. w. bis nämlich der vordere Gehilfe in B angelanget ist.

4) Endlich lasse man jeden Gehilfen seine gefundenen Visirhöhen zusammen addiren, und ziehe die kleinere Summe von der größeren ab, so ist der Ueberrest der gesuchte Höhenunterschied zwischen A und B; ist nun die Summe der Visirhöhen des vorderen Gehilfen, der mit seiner Latte zuletzt auf B stand, kleiner als jene des hinteren Gehilfen, der zu erst auf A stand, so liegt B um den gefundenen Unterschied höher als A; im Gegentheile liegt B um eben diesen Unterschied niedriger als A.

Denn $AF - CG = Cc$
$CH - DI = Dd$
$DK - EL = - Dm$
$EM - BN = - Ee$;

folglich auch $AF + CH + DK + EM - (CG + DI + EL + BN) = (Cc + Dd)\ (Dm + Ee) = d(Q + Dd) - (Dm + mn) = DQ - Dn = Qn = AP = Bb$

An-

Anmerkung. Es ist nicht unumgänglich nothwendig, daß die Standpunkte des Nivellirinstruments und die Latten alle in einer nämlichen Vertikalebene sich befinden; man erhält den gesuchten Höhenunterschied der zwey Punkte A und B eben so richtig, wenn man schon wegen zwischenliegenden Hindernissen nach was immer für einem Umschweife von A bis B zu nivelliren gezwungen ist. Fig. 170

512. **Aufgabe. Die Abstände mehrerer Punkte von dem Horizonte eines angenommenen Punktes A Fig. 171 durch das Nivelliren zu finden, es mögen die zu nivellirenden Punkte entweder alle in einer nämlichen Vertikalebene sich befinden, oder in einer Gegend zerstreuet herumliegen.** 171

Auflösung. 1) Man lasse an alle solche Oerter Pflöcke einschlagen, wo sich merkliche Veränderungen des Bodens zeigen, nämlich man bemerke alle zu nivellirenden Punkte mit Pflöcken, und stelle das Nivellirinstrument unweit A in Nro. 1, die Latte aber in A, und lasse die Visirhöhe Aa genau anmerken; sodann stellt der nämliche Gehilfe seine Latte in B, subtrahirt die Visirhöhe in B von der in A gefundenen Aa, und schreibt den Unterschied an den in die Erde eingeschlagenen Pflock mit dem Zeichen + an, wenn er positiv ist; wäre hingegen dieser Unterschied negativ und folglich B niedriger als A, so müßte er mit dem Zeichen — angeschrieben werden; darauf stellt der nämliche Gehilfe seine Latte über C, subtrahirt abermal die Visirhöhe Ep von der ersten in A beobachteten Aa, und verfährt übrigens wie in B; auf diese Art können nun mehrere Punkte um Nro. 1 herum aus diesem nämlichen Standpunkte mittelst der in A beobachteten und angemerkten Visirhöhe nivelliret werden.

2) Sodann überträgt man das Nivellirinstrument weiter in Nro. 2; der nämliche Gehilfe stellet seine Latte auf was immer für einen schon bestimmten Punkt z. B. auf den Punkt C, beobachtet die Visirhöhe Cc, und addiret zu derselben den auf dem Pflocke C aufgeschriebenen Höhenunterschied PC

Fig. 171 mit dem gehörigen Zeichen + oder —, um Pc nämlich den Abstand des Visirstrahls CS von dem Horizonte AZ, zu erhalten; mittelst dieser Höhe Pc, die wir die Vergleichungshöhe nennen wollen, werden nun die Abstände der Punkte D, E, F von dem Horizonte AZ gefunden, wenn der Gehilfe die Visirhöhen Dq, Er, Fs von der in C gefundenen Vergleichungshöhe Pc abzieht, und die Unterschiede mit den entsprechenden Zeichen + oder — an die Pflöcke bey D, E, F gehörig anschreibet; und auf diese Art können abermal mehrere Punkte um Nro. 2 herum mittelst der Vergleichungshöhe Pc dieses Standpunktes, nivelliret werden.

3) Man übertrage das Nivellirinstrument weiter in Nro. 3, der Gehilfe stelle seine Latte auf was immer für einen schon nivellirten Punkt z. B. auf F, und addire zu der Visirhöhe Ff den an dem Pflocke F angeschriebenen Höhenunterschied mit dem entsprechenden Zeichen + oder — um für diesen neuen Standpunkt Nro. 3 die Vergleichungshöhe Sf zu finden; darauf stellet der nämliche Gehilfe seine Latte in G und dann in H, subtrahirt die Visirhöhen Gt, Hx von der in F bestimmten Vergleichungshöhe Sf dieses Standpunktes, und schreibt die Unterschiede mit dem gehörigen Zeichen + oder — an die Pflöcke in G und H; u. s. w.

Es wird ein jeder leicht einsehen, daß man die angeführte Subtraktion der Visirhöhen von der Vergleichungshöhe vermeiden könne, wenn man bey jedem Standpunkte die gefundene Vergleichungshöhe auf die Nivellirlatte gehörig aufträgt, und mit einem Merkmale bezeichnet, weil sich sodann unmittelbar die Höhenunterschiede der nivellirten Punkte auf der Latte ergeben; nämlich der Abstand des Merkmals von dem unteren Rande des Zielbrettes giebt den gesuchten Höhenunterschied des nivellirten Punktes; und dieser Höhenunterschied ist positiv, wenn das Merkmal höher steht, oder er ist negativ nämlich eine Vertiefung, wenn das Merkmal der Vergleichungshöhe niedriger ist, als die Visirhöhe des nivel-

lirten

lirten Punktes bis an den unteren Rand des Zielbrettes. Fig. 171
Wenn man mit mehreren Nivellirlatten, und mit mehreren verläßlichen Gehilfen versehen ist, so kann um die Arbeit zu beschleunigen, bey einem jeden Standpunkte die entsprechende Vergleichungshöhe auf eine jede Latte aufgetragen werden, die Gehilfen schickt man sodann mit diesen Latten auf die um den Standpunkt herumliegenden Punkte, und läßt sie die gefundenen Höhenunterschiede mit dem entsprechenden Zeichen + oder — auf die Pflöcke gehörig aufschreiben, womit die zu nivellirenden Punkte bemerket sind.

Wenn nun die Punkte A, B, C, D, u. s. w. alle in einer nämlichen Vertikalebene liegen, so werden sodann ihre horizontalen Abstände gemessen, um ihre Entfernungen von dem Punkte A zu erhalten, welche man darauf samt den zugehörigen Höhenunterschieden in eine Tafel ordentlich einträgt; nämlich:

Entfernungen von dem Punkte A.		Abstände von dem Horizonte AZ.		
A	0 Kl.	0'	0''	0'''
B	18 —	+ 3	9	4
C	59 —	+ 3	8	6
D	101 —	+ 2	3	11
E	124 —	— 2	6	9
F	145 —	— 1	1	5
G	197 —	+ 2	3	0
H	219 —	— 7	2	4
I	258 —	— 8	4	3

Nachdem einmal diese Tafel fertig ist, so ist es gar leicht den Durchschnitt der nivellirten Strecke nach einem beliebigen verjüngten Maaßstabe auf einer Geraden AZ zu verzeichnen. Auch kann man sodann mittelst dieser Tafel den Höhenunterschied von jeden zwey nivellirten Punkten finden, wenn man ihre Abstände von der Horizontallinie AZ in der Tafel gehörig von einander abzieht.

Wenn hingegen die nivellirten Punkte auf einer Gegend
Fig. zerstreuet herumliegen, so müßen selbe mit dem Meßtische or-
171 dentlich aufgenommen, und die entsprechenden Höhenunterschie- de dazu aufgeschrieben werden; will man nicht zu jedem ni- vellirten Punkte des aufgenommenen Planes den zugehörigen Höhenunterschied schreiben, um nicht denselben mit allzuvielen Ziffern zu überhäufen, so kann man die aufgenommenen Punk- te auf dem Plane mit Buchstaben a, b, c, ... a', b', c', ... bezeichnen, und diese Buchstaben samt den ent- sprechenden Höhenunterschieden in eine Tafel ordentlich ein- tragen.

Man muß bey dieser Nivelliroperation nicht auf gar große Entfernungen etwan nicht über 100 Kl. visiren, damit man die Erhöhung des scheinbaren Horizontes außer Acht lassen könne.

172 513. Aufgabe. PQR sey eine Grube, die bis auf eine durch den Punkt A gelegte horizontale Fläche aus- zufüllen ist; man soll den Kubickinhalt der Grube un- ter dieser Horizontalfläche berechnen, damit man die Menge der zur Ausfüllung erforderlichen Erde bestim- men könne.

Auflösung. 1) Man suche an den Wänden der Grube mehrere Punkte B, C, ... D, E..... welche in der durch A gelegten Horizontalfläche liegen, und dieses geschieht, wenn man das Nivellirinstrument etwann in c stellet, über den gegebenen Punkt A eine Nivellirlatte aufrichten, auf der- selben die Visirhöhe bemerken, und in dieser Höhe das Ziel- brett befestigen läßt; mit dieser Latte schicket man sodann den Gehilfen gegen B, und läßt ihn so lange daselbst mit aufgerichte- ter Latte und unverrucktem Brette hin und hergehen, und ei- nen Punkt B suchen, bis der Visirstrahl genau auf das Zielbrett eintrifft; dieser Punkt B wird sodann mit einem Pflocke bezeichnet. Und auf diese Art sucht man mehrere Punkte C, D, E..... Wenn man nun aus diesem Stand- punkte c nicht den ganzen Umfang der Grube übersehen kann,

so

so muß man sodann das Nivellirinstrument weiter in f aufrichten, die Latte aber auf einen bereits schon gefundenen Punkt z. B. auf C stellen; von f visiret man auf C und läßt in der Höhe des horizontalen Visirstrahls abermal das Zielbrett befestigen; mit dieser Visirhöhe sucht nun der Gehilfe eben so wie bey dem vorigen Standpunkte mehrere Punkte F, G, H, welche mit C und folglich auch mit A in einerley Horizonte liegen; und bemerket diese gefundenen Punkte mit Pflöcken. Fig. 172

2.) Ist einmal die horizontale Gränze ABCGHEDA gefunden und jeder Winkel derselben mit einem Pflocke bemerket, so theilet man die ganze innere Oberfläche der Grube unter der bestimmten Horizontalfläche, durch die Punkte a, b, c, d, e, dergestalt in Dreyecke ein, daß jedes Dreyeck für sich betrachtet nach dem Augenmasse eine ebene wie immer schiefgeneigte Fläche ausmache; sodann bestimmet man durch Nivelliren nach (512) die Vertiefungen der Punkte a, b, c, d, ... unter der Horizontalfläche ACH, schreibet die gefundenen Vertiefungen an die Pflöcke, womit die Punkte a, b, c, d, ... bemerket sind, und nimmt darauf die ganze Figur ordentlich mit dem Meßtische auf, um alle horizontalen Grundflächen AbD, Aba, abc, ... zu erhalten, und schreibet zu einem jeden aufgenommenen Punkte seine entsprechende Vertiefung.

3) Endlich berechnet man den Flächeninnhalt eines jeden aufgenommenen horizontalen Dreyeckes, stellet sich vor, daß der innere Raum der Grube unter der Horizontalfläche ACH aus so vielen dreyseitigen an dem unteren Ende schiefabgeschnittenen geraden Prismen zusammengesetzet sey, als Dreyecke da sind, berechnet den Kubickinhalt eines jeden Prisma aus seiner horizontalen Grundfläche, und aus seinen drey nivellirten Seiten oder Höhen nach (423.), und addiret alle diese berechneten Prismen zusammen, so wird der gesuchte Kubickinhalt der Grube zum Vorschein kommen. Es sey zum B. der berechnete Flächeninhalt des Dreyeckes abc = 1500 □',

und

Fig. und die Vertiefung des Punktes a = 5' 6'' = $5\frac{1}{2}$', b =
172 7', c = $10\frac{1}{4}$', so ist der Inhalt des schiefabgeschnittenen Prisma, welches abc zur Grundfläche hat = 1500. × $\left(\frac{5\frac{1}{2}+7+10\frac{1}{4}}{3}\right)$ K. Sch. Die äußersten Körper, wie z. B. AaB und Aab können immer als dreyseitige schiefabgeschnittene Prismen angesehen werden, wenn man nur betrachtet, daß bey diesem Aab eine, und bey jenem AaB zwey Seiten = o sind. Es sey z. B. die horizontale Grundfläche Aba = 1000 Q. Sch. so ist der Kubikinhalt dieses Körpers = 1000.$\left(\frac{5\frac{1}{2}+7+0}{3}\right)$ K. Sch. u. s. w.

Wäre PQR nicht eine Grube, sondern ein Hügel, den man bis auf eine durch den Punkt A gelegte horizontale Fläche abzutragen hätte, so könnte man seinen Kubickinhalt auf die nämliche Art berechnen.

Eben so, wie man im gegenwärtigen Falle die Punkte B, C, D, E, ... bestimmet hat, die mit A in einerley Horizonte liegen, kann auch auf einer zur Ueberschwemmung eingerichteten Gegend die Ueberschwemmungsgränze gefunden werden, wenn es bekannt ist, wie hoch das Wasser durch eine Schleusse oder durch sonst ein vorgelegtes Hinderniß aufgeschwellet wird.

Endlich bedienet man sich auch der Nivellirwage, wenn in einer Linie oder in einer Gegend mehrere Pflöcke dergestalt einzuschlagen sind, daß ihre Köpfe alle in einem nämlichen Horizonte sich befinden: wenn die Abstände der Pflöcke sehr klein sind, so kann man dieses mittelst einer gemeinen Schrottwage oder auch mittelst einer Libelle mit der Luftblase erhalten; der Schrottwage oder der Libelle bedienet man sich auch, wenn eine ziemlich steile aber doch zugängige Anhöhe von einigen Klaftern, durch horizontal- und vertikal gestellte Stäbe oder Latten auszumessen ist, welches Verfahren unter dem Namen Cultelliren jedermann bekannt ist.

Von

Von dem Gebrauche des Barometers bey Höhenmessungen.

§. 514. Es ist zuweilen erforderlich den Höhenunterschied zweyer Oerter zu finden, die so weit voneinander entfernet sind, daß man den gesuchten Höhenunterschied weder mittelst des Nivellirens, noch auch mittelst einer trigonometrischen Operation füglich bestimmen kann. In einem solchen Falle nimmt man die Zuflucht zu dem Barometer. Es ist nämlich aus der Naturlehre bekannt, daß das Gewicht der auf die Oefnung der Barometerröhre drückenden athmosphärischen Luftsäule das Queksilber im Barometer in einer solchen Höhe erhalte, daß das Gewicht einer Quecksilbersäule, welche die offene Oberfläche des Quecksilbers zur Grundfläche und den Höhenunterschied beyder Oberflächen des Quecksilbers zur Höhe hat, eben so viel betrage, als das Gewicht der auf die offene Oberfläche des Quecksilbers drückenden Luftsäule, und daß folglich die Gewichte verschiedener Luftsäulen von ungleichen Höhen und gleichen Grundflächen sich gegen einander verhalten wie die Höhen, auf welchen sie das Quecksilber im Barometer erhalten. Es sey z. B. einer Luftsäule, welche sich von dem Fuße eines Berges bis auf die äusserste Gränze der Athmosphäre erstrecket und p Quadratzolle zur Grundfläche hat, wirkliches Gewicht $= G$, einer anderen Luftsäule von der nämlichen Grundfläche, welche sich von dem Gipfel des Berges bis auf die äusserste Gränze der Athmosphäre erstrecket, wirkliches Gewicht sey $= g$, die erste Luftsäule erhalte das Quecksilber in einer Höhe von a Zollen, und die zweyte nur in einer Höhe von b Zollen, über dieses sey das wirkliche Gewicht eines Kubikzolles Quecksilber $= m$ ℔, so ist es aus der Hydrostatik bekannt, daß $G = apm$ ℔ und $g = bpm$ ℔ sey; folglich $G : g = apm : bpm = a : b$

I. Damit man nun den Höhenunterschied zweyer Oerter aus ihren mittlern Barometerhöhen bestimmen könne, so muß man zu erst ausfindig machen, nach was für einem Gesetze die Barometerhöhen von dem Horizonte gegen die Athmosphä-

Fig. re hinaufwärts abnehmen, wenn man die Erhöhungen über den Horizont in einer arithmetischen Reihe auf einander folgen läßt, oder weil vermög dem vorhergehenden die Barometerhöhen an verschiedenen Erhöhungen sich gegeneinander verhalten, wie die Gewichte der auf die offene Oberfläche des Quecksilbers drückenden Luftsäulen von gleichen Grundflächen, so muß man ausfindig machen, nach was für einem Gesetze die Gewichte der Luftsäulen von gleichen Grundflächen in gleichen auf einander folgenden Erhöhungen über einen angenommenen Hori-
192 zont abnehmen.. Es sey z. B. MPQN Fig. 192 eine vertikale athmosphärische Luftsäule, die sich von der horizontalen Fläche MN bis auf die äusserste Gränze der Athmosphäre erstrecket, in gleichen Abständen $Mm = mp = pr \ldots$ sey diese Luftsäule durch die horizontalen Flächen mn, pq, rs... durchschnitten; man bezeichne ferners die Gewichte der auf einander folgenden Luftsäulen MQ, mQ, pQ...., welche auf die gleichen Flächen MN, mn, pq.. drücken, mit $A, B, C, D..$, so wird verlanget, daß man ausfindig mache, nach was für einem Gesetze diese Gewichte $A, B, C, D..$ abnehmen. Um dieses Gesetz zu entdecken, müssen wir aus der Naturlehre den Satz für bekannt annehmen, daß die Dichtigkeiten der athmosphärischen Luft an verschiedenen noch zugängigen Höhen über einem angenommenen Horizonte sich gegeneinander verhalten, wie die Kraft oder wie das Gewicht, womit sie zusammengepresset wird, oder welches einerley ist, daß die wirklichen Gewichte der athmosphärischen Luft in gleichen Räumen (unter dem nämlichen Kubikinhalte) sich gegeneinander verhalten, wie die Kräften, oder wie die Gewichte, womit die Luft in diesen gleichen Räumen zusammengepreßt erhalten wird.

II. Es sey nun in dem Raume Mn das Gewicht der Luft $= a'$, welche von dem Gewichte B der darauf drückenden Luftsäule mQ gepresset wird; in dem eben so großen Raume mq sey das Gewicht der Luft $= b'$, welche von dem Gewichte C der darauf drückenden Luftsäule pQ gepresset wird; u. s. w.

die

die Barometerhöhen an den Stellen M, m, p, q.. aber sollen $= a, b, c, d \ldots$ seyn, so finden vermög dem angeführten Satze folgende Proportionen statt; Fig. 192

$a' : B = b' : C$; $b' : C = c' : D$; $c' : D = d' : E$; u. s. w.

es ist aber offenbar $a' = A - B$; $b' = B - C$; u. s. w.

folglich $A - B : B = B - C : C$; $B - C : C = C - D : D$; u. s. w.

und endlich durch die Zusammensetzung (componendo)

$A : B = B : C$; $B : C = C : D$; $C : D = D : E$; u. s. w.

nämlich die Gewichte $A, B, C, D \ldots$ der in einer arithmetischen Reihe auf einander folgenden Luftsäulen nehmen gegen der Athmosphäre hinaufwärts in einer geometrischen Reihe ab.

Da nun auch $A : B : C : D .. = a : b : c : d \ldots$ statt findet vermög (514.), so nehmen auch die Barometerhöhen an den Stellen m, p, q, r.. in einer geometrischen Reihe ab, wenn die Erhöhungen dieser Stellen über den Horizont MN in einer arithmetischen Reihe auf einander folgen.

III. Nun sey die Erhöhung MR $= k$, die Erhöhung MS $= x$, und MR sey in MS genau $n$mal enthalten, nämlich $x = nk$, so ist $n = \frac{x}{k}$; ferner sey die Barometerhöhe in M $= a$, in R $= f$, und in S $= g$, so sind die Barometerhöhen an den in einer arithmetischen Reihe auf einander folgenden Stellen $0, 1, 2, 3, \ldots n$, weil sie in einer geometrischen Reihe abnehmen

$= a, f, \frac{f^2}{a}, \frac{f^3}{a^2}, \ldots \frac{f^n}{a^{n-1}} = a\left(\frac{f}{a}\right)^n$; aber an der Stelle n ist die Barometerhöhe $= g$ gesetzet worden; folglich $g = a\left(\frac{f}{a}\right)^n$, oder endlich $g = a\left(\frac{f}{a}\right)^{\frac{x}{k}}$, wenn man statt n seinen Werth setzet.

IV. Aus dieser letzten Gleichung folgt nun $x = k.\frac{\log a - \log g}{\log a - \log f}$.

Die-

Fig. Diese gefundene Gleichung zeigt uns an, daß man aus den bekannten mittleren Barometerhöhen a, g zweyer Oerter M, S ihren Höhenunterschied x = MS bestimmen könne, wenn man an einem dritten Orte R (dessen Erhöhung = k = MR über den Ort M sich füglich trigonometrisch ausmessen läßt) die Barometerhöhe f zu einer Zeit beobachtet, da der Barometer an dem Orte M auf seinen mittleren Stand weiset. Die Barometerhöhen können nach einem beliebigen jedoch alle drey nach einem nämlichen Maaßstabe, z. B. in Wiener Duodecimallinien bestimmet werden; der gemessene Höhenunterschied k kann in einem anderen Maße z. B. in Wienerklaftern ausgedrücket werden, und der gesuchte Höhenunterschied x wird sodann nach gehöriger Reduktion in eben jenem Maße zum Vorschein kommen, womit man den gemessenen Höhenunterschied k ausgedrücket hat.

Z. B. In Wien ist an dem Horizonte, der ohngefähr durch den Fuß des St. Stephansthurms durchgeht, die mittlere Barometerhöhe a = 336 Wienerlinien, und am Kahlenberge unweit von Wien sey an dem Horizonte der Kirche die mittlere Barometerhöhe g = 325,5 Wienerlinien; um nun die Erhöhung x des Kirchenhorizontes am Kahlenberge über den St. Stephanshorizont zu bestimmen, so messe man ein Stück von der Höhe des St. Stephanhthurmes z. B. das Stück vom Fuße des Thurmes bis auf die Achse, worauf die Uhrzeiger befestiget sind, diese Höhe beträgt nun ziemlich genau 37 Wienerklafter; ferner beobachte man an diesem Orte die Barometerhöhe f zu einer Zeit, da am Fuße des Thurmes die Barometerhöhe 336 Wienerlinien beträgt; es sey zu dieser Zeit bey der Uhrachse die Barometerhöhe f = 333,15 Wienerlinien. Und nun wird, um die Erhöhung des Kirchenhorizontes am Kahlenberge über den St. Stephanshorizont zu finden, die Rechnung auf folgende Art angelegt:

Fig.

$$\begin{array}{rll} & \log a = \log\ 336 & = 2{,}5263393 \\ \text{subtr.} & \log g = \log\ 325{,}5 & = 2{,}5125510 \\ & \log a - \log g & = 0{,}0137883 = D \\ \text{subtr.} & \log f = \log\ 333{,}15 & = 2{,}5226398 \text{ von } \log a. \\ & \log a - \log f & = 0{,}0036995 = d \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log D = & 0{,}1395108 - 2 \\ \text{subtr.}\ \log d = & 0{,}5681430 - 3 \\ & 0{,}5713678 \\ \text{addirt}\ \log k = \log 37 = & 1{,}5682017 \\ \text{giebt}\ \log x = & 2{,}1395695 \end{array}$$

und folglich $x = 137{,}9 = 138$ W. Klaft.

Es wird ohne meiner Erinnerung ein jeder leicht einsehen, daß man auch den Höhenunterschied zwischen dem Kirchenhorizonte am Kahlenberge und zwischen dem St. Stephanshorizonte aus ihren für bekannt angenommenen mittleren Barometerhöhen finden könne, wenn man am Kahlenberge eine leicht auszumessende Höhe wirklich genau ausmißt, und an dieser Höhe die Barometerhöhe zur gehörigen Zeit beobachtet. Es sey z. B. an dem höchsten Thurmfenster am Kahlenberge die Barometerhöhe = 324 Wienerlinien zu einer Zeit, da am Kirchenhorizonte die Barometerhöhe 325,5, und am St. Stephanshorizonte 336 Wienerlinien beträgt; die Erhöhung des angeführten Thurmfensters über den Kirchenhorizont sey = 20,07 Wienerklafter. Aus diesen wird nun der gesuchte Höhenunterschied bestimmet, wenn man $a = 325{,}5$, $g = 336$, $f = 324$, $k = 20{,}07$ setzet, und diese Werthe in der gefundenen Gleichung $x = k.\dfrac{\log a - \log g}{\log a - \log f}$ gehörig substituiret.

Nämlich

Fig. 192

$$
\begin{array}{rl}
\text{Nämlich } \log a = \log 325{,}5 & = 2{,}5125510 \\
\text{subtr. } \log g = \log 336 & = 2{,}5263393 \\
\hline
\log a - \log g & = (-)0{,}0137883 = D \\
\text{subtr. } \log f = \log 324 & = 2{,}5105450 \text{ von } \log a \\
\log a - \log f & = 0{,}0020060 = d \\
\hline
\log D & = 0{,}1395108 - 2 \\
\text{subtr. } \log d & = 0{,}3023309 - 3 \\
\hline
 & \ 0{,}8371799 \\
\text{addirt } \log k = \log 20{,}07 & = 1{,}3025474 \\
\hline
\text{giebt } \log x & = 2{,}1397273
\end{array}
$$

und folglich $x = 137{,}95 = 138$ W. Klaft.
oder vielmehr wegen dem Zeichen (—) ist $x = -138$ W. Kl.

Dieses Zeichen (—) zeiget an, daß der gesuchte Höhenunterschied in Rücksicht des Kirchenhorizontes am Kahlenberge negativ, nämlich eine Vertiefung sey.

V. Der Höhenunterschied zweyer Oerter läßt sich aus ihren mittleren Barometerhöhen noch bequemer berechnen, aber vielleicht nicht so zuverlässig, als nach der eben angeführten Art; man kann nämlich die Rechnung auf folgende Art abkürzen.

Wenn man mehrere mit dem Barometer angestellte Versuche mit einander vergleichet, so findet man **erstens**, daß an der Meeresfläche die mittlere Barometerhöhe 345 Wienerlinien betrage; **zweytens** daß in einer Erhöhung von $25\frac{1}{4}$ Wienerklafter über die Meeresfläche die Barometerhöhe um 2 Wienerlinien niedriger nämlich 343 Wienerlinien gleich sey. Setzen wir daher in der oben (IV) gefundenen Gleichung, $a = 345$ $f = 343$, $k = 25\frac{1}{4} = 25{,}25$, und die Erhöhung eines beliebigen Ortes über die Meeresfläche, dessen mittlere Barometerhöhe g W. Lin. beträgt, $= y$, so ist nach gehöriger Reduktion $y = 10000.(\log 345 - \log g)$ Wienerklafter; und eben so ist die Erhöhung y' eines anderen Ortes über die Meeresfläche, dessen mittlere Baromterhöhe g' Wienerlinien beträgt,

y'

$y' = 10000.(\log 345 - \log g')$ W. Kl. es ist also auch Fig.
$y' - y = 10000.(\log 345 - \log g') - 10000 \times$ 192
$(\log 345 - \log g) = 10000.(\log g - \log g')$ W. Kl. oder wenn wir $y' - y = x$, $g = b$, und $g' = c$ setzen, so ist $x = 10000.(\log b - \log c)$ W. Klaft.

Nämlich man drücke die mittleren Barometerhöhen b und c der zwey Oerter, deren Höhenunterschied gesucht wird, beyde in Linien oder auch beyde in Zollen aus, und multiplicire die Differenz der Logarithmen von diesen Barometerhöhen mit 10000, welches gar leicht geschieht, wenn man das (,) um vier Stellen weiter gegen der Rechten rücket, so wird der gesuchte Höhenunterschied in W. Kl. zum Vorschein kommen.

Z. B. der Höhenunterschied zwischen dem St. Stephanshorizonte in Wien und zwischen dem Kirchenhorizonte am Kahlenberge wird aus den angenommenen mittleren Barometerhöhen dieser zwey Oerter $b = 336$ und $c = 325,5$ auf folgende Art gefunden.

$$\begin{array}{l} \log 336 \;\;\; = 2,5263393 \\ \log 325,5 = 2,5125510 \\ \hline 10000 \times 0,0137883 = 138 \text{ W. Klaft.} \end{array}$$

Wir wollen diese Regel noch auf folgendes wirkliches Beyspiel anwenden. Nach H. Bouguers Beobachtung (Figure de la Terre, Paris 1749) ist auf dem Gipfel des Berges Pichincha in Peru die Barometerhöhe $c = 191$, und zu Carabourou ist die Barometerhöhe $b = 254,75$ Pariser Linien;

$$\left.\begin{array}{ll} \text{nun ist } \log 254,75 = 2,4061142 \\ \text{und } \quad \log 191 \;\;\; = 2,2810334 \end{array}\right\} \text{subtr.}$$

$$\text{mult. mit } \quad 10000 \times 0,1250808 = 1250,8 \text{ W. Kl.}$$

folglich ist die Erhöhung des Pichincha über Carabourou gleich 1250,8 Wien. Kl. Durch die genaueste trigonometrische Bestimmung fand H. Bouguer diese Erhöhung = 1209 Pariser Kl. welche sehr nahe 1242,4 Wien. Klaft. gleich

sind

Fig. sind; die Berechnung nach der gegebenen Regel weicht demnach von der wirklichen Ausmessung bey 1250 ungefähr nur um 8 Kl. ab. Es ist leicht einzusehen, daß es in diesem Falle gar nicht nothwendig sey die in Pariserlinien ausgedrückten Barometerhöhen auf Wienerlinien zu reduciren.

Wenn man die Höhe eines Berges mittelst des Barometers bestimmen will, so muß man zwey übereinstimmende Barometer haben, und bey einer gelinden Witterung beynahe zur nämlichen Zeit am Fuße und auch am Gipfel des Berges die Barometerhöhen beobachten lassen. In einigen Fällen wird der Beobachter am Berge mit einem Pistolenschuße das Zeichen zur Beobachtung geben können, sodann wird sowohl am Gipfel als auch am Fuße des Berges in mehreren aufeinander folgenden Zeittheilen die Barometerhöhe beobachtet, und dabey zugleich die Zeit der Beobachtung angemerket.

VI. Die Barometer können auf folgende Art übereinstimmend gemacht, nämlich dergestalt zubereitet werden, daß am nämlichen Orte in allen Barometern das Quecksilber zur nämlichen Zeit immer gleich hoch stehe.

Man nimmt mehrere cylindrische gläserne Röhren, deren jede ohngefehr 45 Zoll in der Länge und etwan $1\frac{1}{2}$ oder 2 Linien im inneren Durchmesser hat; schließt das eine Ende bey jeder Röhre hermetisch zu, und biegt das andere offene Ende der Röhre in einer Entfernung von 33 Zollen von dem zugeschlossenen Ende herunter gerechnet zurück. Sodann füllet man diese Röhren mit wohlgereinigtem Quecksilber, nachdem sie ehevor von allem Staube und Feuchtigkeit gereiniget worden, und schaffet durch öfteres Umkehren die noch zurückgebliebene Luft heraus. Darauf bindet man an das zugeschlossene Ende jeder Röhre einen biegsamen Eisen- oder Meßingdrat, und hänget alle diese Röhren an einer Mauer auf. Endlich erhitzet man gemächlich mittelst eines Wachslichtes das Quecksilber in den Barometerröhren von oben abwärts dergestalt, daß es zu kochen anfängt, und dadurch eine Menge Luft in den leeren Raum hinaufstosset, welche

man

man darauf durch das Umkehren aus der Röhre hinaus- Fig. schaffen kann; nach dieser Operation wird man in einer jeden Röhre die Barometerhöhe (den Höhenunterschied beyder Oberflächen des Quecksilbers eines vertikal aufgehangenen Barometers) um einige Linien kleiner finden, und zwar in derjenigen Röhre wird die Barometerhöhe am kleinsten seyn, bey der durch das Erhitzen und Umkehren die meiste Luft hinausgeschaffet worden, weil dadurch des Quecksilbers eigenthümliches Gewicht (gravitas specifica z. B. das wirkliche Gewicht eines Kubikzolles) zugenommen hat. Durch dieses öfters wiederholte Verfahren macht man zu erst zwey Barometer übereinstimmend, und darauf wendet man eben diese Methode nach der Ordnung auf die übrigen Barometer an, um sie mit den ersten zweyen schon fertigen übereinstimmend zu machen. Hat man nun auf diese Art schon mehrere z. B. fünf Barometer übereinstimmend gemacht, und findet bey der 6ten Röhre, nachdem man sie schon einigemal erhitzet hat, die Barometerhöhe kleiner als in den übrigen schon übereinstimmenden, so kann man diese 6te Röhre umgekehrt mit dem Buge aufwärts aufhängen, und selbe in dieser Stellung ohngefähr in ihrer Mitte erhitzen; wenn man darauf diese Röhre wieder aufrecht stellet, so wird man finden, daß in derselben die Barometerhöhe etwas zugenommen habe, weil durch das Erhitzen aus dem Quecksilber etwas Luft entwickelt wird, welche wegen dem starken Drucke der Atmosphäre nicht aus der Röhre dringen kann, und folglich dadurch das eigenthümliche Gewicht des Quecksilbers in der Röhre vermindert. Diese entwickelte Luft wird man in der erhitzten Röhre ganz deutlich in sehr kleinen Bläschen sehen; nachdem aber die Hitze der Röhre schon etwas abgenommen hat, werden die Luftbläschen nicht mehr zu sehen seyn. Und auf diese Art mit der vorigen verbunden kann man auch die angeführte 6te Röhre mit den übrigen schon fertigen übereinstimmend machen.

Sind einmal die Barometer auf diese Art übereinstimmend gemacht, so muß man selbe auch noch dergestalt einrich-

Fig. ten, daß zur nämlichen Zeit am nämlichen Horizonte in der Wärme und Kälte die Barometerhöhe einerley sey. Dieses kann erhalten werden, wenn man in einem jeden der übereinstimmenden Barometer ein sehr kleines Luftbläschen durch die Hitze aus dem Quecksilber in den luftleeren Raum hinauftreibet, und solches darinnen läßt. Die Größe dieses Luftbläschen läßt sich am füglichsten durch Versuchen in einem sehr kalten Wintertage bestimmen, (da das Reaumürsche Thermometer ohngefähr auf — 10 weiset) wenn man einen Zimmerofen dergestalt erwärmen läßt, daß sehr nahe beym Ofen eben dieses Thermometer ohngefähr auf + 40 weiset. Nachdem nämlich ein kleines Luftbläschen in den luftleeren Raum schon hinaufgetrieben ist, wird der Barometer mit seinem Gestelle, worauf sich die Eintheilung befindet, sehr nahe bey dem heißen Ofen aufgehangen, und daselbst so lange gelassen, bis er hinlänglich erwärmet ist; darauf hänget man eben diesen Barometer in die sehr kalte Luft, und läßt ihn daselbst solang verbleiben, bis er ohngefähr die Temperatur der Luft angenommen hat. Findet man nun, daß die Barometerhöhe dieses Barometers sowohl bey dem heißen Ofen, als auch in der kalten Luft mit der Barometerhöhe eines anderen übereinstimmenden Barometers immer einerley verbleibet, welcher sich an einem Orte von mittlerer Temperatur befindet, so hat das hinaufgetriebene Luftbläschen die gehörige Größe. Findet man aber, daß die Barometerhöhe bey dem heißen Ofen verlängert, und in der kalten Luft verkürzet werde, so ist das Luftbläschen zu klein; hingegen ist das Luftbläschen zu groß, wenn das Gegentheil geschieht; derowegen muß man im ersten Falle das Luftbläschen vergrößern, und im zweyten Falle verkleinern, und dieses Verfahren so lang wiederholen, bis man seinen Entzweck erhält. Die Ursache ist leicht einzusehen; es ist nämlich bekannt, daß die Luft sowohl als auch das Quecksilber sich in der Wärme ausdehne, jedoch die Luft nach einem viel stärkeren Verhätlniße. Des Quecksilbers eigenthümliches Gewicht wird in der Wärme durch die Ausdehnung

klei-

kleiner und folglich dadurch nach hydrostatischen Gründen bey einerley Drucke der Athmosphäre die Barometerhöhe vergrößert; und da durch diese nämliche Wärme auch das Luftbläschen ober dem Quecksilber in der Barometerröhre ausgedehnet und folglich die Quecksilbersäule stärker heruntergedrücket wird, so muß dadurch die Barometerhöhe verkleinert werden; und dieses Vergrößern und Verkleinern der Barometerhöhe wird sich gegeneinander beynahe gänzlich aufheben, wenn das Luftbläschen ober dem Quecksilber die gehörige Größe hat. Fig.

Um die Barometerhöhe jederzeit geschwinde übersehen zu können, muß man an dem Gestelle, worauf die Barometerröhre befestiget ist, eine Eintheilung von Zollen und Linien anbringen; der o Punkt (der Anfangspunkt der Eintheilung) kann bey der Oeffnung des aufwärts gekrümmten Schenkels angenommen werden. Nach dieser Eintheilung wird die wirkliche Barometerhöhe gefunden, wenn man die Abstände der beyden Oberflächen des Quecksilbers von dem angenommenen o Punkte, zusammen addiret. Die Decimaltheile der Linien können durch Hilfe eines Verniers bestimmet werden. Siehe Fig. 206.

VII. Aus der oben gefundenen Gleichung $x = 10000 \times (\log b - \log c)$ fließt auch $\log c = \log b - 0{,}0001\, x$, und $\log b = \log c + 0{,}0001\, x$; man kann demnach aus dem in Wiener Klaftern gegebenen Höhenunterschiede zweyer Oerter, und aus der Barometerhöhe des einen Ortes die Barometerhöhe des anderen Ortes finden.

Da die Barometerhöhen sich gegen einander verhalten wie die Dichtigkeiten oder wie die eigenthümlichen Gewichte der Luft, nämlich $b : c = m : n$, wenn wir die eigenthümlichen Gewichte der Luft an denjenigen zwey Oertern mit m und n benennen, allwo die Barometerhöhen b und c statt finden, so ist $c = \frac{bn}{m}$; und folglich nach gehöriger Substitution $\log \frac{b\,n}{m} = \log b - 0{,}0001\, x$, nämlich $\log n = \log m - 0{,}0001\, x$ eine logarithmische Gleichung für das

 eigen-

Fig. eigenthümliche Gewicht der Luft n an einem Orte, der um x W. Kl. über einen andern Ort erhöhet ist, allwo das eigenthümliche Gewicht der Luft $= m$ ist. Diese letzte Gleichung läßt sich auch also vorstellen $\log \frac{m}{n} = 0{,}0001x$ und zwar $\text{logvulg} \frac{m}{n} = 0{,}0001x$; will man nun diese Gleichung durch natürliche Logarithmen vorstellen, so ist $\text{lognat} \frac{m}{n} = 0{,}0002302585\,x$ vermög (180), oder wenn wir nur die ersten zwey bedeutlichen Decimalziffern beybehalten, und über dieses die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, mit h bezeichnen nämlich $\text{lognat}\, h = 1$ setzen, so ist $\text{lognat} \frac{m}{n} = 0{,}00023\,x.\ \text{lognat}\, h$ vermög (182), und daraus folgt endlich, $n = mh^{-0{,}00023x}$ eine unmittelbare Gleichung für das eigenthümliche Gewicht der Luft n an einem Orte, der um x W. Klaft. über einen anderen Orte erhöhet ist, allwo das eigenthümliche Gewicht der Luft $= m$ statt findet.

Z. B. am Wienerhorizonte ist bey mittlerer Temperatur das eigenthümliche Gewicht der athmosphärischen Luft also beschaffen, daß 1 Wien. Kub. Schuh ziemlich genau 2 Wien. Lothe wiegt; setzet man nun $m = 2$, und $x = 1000$ Kl. so findet man nach gehöriger Reduktion $n = 1{,}589$; nämlich 1 W. Kub. Sch. der athmosphärischen Luft in einer Erhöhung von 1000 W. Kl. über den Wienerhorizont wiegt nur 1,589 W. Lothe.; das eigenthümliche Gewicht oder die Dichtigkeit der athmosphärischen Luft ist demnach an dieser Erhöhung um $\frac{2 - 1{,}589}{2}$ nämlich ziemlich genau um $\frac{1}{5}$ kleiner als in Wien. Ein Luftballon, dessen Ueberzug samt der übrigen Zugehör und der darinnen befindlichen brennbaren Luft im lufleeren Raume 4 Zentner wiegt, wenn er schon am Wienerhorizonte mit einer Kraft von 100 Pfunden

in

in die Höhe zu steigen anfienge, würde daher in einer Erhö- Fig.
hung von 1000 Wienerklafter zum Steigen und Fallen gleichgeneigt seyn, er würde nämlich weder eine Kraft zum Steigen noch auch eine Kraft zum Fallen haben. Die Kraft, womit ein Luftballon in die Höhe zu steigen anfängt, ist nichts anders als der Ueberschuß des Gewichtes der athmosphärischen Luft unter einem dem Luftballon gleichen Kubikinhalte. Wenn nämlich das ganze Gewicht des Luftballons 4 Centner und das Gewicht der athmosphärischen Luft unter einem eben so großen Kubikinhalte 5 Centner beträgt, so sagt man, daß der Luftballon mit einer Kraft von 1 Centner zu steigen anfange. Daß ein solcher Ueberschuß des Gewichtes möglich sey, erhellet daher, weil das eigenthümliche Gewicht der brennbaren Luft wenigstens 5mal kleiner ist als das eigenthümliche Gewicht der athmosphärischen Luft, wenn der Barometer ohngefähr auf 28 Wienerzolle steht; es verhält sich nämlich bey diesem Stande des Barometers das eigenthümliche Gewicht der brennbaren Luft zum eigenthümlichen Gewichte der athmosphärischen Luft, wie 1 zu 5, zu weilen auch wie 1 zu 10, wenn die brennbare Luft von der besten Gattung ist.

Anmerkung. Eine ausführliche Abhandlung über die praktische Meßkunst, über die Prüfung, Berichtigung, und Behandlung verschiedener Meßinstrumente, über die Bestimmung der davon abhangenden Zuverläßigkeit u. s. w. kann am gegenwärtigen Orte keinen Platz finden, weil dazu allerdings Gründe aus der Optik, aus der mathematischen Geographie, aus der Astronomie u. s. w. erfordert werden. Man findet dergleichen vollständige Abhandlungen unter andern in nachstehenden zwey Schriften

P. Liesganig, Dimensio graduum meridiani viennensis & hungarici, Viennæ 1770.

T. Mayer, gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, Göttingen 1778 in 3 Octavbänden.

Auch kann Dupain de Montesson Kunst alles in Grundriß zu bringen, aus dem französischen übersetzt Dresden 1781 mit Nutzen gelesen werden.

Sechste Vorlesung.

Von einigen krummen Linien.

Vorläufige Einleitung.

315. Eine krumme Linie ist der Weg, den ein Punkt durch die Bewegung zurücklegt, der seine Richtung jeden Augenblick verändert. Bey der Untersuchung der Eigenschaften von den krummen Linien muß man zu erst bedacht seyn das Gesetz durch eine Gleichung auszudrücken, welches der bewegte Punkt in seiner Richtung beobachtet; dieses Gesetz heißt die Natur der krummen Linie. Das Gesetz, welches der Punkt M Fig. 62 bey der Beschreibung eines Kreises beobachtet, ist daß er immer gleichweit von dem Punkte C entfernet bleibt; dieses Gesetz, oder die Natur des Kreises, läßt sich nun auf folgende Art durch eine Gleichung ausdrücken: man nenne ein beliebiges Stück des Durchmessers von A gegen B gezählt $AP = x$, die Senkrechte aus dem Punkte P bis an den Umkreis $PM = y$, und den Halbmesser $AC = a = MC$, so ist $y = \pm \sqrt{(2ax - x^2)}$; denn es ist $PM^2 = MC^2 - PC^2$, nämlich $y^2 = a^2 - (a - x)^2$, und folglich $y = \pm \sqrt{(2ax - x^2)}$. Diese Gleichung zeigt uns an, daß man für jedes gegebene x das zugehörige y nämlich den entsprechenden Punkt in der krummen Linie finden könne; daß aus dieser Gleichung alle die übrigen Eigenschaften des Kreises können abgeleitet werden, ist aus (312) zu ersehen.

Diejenigen krummen Linien, deren Natur sich durch eine algebraische Gleichung vorstellen läßt, heißen *algebraische krumme Linien*; man nennt aber *eine algebraische Gleichung* zwey endliche einander gleiche Ausdrücke von veränderlichen und be-

beständigen Größen, die sich dergestalt ordnen lassen, daß Fig.
darinnen kein einziges irrationales Glied, und nirgends im Nenner, auch in keinem Exponenten sich eine veränderliche Größe befindet; so z. B. ist $y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - x^2}$ eine algebraische Gleichung, weil sich selbe auch also vorstellen läßt $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2$, oder $y^2 + x^2 - \frac{1}{4}a^2 = 0$; eben so ist $y = \pm\sqrt{\frac{a^2 x}{a - x}}$ eine algebraische Gleichung, und folglich die krumme Linie, deren Natur durch diese Gleichung vorgestellet wird, eine algebraische krumme Linie. Hingegen heißen jene krumme Linien mechanische oder transcendente krumme Linien, deren Natur sich durch keine algebraische Gleichung ausdrücken läßt, oder in deren Gleichungen sich Kreisbögen, Sinus, andere trigonometrische Funktionen, Logarithmen, unendliche Reihen, die sich nicht genau summiren lassen, u. s. w. befinden; so z. B. sind jene krumme Linien transcendent, welche durch folgende Gleichungen vorgestellet werden; $y = \sqrt{2 - x^2} + \text{arc}\cos(1 - x)$; $y = a \log x$; $y = b + bx + \frac{bx^2}{1.2} + \frac{bx^3}{1.2.3} + \frac{bx^4}{1.2.3.4} + \ldots$ u. s. w.

516. Um die Natur einer krummen Linie FAG Fig. 173 welche in einer nämlichen Ebene liegt, durch eine Glei- 173
chung auszudrücken, ist es gewöhnlich in dieser nämlichen Ebene eine beliebige Gerade AN zu ziehen, und aus verschiedenen Punkten derselben Parallelen P′M′, PM bis an die krumme Linie zu führen; sodann nimmt man in der Geraden AN einen beliebigen Punkt an, entweder den Durschnittspunkt A, oder jeden anderen beliebigen Punkt der Geraden AN ausser der krummen Linie, und sucht jede Gerade PM durch das zugehörige Stück AP und durch andere bekannte Größen auszudrücken. Die angenommene AN heißt die Abscissenlinie, der auf derselben festgesetzte Punkt A heißt der Anfangspunkt der Abscissen; die aus verschiedenen Punkten der

Fig. 173 krummen Linie bis auf die Abscissenlinie geführten Parallelen MP, M′P′ werden Ordinaten, und die Stücke AP, AP′ der Abscissenlinie von dem angenommenen Anfangspunkte A bis auf die Ordinaten gerechnet werden Abscissen von den Punkten M, M′ genennt. Es ist schon allgemein angenommen die Abscissen mit x, die Ordinaten mit y, und die unveränderlichen geraden Linen einer nämlichen bestimmten krummen Linie mit den Anfangsbuchstaben a, b, c zu bezeichnen. Die alten Meßkünstler nannten mM eine Ordinate oder eine Applicate, und PM oder Pm eine Halbordinate.

Eine Abscissenlinie heißt ein **Durchmesser** der krummen Linie, wenn sie alle Parallelen in zwey gleiche Theile theilet, welche aus was immer für einem Punkte der krummen Linie bis auf einen anderen Punkt dieser nämlichen krummen Linie können gezogen werden, oder welches einerley ist, wenn zu jeder Abscisse zwey gleiche Ordinaten nach entgegengesetzten Richtungen gehören; insbesondere heißt derjenige Durchmesser eine **Achse**, welcher die Parallelen senkrecht in zwey gleiche Theile theilet.

517. Eine Gerade TM, welche in der nämlichen Ebene einer krummen Linie in einem einzigen Punkte M begegnet ohne selbe an diesem Orte zu schneiden heißt die **Tangente** des Punktes M, und das Stück PT der Abscissenlinie zwischen der Ordinate PM des Berührungspunktes und zwischen dem Durchschnittspunkte T heißt die **Subtangente**; die Gerade MN aus dem Berührungspunkte M auf die Tangente senkrecht gezogen, und bis auf die Abscissenlinie verlängert wird die **Normallinie** oder die Normale, und das Stück PN der Abscissenlinie zwischen der Ordinate PM des Punktes M und zwischen dem Durchschnittspunkte N wird die **Subnormallinie** oder Subnormale genennt.

518. Eine Gerade CD, der sich eine krumme Linie AMG ohne Ende nähert ohne selbe jemals zu durchschneiden, wenn man beyde noch so weit ausdehnet, heißt die **Asymptote** von der krummen Linie. Daß es krumme Linien giebt, welche

Asymp-

Asymptoten haben, erhellet aus folgendem. Es sey z. B. AMG eine krumme Linie, deren Natur für senkrechte Ordinaten durch die Gleichung $y = \pm a\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ vorgestellet ist, allwo $AP = x$, $PM = y$, und die unveränderliche Gerade $AC = a$ gesetzet wird, so ist es offenbar, daß die Gerade CD auf AC senkrecht gezogen eine Asymptote der krummen Linie AMG sey: denn man setze $x = a + z$, so ist $y = \pm a\sqrt{-1-\frac{a}{z}}$ eine unmögliche Größe, es möge z noch so groß oder noch so klein angenommen werden, und folglich liegt kein einziger Punkt der krummen Linie AMG diesseits der Geraden CD, nämlich die Gerade CD wird von der krummen Linie niemals durchschnitten; über dieses nähert sich die krumme Linie AMG der Geraden CD ohne Ende, nämlich dergestalt, daß man einen Punkt der krummen Linie finden könne, welcher von der Geraden CD weniger absteht als um jede gegebene Größe; denn man setze nur $x = a - t$, so ist $y = \pm a\sqrt{\left(\frac{a}{t}-1\right)}$, allwo man t so klein annehmen, und folglich einen Punkt der krummen Linie so nahe an der Geraden CD bestimmen kann als man es nur immer will. Fig. 173

Wenn man mittelst der angenommenen Gleichung $y = \pm a\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ für eine negative Abscisse die entsprechende Ordinate suchet und $-x$ statt x substituiret, so ist $y = \pm a\sqrt{-\frac{x}{a+x}}$ eine unmögliche Größe, ein Zeichen daß diese krumme Linie über den Punkt A hinaus sich nicht erstrecke. Diese krumme Linie hat demnach nur positive Abscissen, und jede derselben muß $< a$ seyn; die Ordinaten hingegen wachsen ohne Ende. Das Zeichen $\pm$ zeiget an, daß zu jeder Abscisse AP zwey gleiche Ordinaten zugehören, deren eine rechts

Fig. die andere links bis an die krumme Linie gezogen wird, und
173 daß folglich AC eine Achse sey, weil wir die Ordinaten senkrecht auf AC angenommen haben. Der Anfangspunkt A der Abscissen ist zugleich der **Scheitel** der krummen Linie; denn man nennt denjenigen Punkt in der krummen Linie, durch welchen die Achse geht, den **Scheitelpunkt**; daß der Anfangspunkt A der Abscissen oder der Achse AC in der krummen Linie liege, erhellet daher, weil für $x = 0$ auch die Ordinate $y = \pm a \sqrt{\frac{0}{a-0}} = 0$ wird.

519. Wenn man diese krumme Linie $y = \pm a \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ beschreiben will, so kann man z. B. $a = 100$ setzen, nach einem verjüngten Maßstabe diese 100 Theile von A bis C auftragen, und etwann nach jeden 5 Theilen Senkrechte auf AC errichten; sodann setzet man in der Gleichung $y = \pm 100 \sqrt{\frac{x}{100-x}}$ nach der Ordnung $x = 5$, $x = 10$, $x = 15$, u. s. w. berechnet zu diesen Abscissen die entsprechenden Ordinaten, trägt selbe gehörig auf die gezogenen Senkrechten rechts und links auf, und zieht die dadurch bestimmten Punkte mit einer ununterbrochenen krummen Linie zusammen. Es ist bey der angenommenen Gleichung für

$$\begin{cases} x = 5;\ 10;\ 15;\ 20;\ 25;\ 30;\ 35;\ 40;\ 45;\ 50;\ 55;\ 60;\ldots \\ y = 22{,}9;\ 33{,}3;\ 42;\ 50;\ 57{,}8;\ 65{,}5;\ 73{,}4;\ 81{,}6;\ 90{,}4;\ 100;\ 110{,}5;\ 122{,}8;\ldots \end{cases}$$

Auf die nämliche Art könnte die krumme Linie beschrieben werden, die durch $y = \pm x \sqrt{\left(\frac{b+x}{a-x}\right)}$ vorgestellet
174 wird Fig. 174, wenn man CB für die Abscissenlinie, und A für den Anfangspunkt der Abscissen annimmt, z. B. $a = 100$, und $b = 40$ setzet, die positiven Abscissen von A gegen B und die negativen Abscissen gegen C zählet, und darauf für verschiedene Abscissen die entsprechenden Ordinaten berechnet.

520.

520. Nachdem einmal für eine Abscissenlinie die Gleichung bekannt ist, so ist es leicht für jede andere beliebige Abscissenlinie bey der nämlichen krummen Linie die Gleichung zu finden. Es sey z. B. Fig. 173 für die Abscissenlinie AC die Gleichung $PM^2 = Pm^2 = \frac{AC^2 . AP}{AC - AP}$; wenn man nun bey dieser nämlichen krummen Linie CE für die Abscissenlinie annimmt, und $Cp = x$, $pm = y$ setzet, so läßt sich y durch x auf folgende Art ausdrücken; es ist $Cp = Pm = x$, $pm = PC = y$, und $AP = AC - PC = a - y$; substituiret man nun diese Werthe in der Gleichung $Pm^2 = \frac{AC^2 . AP}{AC - AP}$, so ist $x^2 = \frac{a^2 . (a - y)}{a - (a - y)}$, und folglich $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$. Wenn man bey dieser nämlichen krummen Linie CA für die Abscissenlinie annimmt und den Anfangspunkt der Abscissen in C setzet, ferner CP mit x, PM mit y, und CA mit a bezeichnet, so ist für senkrechte Ordinaten nach gehöriger Reduktion $y = \pm \sqrt{(a^3 x^{-1} - a^2)}$ | Fig. 173

521. Es ist aus dem bisher gesagten leicht zu ersehen, daß die in gleichen Abständen gezogenen Ordinaten einer krummen Linie nichts anders vorstellen als eine gewisse Reihe, bey der die Stellen der Glieder durch die Abscissen bezeichnet werden; und die Gleichung der krummen Linie ist nichts anders als das allgemeine Glied dieser nämlichen Reihe. Gleichwie man nun eine jede Funktion einer veränderlichen Größe x, z. B. die Funktion $\frac{x^2}{1 + x^2}$ für das allgemeine Glied irgend einer Reihe annehmen kann, wenn man durch x die Stellen der Glieder bezeichnet, so kann man auch jede Funktion einer veränderlichen Größe z. B. $\frac{x^2}{1 + x^2}$ für die Gleichung irgend einer krummen Linie annehmen, wenn man durch die verän-

der-

Fig. 173 derliche Größe x die Abscissen bezeichnet; man kann in einem solchen Falle die angenommene Funktion dergestalt mit derjenigen unveränderlichen Größe verbinden, welche bey der Bestimmung der verschiedenen Werthe von x die Einheit ist, daß die angenommene Funktion sodann ein linearischer Ausdruck sey (433) und der Ordinate $= y$ einer krummen Linie könne gleichgesetzet werden; z. B. die Funktion $\frac{x^2}{1+x^2}$ läßt sich mit einer unveränderlichen Größe a auf folgende Art verbinden $\frac{a x^2}{a^2 + x^2}$, damit sie ein linearischer Ausdruck wird; und sodann kann man $y = \frac{a x^2}{a^2 + x^2}$ setzen, und die Eigenschaften der zugehörigen krummen Linie suchen; man wird nach vorgenommener Untersuchung finden, daß die zu dieser Gleichung zugehörige krumme Linie eben diejenige sey, von der wir schon geredet haben.

522. Wenn der höchste Exponent einer veränderlichen Größe x oder y oder die höchste Summe beyder Exponenten eines Gliedes in einer geordneten Gleichung einer algebraischen krummen Linie $= 2$ ist, so heißt die dazugehörige krumme Linie eine **Linie von der zweyten Ordnung**, oder eine **krumme Linie** von der ersten Ordnung, ist der höchste Exponent oder die höchste Summe beyder Exponenten $= 3$, so heißt die zugehörige krumme Linie **eine Linie von der dritten Ordnung** oder eine **krumme Linie** der zweyten Ordnung; u. s. w. Ueber dieses werden diejenigen algebraischen krummen Linien von verschiedenen Ordnungen zu einer nämlichen Familie gezählet, deren Gleichungen einerley Glieder enthalten, die nur in den Exponenten verschieden sind; so z. B. sagt man, daß die krummen Linien, welche durch $y^2 = px$, $y^3 = p^2 x$ $y^3 = px^2$, $y^4 = p^3 x$, $y^4 = p^2 x^2$, $y^4 = px^3$, $y^{m+n} = p^m x^n$ vorgestellet werden, alle zu einer nämlichen Familie gehören.

Bey

Bey der Untersuchung der krummen Linien muß man bedacht Fig.
seyn 1) aus der Natur der krummen Linie die Gleichung für dieselbe herzuleiten, oder wenn die Gleichung gegeben ist, die zugehörige krumme Linie zu verzeichnen, welches in Ermanglung anderer Hilfsmittel jederzeit nach (519) geschehen kann. 2) Für jeden gegebenen Punkt der krummen Linie die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale zu bestimmen. 3) An jedem gegebenen Orte der krummen Linie die Krümmung zu finden. 4) Den Ort der größten oder kleinsten Ordinate zu bestimmen. 5) Den Flächeninhalt zu berechnen, welcher von einer Abscisse, ihren Ordinaten und dem zugehörigen Bogen eingeschlossen ist. 6) Die wirkliche Länge eines Bogens zu finden; u. s. w.

Von der Parabel.

523. Es sey GE eine gerade Linie Fig. 175, CN 175
senkrecht auf GE, und F ein Punkt in der Senkrechten CN; man gedenke eine krumme Linie M′AM von der Beschaffenheit, daß jeder Punkt derselben von F eben so weit als von der Geraden GE entfernet, nämlich daß allenthalben die Senkrechte MD = MF sey, so heißt eine solche krumme Linie eine **Parabel**. Die Gerade GE wird die **Leitlinie** (Directrix), und der Punkt F wird der **Leitpunkt**, oder nach der schon allgemein eingeführten Benennung der **Brennpunkt** (Focus) der Parabel genennt.

Wenn man den unveränderlichen Abstand CF des Brennpunktes F von der Leitlinie GD in dem Punkte A in zwey gleiche Theile theilet, so ist A ein Punkt der Parabel, weil er von F und von der Leitlinie GD gleichweit entfernet ist. Wenn man mehrere Punkte der Parabel durch die Verzeichnung zu suchen hat, so ist es erforderlich mehrere Senkrechte M′M auf CN zu errichten, und den Abstand CP einer jeden Senkrechten von der Leitlinie aus dem

Brenn-

Fig. Brennpunkte F auf die Senkrechte M′M bis M′ und M
175 durch Hilfe eines Zirkels zu übertragen, nämlich man eröffnet den Zirkel von P bis C, setzet sodann eine Spitze in F, und durchschneidet mit der anderen Spitze die gehörige Senkrechte in M und M′.

Man kann auch die Parabel durch eine ununterbrochene Bewegung beschreiben, wenn man an einem rechtwinklichten Winkelhacken SDE einen Faden = SD anbringt, das eine Ende des Fadens in S, und das andere in F befestiget, sodann den Winkelhacken längst der Leitlinie CE fortbeweget, und mit einem Stifte M den Faden währender Bewegung immer an den Winkelhacken andrückt; denn der Stift M wird bey dieser Bewegung eine krumme Linie beschreiben, bey der jeder Punkt eben so weit von F als von GD entfernet ist; diese krumme Linie wird demnach eine Parabel seyn, welche F zum Brennpunkte, und GD zur Leitlinie hat.

524. **Aufgabe. Eine Gleichung für die Parabel zu finden.**

Auflösung. Man nehme CN für die Abscissenlinie, und A für den Anfangspunkt der Abscissen an, setze AP$=x$, die senkrechte Ordinate PM $= y$, und den Abstand des Brennpunktes von dem Anfangspunkte $=$ FA $= c =$ AC, so ist PF $=$ AP $-$ AF $= x - c$, und PC $=$ AP $+$ AC$= x + c =$ MD $=$ MF; nun ist FM$^2 =$ PM$^2 +$ PF^2; folglich auch $(x+c)^2 = y^2 + (x-c)^2$ und endlich $y = \pm\sqrt{4cx}$.

Anmerkung. Wenn man GE für die Abcissenlinie, C für den Anfangspunkt der Abscissen angenommen, und CD$=x$, DM$=y$, und CF $=2c$ gesetzet hätte, so würde man $y = \frac{x^2}{4c} + c$ gefunden haben.

525. Diese Gleichung $y = \pm\sqrt{4cx}$ giebt uns zu erkennen

I.

I. Daß AN die Achse der Parabel und A ihr Scheitel sey, weil wegen dem Zeichen $\pm$ zu jeder positiven Abscisse zwey gleiche senkrechte Ordinaten nach entgegengesetzten Richtungen gehören, und weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird. Fig. 175

II. Diesseits der Leitlinie von A angefangen wachsen die Abscissen und Ordinaten ohne Ende; denn für $x = \infty$ wird $y = \pm \sqrt{4c} \cdot \infty$ nämlich unendlich groß; die Parabel hat demnach diesseits der Leitlinie zwey gleiche unendliche Schenkel.

III. Setzt man x negativ, so ist $y = \pm \sqrt{-4cx}$ eine unmögliche Größe; folglich liegt kein einziger Punkt der Parabel über A hinaus nach der Gegend AT.

IV. Setzt man $x = c =$ AF, so ist $y = \pm 2c$, nämlich FB $=$ 2AF $=$ FB′, und folglich B′B $=$ 4AF $=$ $4c$. Diese durch den Brennpunkt auf die Achse senkrecht gezogene unveränderliche Gerade B′B wird der Parameter der Parabel genennt, welcher jederzeit dem 4fachen Abstande des Brennpunktes von dem Scheitel gleich ist. Setzt man nun B′B $= p = 4c$, so ist $y = \pm \sqrt{px}$, oder $y^2 = px$ nämlich das Quadrat einer jeden Ordinate PM ist gleich dem Rechtecke oder Produkte aus der Abscisse in den Parameter.

V. Da $y^2 = px$, so ist auch $x : y = y : p$, nämlich der Parameter einer Parabel ist die dritte Proportionallinie zu was immer für einer Abscisse und zu der dazugehörigen Ordinate.

VI. Da $y^2 = px$, und auch $Y^2 = pX$ (wenn man mit X eine andere Abscisse und mit Y die zugehörige Ordinate bezeichnet,) so ist auch $y^2 : Y^2 = px : pX$ oder $y^2 : Y^2 = x . X$, nämlich die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die zugehörigen Abscissen.

VII. Eine Gerade FM aus dem Brennpunkte an was immer für einen Punkt M der Parabel gezogen heißt der Fahrstrich (radius vector) des Punktes M. Der Fahrstrich

Fig. strich eines jeden Punktes der Parabel ist gleich der zuge-
375 hörigen Abscisse mehr dem 4ten Theile des Parameters; denn $FM = MD = PC = AP + AC = AP + AF = x + \frac{1}{4}p$.

526. Wenn man aus einem Punkte M der Parabel eine Parallele MD zur Achse, und die Gerade MF in den Brennpunkt zieht, und sodann den Winkel FMD durch die Gerade TQ halbiret, so berühret selbe die Parabel in dem Punkte M.

Denn ein jeder anderer Punkt Q der Geraden TQ diesseits oder jenseits des Punktes M liegt ausser der Parabel, welches man auf folgende Art erweisen kann. Man schneide $MD = MF$, und führe durch D eine senkrechte GD auf MD, so ist GD die Leitlinie; ferner ziehe man die Gerade FD, so ist wegen der Gleichheit der Dreyecke FMK und DMK die Gerade TQ senkrecht auf FD, und $FK = KD$; es ist also auch $QD = QF$ (258.); aber die Senkrechte $QE < QD$; folglich auch $QE < QF$; der Punkt Q liegt demnach ausser der Parabel, weil im Gegentheile $QE = QF$ seyn müßte; und dieses läßt sich von einem jeden anderen Punkte der Geraden TQ ausser M erweisen.

527. Wir ziehen aus diesem folgende Schlüße.

I. Die Subtangente PT ist gleich der doppelten Abcisse. Denn wegen der Gleichheit der Dreyecke FTK und DMK ist $FT = DM = CP$; also auch $FT - AF = CP - AC$, nämlich $AT = AP$; uud endlich $AT + AP = AP + AP$, nämlich $PT = 2AP$.

Es kann demnach an einen jeden Punkt M der Parabel eine Tangente sehr leicht gezogen werden ohne den Brennpunkt in Erwegung zu ziehen, wenn man auf die Achse die senkrechte Ordinate PM führet, $AT = AP$ abschneidet, und endlich M, T durch eine Gerade verbindet.

Wäre hingegen aus einem Punkte L, der ausser der Parabel liegt, eine Tangente an die Parabel zu ziehen, so

muß

muß man aus L mit der Entfernung LF die Leitlinie in Fig.
D durchschneiden, aus D eine Parallele DS zur Achse zie- 175
hen, und den Durchschnittspunkt M mit dem gegebenen Punkte L durch eine Gerade LM verbinden; denn diese Gerade LM wird die Parabel in dem Punkte M berühren, weil sie den Winkel FMD halbiret. Auch ist es leicht einzusehen, wie man bey einer schon gezogenen Tangente den Berührungspunkt finden könne.

II. Die Subnormallinie ist gleich dem halben Parameter, und folglich bey der nämlichen Parabel unveränderlich. Denn in den zwey ähnlichen Dreyecken TPM und PMN ist TP : PM = PM : PN, nämlich $2x : \sqrt{px} = \sqrt{px}$: PN; folglich PN $= \frac{1}{2}p$. Es kann demnach zu jeder Parabel, bey der die Lage der Achse gegeben ist, der zugehörige Parameter, Brennpunkt, und Abstand der Leitlinie gefunden werden, wenn man an einen beliebigen Punkt M eine Tangente TM zieht, die Senkrechte MN auf TM errichtet, und sodann $\frac{1}{2}$PN von A bis F und C überträgt.

III. Die Tangente TM $= \sqrt{4x^2 + px} = \sqrt{4x(x + \frac{1}{4}p)} = \sqrt{4\text{AP.FM}}$; und die Normale MN $= \sqrt{p(x + \frac{1}{4}p)} = \sqrt{p.\text{FM}}$. Denn $\text{TM}^2 = \text{PT}^2 + \text{PM}^2 = 4x^2 + px$, und $\text{MN}^2 = \text{PM}^2 + \text{PN}^2 = px + \frac{1}{4}p^2$.

IV. Das Quadrat der Senkrechten FK ist gleich dem Produkte aus dem Fahrstriche FM in den 4ten Theil des Parameters p, nämlich $\text{FK}^2 = \text{FM}.\frac{1}{4}p$. Denn $\text{FK}^2 = \text{FM}^2 - \text{MK}^2$; es ist aber MK $= \frac{1}{2}$ MT $= \frac{1}{2}\sqrt{4\text{AP.FM}}$, und $\text{MK}^2 = \text{AP. FM}$; folglich $\text{FK}^2 = \text{FM}^2 - \text{AP. FM} = \text{FM}\,(\text{FM} - \text{AP}) = \text{FM. AC} = \text{FM}.\frac{1}{4}p$. Benennen wir nun den Fahrstrich eines Punktes der Parabel mit z und die Senkrechte aus dem Brennpunkte auf die Tangente mit v, so ist $v^2 = \frac{1}{4}pz$; und eben so ist für einen anderen Punkt, $V^2 = \frac{1}{4}pZ$; es ist demnach auch $v^2 : V^2 = \frac{1}{4}pz : \frac{1}{4}pZ$, oder $v^2 : V^2 = z : Z$, und auch $v : V = \sqrt{z} : \sqrt{Z}$;

Fig. $\sqrt{Z}$; nämlich die Quadrate der Senkrechten aus dem Brenn-
175 punkte an verschiedene Tangenten der nämlichen Parabel gezogen verhalten sich gegen einander, wie die an die Berührungspunkte geführten Fahrstriche.

V. In einem jeden Punkte der Parabel ist der Winkel SMQ=FMK, weil jeder derselben dem Winkel DMK gleich ist. Wenn demnach an eine hohle parabolische Fläche, welche durch die Umdrehung einer halben Parabel APM um ihre Achse erzeuget wird, mehrere Feuer- oder Licht- oder Stimmstrahlen mit der Achse parallel einfallen, so werden sich selbe nach dem Abprellen alle in dem Punkte F vereinigen, weil der Abprellwinkel jederzeit dem Einfallwinkel gleich ist. Und umgekehrt, wenn aus dem Brennpunkte einer hohlen parabolischen Fläche (eines parabolischen Hohlspiegels) mehrere Feuer- oder Licht-, oder auch Stimmstrahlen nach was immer für Richtungen ausgehen, so werden alle diejenigen, welche an die hohle parabolische Fläche anstossen, nach dem Abprellen in einer zur Achse parallelen Richtung fortlaufen. Befestiget man nun an den zwey entgegengesetzten Wänden eines Zimmers zwey parabolische Hohlspiegel dergestalt, daß ihre Achsen beyde in einer nämlichen geraden Linie liegen, und ihre Aushöhlungen gegeneinander gekehret sind, so werden die Strahlen, welche aus dem Brennpunkte eines Hohlspiegels ausgehen, sich in dem Brennpunkte des entgegengesetzten Hohlspiegels vereinigen. Wenn man demnach in dem Brennpunkte des ersten Spiegels glühende Kohlen, und in dem Brennpunkte des zweyten Schießpulver anbringt, so wird dadurch das Schießpulver entzunden; oder, wenn jemand seinen Mund in dem Brennpunkte des ersten Spiegels, und ein anderer sein Ohr in dem Brennpunkte des zweyten anbringt, so wird der zweyte die Worte des ersten vernehmen, wenn sie auch so leise ausgesprochen werden, daß selbe keiner von den Umstehenden vernehmen kann.

528. **Aufgabe.** Eine Gleichung für die Parabel zu finden, wenn man eine Gerade AC, die zu der

Achse BG parallel läuft, für die Abscissenlinie annimmt, und die Ordinaten zu der Tangente AT parallel zieht. Fig. 176. Fig. 176

Auflösung. Es sey A der Anfangspunkt der Abscissen, $AP = x$, $PM = y$, der Fahrstrich $AF = c$, der Parameter der Achse $= p$, AG senkrecht auf BG, und $BG = BT = u$, so ist $AG = \sqrt{pu}$, $TG = 2u$, und $PS = AT = \sqrt{4BG.FA} = \sqrt{4cu}$, und folglich $MS = PS - PM = \sqrt{4cu} - y$. Es sey auch MQ senkrecht auf BG, so ist das Dreyeck $AGT \backsim MQS$; folglich $AT (\sqrt{4cu} : AG (\sqrt{pu} = MS (\sqrt{4cu} - y : MQ$ nämlich $MQ = \sqrt{pu} - \frac{y\sqrt{pu}}{\sqrt{4cu}}$;

und $AT (\sqrt{4cu} : TG (2u = MS (\sqrt{4cu} - y : SQ$ nämlich $SQ = 2u - \frac{2uy}{\sqrt{4cu}}$.

Ferner ist $AP = TS = x$, $TQ = TS + SQ = x + 2u - \frac{2uy}{\sqrt{4cu}}$;

und $BQ = TQ - TB$, nämlich $BQ = x + u - \frac{2uy}{\sqrt{4cu}}$.

Nun ist $MQ^2 = p.BQ$; folglich auch $\left(\sqrt{pu} - \frac{y\sqrt{pu}}{\sqrt{4cu}}\right)^2 = p.\left(x + u - \frac{2uy}{\sqrt{4cu}}\right)$; und aus dieser Gleichung findet man endlich nach gehöriger Reduktion $y = \pm\sqrt{4cx}$, oder wenn man $4c = q$ setzet, so ist $y = \pm\sqrt{qx}$.

529. Diese Gleichung $y = \pm\sqrt{qx}$ giebt uns zu erkennen I. Daß zu jeder positiven Abscisse zwey gleiche Ordinaten nach entgegengesetzten Richtungen gehören, und daß folglich AC ein Durchmesser der Parabel sey. A ist der Scheitel des Durchmessers (vertex diametri). Die Gerade $AF = 4c = q$ wird der Parameter des Durchmessers genennt; er ist gleich dem 4fachen Abstande des Scheitels A von dem Brennpunkte; auch ist es leicht einzusehen, daß einer Abscisse,

 die

Fig. 176 die dem Abstande AF gleich ist, eine Ordinate zugehöre, die durch den Brennpunkt geht, und nach beyden Richtungen zusammen genommen dem Parameter des Durchmessers gleich ist. Da endlich $y^2 = qx$, so ist auch $x : y = y : q$, nämlich der Parameter des Durchmessers ist die dritte Proportionallinie zur Abscisse und zu der zugehörigen Ordinate.

II. Die Quadrate der Ordinaten des Durchmessers verhalten sich gegeneinander wie die zugehörigen Abscissen.

III. Da alles dieses auch bey einer jeden anderen Parallelen zu BG statt findet, so folgt, daß jede zur Achse parallel gezogene Gerade ein Durchmesser der Parabel sey. Auch ist es leicht einzusehen, daß jeder Durchmesser die Parabel nur in einem einzigen Punkte durchschneide; denn nur für $x = 0$ ist auch $y = 0$. Wenn man hingegen aus was immer für einem Punkte A der Parabel eine Gerade zieht, die nicht mit der Achse parallel läuft, so wird selbe genugsam verlängert, die Parabel noch einmal durchschneiden.

IV. Da nun jeder Durchmesser der Parabel alle Sehnen halbirt, die mit der Tangente des Scheitels des Durchmessers parallel laufen, so kann bey einer aufgezeichneten Parabel die Lage der Achse auf folgende Art gefunden werden. Man ziehe zwey parallele Sehnen, halbire jede derselben, führe durch diese zwey Punkte eine gerade Linie nämlich einen Durchmesser, errichte auf diesen Durchmesser eine Senkrechte, welche sich beyderseits in der Parabel endiget, und folglich eine doppelte Ordinate der Achse vorstellet; endlich theile man noch diese letzte doppelte Ordinate der Achse durch eine Senkrechte in zwey gleiche Theile, so wird man die Lage der Achse erhalten, und darauf den Scheitel, Parameter, Brennpunkt, Leitlinie, u. s. w. bestimmen können.

V. Aus einer gegebenen ganzen Ordinate der Achse $AD = b$, und aus dem Winkel $TAG = m$ läßt sich das Stück der Achse BG, und folglich auch der Parameter der Achse bestimmen. Denn sintot $(1 : \text{tang}\, m = AG (\frac{1}{2}b : TG$; folglich

TG

$TG = \frac{1}{2}b.\text{tang}\,m$; und $BG = \frac{1}{4}b\,\text{tang}\,m$; über dieses ist Fig.
$AG^2 = p.BG$, nämlich $p = \frac{AG^2}{BG}$; folglich ist der gesuchte
Parameter der Achse $p = \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{4}b\,\text{tang}m} = b.\cot m$.

530. Der Flächeninhalt APM ist $= \frac{2}{3}AP.PM$, und folglich $M'AM = \frac{2}{3}AP.M'M$. Fig. 175. 175

Denn man stelle sich nur vor, daß die Abscisse oder Achse AP in unendlich viele gleiche Theile getheilet sey, und gedenke aus allen Theilungspunkten senkrechte Ordinaten bis an den Bogen AM, so kann jeder Theil der parobolischen Fläche zwischen zwey nächsten Ordinaten, nämlich jedes parabolische Element, für ein Rechteck, und die Summe aller dieser eingeschriebenen Rechtecke für den parabolischen Flächeninhalt APM angesehen werden; es ist aber diese Summe aller eingeschriebenen Rechtecke $= \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, weil diese Rechtecke von dem Scheitel angefangen in einer Reihe fortwachsen, deren allgemeines Glied $= p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}.\frac{x}{\infty} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{\infty}$ ist. Es ist leicht einzusehen, daß $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}.\frac{x}{\infty}$ das allgemeine Glied in der Reihe der eingeschriebenen Rechtecke sey; denn da jederzeit $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ ist, so sind für die aufeinander folgenden Abscissen $\frac{x}{\infty}, \frac{2x}{\infty}, \frac{3x}{\infty}, \frac{4x}{\infty}, \ldots. x$ die zugehörigen Ordinaten $= \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\infty^{\frac{1}{2}}}, \frac{2^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\infty^{\frac{1}{2}}}, \frac{3^{\frac{1}{2}}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\infty^{\frac{1}{2}}}, \ldots. p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, und folglich die auf einander folgenden Rechtecke $= \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\infty^{\frac{1}{2}}}.\frac{x}{\infty}$,

Fig. 175 $\frac{2^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\infty^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x}{\infty}, \frac{3^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\infty^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x}{\infty}, \ldots \; p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x}{\infty}$; es ist demnoch die Summe aller dieser Rechtecke $= \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\infty^{\frac{3}{2}}}(1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} + \ldots + \infty^{\frac{1}{2}}) = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\infty^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2}{3} \infty^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$
$= \frac{2}{3} x . p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} xy = \frac{2}{3}$ AP. PM.

531. Und der Kubikinhalt des Paraboloides M′AM (des parabolischen Afterkegels, welcher durch die Umdrehung der halben Parabel um die Achse AP erzeuget wird) ist $= \frac{1}{2} xy^2 \pi$ = dem halben Cylinder von der nämlichen Grundfläche und Höhe.

Denn bey dieser Umdrehung der Parabel beschreibt ein jedes der im vorigen (530) erwähnten eingeschrieben en Rechtecke, einen Cylinder; und die Summe aller dieser eingeschriebenen Cylinder ist dem Kubikinhalte des Paraboloides gleich; es ist aber die Summe aller dieser eingeschriebenen Cylinder
$$= \frac{px\pi}{\infty} \cdot \frac{x}{\infty} + \frac{2px\pi}{\infty} \cdot \frac{x}{\infty} + \frac{3px\pi}{\infty} \cdot \frac{x}{\infty} + \ldots + px\pi \cdot \frac{x}{\infty}$$
$$= \frac{px^2\pi}{\infty^2}(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + \infty) = \frac{px^2\pi}{\infty^2} \cdot \frac{1}{2}\infty^2$$
$= \frac{1}{2} px^2\pi = \frac{1}{2} x \cdot px\pi = \frac{1}{2} xy^2\pi$; folglich ist auch der Kubikinhalt des Paraboloides M′AM $= \frac{1}{2} xy^2\pi$ = dem halben Cylinder von der nämlichen Grundfläche und Höhe.

Anmerkung. I. Wenn man in diesem und in dem vorigen Falle einen der unendlich kleinen und einander gleichen Theile der Abscisse AP, mit dx bezeichnet, nämlich $\frac{x}{\infty} = dx$ gesetzet hätte, so wäre in der unendlichen Reihe der

Ele-

Elemente von der parabolischen Fläche das allgemeine Glied Fig.
$=p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = ydx$, und in der unendlichen Reihe der Elemente von dem Paraboloides wäre das allgemeine Glied $= px\pi . dx = \pi y^2 dx$. 577

II. Wenn man annimmt, daß der Minentrichter einer auf die vortheilhafteste Weise geladenen Mine in einem gleichartigen Erdreiche ein Paraboloides sey, bey dem der Halbmesser der Grundfläche der kürzesten Widerstandslinie gleich ist, nämlich AB = AF, und daß der Mittelpunkt des Minenofens F mit dem Brennpunkte des Paraboloides einerley sey, so kann man aus der kürzesten Widerstandslinie $FA = a = AB$ (aus der Vertiefung des Minenofens) den Kubikinhalt des Minentrichters auf folgende Art finden. $FB = \sqrt{AB^2 + AF^2} = a\sqrt{2} = BE = AD$, $FD = AD - AF = a\sqrt{2} - a$, $FC = \frac{1}{2}FD = \frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{2}a$, und $AC = AF + FC = \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{2})$; nun ist das Paraboloides $GCB = \frac{1}{2}AC \times AB^2\pi$; folglich ist eben dieses Paraboloides nämlich der gesuchte Kubikinhalt des Minentrichters $= \frac{1}{4}a(1 + \sqrt{2}) . a^2\pi = \frac{1}{4}\pi(1 + \sqrt{2})a^3 = 1{,}896a^3$. Es sey z. B. $AF = 20$ Schuhen, so ist der Kubikinhalt des Minentrichters = 15168 Kubikschuhen.

Von der Ellipse.

532. Es sey AB eine gerade Linie, F, f zwey Punk- 178
te auf derselben; man gedenke eine krumme Linie von der Beschaffenheit, daß die Summe der Abstände $MF + Mf$ von den Punkten F, f, eines jeden Punktes M immer einer unveränderlichen Geraden $F'f' = 2a$ gleich, und zugleich $2a > Ff$ sey, so wird eine solche krumme Linie eine **Ellipse** genennt. Die Punkte F, f heißen **Leitpunkte** oder **Brennpunkte**. Man kann demnach aus der gegebenen unveränderlichen Summe der Abstände $= MF + Mf = F'f'$, und aus dem gegebenen Abstande der Brennpunkte = Ff eine Ellipse durch eine ununterbrochene Bewegung beschreiben, wenn man in F und f die

 End-

Fig. Endpunkte eines Fadens befestiget, dessen Länge $= MF + Mf$
178 $= F'f'$ ist, und sodann einen Stift M dergestalt herumbeweget, daß er immer beyde Theile des Fadens in gehöriger Spannung erhalte; denn der Stift M wird während dieser Bewegung eine Ellipse beschreiben.

Auch kann man mittelst des Zirkels mehrere Punkte der Ellipse bestimmen, wenn man eine gerade Linie $F'f' = 2a = MF + Mf$ zieht, selbe in mehrere (gleiche oder ungleiche) Theile zertheilet, und sodann mit jeden zweyen zugehörigen Theilen der Geraden $F'f'$ als Halbmessern, aus F und f Durchschnittspunkte der Ellipse bestimmet; wenn man z. B. mit dem Halbmesser $FM = F'M'$ aus F, und mit dem Halbmesser $M'f'$ aus f Kreisbögen beschreibet, so wird der Durchschnittspunkt M ein Punkt der Ellipse seyn; auch m wird ein Punkt der nämlichen Ellipse seyn, wenn man aus F mit dem Halbmesser $Fm = F'm'$ einen Kreisbogen beschreibet, und aus f mit dem Halbmesser $fm = m'f'$ denselben durchschneidet; und so können unzählige Punkte der nämlichen Ellipse bestimmet werden.

533. **Aufgabe. Eine Gleichung für die Ellipse zu finden.**

Auflösung. Man nehme AB für die Abscissenlinie, und den von f und F gleichweit abstehenden Punkt C für den Anfangspunkt der Abscissen an; setze $CP = x$, die senkrechte Ordinate $PM = y$, die gegebene und unveränderliche Summe der Abstände $MF + Mf = 2a$, und den gegebenen und unveränderlichen Abstand $Cf = CF = c$, und $Mf = z$, so ist $Pf = c - x$, $PF = c + x$, und $MF = 2a - z$. Nun ist $Mf^2 = MP^2 + Pf^2$ nämlich $z^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$, und auch $MF^2 = PM^2 + PF^2$, nämlich $4a^2 - 4az + z^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$; folglich auch durch die Subtraktion $z = a - \frac{cx}{a}$, und $z^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$; substituiret man diesen Werth in der ersten Gleichung, so ist $a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$

$=$

$= y^2 + c^2 - 2cx + x^2$; und aus dieser Gleichung findet Fig. 178
man endlich $y = \pm\sqrt{a^2 - c^2 - \frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2)}$

534. Diese gefundene Gleichung giebt uns zu erkennen:

I. Daß zu jeder Abscisse zwey gleiche Ordinaten nach entgegengesetzten Richtungen gehören, nämlich PM = PM′, und daß folglich AB eine Achse sey.

II. Daß die Ellipse eine in sich selbst zurückkehrende Linie sey: denn für jede positive oder negative Abscisse, die kleiner als a ist, erhält man zwey gleiche Ordinaten nach entgegengesetzten Richtungen; für $x = a$ und $x = -a$ hingegen ist $y = 0$, nämlich in der Entfernung CA = CB $= \frac{1}{2}$(MF + Mf) geht die krumme Linie durch die Achse; und endlich ist für jede positive oder negative Abscisse, wenn sie größer ist als a die zugehörige Ordinate eine unmögliche Größe, über A herüber und über B hinaus giebt es demnach keine Ordinaten mehr; und A, B sind die zwey Scheitel der Ellipse.

III. Daß für gleich große Abscissen von C gegen B und gegen A gerechnet auch vollkommen gleiche Ordinaten gehören, und daß demnach die elliptische Fläche durch AB sowohl als auch durch DE in zwey vollkommen gleiche Theile getheilet sey.

IV. Daß der Abscisse $x = 0$ die größte Ordinate entspreche, nämlich daß CD = CE die größte Ordinate sey, und daß von C gegen B sowohl als auch gegen A die Ordinaten immer abnehmen, bis sie endlich in A und B gänzlich verschwinden. Auch ist es leicht einzusehen, daß die größte Ordinate CD < CB sey, weil $CD^2 = a^2 - c^2$, und $CB^2 = a^2$ ist.

V. Daß beyde Brennpunkte von den anliegenden Scheiteln der Ellipse gleichweit entfernet sind; denn CF = Cf, und auch CA = CB, also auch FA = fB.

Fig. 178 VI. Der Fahrstrich $fM = CB - \frac{Cf.CP}{CB}$, und $FM = CB + \frac{Cf.CP}{CB}$; denn es ist vermög der Auflösung (533) $z = a - \frac{cx}{a} = fM$, $FM = 2a - z = a + \frac{cx}{a}$, und $a = CB$, wenn man in der gefundenen Gleichung für die Ellipse $y = 0$ setzet.

VII. Da nun $CB = a$, und auch $CA = a$ gefunden wird, wenn man $y = 0$ setzet, so ist $AB = 2a$; es ist aber vermög der Benennung $2a$ die unveränderliche Summe der Abstände von den Brennpunkten eines jeden Punktes M der Ellipse, folglich ist in der Ellipse die Summe der Abstände eines jeden Punktes M von den Brennpunkten immer der Geraden AB gleich, welche die Scheitel verbindet.

535. Diese Gerade AB durch beyde Brennpunkte bis an die Scheitel der Ellipse gezogen wird die große Achse oder auch die Zwerchachse (axis major, axis transversus) genennt. Der von beyden Brennpunkten oder auch von beyden Scheiteln gleichweit abstehende Punkt C der großen Achse heißt der **Mittelpunkt**, und der Abstand des Mittelpunktes von dem einen Brennpunkte wird die **Excentricität** genennt. Die Gerade DE durch den Mittelpunkt auf die Zwerchachse senkrecht gezogen und beyderseits bis an den Umfang der Ellipse verlängert, heißt die kleine Achse oder die vereinigte Achse (axis minor, axis conjugatus).

Aus der großen Achse und aus der Excentricität der Ellipse kann jederzeit die kleine Achse gefunden werden, und umgekehrt. Denn es ist vermög der gefundenen Gleichung, wenn man $x = 0$ setzet, $y = \sqrt{a^2 - c^2} = CD = \sqrt{CB^2 - Cf^2}$ Dieses läßt sich auch aus denen rechtwinklichten Dreyecken FCE und fCE ableiten; denn da in diesen zweyen vollkommen gleichen Dreyecken, $EF = Ef$, und vermög dem vorhergehenden $EF + Ef = AB$ ist, so ist auch $\frac{1}{2}(EF + Ef) = \frac{1}{2}AB$,

näm-

nämlich $Ef = CB$; es ist aber $CE = \sqrt{Ef^2 - Cf^2}$; folglich auch $CE = \sqrt{CB^2 - Cf^2} = \sqrt{a^2 - c^2}$. Fig. 178

Aus der Gleichung $CE = \sqrt{CB^2 - Cf^2}$ folgt $CE^2 = (CB + Cf).(CB - Cf) = (CA + Cf)(CB - Cf) = Af.fB$; folglich auch $Af : CE = CE : fB$, nämlich die kleine Halbachse ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen eines Brennpunktes von den beyden Scheiteln der Ellipse.

Anmerkung. Aus beyden gegebenen Achsen $F'f'$ und $D'E'$ kann die Ellipse beschrieben werden, wenn man beyde Achsen dergestalt senkrecht auf einander stellet, daß sie sich wechselweise in C halbiren, und sodann aus dem Endpunkte E der kleinen Achse mit einem Halbmesser $CB = \frac{1}{2}F'f'$ die große Achse AB in F und f durchschneidet um die Excentricität $Cf = CF$ nämlich um die Brennpunkte F und f zu erhalten; sind einmal die Brennpunkte bestimmet, so wird die Ellipse nach (532) beschrieben. Auch kann aus der gegebenen kleinen Achse und aus dem Abstande der Brennpunkte die große Achse, oder aus der großen Achse und aus dem Abstande der Brennpunkte die kleine Achse gefunden werden.

536. Wenn wir die kleine Halbachse mit b bezeichnen nämlich wenn wir $a^2 - c^2 = b^2$ setzen, und diesen Werth in der gefundenen Gleichung für die Ellipse substituiren, so erhalten wir $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, oder $\frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2 - x^2$. Setzen wir in dieser Gleichung $b = a$, oder in der vorigen $c = 0$, so ist $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ eine Gleichung für die senkrechten Ordinaten eines Kreises, allwo die Abscissen auf dem Durchmesser von dem Mittelpunkte angerechnet werden; eine Ellipse wird demnach in einen Kreis verwandelt, wenn man die zwey Achsen einander gleich setzet, oder die Excentricität verschwinden läßt.

Fig. 178 Aus dieser gefundenen Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ folgt auch

I. Daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate zum Produkte aus den beyden Abschnitten der großen Achse verhalte, wie das Quadrat der kleinen Achse zum Quadrate der großen Achse, weil sich die gefundene Gleichung auch also $y^2 = \frac{4b^2}{4a^2}.(a + x)(a - x)$ vorstellen läßt, nämlich $PM^2 = \frac{DE^2}{AB^2} \times (AP.PB)$, und endlich $PM^2 : AP.PB = DE^2 : AB^2$.

II. Daß sich die Quadrate der Ordinaten gegeneinander verhalten, wie die Produkte aus den zugehörigen Abschnitten der großen Achse; denn da $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a + x)(a - x)$, und $Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a + X)(a - X)$, so ist auch $y^2 : Y^2 = (a + x)(a - x) : (a + X)(a - X)$.

III. Daß sich jede Ordinate der Ellipse zu der zugehörigen Ordinate des Kreises auf der großen Achse verhalte, wie die kleine Halbachse, zu der großen Halbachse oder wie die kleine Achse zu der
179 großen: nämlich Fig. 179 $PM : PM' = CE : CB$; wie auch $pm : pm' = CE : CB$; und folglich auch $PM : pm = PM' : pm'$. Denn in der Ellipse ist $PM^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, und im Kreise ist $PM'^2 = a^2 - x^2$ für die nämliche Abscisse $CP = x$; folglich $PM^2 : P'M^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) : a^2 - x^2$ nämlich $PM : PM' = b : a$. u. s. w.

537. Für die Ellipse läßt sich auch eine Gleichung finden, wenn man den Anfangspunkt der Abscissen an das eine Ende der großen Achse versetzet; denn es sey $AP = x$, $PM = y$, $AC = CB = a$, und $DC = CE = b$, so ist

CP

$CP = x - a$; nun ist vermög den vorhergehenden $PM^2 = \frac{CE^2}{CB^2}(CB^2 - CP^2)$; folglich auch $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - (x-a)^2\right)$, Fig. 179

und endlich $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ eine Gleichung, aus der sich ebenfalls alle bisher entwickelten Eigenschaften der Ellipse ableiten lassen. Wenn man die ganze grosse Achse mit a und die ganze kleine Achse mit b bezeichnet, so findet man $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$

538. Eine dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Achse wird in der Ellipse der **Parameter** der großen Achse genennt, nämlich $\frac{(2b)^2}{2a} = p = \frac{2b^2}{a}$ ist der Parameter der grossen Achse. Und eine dritte Proportionallinie zur kleinen und großen Achse heißt der **Parameter** der kleinen Achse, nämlich $\frac{2a^2}{b} = P$ ist der Parameter der kleinen Achse. Da $\frac{1}{2}p < b$, so muß es auf der großen Achse zwischen A und C sowohl als auch zwischen C und B einen Punkt von der Beschaffenheit geben, daß die Ordinate FG dem halben Parameter, und folglich GG′ dem ganzen Parameter der großen Achse gleich sey: um diesen Punkt F oder f nämlich CF = Cf zu finden, setze man in der Gleichung (536) $y = \frac{1}{2}p$, nämlich $y = \frac{b^2}{a}$, so ist $\frac{b^4}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, und daraus findet man $x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, nämlich x = Cf, oder x = CF, wenn F, f die Brennpunkte sind: in der **Ellipse ist demnach eine Gerade durch den Brennpunkt auf die große Achse senkrecht gezogen, und beyderseits bis an den Umfang der Ellipse verlängert dem Parameter der großen Achse gleich.** Der Parameter der klei-

Fig. 179 kleinen Achse läßt sich in der Ellipse durch keine Ordinate vorstellen, weil $\frac{2a^2}{b} > 2a$, oder $P > 2a$ nämlich weil der Parameter der kleinen Achse größer ist als die große Achse selbst.

Da $\frac{2b^2}{a} = p$ gesetzet worden, so ist $b = \sqrt{\frac{1}{2}ap}$, und $a = \frac{2b^2}{p}$; nämlich aus den beyden gegebenen Achsen läßt sich der Parameter, und aus dem Parameter und aus einer Achse läßt sich die andere Achse finden.

539. Wenn man in die Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ vermög (537), den Parameter der großen Achse hineinbringet, nämlich $b^2 = \frac{1}{2}ap$ setzet, so ist $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$ wieder eine Gleichung für die Ellipse.

Setzen wir in dieser Gleichung $p = 2a$, so ist $y^2 = 2ax - x^2$ eine Gleichung für den Kreis.

Setzet man hingegen $2a$ in Rücksicht p so groß, daß der Quotient $\frac{p}{2a}$ kleiner als jede angebliche Größe sey, nämlich setzet man $2a = \infty$ in Rücksicht p, so ist für jede endliche Abscisse vom Scheitel angerechnet $y^2 = px$, eine Gleichung für die Parabel, weil das zweyte Glied $\frac{px^2}{2a} = \frac{px^2}{\infty}$ in Rücksicht des ersten Gliedes bey der Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$ verschwindet. Eine Ellipse also, deren große Achse in Rücksicht ihres Parameters unendlich groß ist, kann in jeder endlichen Entfernung von ihren Scheiteln gerechnet als eine Parabel angesehen werden, die mit ihr einerley Parameter, einerley Abscissenlinie, und einerley Scheitel hat. Da bey dieser

ser Voraussetzung ($2a = \infty$ in Rücksicht p) auch die Ex- Fig.
centricität $= \infty$ ist und umgekehrt, so folgt, daß man sehr excentrische Ellipsen bey ihren Scheiteln (z. B. die Laufbahnen der Cometen bey ihren Sonnennähen) für parabolische Linien ansehen könne.

540. Auch läßt sich für die Ellipse eine Gleichung fin- 180
den, wenn man die kleine Achse für die Abscissenlinie und den Mittelpunkt C, oder auch den einen Scheitel der kleinen Achse für den Anfangspunkt der Abscissen annimmt (Fig. 180) Es sey z. B. $CP = x$, die senkrechte Ordinate $PM = y$, $CB = a$, und $CE = b$, so ist $GM = CP = x$, $CG = PM = y$; nun ist vermög (536) $GM^2 = \frac{CE^2}{CB^2}(CB^2 - CG^2)$;

folglich auch $x^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - y^2)$, und daraus findet man

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$$

Setzet man hingegen $DP = x$, $PM = y$, so ist $CP = x - b = GM$, folglich $(x - b)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - y^2)$, und

endlich $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2)$

Jede dieser zwey Gleichungen giebt uns zu erkennen,

I. Daß zu jeder Abscisse zwey vollkommen gleiche Ordinaten nach entgegengesetzten Richtungen gehören.

II. Daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate der kleinen Achse zum Produkte aus den beyden Abschnitten der nämlichen kleinen Achse verhalte, wie das Quadrat der großen Halbachse zum Quadrat der kleinen Halbachse; wie auch daß sich die Quadrate der Ordinaten der kleinen Achse gegeneinander verhalten, wie die Produkte aus den zugehörigen Abschnitten der kleinen Achse von ihren Scheiteln oder Endpunkten gezählet.

Fig. 180 III. Daß sich auch die Ordinaten der kleinen Achse gegeneinander verhalten, wie die gleichnamigen Ordinaten eines Kreises auf der kleinen Achse, oder daß sich jede elliptische Ordinate der kleinen Achse zur übereinstimmenden Kreisordinate auf eben dieser Achse verhalte, wie a zu b; u. s. w.

In der letzten Gleichung $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2)$ setze man $a^2 = \frac{1}{2}bP$, so ist $y^2 = Px - \frac{Px^2}{2b}$ wieder eine Gleichung für die Ellipse durch die kleine Halbachse und ihren Parameter ausgedrücket.

Man könnte auch in die zwey Gleichungen $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ und $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$ den Parameter hineinbringen, wenn es erforderlich wäre, welches aber nicht gewöhnlich ist.

541. Es sind demnach bey der Ellipse nur folgende drey Gleichungen zu merken, und wohl im Gedächtnisse zu behalten, weil sie öfters vorkommen.

I. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, wenn man den Mittelpunkt der Ellipse für den Anfangspunkt der Abscissen annimmt, die eine Halbachse mit a, die andere mit b benennet, und die Abscissen auf der Halbachse a zählet,

II. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, wenn man die eine Halbachse mit a die andere mit b benennet, die Achse $2a$ für die Abscissenlinie, und ihren Scheitel für den Anfangspunkt der Abscissen annimmt.

III. $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$ wenn man eine aus den zwey Achsen mit $2a$, und ihren Parameter p bezeichnet, die

Achse

Achse $2a$ für die Abscissenlinie und ihren Scheitel für den Fig. Anfangspunkt der Abscissen annimmt.

Anmerkung. Wenn man bey dem zweyten und dritten Falle die ganzen Achsen mit a und b bezeichnet, so ist in der zweyten Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$, und in der dritten $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$

542. Wenn man an was immer für einen Punkt M der Ellipse Fig. 181 aus beyden Brennpunkten die Fahrstriche FM, fM zieht, einen derselben z. B. den größeren fM verlängert, und den Winkel GMF durch die Gerade MT halbiret, so berühret diese Gerade MT die Ellipse in dem Punkte M. 181

Denn ein jeder anderer Punkt Q der Geraden MT liegt ausser der Ellipse, welches man auf folgende Art darthun kann. Man schneide MG = MF, und ziehe GF, so ist GE = EF und MT senkrecht auf GF; ferner ziehe man aus was immer für einem Punkte Q die Geraden QG, QF, Qf, so ist QG = QF; nun ist fQ + QG > fG; folglich auch fQ + QF > fG; es ist aber fG = fM + MF = AB; folglich auch fQ + QF > AB; der Punkt Q liegt demnach ausser der Ellipse, weil sonst fQ + QF = AB seyn müßte; und dieses läßt sich von einem jeden anderen Punkte ausser M erweisen.

Anmerkung. Es ist demnach sehr leicht an einen gegebenen Punkt M der Ellipse eine Tangente zu ziehen. Wäre hingegen durch einen ausser der Ellipse gegebenen Punkt T Fig. 180 eine Tangente an die Ellipse zu ziehen, so beschreibe man aus diesem gegebenen Punkte mit der Entfernung Tf des einen Brennpunktes einen Kreisbogen fR, durchschneide diesen Kreisbogen aus dem andern Brennpunkte mit dem Halbmesser FR = AB, verbinde R und F durch die Gerade RF, und ziehe von T nach Q die Gerade TQ, so wird sie die Ellipse in Q berühren; denn TR = Tf, und 180

Fig. 181 auch $Qf = QR$, folglich fR senkrecht auf TQ, und der Winkel $fQT = RQT$.

Es ist Fig. 181 der Winkel $TMF = fMQ$, weil jeder derselben dem Winkel GMT gleich ist, nämlich die Fahrstriche eines nämlichen Punktes der Ellipse schließen mit der Tangente dieses Punktes gleiche Winkel ein; wenn demnach mehrere Feuer- oder Licht- oder auch Stimmstrahlen aus einem Brennpunkte eines elliptischen Hohlspiegels, (der durch die Umdrehung des halben elliptischen Umfanges AMB um die große Achse AB erzeuget wird), nach was immer für Richtungen ausfahren, so werden selbe nach dem Abprellen sich wieder in dem andern Brennpunkte vereinigen.

543. Nun läßt sich in der Ellipse für jede gegebene Abscisse die zugehörige Subnormale PN, die Normale MN, die Subtangente PT, und die Tangente MT bestimmen, wenn man aus dem Punkte M die Senkrechte MN auf MT errichtet. Es ist nämlich

I. Die Subnormale $PN = \frac{b^2x}{a^2}$, wenn man die Abscissen auf der grossen Achse von dem Mittelpunkte zählet. Denn da MN und FG senkrecht auf MT, so ist $fMN \backsim fGF$; folglich $fG : fF = fM : fN$; es ist aber $fG = fM + MF = AB = 2a$, $fF = 2c$, $fM = a + \frac{cx}{a}$ wenn man $CF = c$ setzet (533 VI.); folglich $2a : 2c = a + \frac{cx}{a} : fN$, nämlich $fN = c + \frac{c^2x}{a^2}$; es ist aber $PN = fP - fN$, und $fP = c + x$, folglich $PN = x - \frac{c^2x}{a^2} = \frac{(a^2 - c^2)x}{a^2} = \frac{b^2x}{a^2}$, wenn man statt $a^2 - c^2$ seinen Werth b^2 substituiret (536).

Anmer-

Anmerkung. Wenn man $AP = x$ setzet, so erhält Fig. 181
man nach gehöriger Reduktion $PN = \frac{b^2}{a} - \frac{b^2 x}{a^2}$, oder
$PN = \frac{1}{2} p - \frac{px}{2a}$, wenn man den Parameter $p = \frac{2b^2}{a}$
hineinbringet.

II. Die Normale $MN = \sqrt{b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^4}(a^2 - b^2)}$
$= b\sqrt{\left(1 - \frac{c^2 x^2}{a^4}\right)}$ für die Abscisse CP wird aus dem
rechtwinklichten Dreyecke MPN gefunden

III. Die Subtangente $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$ für die Abscisse
CP findet man aus den ähnlichen Dreyecken NPM und PMT;
denn $NP\left(\frac{b^2 x}{a^2} : PM\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = PM\right.\right.$
$\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} : PT = \frac{a^2 - x^2}{x}\right.$

Anmerkung. Setzet man $x = 0$, so ist $PT = \infty$, folglich läuft die Tangente an dem Scheitel der kleinen Achse mit der großen Achse parallel; setzet man $x = a$, so ist $PT = 0$, folglich steht die Tangente an dem Scheitel der großen Achse senkrecht auf derselben. Für $AP = x$ ist $PT = \frac{2ax - x^2}{a - x}$; setzet man in dieser Formel $x > a$, nämlich $AP > AC$, so ist PT negativ; folglich fällt in diesem Falle die Subtangente nicht von P gegen den Anfangspunkt A sondern auf die entgegengesetzte Seite.

IV. $CT = \frac{a^2}{x}$ für die Abscisse $CP = x$; denn $CT =$
$CP + PT = x + \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2}{x}$. Es ist also $x : a =$
$a : CT$, nämlich $CP : CA = CA : CT$.

Fig. V. $AT = \frac{a^2}{x} - a = \frac{a(a-x)}{x}$ für die Abscisse $CP = x$.

Die Tangente MT läßt sich aus dem rechtwinklichten Dreyecke MPT bestimmen.

Nachdem man einmal die Subtangente, Subnormale, Normale für jede Abscisse auf der großen Achse kennet, so wird es nun nicht mehr schwer seyn eben diese Linien für jede Abscisse auf der kleinen Achse zu bestimmen.

182 544. Eine Gerade AB Fig. 182 von einem Punkte A der Ellipse an einen andern Punkt B der nämlichen Ellipse durch den Mittelpunkt C gezogen heißt ein Durchmesser der Ellipse; und eben so ist DE ein Durchmesser dieser nämlichen Ellipse. Zwey Durchmesser, deren jeder mit der Tangente des Scheitels von dem anderen Durchmesser parallel läuft, heißen vereinigte oder zusammengehörige Durchmesser (diametri conjugatæ). Eine dritte Proportionallinie zu dem ersten und zweyten vereinigten Durchmesser wird der Parameter des ersten Durchmessers genennt.

545. *Aufgabe.* **Eine Gleichung für die Ellipse zu finden, wenn man einen Durchmesser BA für die Abscissenlinie annimmt, den Anfangspunkt der Abscissen in den Mittelpunkt setzet, nämlich CP mit x benennet, und die Ordinaten $PM = y$ zu dem vereinigten Durchmesser DE oder zu der Tangente AT parallel gedenket; die Gleichung zwischen x und y soll blos durch die zwey Stücke $CA = m$ und $CE = n$ der vereinigten Durchmesser ausgedrücket werden.**

Auflösung. Es sey $CP = x$, $PM = y$, $CA = m$, $CE = n$, $AG = t$ senkrecht auf die große Halbachse $CF = a$, $CG = u$, $GT = s$, $AT = q$, und über dieses PV, MQ senkrecht auf CF, PS aber senkrecht auf QM. Nun ist in den ähnlichen Dreyecken AGT und PMS,

CG

$$AT\,(q : AG\,(t = PM\,(y : MS = \frac{ty}{q};$$ Fig. 182

$$AT\,(q : GT\,(s = PM\,(y : PS = \frac{sy}{q}.$$

Ferner ist in den ähnlichen Dreyecken CPV und CAG,

$$CA\,(m : AG\,(t = CP\,(x : PV = \frac{tx}{m}$$

$$CA\,(m : CG\,(u = CP\,(x : CV = \frac{ux}{m}.$$

Folglich $MQ = PV - MS = \frac{tx}{m} - \frac{ty}{q}$,

und $CQ = CV + PS = \frac{ux}{m} + \frac{sy}{q}$.

Es ist aber $MQ^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - CQ^2)$, oder $\frac{a^2}{b^2}\,MQ^2 = a^2 - CQ^2$;

folglich auch $\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{tx}{m} - \frac{ty}{q}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{ux}{m} + \frac{sy}{q}\right)^2$, nämlich

$$\left(\frac{a^2t^2}{b^2q^2} + \frac{s^2}{q^2}\right)y^2 + \left(us - \frac{a^2t^2}{b^2}\right)\frac{2xy}{mq} + \left(\frac{a^2t^2}{b^2m^2} + \frac{u^2}{m^2}\right)x^2 = a^2;$$

nun ist $us = u.\ GT = u.\ \frac{a^2 - u^2}{u} = a^2 - u^2$ (543. III.)

und auch $\frac{a^2t^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}AG^2 = a^2 - CG^2 = a^2 - u^2$;

folglich $us = \frac{a^2t^2}{b^2}$, und $us - \frac{a^2t^2}{b^2} = 0$; es ist demnach

$$\left(\frac{a^2t^2}{b^2q^2} + \frac{s^2}{q^2}\right)y^2 + \left(\frac{a^2t^2}{b^2m^2} + \frac{u^2}{m^2}\right)x^2 = a^2,$$

oder wenn man den Coefficienten von y^2 mit A, und den Coefficienten von x^2 mit B bezeichnet, so ist $Ay^2 + Bx^2 = a^2$. Nun läßt sich A und B auf folgende Art bestimmen; man

Fig. 182 setze $x = 0$, so ist $y = CE = n$, folglich $An^2 + B.0 = a^2$, nämlich $A = \frac{a^2}{n^2}$; man setze ferner $x = CA = m$, so ist $y = 0$, folglich $A.0 + Bm^2 = a^2$, nämlich $B = \frac{a^2}{m^2}$; es ist demnach $\frac{ay^2}{n^2} + \frac{ax^2}{m^2} = a^2$; und daraus findet man endlich $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$ die gesuchte Gleichung, welche mit jener für rechtwinklichte Ordinaten auf der großen oder kleinen Achse vollkommen übereinstimmet.

Diese Gleichung giebt uns zu erkennen 1) daß zu jeder positiven und negativen Abscisse zwey gleiche Ordinaten nach entgegengesetzten Richtungen gehören, und daß demnach der Durchmesser die ganzen Parallelen Mm der Tangente AT und auch seinen vereinigten Durchmesser halbire. 2) Daß jeder Durchmesser in dem Mittelpunkte der Ellipse halbiret sey. 3) Daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate zum Produkte aus den beyden Abschnitten des ersten Durchmessers von seinen beyden Scheiteln gerechnet verhalte, gleichwie das Quadrat des vereinigten Durchmessers zum Quadrate des ersten Durchmessers, auf dem die Abscissen gezählet werden; u. s. w.

Es ist nun leicht den Anfangspunkt der Abscissen an den Scheitel eines Durchmessers zu versetzen; und auch statt dem vereinigten Durchmesser in die Gleichung den Parameter des ersten Durchmessers zu bringen; u. s. w.

546. Wir wollen auch folgende zwey Eigenschaften der Ellipse entwickeln.

I. Die Summe der Quadrate von jeden zweyen vereinigten Durchmessern ist gleich der Summe der Quadrate von den beyden Achsen, nämlich $4m^2 + 4n^2 = 4a^2 + 4b^2$, oder $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$.

II.

II. Das Produkt aus jeden zweyen vereinigten Durchmessern mit dem Sinus ihres Neigungswinkels multipliciret ist gleich dem Produkte aus den zwey Achsen, nämlich $2m.\,2n.\sin q = 2a.\,2b$, oder $mn.\sin q = ab$, wenn man den Winkel DCA oder auch DCB $= q$, und den Halbmesser der Tafeln $= 1$ setzet. Fig. 182

Denn es sey AG und DN senkrecht auf HF, CG $= x$, DN $= u$, so ist in den ähnlichen Dreyecken DCN und ATG, $AG^2 : GT^2 = DN^2 : NC^2$, nämlich $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) : \left(\frac{a^2 - x^2}{x}\right)^2 = u^2 : \frac{a^2}{b^2}(b^2 - u^2)$; und daraus findet man $u = \frac{bx}{a}$, oder $x : u = a : b$, nämlich CG : DN $= a : b$, (1.

Auf die nämliche Art findet man CN : AG $= a : b$, (2.

Nun ist aus der ersten Proportion $DN^2 = \frac{b^2}{a^2}.\,CG^2$, oder weil $AG^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - CG^2)$ nämlich $CG^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}.\,AG^2$, so ist $DN^2 = b^2 - AG^2$, und folglich $DN^2 + AG^2 = b^2$.

Ferner ist aus der zweyten Proportion $CN^2 = \frac{a^2}{b^2}.\,AG^2$, oder weil $AG^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - CG^2)$, so ist $CN^2 = a^2 - CG^2$; folglich $CN^2 + CG^2 = a^2$. Es ist demnach auch $DN^2 + CN^2 + AG^2 + CG^2 = b^2 + a^2$; aber $DN^2 + CN^2 = CD^2$, und $AG^2 + CG^2 = CA^2$, folglich $CD^2 + CA^2 = b^2 + a^2$, nämlich I. $n^2 + m^2 = b^2 + a^2$.

Nun ziehe man AD so ist der Flächeninhalt des Dreyeckes ACD $= \frac{1}{2}(DN + AG)(CN + CG) - \frac{1}{2}CN.\,DN - \frac{1}{2}CG.\,AG = \frac{1}{2}(CN.\,AG + CG.\,DN)$, oder da aus der zweyten Proportion CN $= \frac{a}{b}.\,AG$, und aus der ersten DN $= \frac{b}{a}.\,CG$, so ist das Dreyeck ACD $= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\,AG^2 + \frac{b}{a}\,CG^2\right)$

 =

Fig. 182 $= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2}(a^2 - CG^2) + \frac{b}{a} CG\right) = \frac{1}{2}ab$; es ist aber auch dieses nämliche Dreyeck $ACD = \frac{1}{2}AC.\,CD \sin ACD = \frac{1}{2}mn.\sin q$ für den Halbmesser $= 1$ vermög (464): folglich auch $\frac{1}{2}mn.\sin q = \frac{1}{2}ab$, und endlich II. $mn.\sin q. = ab$.

Anmerkung. Da das Dreyeck $ACD = \frac{1}{2}ab$, so ist das Parallelogram $CL = ab$, und $IL = 4ab = 2a.\,2b$, nämlich bey einer Ellipse ist das umgeschriebene Parallelogram auf jeden zweyen vereinigten Durchmessern dem Rechtecke auf den beyden Achsen gleich.

547. Aus den gefundenen Gleichungen $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$ und $mn.\sin q = ab$ folgt, daß man aus zwey gegebenen vereinigten Durchmessern $DE = 2n$, $AB = 2m$, und aus ihrem Neigungswinkel $ACE = q$ beyde Halbachsen a, b, der Ellipse finden, und sodann die Ellipse nach (532) beschreiben könne. Den da $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$, und $ab = mn.\sin q$

so ist $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = m^2 + n^2 + 2mn.\sin q \\ a^2 - 2ab + b^2 = m^2 + n^2 - 2mn.\sin q \end{cases}$

folg. $\begin{cases} a + b = \sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn.\sin q)} \\ a - b = \sqrt{(m^2 + n^2 - 2mn.\sin q)} \end{cases}$

und $\begin{cases} a = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2+2mn.\sin q)} + \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2-2mn.\sin q)} \\ b = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2+2mn.\sin q)} - \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2-2mn.\sin q)} \end{cases}$

Eben so lassen sich aus den gegebenen Achsen $2a$, $2b$ zwey vereinigte Durchmesser finden, welche einen gegebenen Winkel $ACE = q$ einschließen.

Auch läßt sich aus dem gegebenen Neigungswinkel $ACE = q$ zweyer vereinigten Durchmesser, aus dem halben Durchmesser $CA = m$, und aus der großen Halbachse $CF = a$ der Winkel $ACF = v$ bestimmen, welchen der halbe Durchmesser mit der Halbachse einschließt. Denn in dem Dreyecke CAT ist $\sin CTA : CA = \sin CAT : CT$; es ist aber $\sin CTA = \sin TCE = \sin(q - v)$, $CA = m$, $\sin CAT = \sin CAL = \sin ACE = \sin q$, und $CT = \frac{a^2}{CG}$ (543. IV.) folglich $\sin(q - v) : m$

=

$= \sin q : \frac{a^2}{CG}$, nämlich $CG = \frac{a^2 \sin(q - v)}{m.\sin q}$; ferner ist in Fig. 182
dem rechtwinklichten Dreyecke CGA, $\sin G : AC = \sin CAG$
oder $\cos ACG : CG$, nämlich $1 : m = \cos v : \frac{a^2 . \sin(q - v)}{m.\sin q}$,
und daraus findet man $m^2 . \cos v . \sin q = a^2 \sin(q - v) =$
$a^2(\sin q . \cos v - \sin v . \cos q)$, nämlich $\frac{\sin v}{\cos v} = \frac{a^2 - m^2}{a^2} . \frac{\sin q}{\cos q}$,
und endlich $\tang v = \frac{a^2 - m^2}{a^2} . \tang q$, oder auch $\tang v$
$= \frac{(a + m)(a - m) . \tang q}{a^2}$, welches sich sehr leicht mittelst
der Logarithmen entwickeln läßt.

548. Der Flächeninhalt einer Ellipse läßt sich bestimmen; 179
er ist gleich $ab\pi$, wenn man die eine Halbachse mit a die andere mit b und das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise eines Zirkels mit π bezeichnet.

Denn man stelle sich vor, daß die Achse AB Fig. 179 in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilet sey; man gedenke sodann aus allen Theilungspunkten senkrechte Ordinaten bis an den Umfang der Ellipse, und verlängere diese Ordinaten bis an den Umkreis auf der großen Achse, so ist dadurch die halbe Ellipse BG′A und auch die halbe Kreisfläche BM′A in ihre Elemente aufgelöset; nun verhält sich jedes elliptische Element zu dem übereinstimmenden Kreiselemente, wie die elliptische Ordinate zu der übereinstimmenden Kreisordinate, weil jede zwey solche Elemente für zwey Rechtecke auf der nämlichen Grundlinie können angesehen werden, deren Höhen die Ordinaten sind; oder jedes elliptische Element verhält sich zu dem übereinstimmenden Kreiselemente wie die kleine Halbachse b zu der großen a, weil sich jede elliptische Ordinate zu der übereinstimmenden Kreisordinate auf der großen Achse wie b zu a verhält; es verhält sich demnach auch die

Fig. 179 Summe aller elliptischen Elemente zur Summe aller Kreiselemente wie b zu a (116), nämlich die halbe elliptische Fläche verhält sich zur halben Kreisfläche auf der großen Achse wie b zu a, und auch die ganze elliptische Fläche $= e$ verhält sich zur ganzen Kreisfläche $= k$, wie b zu a, nämlich $e : k = b : a$, und folglich $e = \frac{b}{a}.k$; es ist aber auf der großen Achse die ganze Kreisfläche $k = a^2\pi$; folglich $e = ab\pi$.

Anmerkung. Da $ab\pi = (\sqrt{ab})^2\pi$, und $\sqrt{ab}$ die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen a und b vorstellet, so kann man auch sagen, daß die ganze elliptische Fläche einem Kreise gleich sey, dessen Halbmesser zwischen den beyden Halbachsen der Ellipse eine mittlere geometrische Proportionallinie ist.

Es ist leicht einzusehen, daß auch jeder halbe elliptische Abschnitt AG′F zum übereinstimmenden Kreisabschnitte AG″F sich verhalte wie b zu a, und auch jeder elliptische Ausschnitt ACG′ zum übereinstimmenden Kreisausschnitte ACG″ wie b zu a, weil das Dreyeck FCG′ : FCG″ = FG′ : FG″ $= b : a$ sich verhält.

549. Der Kubickinhalt $= E$ eines Elliptoides auf der großen Achse (welches durch die Umdrehung der Ellipse um die große Achse erzeuget wird) ist $E = \frac{4}{3}ab^2\pi$, und der Kubickinhalt $= E'$ eines Elliptoides auf der kleinen Achse ist $E' = \frac{4}{3}ba^2\pi$; folglich ist das halbe Elliptoides auf der großen Achse $\frac{1}{2}E = \frac{2}{3}a.b^2\pi$, und auf der kleinen Achse $\frac{1}{2}E' = \frac{2}{3}b.a^2\pi$, nämlich auf jeder Achse ist das halbe Elliptoides gleich $\frac{2}{3}$ eines Cylinders von der nämlichen Grundfläche und Höhe.

Denn man zertheile nur wieder wie im vorigen Falle das Elliptoides und die Kugel auf der großen Achse in ihre Elemente (in lauter eingeschriebene Cylinder von einer gleichen und unendlich kleinen Höhe) so wird sich jedes elliptoidische Element zu dem übereinstimmenden Kugelelemente verhalten, wie die Kreisfläche der elliptischen Ordinate zur Kreisfläche der über-

übereinstimmenden Ordinate des Kreises auf der großen Achse Fig.
(415. II.), weil die Kreisflächen von diesen übereinstimmenden Ordinaten nichts anders sind als die Grundflächen der Elemente (der eingeschriebenen Cylinder von gleicher Höhe); oder jedes elliptoidische Element verhält sich zum übereinstimmenden Kugelelemente wie das Quadrat der elliptischen Ordinate zum Quadrate der Kreisordinate auf der großen Achse (357); oder endlich jedes elliptoidische Element verhält sich zum übereinstimmenden Kugelelemente wie b^2 zu a^2; folglich auch die Summe aller elliptoidischen Elemente zur Summe aller Kugelelemente wie b^2 zu a^2, nämlich das Elliptoides $= E$ auf der großen Achse zur Kugel $= K$ auf der nämlichen Achse wie $b^2 : a^2$; es ist demnach $E = \frac{b^2}{a^2} . K$; es ist aber $K = \frac{4}{3} a^3 \pi$; folglich auch $E = \frac{4}{3} ab^2 \pi$, und $\frac{1}{2} E = \frac{2}{3} a . b^2 \pi$.

Eben so kann man darthun, daß auch das Elliptoides $= E'$ auf der kleinen Achse zur Kugel auf dieser nämlichen Achse sich verhalte wie a^2 zu b^2, weil das Quadrat jeder elliptischen Ordinate der kleinen Achse zum Quadrate der übereinstimmenden Kreisordinate auf eben dieser Achse sich verhält wie $a^2 : b^2$ (540. III.); und daß folglich $E' = \frac{4}{3} ba^2 \pi$ und $\frac{1}{2} E' = \frac{2}{3} b . a^2 \pi$ sey.

Von der Hyperbel.

550. Es sey P'P eine gerade Linie; F, f zwey Punkte auf derselben; man gedenke eine krumme Linie von der Beschaf- 183
fenheit, daß die Differenz der Abstände fM — FM eines jeden Punktes M immer einer unveränderlichen Geraden B'A' $= 2a$ gleich sey, so heißt eine solche krumme Linie eine Hyperbel. Die zwey Punkte f, F werden Leitpunkte oder Brennpunkte genennt, und der von f und F gleichweit abstehende Punkt C der Geraden fF heißt der Mittelpunkt der Hyperbel.

Aus den gegebenen Geraden fF und B'A' kann demnach eine Hyperbel beschrieben werden, wenn man die Gerade B'A'

Fig. 183 verlängert, auf derselben mehrere Punkte G nach Belieben annimmt, sodann mit dem Halbmesser B′G aus f einen Kreisbogen beschreibt, und darauf diesen Kreisbogen mit dem Halbmesser GA′ aus F durchschneidet um die Punkte M, m der Hyperbel zu erhalten; und auf diese Art kann man so viele Punkte der Hyperbel bestimmen, als es nur erforderlich ist. Auch läßt sich eine Hyperbel durch eine ununterbrochene Bewegung beschreiben, wenn man an ein Lineal fL einen Faden FML anbringt, der um B′A′ kürzer ist als fL; sodann befestiget man das eine Ende des Fadens in F und das andere in L, drehet das Lineal fL mit dem einen Ende f um den unbeweglichen Punkt f, und drücket bey dieser drehenden Bewegung den Faden ML mit einem Stifte M immer an das Lineal fL, so wird der Weg, welchen der Punkt M bey dieser Bewegung zurücklegt, eine Hyperbel seyn.

551. **Aufgabe. Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden.**

Auflösung. Man nehme die durch f, F gezogene Gerade für die Abscissenlinie und C für den Anfangspunkt der Abscissen an, setze CF $=$ Cf $= c$, Mf $-$ MF $=$ B′A′ $= 2a$, CP $= x$, die senkrechte Ordinate PM $= y$, und FM $= z$, so ist fM $= 2a + z$, fP $=$ CP $+$ Cf $= x + c$, und FP $=$ CP$-$CF $= x - c$.

Nun ist $FM^2 = FP^2 + PM^2$; nämlich $z^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$; und $fM^2 = fP^2 + PM^2$; d.i. $4a^2 + 4az + z^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$;

folglich $z = \frac{cx}{a} - a$; und $z^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2$.

Man substituire diesen Werth in die erste Gleichung statt z^2, so ist $\frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$; und daraus findet man endlich $y = \pm\sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2)}$ die gesuchte Gleichung für die Hyperbel.

Anmerkung. Aus der gegebenen Auflösung erhellet auch, Fig. daß der Fahrstrich (radius vector) $FM = \frac{cx}{a} - a$, und fM 183 $= a + \frac{cx}{a}$ sey.

552. Diese gefundene Gleichung giebt uns zu erkennen, 1) daß zu jeder positiven oder negativen Abscisse, die größer ist als a, zwey gleiche Ordinate nach entgegengesetzten Richtungen gehören. 2) Daß für $x = CA = a$, und auch für $x = CB = -a$ die Ordinate $= 0$ sey; B und A sind demnach die Scheitel der Hyperbel; die Gerade $BA = 2a = fM - FM$ heißt die erste Achse der Hyperbel. 3) Für $x = CA - v$ und auch für $x = CB - v$ ist die Ordinate unmöglich; zwischen A und B giebt es demnach keine Ordinaten. 4) Hingegen ist für $x = \infty$, und auch für $x = -\infty$ sowohl die positive als auch die negative Ordinate auf beyden Seiten unendlich groß; die Hyperbel geht demnach mit vier Schenkeln, mit zweyen von A gegen der Gegend P, und mit zweyen gegen P′ ohne Ende fort; und es ist leicht einzusehen, daß bey der nämlichen Hyperbel alle vier Schenkel einander vollkommen gleich sind.

553. Um die gefundene Gleichung abzukürzen setze man $c^2 - a^2 = b^2 = (c + a)(c - a)$, so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$.

Diese Gerade b heißt die zweyte Halbachse; sie ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen $c + a$ und $c - a$, nämlich zwischen den Abständen eines Scheitels der Hyperbel von den beyden Brennpunkten. Will man nun aus dem Mittelpunkte C auf die erste Achse eine Senkrechte verzeichnen, die der zweyten Achse gleich ist, so durchschneide man die Senkrechte CD aus A mit einem Halbmesser $AD = CF = c$, so ist CD die zweyte Halbachse, und folglich DE die ganze zweyte Achse, wenn man $CE = CD$ abschneidet; denn es ist $CD^2 = AD^2 - AC^2 = c^2 - a^2 = b^2$.

Will

Fig. 184 Will man hingegen an dem einen Scheitel A der Hyperbel Fig. 184 eine Senkrechte ED verzeichnen, die der zweyten Achse gleich ist, so darf man nur die gezogene Senkrechte ED aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser CF in E und D durchschneiden; denn es ist sodann $AD = CD^2 - CA^2 = c^2 - a^2 = b^2 =$ der zweyten Halbachse. Aus diesem ist nun auch leicht zu ersehen, wie man aus den gegebenen zwey Achsen einer Hyperbel die Brennpunkte bestimmen, und sodann die krumme Linie nach (550) beschreiben könne.

554. Die abgekürzte Gleichung der Hyperbel $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}(x + a)(x - a)$ giebt uns zu erkennen, daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate zum Produkte aus den Abständen der Ordinate von den beyden Scheiteln verhalte, wie das Quadrat der zweyten Achse zum Quadrate der ersten Achse; wie auch daß sich die Quadrate der Ordinaten gegeneinander verhalten, wie die Produkte aus den Abständen der Ordinaten von den beyden Scheiteln der Hyperbel.

183 555. Wenn man die Senkrechte Dp Fig. 183 für die Abscissenlinie, und C für den Anfangspunkt der Abscissen annimmt, und $Cp = x$, $pm = y$, $CA = a$, $CD = b$ setzet, so ist $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$ wieder eine Gleichung für die Hyperbel; denn $Cp^2 = Pm^2 = \frac{b^2}{a^2}(CP^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}(pm^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}(y^2 - a^2) = x^2$; und folglich $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$

Nimmt man hingegen CP für die Abscissenlinie und den Scheitel A der Hyperbel für den Anfangspunkt der Abscissen an, und setzet $AP = x$, $PM = y$, so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$ auch

ei-

NF, Nf, und NQ, so ist NQ + Qf > Nf, oder NF + Qf > Nf; Fig.
folglich Qf > Nf — NF, oder Nf — NF < AB, weil Qf = AB 183
ist; der Punkt N liegt demnach ausser der Hyperbel, weil sonst Nf — NF = AB seyn müßte.

Zieht man die Gerade FQ, so steht sie senkrecht auf TM und läuft folglich mit der Normale MN parallel; derowegen verhält sich fQ : fM = fF : fN; nämlich $2a : a + \frac{cx}{a} = 2c : fN$; also $fN = c + \frac{c^2x}{a^2}$, und $PN = fN - fC - CP = c + \frac{c^2x}{a^2} - c - x = \frac{c^2 - a^2}{a^2} . x = \frac{b^2x}{a^2}$, nämlich bey der Hyperbel ist für die Abscisse x auf der ersten Achse von dem Mittelpunkte gezählet die Subnormale $= \frac{b^2x}{a^2}$; und folglich ist bey der gleichseitigen Hyperbel die Subnormale der Abscisse von dem Mittelpunkte gezählet gleich.

Da ferner PN : PM = PM : PT statt findet, so ist die Subtangente $PT = \frac{x^2 - a^2}{x} = x - \frac{a^2}{x}$. Der Unterschied zwischen CP und PT ist demnach $CT = \frac{a^2}{x}$; dieser Unterschied wird immer kleiner, je größer CP angenommen wird. Da nun $CT = \frac{a^2}{x}$, so muß $AT = a - \frac{a^2}{x}$ seyn; setzet man $x = \infty$, so wird $AT = a$. Auch AR läßt sich bestimmen; denn $AP\,(x - a : PM\left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}\right) = AT\,(a - \frac{a^2}{x} : AR$, nämlich $AR = \frac{b}{x}\sqrt{x^2 - a^2}$; setzet man nun $x = \infty$, so wird $AR = b$. Dieses giebt uns zu erkennen, daß zwey gerade Linien aus dem Mittelpunkte der ersten Achse durch die End-

Fig. 183 I. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ wenn man die Abscissen auf der ersten Achse $2a$ von dem Mittelpunkte zählet.

II. $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$, wenn man die Abscissen auf der zweyten Achse $2b$ aus dem Mittelpunkte zählet.

III. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$, wenn man die Abscissen auf der ersten Achse $2a$ von einem Scheitel zählet; oder $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax)$ für negative Abscissen.

IV. $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$, wenn man die Abscissen auf der ersten Achse $2a$ von dem einen Scheitel zählet, allwo $p = \frac{2b^2}{a}$ den Parameter der ersten Achse vorstellet.

558. Die zweyte Achse der Hyperbel kann kleiner oder auch größer seyn als die erste; aus dieser Ursache nennt man AB die erste und nicht die große Achse, und DE die zweyte und nicht die kleine Achse. Auch können die zwey Achsen der Hyperbel unter einander, und folglich auch dem Parameter gleich seyn; eine solche Hyperbel, bey der $a = b = \frac{1}{2}p$ ist, wird **gleichseitig** (æquilatera) genennt. Die Gleichungen für die gleichseitige Hyperbel sind demnach folgende; 1) $y^2 = x^2 - a^2$; 2) $y^2 = x^2 + a^2$; 3) $y^2 = x^2 + 2ax$ für positive Abscissen, und $y^2 = x^2 - 2ax$ für negative Abscissen.

559. Wenn man an einen Punkt M der Hyperbel aus beyden Brennpunkten die Geraden fM und FM (die Fahrstriche radios vectores) zieht, und den Winkel FMf durch eine Gerade TM halbiret, so wird diese Gerade die Hyperbel in dem Punkte M berühren. Denn ein jeder anderer Punkt N der Geraden TM liegt ausser der Hyperbel, welches man auf folgende Art darthun kann. Man schneide MQ = MF, ziehe

NF,

haupten, weil auch in einer unendlichen Entfernung $PN^2 - PM^2 = b^2$ ist. Fig. 184

Da wir $MN = \frac{b^2}{PM + PN}$ gefunden haben, und $PN = PN'$ ist, so ist auch $MN = \frac{b^2}{PM + PN'}, = \frac{b^2}{MN'}$; und folglich $MN.MN' = b^2$

561. Wenn man aus dem Scheitel B die Gerade BR zu der Asymptote CG parallel zieht, so sind BRD', E'CD' ähnliche und gleichschenklichte Dreyecke; folglich $D'R = RB = RC = \frac{1}{2} CD'$. Aus den beyden Halbachsen läßt sich demnach BR bestimmen; denn $D'C^2 = C'B^2 + D'B^2$, oder $(2CR)^2 = a^2 + b^2 = 4CR^2 = 4BR^2$, und folglich $BR^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$. Dieses $BR^2 = CR^2$ wird die Potenz der Hyperbel genennt.

562. Es sey $BR = q$, die Abscisse $CQ = x$, die zur Asymptote CG parallele Ordinate $QM = y$, und MK parallel zu CH,
so ist $MN : QM (y = D'B (b : BR (q,$
und $MN' : MK (x = D'B (b : BR (q,$
folglich $MN.\,MN' : xy = b^2 : q^2$; es ist aber vermög dem vorhergehenden $MN.\,MN' = b^2$; folglich auch $xy = q^2$, und

$y = \frac{q^2}{x}$ **eine Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.**

Setzen wir in dieser Gleichung $x = \infty$, so ist $y = \frac{q^2}{\infty}$ unendlich klein; setzen wir hingegen $x = 0$, so ist $y = \frac{q^2}{0}$ unendlich groß, nämlich die Ordinate verwandelt sich in die Asymptote, wenn man die Abscisse $= 0$ setzet. Setzet man x negativ, so wird y negativ, und zwar in gleichen Abständen von C sind die negativen Ordinaten für die negativen Abscissen eben so groß, als die positiven Ordinaten für die positiven Abscissen.

Endpunkte der zweyten Achse an dem Scheitel der Hyperbel ge-
Fig. zogen nur in einer unendlichen Entfernung den Schenkeln der
184 Hyperbel begegnen.

560. Diese geraden Linien CG und CH Fig. 184 durch den Mittelpunkt der ersten Achse und durch die Endpunkte der zweyten Achse an dem Scheitel der Hyperbel gezogen heißen ihre Asymptoten, weil sich die Hyperbel diesen geraden Linien ohne Ende nähert, ohne selbe jemals zu durchschneiden. Um sich davon zu überzeugen, ziehe man die Ordinate $PM = y$, und setze $CP = x$, so ist $CB^2 (a^2 : BD^2 (b^2 = CP^2 (x^2 : PN^2$, nämlich $PN^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$, und $PM^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$, folglich $PN^2 - PM^2 = b^2$, das ist die Differenz der Quadrate von PN und PM ist in einem jedem Punkte der Hyperbel bey allen vier Schenkeln dem Quadrate der zweyten Halbachse gleich, und folglich durchschneidet die Hyperbel niemals die Geraden CG und CH. Da nun $PN^2 - PM^2 = b^2$, oder $(PN + PM)(PN - PM) = b^2 = (PN + PM) . MN$, so ist $MN = \frac{b^2}{PN + PM}$; dieses MN wird demnach immer kleiner je größer $PN + PM$ angenommen wird, weil der Zähler b^2 unveränderlich ist; $PN + PM$ aber wächst ohne Ende fort; folglich nimmt MN ohne Ende ab, nämlich die Hyperbel nähert sich den Geraden CG und CH ohne Ende.

Setzet man CP unendlich groß, so ist auch $PN + PM = \infty$, und folglich $MN = \frac{b^2}{\infty}$, nämlich in einer unendlichen Entfernung wird der Unterschied der Ordinaten PN und PM unendlich klein, das ist kleiner als jede angebliche endliche Größe; in diesem Verstande kann man sagen, daß die Schenkel der Hyperbel in einer unendlichen Entfernung ihren Asymptoten begegnen; aber daß die Hyperbel ihre Asymptoten in einer unendlichen Entfernung durchschneide läßt sich nicht be-

haupman so viele Punkte dieser krummen Linie bestimmen, als es nur beliebig ist. Fig. 185

565. Eine Gerade MM′, die durch den Mittelpunkt der ersten Achse, oder durch die Spitze des Asymptotenwinkels geht, und sich beyderseits an der Hyperbel endiget, heißt ein Durchmesser der Hyperbel; die Punkte M, M′ aber werden die Scheitel des Durchmessers genennt; und die Tangente Tt zwischen den Asymptoten an dem Scheitel M heißt der vereinigte Durchmesser von MM′.

Wenn wir CM $= m$, Mt $= n$, die Abscisse CF $= x$, und die zum vereinigten Durchmesser parallele Ordinate FD$=y$ setzen, und über dieses ac, RQ senkrecht auf die verlängerte erste Achse ziehen, so ist CM (m : MT (n = CF (x : FA, nämlich

$$FA = \frac{nx}{m} = FB;$$

ferner BD : RD = Mt : Ma, und DA : DQ = MT : Mc;
also BD. DA : RD. DQ = Mt. MT : Ma. Mc;
aber RD. DQ $= b^2 =$ Mc. Ma; folglich auch BD. DA = Mt. MT $= n^2$, oder (FB — FD). (FD + FA) $= n^2$,

nämlich $\left(\frac{nx}{m} - y\right)\cdot\left(y + \frac{nx}{m}\right) = n^2$; und daraus

findet man endlich $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$ eine Gleichung für die Ordinaten eines Durchmessers der Hyperbel.

Es ist aus dieser gefundenen Gleichung zu ersehen, daß die Hyperbel in Rücksicht der vereinigten Durchmesser die nämlichen Eigenschaften habe, wie in Rücksicht ihrer Achsen.

566. Wenn man CA = AB $= a$, AP $= x$, PM $= y$, und den Asymptotenwinkel HCG $= m$ setzet. Fig. 186, so ist CP $= a + x$, die Senkrechte Mn $= y$. sin m für den Halbmesser $= 1$; nun ist CP. MP = CA², nämlich $(a+x).y = a^2$, 186

und folglich $y = \frac{a^2}{a+x}$ eine Gleichung für die Hyperbel an der Asymptote, wenn man A für den Anfangspunkt der

Fig. Da $xy = q^2$, und für eine andere Abscisse ebenfalls $XY = q^2$, so ist auch $xy = XY$, und folglich $y : Y = X : x$, nämlich die Ordinaten der Hyperbel an der Asymptote verhalten sich gegeneinander umgekehrt wie ihre Abscissen.

563. Wenn man durch was immer für einen Punkt E der Hyperbel Fig. 185 nach was immer für einer Richtung
185 eine Gerade AB zieht, so sind die Abschnitte dieser Geraden zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten jederzeit einander gleich, nämlich AE = DB.

Um diese Wahrheit einzusehen, ziehe man durch E und D auf die Achse die Senkrechten GH und QR,
so ist AE : GE = AD : QD, und EB : EH = BD : DR,
also AE. EB : GE. EH = AD.BD : QD. DR;
aber GE.EH $= b^2 =$ QD.DR; folglich auch AE.EB = AD.BD,
oder AE. (ED + BD) = (AE + ED). BD, nämlich AE = BD wenn man wirklich multipliciret und reduciret.

564. Aus diesem ist es leicht zu ersehen, daß eine Tangente Tt der Hyperbel zwischen den Asymptoten in dem Berührungspunkte M in zwey gleiche Theile TM = Mt getheilet sey; zieht man nun die Ordinate MP zu der Asymptote CH parallel, so ist auch PT = PC, weil das Dreyeck TMP ∽ TtC ist; nämlich bey der Hyperbel an der Asymptote ist die Subtangente der Abcisse gleich; es ist demnach sehr leicht an einen gegebenen Punkt der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten eine Tangente zu ziehen.

Anmerkung. Da allenthalben AE = BD, DR = pQ, u. s. w. so ist es auch sehr leicht zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels ACH eine Hyperbel zu beschreiben, die durch einen gegebenen Punkt D geht; denn man ziehe nur durch den gegebenen Punkt D mehrere Geraden AB, QR zwischen den Asymptoten, mache AE = BD, Qp = DR, u. s. w. sodann ziehe man abermal durch die schon gefundenen Punkte E, p, mehrere Geraden GH nach verschiedenen Richtungen, und schneide hH = GE ab, so ist h wieder ein Punkt der nämlichen Hyperbel; und auf diese Art kann man doch ist diese Benennung nicht allerdings schicklich, weil jede andere Gattung der Logarithmen ebenfalls durch hyperbolische Räume an der Asymptote könne vorgestellet werden, wenn man den Sinus des Asymptotenwinkels dem Model der Logarithmen gleich setzet. Z. B. die gemeinen oder briggischen Logarithmen können durch die Flächenräume einer Hyperbel an der Asymptote vorgestellet werden, deren Asymptotenwinkel $= 25^\circ 44' 25\frac{1}{2}''$ und die unveränderliche Gerade $AB = 1$ ist, weil das Model der gemeinen Logarithmen $= 0,43429448$ ist, und zu diesem Sinus ein Winkel von $25^\circ\ 44'\ 25\frac{1}{2}''$ gehöret; wenn nämlich $AB = 1$, $m = HCG = 25^\circ\ 44'\ 25\frac{1}{2}''$ angenommen wird, so ist $ABMP = 0,43429448 \,\text{lognat}\, CP = \text{logvulg}\, CP$. Fig. 186

Da $ABMP = AB^2 . \sin m . \,\text{lognat}\, \frac{CP}{AB}$, und auch $ABNG = AB^2 . \sin m . \,\text{lognat}\, \frac{CG}{AB}$, so ist $PMNG = AB^2 . \sin m . \,\text{lognat}\, \frac{CG}{AB} - AB^2 . \sin m . \,\text{lognat}\, \frac{CP}{AB}$, nämlich $PMNG = AB^2 . \sin m . \,\text{lognat}\, \frac{CG}{CP}$. Es sey z. B. $AB = 2$ Schuhen, $m = 30^\circ$, $CG = 60$, und $CP = 12$ Schuhen, so ist $PMNG = 4 . \frac{1}{2} . \,\text{lognat}\, 5 = \text{lognat}\, 25 = 3,2188758$ Quadratschuhen.

567. Die krummen Linien, von denen wir bisher geredet haben, nämlich die Parabel, Ellipse, Hyperbel, und die Kreislinie sind unter dem Namen der Kegelschnitte bekannt, weil sie auf der krummen Oberfläche eines Kegels entstehen, wenn man denselben nach verschiedenen Richtungen mit ebenen Flächen durchschneidet. Es sey z. B. MBN ein gerader oder senkrechter Kegel Fig. 187, so ist jeder Durchschnitt dessel- 187
ben CMD auf die Achse senkrecht gelegt, ein Kreis (379); hingegen ist jeder Durchschnitt AMNN'M' eine Parabel, wenn er mit der entgegengesetzten Seite des Kegels parallel

 läuft,

Fig. 186 Abscissen annimmt. Man findet aus dieser Gleichung $y = a - x + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} - \ldots$ und die Senkrechte

$$\mathrm{Mn} = \sin m.\left(a - x + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} - \ldots\right)$$

Stellet man sich nun vor, daß die Abscisse AP in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilet sey, und daß aus allen Theilungspunkten zu CH parallele Ordinaten gezogen werden, so wird dadurch der Flächenraum ABMP in seine Elemente aufgelöset. Die Summe aller Elemente von A bis P läßt sich bestimmen; denn es ist das Parallelogram pmMP das allgemeine Glied in dieser unendlichen Reihe der Elemente, wenn pm unendlich nahe bey PM liegt; es ist aber pmMP $=$ pP. Mn $=$

$$\sin m.\left(a.\frac{x}{\infty} - x.\frac{x}{\infty} + \frac{x^2}{a}.\frac{x}{\infty} - \frac{x^3}{a^2}.\frac{x}{\infty} + \ldots\right);$$

folglich ist die Summe aller dieser Elemente, nämlich ABMP $=$

$$\sin m.\left(ax - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4a^2} + \ldots\right) = a^2.\sin m.\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \ldots\right) = a^2.\sin m.\operatorname{lognat}\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

$$= a^2.\sin m.\operatorname{lognat}\left(\frac{a+x}{a}\right) = \mathrm{AB}^2.\sin m.\operatorname{lognat}\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{AB}}.$$

Setzet man nun den Asymptotenwinkel HCG $= 90^\circ$, so ist die Hyperbel gleichseitig, und $\sin m = 1$; es ist demnach bey der gleichseitigen Hyperbel der Flächenraum ABMP $=$ $\mathrm{AB}^2.\operatorname{lognat}\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{AB}}$, folglich $\frac{\mathrm{ABMP}}{\mathrm{AB}^2} = \operatorname{lognat}\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{AB}}$, oder ABMP $=$ lognat CP, wenn man AB $= 1$ setzet; bey der gleichseitigen Hyperbel an der Asymptote sind demnach die Flächenräume von AB gerechnet, natürliche Logarithmen der Abscissen von dem Mittelpunkte gezählet, wenn man die unveränderliche Linie AB $= 1$ setzet. Aus dieser Ursache werden die natürlichen Logarithmen zuweilen hyperbolische genennet; jedoch

Nun ist AF — AG = FG = CP; folglich ist CP = $\frac{c.\sin n - x.\sin(m-n)}{\cos\frac{1}{2}n}$. Fig. 187

In dem Dreyecke APD ist sin ADP : AP = sin PAD : DP; es ist aber sin ADP = $\cos\frac{1}{2}n$, AP = x, und sin PAD = $\sin m$; folglich $\cos\frac{1}{2}n : x = \sin m$: DP; nämlich DP = $\frac{x.\sin m}{\cos\frac{1}{2}n}$;

Endlich ist vermög der Eigenschaft des Kreises PM^2 = CP. DP; folglich auch nach gehöriger Substitution und Reduktion

$y^2 = \frac{\sin m}{\cos^2\frac{1}{2}n}.\left[cx.\sin n - x^2.\sin(m-n) \right]$ die gesuchte Gleichung, weil PM zu dem Kreise und zu der krummen Linie ANN′ eine gemeinschaftliche Ordinate ist.

Diese gefundene Gleichung läßt sich auch also einrichten

$y^2 = \frac{c.\sin m.\sin n}{\cos^2\frac{1}{2}n}.x - \frac{c.\sin m.\sin n}{\cos^2\frac{1}{2}n}.\frac{\sin(m-n)}{c.\sin n}.x^2$, oder wenn wir $\frac{c.\sin m.\sin n}{\cos^2\frac{1}{2}n} = p$, und $\frac{c.\sin n}{\sin(m+n)} = a$ setzen, so ist $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$.

Setzen wir nun $m = n$, so ist $\sin(m-n) = 0$, und die Gleichung $y^2 = px$; folglich ist für diesen Fall die krumme Linie AMN eine Parabel, AQ ihre Achse, A ihr Scheitel, und $p = \frac{c.\sin m.\sin n}{\cos^2\frac{1}{2}n} = \frac{c.\sin^2 n}{\cos^2\frac{1}{2}n} = 4c.\sin^2\frac{1}{2}n$ ihr Hauptparameter (parameter principalis); denn für den Halbmesser = 1 ist nach (443. I.) $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$, folglich auch $\sin n = 2\sin\frac{1}{2}n.\cos\frac{1}{2}n$, und $\sin^2 n = 4\sin^2\frac{1}{2}n.\cos^2\frac{1}{2}n$.

Setzen wir hingegen in der gefundenen Gleichung, $m > n$, so ist $\sin(m-n)$ eine positive Größe, und in der Gleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ bleibet das zweyte Glied negativ; folglich

Fig. läuft, das ist, wenn QAD = B ist; wäre QAD > B, so
187 durchschneidet die Ebene ANN′ die entgegengesetzte Seite des Kegels BC, wenn beyde genugsam verlängert werden, und der Durchschnitt ist eine Ellipse; ist endlich QAD < B, so ist der Durchschnitt eine Hyperbel, in diesem letzten Falle durchschneidet die Ebene ANN′ nur den entgegengesetzten Kegel Bcd, wenn beyde genugsam verlängert werden, und bringt alldort die zwey entgegengesetzten Schenkel der nämlichen Hyperbel zum Vorschein.

Um dieses einzusehen, wollen wir die Gleichung für die krumme Linie suchen, welche auf der krummen Oberfläche eines geraden Kegels entsteht, wenn man denselben mit einer ebenen Fläche durchschneidet, und zwar auf folgende Art. Es sey die Ebene CBD durch die Spitze des Kegels auf die Ebene ANN′ senkrecht gelegt; durch einen beliebigen Punkt P der gemeinschäftlichen Durchschnittslinie AQ sey auch eine Ebene CMD senkrecht auf die Achse des Kegels und folglich auch senkrecht auf die Ebene CBD′ geführet, so ist diese Ebene CMD ein Kreis, weil BCND ein gerader oder senkrechter Kegel ist, und die gemeinschäftliche Durchschnittslinie PM steht senkrecht auf AQ und auf CD (371); über dieses sey auch in der Ebene CBD die Gerade AF parallel zu DC, und PG parallel zu CB geführet. Nun setze man $AP = x$, $PM = y$, $AB = c$, den Winkel $CBD = n$, und $QAD = m$, so ist $\sin BFA : AB = \sin B : AF$; es ist aber $BFA = FAB$, nämlich $BFA = \frac{1}{2}(180° - B) = 90° - \frac{1}{2}n$, und $\sin BFA = \sin(90° - \frac{1}{2}n) = \cos\frac{1}{2}n$; folglich $\cos\frac{1}{2}n : c = \sin n : AF$,

und $AF = \dfrac{c.\sin n.}{\cos\frac{1}{2}n.}$;

ferner ist $\sin AGP : AP = \sin APG : AG$; es ist aber $\sin AGP = \sin PGF = \sin BFA = \cos\frac{1}{2}n$, $AP = x$, und $\sin APG = \sin(QAD - PgA) = \sin(m - n)$; folglich $\cos\frac{1}{2}n : x = \sin(m-n) : AG$, nämlich $AG = \dfrac{x.\sin(m-n)}{\cos\frac{1}{2}n}$

Nun

Von einigen anderen krummen Linien.

568. Da noch (521) alle diejenigen krummen Linien zu einer nämlichen Familie gehören, deren Gleichungen auf einerley Art ausgedrückt und nur blos in den Exponenten verschieden sind, so pflegt man alle jene krumme Linien **Parabeln** zu nennen, deren Natur durch die Gleichung $y^{m+n} = p^m x^n$ ausgedrückt wird; setzt man nun $m = 1$, und auch $n = 1$, so ist $y^2 = px$ eine Gleichung für die gemeine oder quadratische Parabel; setzet man $m = 1$ und $n = 2$, so ist $y^3 = px^2$ oder $y = \sqrt[3]{px^2}$ eine Gleichung für die erste kubische Parabel, bey der sowohl den positiven als auch den negativen Abscissen nur blosse positive Ordinaten entsprechen; setzet man hingegen $m = 2$ und $n = 1$, so ist $y^3 = p^2 x$, oder $y = \sqrt[3]{p^2 x}$ eine Gleichung für die zweyte kubische Parabel, bey der die Ordinaten mit ihren zugehörigen Abscissen einerley Zeichen haben. Fig.

Eben so sagt man, daß alle jene krumme Linien **Kreise** heißen, welche durch die Gleichung $y = \pm \sqrt[2m]{(a^{2m} - x^{2m})}$ vorgestellet sind, allwo m eine ganze positive Zahl bedeutet. Hingegen ist $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt[2m]{(a^{2m} - x^{2m})}$ eine Gleichung für die Familie der Ellipsen, und $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt[2m]{(x^{2m} - a^{2m})}$ für jene der Hyperbeln, wenn man die Abscissen auf der ersten Achse aus ihrem Mittelpunkte zählet.

Zählet man hingegen die Abscissen auf der Asymptote, so ist $x^m y^n = a^{m+n}$ die Gleichung für die ganze Familie der Hyperbeln an der Asymptote; so z. B. ist $x^2 y = a^3$ eine Gleichung für die cubische Hyperbel an der Asymptote, bey der die Ordinaten mit den Quadraten der dazugehörigen Abscissen in einer verkehrten Proportion stehen.

569.

Fig. 187 ist in diesem Falle AMNN′ eine Ellipse, a die große Achse derselben, A ein Scheitel und p der Parameter dieser Achse.

Setzen wir endlich $m < n$, so ist $\sin(m - n)$ eine negative Größe (499. I.), und folglich in der gefundenen Gleichung das zweyte Glied positiv, nämlich $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$; in diesem Falle ist demnach die krumme Linie AMNN′ eine Hyperbel, $a = \frac{c. \sin n}{\sin(n-m)}$ ihre erste Achse, A ein Scheitel, und p der Parameter dieser Achse.

Wenn wir in der nämlichen gefundenen Gleichung, $m = 90° + \frac{1}{2}n$ setzen, so ist nach gehöriger Reduktion $y^2 = 2cx. \sin \frac{1}{2}n - x^2$ eine Gleichung für den Kreis. Setzen wir hingegen $c = 0$, und dabey $m < n$, so ist $y^2 = \frac{x^2 \sin m. \sin(n-m)}{\cos^2 \frac{1}{2}n}$ eine Gleichung für die Ordinaten eines geradlinigten Dreyeckes.

Anmerkung. Ich halte es für überflüßig von der Anwendung der Kegelschnittslinien auf die Auflösung der höheren Gleichungen mittelst der geometrischen Verzeichnung ein Wort zu sagen, weil dergleichen Aufgaben, die auf höhere Gleichungen führen, z. B. die berüchtigte Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels, genauer und leichter durch die Rechnung aufgelöset werden, wenn man nämlich die in der vorgegebenen Aufgabe bekannten Linien auf einem genau ausgetheilten Maßstabe ausmißt, und sodann die gesuchten Linien in Zahlen entwickelt.

Wer eine ausführliche Abhandlung über die Eigenschaften der Kegelschnittslinien und über ihre Anwendung auf die Dioptrik, Katoptrik, Akustik, u. s. w. zu lesen verlanget, der findet sie unter anderen in Herrn de la Chapelle Abhandlung von den Kegelschnitten, aus dem französischen übersetzt von Böckmann, Karlsruhe, 1771.

$y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{a}}$ die gesuchte Gleichung für die Logistik; man Fig. 188
findet aus dieser Gleichung $x = \frac{a.\log\frac{y}{c}}{\log\frac{b}{c}}$.

Wir wollen um die gefundene Gleichung einfacher auszudrücken a von der Beschaffenheit annehmen, daß $\frac{b}{c} =$ 2,718281828... $= h =$ der Grundzahl der natürlichen Logarithmen, und folglich $\text{lognat}\frac{b}{c} = \text{lognat}\, h = 1$ sey. Nach dieser Voraussetzung ist nun $y = ch^{\frac{x}{a}}$ und $x = a.\,\text{lognat}\,\frac{y}{c}$

Diese gefundene Gleichung $y = ch^{\frac{x}{a}}$ giebt sowohl für positive als auch für negative Abscissen immer positive Ordinaten, die von A gegen P ohne Ende wachsen, und von A gegen P′ ohne Ende abnehmen; die Abscissenlinie PP′ ist demnach eine Asymptote der Logistik.

Setzen wir in der gefundenen Gleichung $c = 1$, so ist $x = a.\,\text{lognat}\, y$; bey der Logistik sind demnach die Abscissen *Logarithmen* von den *Ordinaten*; und da $a\,\text{lognat}\, y$ jeden Logarithmus von y vorstellen kann, wenn man a für das Maß oder Modell der Logarithmen annimmt, so folgt, daß man jedes logarithmische System durch die Logistick vorstellen könne.

Wenn man tQ für die Abscissenlinie annimmt, und AQ $= x$, QM $= y$, AB $= c$ setzet, so ist AQ $=$ PM $= x$, und QM $=$ AP $= y$, es ist aber AP $= a.\,\text{lognat}\,\frac{\text{PM}}{\text{AB}}$; folglich auch $y = a.\,\text{lognat}\,\frac{x}{c}$ wieder eine Gleichung für

die

Fig. 188 569. Eine krumme Linie M'DM Fig. 188, deren Ordinaten in gleichen Abständen in einer geometrischen Reihe auf einander folgen, heißt eine logarithmische Linie oder die Logistik; wenn nämlich AC = C2 = 23 = 34 u. s. w. angenommen wird, und man errichtet aus diesen Punkten senkrechte Ordinaten von folgender Eigenschaft, AB : CD = CD : 22'; CD : 22' = 22' : 33'; 22 : 33' = 33' : 44', u. s. w. so heißt die ununterbrochene krumme Linie, welche durch die Endpunkte dieser Ordinaten geht, die Logistik.

Um für die Logistik eine Gleichung zu finden, nehme man einen willkührlichen Punkt A der Geraden P'P für den Anfangspunkt der Abscissen, setze die gegebene Ordinate dieses Punktes AB = c, die Abscisse AP = x und die Ordinate PM = y; eine andere gegebene Ordinate CD, die größer ist als AB, sey = b, der gegebene Abstand dieser Ordinate von A sey AC = a, und AP verhalte sich zu AC wie n zu 1, so ist AP = n. AC, nämlich $x = na$, und $n = \frac{x}{a}$. Wenn man nun C 2 = AC = 2 3 u. s. w. setzet, so ist A 2 = $2a$, A 3 = $3a$, u. s. w. und die Ordinaten für die Punkte A, C, 2, 3, 4, ... sind c, b, $\frac{cb^2}{c^2}$, $\frac{cb^3}{c^3}$, $\frac{cb^4}{c^4}$...... nämlich

Stellen der Gl,	0,	1,	2,	3,	4, ...	n	$\frac{x}{a}$
Ordinaten	c,	b,	$\frac{cb^2}{c^2}$,	$\frac{cb^3}{c^3}$,	$\frac{cb^4}{c^4}$, ...	$\frac{cb^n}{c^n}$	$= \frac{cb^{\frac{x}{a}}}{c^{\frac{x}{a}}}$
Abscissen	0,	a,	$2a$,	$3a$,	$4a$,...	na	$= x$

das ist für die Abscisse $na = x =$ AP gehört die Ordinate

$$\frac{cb^n}{c^n} = \frac{cb^{\frac{x}{a}}}{c^{\frac{x}{a}}} = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{a}} = \mathrm{PM} = y;$$ es ist demnach

$y =$

renz der Ordinaten multipliciret mit ihrem Abstande, getheilet durch die Differenz der natürlichen Logarithmen von diesen zwey Ordinaten. Fig.

570. Wenn ein Kreis NM Fig. 189 auf einer geraden Linie sich rollend oder wälzend fortbeweget, so beschreibet ein jeder Punkt M des Umkreises eine krumme Linie MAE, welche eine Cycloide oder Radlinie genennt wird. Wenn wir die Cycloide DAE in Erwägung ziehen, welche der anfängliche Berührungspunkt D während einer Umdrehung beschreibet, so heißt der Kreis AB der Erzeugungskreis, die Gerade DE die Grundlinie, der Durchmesser BA des Erzeugungskreises, welcher die Grundlinie senkrecht halbiret, die Achse, und A der Scheitel der Cycloide. 189

Aus dieser Entstehungsart der Cycloide folgt 1) daß die Grundlinie DE dem ganzen, und DB dem halben Umfange des Erzeugungskreises gleich sey. 2) Daß auch jede Gerade QM aus was immer für einem Punkte Q des halben Umkreises AQB auf der Achse AB, zu der Grundlinie BD parallel an die Cycloide geführet dem Bogen AQ des Erzeugunskreises gleich sey; denn wenn wir die Sehnen NM und BQ ziehen, so ist wegen der Gleichheit der Dreyecke BPQ und NRM die Sehne BQ gleich und parallel zu NM, und folglich auch BN = QM (286); nun ist DN = dem Bogen MN = QB, und DB = AQB; folglich DB — DN = AQB — QB, nämlich NB = AQ, und endlich QM = AQ.

Setzen wir nun die Abscisse auf dem Umfange des Erzeugungskreises AQ $= u$, und die Ordinate QM $= z$, so ist $z = u$ eine Gleichung für die Cycloide.

Setzen wir hingegen AP $= x$, PM $= y$, und den Halbmesser des Erzeugungskreises AC $= a$, so ist PQ $= \sqrt{(2ax - x^2)}$, und AQ $= a . \text{arc cos}\left(\frac{a - x}{a}\right)$ für den Halbmesser der Tafeln $= 1$; nun ist AQ = QM = PM — PQ; folglich auch

a,

Fig. 188 die Logistik, woraus man $x = ch^{\frac{y}{a}}$ findet. Nimmt man hingegen auf der Abscissenlinie tQ den Durchschnittspunkt B für den Anfangspunkt der Abscissen, und setzet PQ $= x$, und QM $= y$, so ist $y = a \text{ lognat} \left(1 + \frac{x}{c}\right)$, und $x = c(h^{\frac{y}{a}} - 1)$.

Die Gleichung der Logistik $y = ch^{\frac{x}{a}}$ auf der Abscisse P′P läßt sich auch also vorstellen $y = c + \frac{cx}{a} + \frac{cx^2}{1.2.a^2} + \frac{cx^3}{1.2.3.a^3} + \ldots$ vermög (181). Mittelst dieser Gleichung kann man den Flächenraum ABMP bey einer jeden Logistik durch die gegebenen Ordinaten AB $= c$, PM $= y$, und durch ihren Abstand AP $= x$ auf folgende Art bestimmen. Das allgemeine Glied in der Reihe der Elemente des gesuchten Flächenraumes ABMP ist das unendlich kleine Rechteck pM $= y.\frac{x}{\infty} = c.\frac{x}{\infty} + \frac{cx}{a}.\frac{x}{\infty} + \frac{cx^2}{1.2\,a^2}.\frac{x}{\infty} + \ldots$; folglich ist die Summe aller Elemente, nämlich

$$\text{ABMP} = cx + \frac{cx^2}{1.2.a} + \frac{cx^3}{1.2.3.a^2} + \frac{cx^4}{1.2.3.4.a^3} + \ldots$$

$$= ac\left[\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{1.2.a^2} + \frac{x^3}{1.2.3.a^3} + \ldots\right) - 1\right]$$

$$= ac(h^{\frac{x}{a}} - 1) = ach^{\frac{x}{a}} - ac = ay - ac = a(y - c),$$

oder $\text{ABMP} = \frac{x(y - c)}{\text{lognat}\,y - \text{lognat}\,c}$, wenn man aus der Fundamentalgleichung $y = ch^{\frac{x}{a}}$ den Werth a suchet, und denselben gehörig substituiret. Es ist demnach der Flächenraum was immer für einer Logistik zwischen jeden zwey senkrechten Ordinaten auf der Asymptote gleich der Diffe-

für den nämlichen Halbmesser 1 die Länge eines Bogens von $126° 52' 12''$, nämlich arc $126° 52' 12'' = 2,214299$ Fig. 189
$= \text{arc cos}\left(\frac{a-x}{a}\right)$; und folglich $a.\text{arc cos}\left(\frac{a-x}{a}\right)$
$= 110,71495$;

$$\begin{aligned} \text{Denn arc } 120° &= 2,094395 \\ 6° &= 0,104720 \\ 52' &= 0,015126 \\ 12'' &= 0,000058 \\ \hline \text{arc cos}\left(\frac{a-x}{a}\right) &= 2,214299 \end{aligned}$$

multipliciret mit $a = 50$

giebt $a.\text{arc cos}\left(\frac{a-x}{a}\right) = 110,71495 = AQ' = Q'M'$

Da nun auch $\sqrt{(2ax - x^2)} = \sqrt{(100.80 - 80^2)} = 40$
$= PQ'$, so ist $\sqrt{(2ax - x^2)} + a \text{ arc cos}\left(\frac{a-x}{a}\right)$
$= 150,71495 = P'M'$. Und eben so kann für jede andere Abscisse die entsprechende Ordinate gefunden werden.

Anmerkung. Der Bogen, welcher zu dem Cosinus $-\frac{30}{50}$ gehört, kann auch mittelst der Logarithmen auf folgende Art gefunden werden;

von $\log 30 = 1,4771213$
subtr. $\log 50 = 1,6989700$
add. log sintot $= 10$ von $180° \; 0' \; 0''$

$9,7781513 = \log\cos 53° \; 7' \; 48''$ subtr.

folglich ist der gesuchte Bogen $= 126° 52' 12''$ wegen dem Zeichen $-\frac{30}{50}$

571. Es giebt auch krumme Linien, bey denen die Ordinaten nicht mit einander parallel laufen, sondern dergestalt auf einander geneigt sind, daß sie alle in einem Punkte zu-

Fig. 189 $a.\text{arc}\cos\left(\frac{a-x}{a}\right)=y-\sqrt{(2ax-x^2)}$, und endlich $y=\sqrt{(2ax-x^2)}+a.\text{arc}\cos\left(\frac{a-x}{a}\right)$ wieder eine Gleichung für die Cycloide.

Es ist leicht einzusehen, daß $AQ=a.\text{arc}\cos\left(\frac{a-x}{a}\right)$ sey, wenn man den Halbmesser oder sintot in den Tafeln $=1$ setzet; denn es sey für den Tabularhalbmesser 1 eines Bogens, der mit AQ einerley Anzahl der Grade enthält, wirkliche Länge $=t$, so ist $AC:\cos\text{arc}\,AQ=1:\cos\text{arc}\,t$ vermög (446) oder $AC:PC=1:\cos\text{arc}\,t$, nämlich $a:a-x=1:\cos\text{arc}\,t$; folglich $\cos\text{arc}\,t=\frac{a-x}{a}$, oder $t=\text{arc}\cos\left(\frac{a-x}{a}\right)$; ferner ist $1:t=AC:AQ$, nämlich $1:\text{arc}\cos\left(\frac{a-x}{a}\right)=a:AQ$; folglich $AQ=a.\text{arc}\cos\left(\frac{a-x}{a}\right)$.

Um diesen Ausdruck mittelst der trigonometrischen Tafeln, bey denen der Halbmesser $=1$ zum Grunde liegt, in Zahlen zu entwickeln, muß man $\frac{a-x}{a}$ in einen Decimalbruch verwandeln, und zu demselben in der Spalte Cosinus die entsprechenden Grade Minuten und Sekunden aufsuchen, und endlich mittelst der Tafel der Kreisbögen für den Halbmesser $=1$ die Länge des Bogens von der gefundenen Anzahl der Grade bestimmen.

Es sey z. B. $AC=a=50$, $AP'=x=80$, so ist $\frac{a-x}{a}=-\frac{30}{50}=-0{,}6000000$; nun gehört für den Halbmesser 1 zu dem Cosinus 0,6000000 der Bogen $53^\circ\,7'\,48''$, und folglich zu dem Cosinus $-0{,}6000000$ der Bogen $180^\circ-53^\circ\,7'\,48''=126^\circ\,52'\,12''$; ferner ist für entfernet sich von dem selben ohne Ende in ununterbrochenen Schraubengängen. Fig. 190

Für negative Abscissen (von A gegen Q gezählet) sind auch die Ordinaten negativ, welche demnach aus dem Mittelpunkte auf die Halbmesser nach entgegengesetzten Richtungen aufgetragen werden, nämlich für $x = -\frac{1}{2}p = -$ AQ ist $y = -\frac{1}{2}c =$ Cm' und wird auf den verlängerten Halbmesser QC von C bis m' aufgetragen.

Wenn wir in der gefundenen Gleichung $y = \frac{cx}{p}$, statt p seinen Werth $2c\pi$ substituiren, so ist $y = \frac{x}{2\pi}$ wieder eine Gleichung für die archimedeische Spirallinie.

Es ist leicht einzusehen, daß bey der archimedeischen Spirallinie die unter gleichen Winkeln gegen einander geneigten Ordinaten in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges auf einander folgen. Stellen wir uns hingegen eine Spirallinie von der Beschaffenheit vor, daß die unter gleichen Winkeln gegen einander geneigten Ordinaten derselben in einer geometrischen Reihe auf einander folgen, so heißt selbe eine **logarithmische Spirallinie** (logistica spiralis).

Wenn man Fig. 191 den Halbmesser AC $= c$, den Umkreis APQA $= p$, die Abscisse AP $= x$, die Ordinate CM $= y$, die zur Abscisse APQA zugehörige Ordinate CD $= b$ 191
setzet, und sodann die Eigenschaften der geometrischen Reihen gehörig in Erwägung zieht, so findet man nach vorgenommener Untersuchung $y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{p}}$ die Gleichung für die logarithmische Spirallinie, oder $y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{2c\pi}}$, und

Fig. sammenstossen, welcher der Pol oder auch der Mittelpunkt der krummen Linie heißt. Bey solchen krummen Linien werden die Abscissen auf dem Umkreise eines Zirkels gezählet, der aus dem Pole mit einem gegebenen Halbmesser beschrieben wird; die Ordinaten aber werden gemeiniglich auf die Halbmesser dieses Kreises aus dem Mittelpunkte aufgetragen.

190 572. Man gedenke, daß eine gerade Linie CD Fig. 190 in einer nämlichen Ebene sich um den Punkt C gleichförmig herumdrehe, und daß während dieser beständigen Herumdrehung der Punkt C auf der Geraden CD ebenfalls gleichförmig fortrücke, so wird dieser Punkt C eine schraubenartige krumme Linie beschreiben, welche die **archimedeische Spirallinie** genennt wird, von dem berühmten Meßkünstler **Archimedes** von **Syrakus**, der zuerst ihre Eigenschaften untersuchte. Nachdem die Gerade CD die erste Herumdrehung vollendet hat, sey der Punkt C bis A vorgerückt. Wenn wir nun mit CA aus C einen Umkreis ziehen, so will die gleichförmige Herumdrehung der Geraden CD und die gleichförmige Fortrückung des Punktes C so viel sagen, daß sich die Abstände des fortgerückten Punktes von dem Mittelpunkte, nämlich daß sich die Ordinaten der Spirallinie eben so gegeneinander verhalten, wie die Kreisbögen des Halbmessers CA von A bis an die Ordinaten der Spirallinie gezählet; nämlich CM : Cm : CA : CM′ : u. s. w. = AP : APQ : APQA : APQA + AP : u. s. w.

Man nehme A für den Anfangspunkt der Abscissen, setze $AC = c$, $AP = x$, $CM = y$, und den Umkreis $APQA = p$, so ist $CM : CA = AP : APQA$ nämlich $y : c = x : p$; folglich $y = \frac{cx}{p}$ eine Gleichung für die archimedeische Spirallinie.

Für $x = 0$, ist auch $y = 0$, für $x = \frac{1}{3}p$ ist $y = \frac{1}{3}c$, für $x = p$ ist $y = c$, für $x = \frac{4}{3}p$ ist $y = \frac{4}{3}c$, für $x = 2p$ ist $y = 2c$; für $x = \infty p$ ist $y = \infty c$. Die archimedeische Spirallinie geht demnach aus dem Mittelpunkte C heraus und entne Ordinate) mit dem Halbmesser c des Anfangspunktes einschließt, so findet man nach vorgenommener Untersuchung $y = \frac{2c}{1 + \cos u}$ allwo der ganze Sinus $= 1$ vorausgesetzet ist. Wenn man in eben dieser Voraussetzung die wirkliche Länge des Abscissenbogens $= x$ statt der Anzahl der Grade u in die Gleichung hineinbringet, so findet man $y = \frac{2c}{1 + \cos\left(\frac{180x}{c\pi}\right)}$ Fig.

II. **Anmerkung.** Es ist überflüßig von den Eigenschaften der angeführten transcendenten Linien am gegenwärtigen Orte ausführlicher zu handeln. Einige andere krumme Linien der Alten, als die **Muschellinie des Nicomedes** (chonchois Nicomedis), die **Cyssois des Diocles**, die **Vierungszeile des Dinostrates** (quadratrix Dinostratis), verschiedene krumme Linien der neueren Meßkünstler, als die **Sinuslinie**, die **hyperbolische Spirallinie**, die **Epycycloiden**, und auch die Linien von einer doppelten Krümmung (curvæ dupplicis curvaturæ) können gänzlich mit Stillschweigen übergangen werden.

Fig. 191 $x = \frac{2c\pi(\log y - \log c)}{\log b - \log c}$, wenn man statt p seinen Werth $2c\pi$ substituiret.

Die gefundene Gleichung für die logarithmische Spirallinie giebt uns zu erkennen, daß die Ordinaten für die positiven Abscissen ohne Ende wachsen, die Ordinaten für die negativen Abscissen aber ohne Ende abnehmen und dabey positiv seyn; die logarithmische Spirallinie nähert sich demnach auf einer Seite ohne Ende in ununterbrochenen Schraubengängen ihrem Mittelpunkte ohne denselben jemals zu erreichen, auf der entgegengesetzten Seite aber entfernet sie sich ebenfalls in ununterbrochenen Schraubengängen ohne Ende von demselben.

I. Anmerkung. In die Gleichung $y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{2c\pi}}$ läßt sich auch die Anzahl der Grade von dem Abscissenbogen AP hineinbringen; es sey z. B. des Bogens AP Anzahl der Grade $= u$, so ist die Länge des Bogens AP nämlich $x = \frac{2c\pi . u}{360}$, und folglich auch, wenn man diesen Werth statt x substituiret, die Gleichung für die logistische Spirallinie $y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{u}{360}}$. Und eben so findet man die Gleichung für die archimedeische Spirallinie $y = \frac{cu}{360}$. Auch bey anderen krummen Linien, deren Gleichungen für parallele Ordinaten bekannt sind, lassen sich Gleichungen für die Ordinaten aus einem Punkte finden. Wenn man z. B. den Brennpunkt einer Parabel für den Mittelpunkt des Abscissenkreises, den Abstand $= c$ von dem Scheitel aber für den Halbmesser des nämlichen Abscissenkreises, und den Scheitel für den Anfangspunkt der Abscissen annimmt, und über dieses die Anzahl der Grade mit u bezeichnet, welche was immer für ein Fahrstrich $= y$ (im gegenwärtigen Falle was immer für ei-

Fig.

Falle einander gleichgesetzet werden, nämlich $x \pm \frac{x}{\infty} = x$, $ay \pm \frac{ny^2}{\infty} = ay$, wenn ∞ eine unendlich große, und n eine endliche Zahl bedeutet.

Nachdem vermög unserer Vorstellung eine Größe bereits in so viele gleiche Theile getheilet worden, daß jeder Theil davon unendlich klein sey, so hört deßwegen doch nicht auf ein solcher unendlich kleiner Theil noch ferner theilbar zu seyn, denn jede geometrische stettige Größe (quantitas continua), nämlich jede Linie, jede Fläche, jeder Körper ist ja ohne Ende theilbar. Stellen wir uns nun vor, daß eine unendlich kleine Größe wieder in unendlich viele gleiche Theile getheilet sey, so wird ein jeder von diesen letzteren Theilen eine **unendlich kleine Größe von der zweyten Ordnung** genennt, und die vorigen unendlich kleinen Theile heißen **unendlich kleine Größen von der ersten Ordnung**; eine unendlich kleine Größe von der zweyten Ordnung wird demnach in einer unendlich kleinen von der ersten Ordnung unendlichmal enthalten; und gleichwie eine unendlich kleine Größe von der ersten Ordnung in Rücksicht einer endlichen verschwindet, eben so verschwindet auch eine unendlich kleine von der zweyten Ordnung in Rücksicht einer unendlich kleinen von der ersten Ordnung; und um so mehr verschwindet eine unendlich kleine von der zweyten Ordnung in Rücksicht einer endlichen.

Anmerkung. Es könnte jemand einwenden, die obangeführte Vorstellung, **eine Größe sey in so viele gleiche Theile getheilet, daß jeder Theil davon kleiner ist als jede angebliche noch so kleine Größe**, sey ungereimt, weil man diese Theilung in der Wirklichkeit nicht ausführen kann; allein diese Einwendung ist ohne Bedeutung, denn sonst müßte man auch die Vorstellung einer geometrischen Linie, einer geometrischen Fläche, eines geometrischen Körpers u. s. w. ungereimt nennen, weil es dergleichen Größen in der Wirk-

Fig.

Siebente Vorlesung.

Von der Differenzialrechnung.

Gründe der Differenzialrechnung.

573. Jede geometrische Größe, als z. B. jedes beliebige Stück der Abscisse bey was immer für einer krummen Linie, läßt sich in so viele gleiche Theile theilen, daß jeder Theil davon kleiner wird, als jede angebliche noch so kleine Größe von der nämlichen Gattung; es sey z. B. ein Stück einer Abscissenlinie $= x$, und eine noch so kleine angegebene Linie sey $= e$, so ist offenbar eine Zahl m von der Beschaffenheit möglich, daß $m \times e > x$ sey, und folglich $\frac{x}{m} < e$; wenn man demnach x in m gleiche Theile theilet, so wird sodann ein jeder solcher Theil kleiner als die angegebene Größe e seyn. Wenn man sich nun in Gedanken vorstellet, daß eine Größe x in so viele gleiche Theile getheilet werde, daß ein jeder Theil davon kleiner sey als jede angebliche Größe von der nämlichen Gattung, so wird ein solcher Theil von x eine **unendlich kleine Größe** in Rücksicht x genennt; und die Zahl, welche mit ihren Einheiten anzeigt, in wie viele gleiche Theile die Größe x nach der angeführten Voraussetzung eingetheilet ist, heißt eine **unendlich große Zahl**, welche demnach größer ist als jede noch so große angebliche Zahl. Es ist aus diesem leicht zu ersehen, daß eine unendlich kleine Größe in Rücksicht einer endlichen verschwinde, oder daß **zwey gleichartige Größen, deren Unterschied kleiner ist, als jede noch so kleine angebliche Größe, können im erforderlichen**

Fal=

oft Bb in AB enthalten ist; die Zahl aber ist unendlich groß Fig.
von der dritten Ordnung, welche anzeigt, wie oft ce in AB 193
enthalten ist. Eben so leicht ist es einzusehen, daß eine mathematische unendlich große oder kleine Größe 2, 3, n mal größer oder kleiner seyn könne als eine andere von der nämlichen Ordnung, mit einem Worte, daß unendlich große oder auch unendlich kleine Größen von einer nämlichen Ordnung eben so gut alle möglichen Verhältniße unter einander vorstellen können als wie endliche Größen; die Zahl z. B. ist unendlich groß, welche anzeigt, wie oft ab in BC enthalten wird, und dabey ist diese unendliche große Zahl nur die Hälfte von derjenigen, welche anzeigt, wie oft ab in AB enthalten wird; hingegen ist der unendlich kleine Quotient $\frac{ab}{BC}$ zweymal so groß als $\frac{ab}{AB}$. Auch wider den Satz: zwey gleichartige Größen, deren Unterschied kleiner angenommen wird, als was immer für eine noch so kleine angebliche Größe von der nämlichen Gattung, können im erforderlichen Falle einander gleich gesetzet werden, ist nichts vernünftiges oder gründliches einzuwenden; denn nichts als ein angeblicher Unterschied kann bey solchen Größen die Gleichheit hindern, aber dergleichen Größen haben keinen angeblichen Unterschied, folglich kann ihrer Gleichheit im erforderlichen Falle keine Hinderniß im Wege stehen. Daß dieser Satze statt finde, nämlich daß $\infty \pm x = \infty$, und $1 \pm \frac{x}{\infty} = 1$ sey, erhellet auch schon daher, weil $\frac{x}{0} = \infty$ oder $\frac{x}{0} = \frac{\infty}{1}$ ist, und folglich $x : 0 = \infty : 1$, oder $\infty : x = 1 : 0$, und endlich $\infty : \infty \pm x = 1 : 1 \pm 0 = 1 : 1$ sich verhält; u. s. w. Wenn man diejenigen Vorurtheile ablegt, die man sich durch eine unrecht verstandene Metaphysik zugezogen hat, so wird man an diesem Satze die nämliche Evidenz bemerken, die den gewöhnlichen Grund-

Fig. lichkeit nicht giebt. Man stellet sich öfters vor, daß durch drey Punkte, die Meilenweit von einander entfernet sind, ein Kreis gezogen sey; obschon man einen solchen Kreis in der Wirklichkeit nicht verzeichnen kann, so ist doch deßwegen die Vorstellung davon nicht ungereimt. Da nun obangeführte Vorstellung von der Eintheilung einer Größe in unendlich viele gleiche Theile nichts ungereimtes enthält, so bilde man sich ein, daß ein endlicher Halbkreis BDA Fig. 193 in unendlich
193 viele gleiche Theile getheilet sey, und daß ein solcher unendlich kleiner Theil dieses Halbkreises der Bogen aB sey, so ist auch der Sinus ab dieses Bogens eine unendlich kleine Größe, der Quersinus Bb aber ist eine unendlich kleine Größe von der zweyten Ordnung, und endlich die Differenz ce zwischen der Tangente Be und zwischen dem Sinus ab des unendlich kleinen Bogens aB ist eine unendlich kleine Größe von der dritten Ordnung denn Bb : ba = ba : bA und ce : ca = ba : bC, nun aber ist ba sowohl in bA als auch in bC unendlichmal enthalten, folglich ist auch Bb in ba, und ce in ca oder in Bb unendlichmal enthalten; es ist aber ba eine unendlich kleine Größe von der ersten Ordnung, folglich ist Bb in einer unendlich kleinen Größe von der ersten Ordnung unendlichmal enthalten, nämlich Bb ist eine unendlich kleine Größe von der zweyten Ordnung; und eben so ist ce eine unendlich kleine Größe von der dritten Ordnung, weil ce in ca nämlich in einer unendlich kleinen Größe von der zweyten Ordnung unendlichmal enthalten ist. Es ist aus diesem Beyspiele zu ersehen, daß sich die unendlich kleinen Größen von den höheren Ordnungen gar leicht von sich selbst ergeben, sobald man einmal die unendlich kleinen von der ersten Ordnung zum Grunde legt. Auch die unendlich Großen von höheren Ordnungen fließen daraus sehr natürlich; denn wenn man einmal festsetzet, daß der Bogen aB, und folglich auch sein Sinus ab unendlich klein sey, so ist die Zahl unendlich groß von der ersten Ordnung, welche anzeigt, wie oft ba in Ab oder auch in AB enthalten ist; hingegen ist die Zahl unendlich groß von der zweyten Ordnung, welche anzeigt, wie

oft

dert, nämlich wenn man jede veränderliche Größe x oder y um ihr Differenzial dx oder dy in der Funktion vermehret oder vermindert. Die Wissenschaft aber das Differenzial von was immer für einer vorgegebenen Funktion zu finden heißt die Differenzialrechnung. Daß diese Wissenschaft vollkommen sey, nämlich daß man das Differenzial was immer für einer Funktion von einer oder von mehreren veränderlichen Größen richtig finden könne, wird in der Folge zu ersehen seyn. Fig.

Das Differenzial einer Funktion wird angezeigt, wenn man die Funktion in Klammern einschließt, und das Zeichen d vorsetzet; z. B. $d\left(\frac{cx^2}{a^2}+b\right)$, $d(\sqrt{a^2-x^2})$, oder $d((a^2-x^2)^{\frac{1}{2}})$ zeiget an, daß man $\frac{cx^2}{a^2}+b$, und $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ differenziren, nämlich finden solle, um was sich diese Funktionen verändern, wenn man in denselben nur allein die veränderliche Größe x um ihr Differenzial dx vermehret oder vermindert. Die Bezeichnung $d(x^2)$ ist von (dx^2) wohl zu unterscheiden; die erste zeiget an, daß man x^2 differenziren solle, die zweyte bedeutet das Quadrat von dx, welches gemeiniglich nur durch dx^2 vorgestellet wird; und die $m$te Potenz von dx wird durch dx^m bezeichnet, das Differenzial von x^m aber wird durch $d(x^m)$ angezeiget. Weiter unten werden auch die Bezeichnungen $ddx = d(dx) = d^2x$, $dddx = d(ddx) = d^3x$, $d^m x$, u. s. w. vorkommen.

576. Aus der gegebenen Erklärung des Differenzials von was immer für einer Funktion fließt folgende allgemeine Grundregel, nach der sich jede vorgegebene Funktion differenziren läßt.

Man vermehre in der vorgegebenen Funktion jede veränderliche Größe x, y, z .... um ihr Differenzial dx, dy, dz, ... und ziehe sodann von dieser veränderten Funktion die vorgegebene ab, so ist der Ueberrest nach vorgenommener Reduktion das gesuchte Differenzial.

Oder

Fig. sätzen der Größenlehre eigen ist. Weil man nun mit dem Worte unendlich in der Größenlehre sonst keinen anderen Begriff zu verbinden pflegt, so kann man allerdings einen Theil von einer Größe mit den Worten **unendlich klein** benennen, der kleiner gedacht wird, als jede angebliche Größe, oder der so klein gedacht wird, daß er in Rücksicht der ganzen Größe für o könne angesehen werden, wenn er dazu zu addiren, oder davon abzuziehen ist; aus dem nämlichen Grunde kann man die Zahl mit den Worten **unendlich groß** benennen, welche anzeigt, wie oft ein dergleichen Theil in der ganzen Größe enthalten wird. Ist aber jemand schon einmal so beschaffen, daß er in der Größenlehre die Worte **unendlich klein, unendlich groß**, gar nicht vertragen könne, der möge allenthalben **ungemein klein, ungemein groß**, oder was er selber will, dafür setzen.

574. Wenn eine einfache veränderliche Größe x oder y um einen unendlich kleinen Theil vermehret oder vermindert wird, so heißt dieser unendlich kleine Theil das **Differenzial** von x oder y. Man pflegt einen solchen unendlich kleinen Theil von x durch dx zu bezeichnen allwo d nicht einen Faktor von x bedeutet, sondern nur als ein Zeichen dienet um einen unendlich kleinen Theil von x anzuzeigen, es ist nämlich dx nichts anders als $\frac{x}{\infty}$, wenn x eine einfache veränderliche Größe z. B. ein Stück einer Abscissenlinie, und ∞ eine unendlich große Zahl bedeutet. Die Engländer pflegen das Differenzial einer veränderlichen Größe x durch einen auf die veränderliche Größe gesetzten Punkt anzuzeigen, nämlich Differenzial von $x = \dot{x}$, und nennen es Fluxion.

575. Und das Differenzial was immer für einer Funktion von einer oder von mehreren veränderlichen Größen ist nichts anders als der Unterschied, um welchen die Funktion sich verändert, wenn man jede veränderliche Größe in derselben um einen unendlich kleinen Theil vermehret oder vermindert,

577. **Das Differenzial eines Produktes, welches aus mehreren veränderlichen Größen besteht, wird gefunden, wenn man das Differenzial jeder veränderlichen Größe besonders mit dem Produkte aller der übrigen veränderlichen und unveränderlichen Größen multipliciret, und alle diese besonderen Produkte zusammen addiret;** nämlich $d(axyz) = ayzdx + axzdy + axydz$. Fig.

Denn $d(axyz) = a(x + dx)(y + dy)(z + dz) - axyz$ vermög (576), nämlich $d(axyz) = axyz + ayzdx + axzdy + axydz + azdxdy + aydxdz + axdydz + adxdydz - axyz$, das ist $d(axyz) = ayzdx + axzdy + axydz + azdxdy + aydxdz + axdydz + adxdydz$; aber $adxdydz$ verschwindet in Rücksicht eines jeden der drey nächst vorhergehenden Glieder und auch diese drey Glieder selbst verschwinden in Rücksicht eines jeden der drey ersten; folglich ist nach vorkommener Reduktion $d(axyz) = ayzdx + axzdy + axydz$. Es ist leicht einzusehen, daß $adxdydz$ in Rücksicht eines jeden der drey vorhergehenden Glieder z. B. in Rücksicht $aydxdz$ verschwinde; denn $aydxdz : adxdydz = y : dy$, und folglich auch $aydxdz : aydxdz \pm adxdydz = y : y \pm dy$, aber $y \pm dy = y$, weil dy eine unendlich kleine Größe ist, folglich ist auch $aydxdz \pm adxdydz = aydxdz$, nämlich $adxdydz$ verschwindet in Rücksicht $aydxdz$; und eben so verschwindet $aydxdz$ in Rücksicht $ayzdx$ oder $axydz$, denn $axydz : aydxdz = x : dx$, und $axydz : axydz \pm aydxdz = x : x \pm dx$, aber $x \pm dx = x$, folglich auch $axydz \pm aydxdz = axydz$. Daß in diesem Falle die vier letzten Glieder in Rücksicht der drey ersten können hinweggelassen werden erhellet auch daher, weil die ersten drey Glieder unendlich kleine Größen der ersten Ordnung, die übrigen aber unendlich kleine Größen von höheren Ordnungen sind; es ist nämlich $axydz$ nichts anders als $axy.\frac{z}{\infty}$, hingegen ist $aydxdz = ay.\frac{xz}{\infty^2}$, und $adxdydz = a.\frac{xyz}{\infty^3}$.

Nach

Fig. Oder auch man vermindere in der Funktion jede veränderliche Größe um ihr Differenzial, und subtrahire diese veränderte Funktion von der gegebenen, so ist der Ueberrest das gesuchte Differenzial.

Nach dieser Regel findet man $d(2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2) = 2a^2dx - \frac{3}{4}b^2dy$, wenn a, b, c, unveränderliche Größen sind, auf folgende Art; es ist $d(2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2) = 2a^2(x+dx) - \frac{3}{4}b^2(y+dy) + 5ac^2 - (2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2)$, vermög der Erklärung; nämlich $d(2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2) = 2a^2x + 2a^2dx - \frac{3}{4}b^2y - \frac{3}{4}b^2dy + 5ac^2 - 2a^2x + \frac{3}{4}b^2y - 5ac^2$, wenn man die veränderte Funktion wirklich entwickelt, und bey der abzuziehenden die Zeichen verkehret; und endlich $d(2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2) = 2a^2dx - \frac{3}{4}b^2dy$, wenn man gehörig reduciret.

Oder auch $d(2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2) = 2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2 - [2a^2(x - dx) - \frac{3}{4}b^2(y - dy) + 5ac^2] = 2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2 - [2a^2x - 2a^2dx - \frac{3}{4}b^2y + \frac{3}{4}b^2dy + 5ac^2] = 2a^2x - \frac{3}{4}b^2y + 5ac^2 - 2a^2x + 2a^2dx + \frac{3}{4}b^2y - \frac{3}{4}b^2dy - 5ac^2 = 2a^2dx - \frac{3}{4}b^2dy$.

Es ist aus diesem zu ersehen

I. Daß man das Differenzial einer aus mehreren Gliedern bestehenden Funktion finde, bey der in jedem Gliede nicht mehr als eine einzige veränderliche Größe in der ersten Potenz mit anderen unveränderlichen Größen verbunden vorkömmt, wenn man jeder veränderlichen Größe das Zeichen d vorsetzt, und übrigens die gehörigen Zeichen der Glieder beybehält.

II. Daß die Glieder, welche blosse unveränderliche Größen enthalten, gar kein Differenzial haben, nämlich $d(5ac^2) = 0$, oder allgemein $d(ax + b) = adx$.

Es ist also vermög dieser Regel

$$d\left(\frac{ax}{b} - \frac{cy}{e} + b\right) = \frac{adx}{b} - \frac{cdy}{e}.$$

Und nun ist nach dieser Regel Fig.

$$\text{I. d}\left(\frac{a^2+bx}{a-x}\right)=\frac{(a-x).\,d(a^2+bx)-(a^2+bx).\,d(a-x)}{(a-x)^2}$$

$$=\frac{abdx-bxdx+a^2dx+bxdx}{(a-x)^2}=\frac{(a^2+ab)dx}{(a-x)^2}=$$

$$(a^2+ab)dx(a-x)^{-2}$$

$$\text{II. d}\left(\frac{a^2b}{xy}\right)=\frac{-a^2bydx-a^2bxdy}{x^2y^2}=-a^2bx^{-2}y^{-1}dx$$

$-a^2bx^{-1}y^{-2}dy$, weil der Zähler unveränderlich ist, und folglich kein Differenzial hat.

$$\text{III. d}\left(\frac{ax}{a-x}-\frac{a^2}{a+x}\right)=\frac{(a^2+x^2)2a^2dx}{(a^2-x^2)^2}=2a^4dx(a^2-x^2)^{-2}$$

$+2a^2x^2dx\,(a^2-x^2)^{-2}$.

579. **Das Differenzial der Potenz von einem unveränderlichen Exponenten einer veränderlichen Größe wird gefunden, wenn man die um 1 verminderte Potenz dieser nämlichen Größe, mit dem Exponenten, mit dem Coefficienten und mit dem Differenzial der Größe multipliziret, welche auf die gegebene Potenz zu erheben ist;** nämlich $d(ax^m)=max^{m-1}dx$, es möge m eine ganze oder gebrochene, positive oder negative, rationale oder irrationale unveränderliche Größe seyn, den einzigen Fall ausgenommen, wenn $m=0$ wäre, weil in diesem Falle $ax^m=ax^0=a$ nämlich unveränderlich ist, und folglich kein Differenzial hat.

Denn vermög (576) ist $d(ax^m)=a(x+dx)^m-ax^m$; aber vermög (185) ist $a(x+dx)^m=ax^m+max^{m-1}dx$

$$+\frac{m.\,m-1}{1.\,2}ax^{m-2}dx^2+\frac{m.m-1.m-2}{1.\,2.\,3.}ax^{m-3}dx^3+\ldots$$

folglich $d(ax^m)=max^{m-1}dx+\dfrac{m.\,m-1}{1.\,2}ax^{m-2}dx^2+$

$\dfrac{m.m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3.}ax^{m-3}dx^3+\ldots$ und endlich $d(ax^m)$

$=max^{m-1}dx$, weil alle darauf folgende Glieder in Rücksicht

Fig.

Nach dieser Regel ist demnach $\mathrm{d}\left(\frac{axy}{b} - \frac{bxz}{c} + c^2\right)$

$$= \frac{ay\mathrm{d}x}{b} + \frac{ax\mathrm{d}y}{b} - \frac{bz\mathrm{d}x}{c} - \frac{bx\mathrm{d}z}{c}.$$

578. **Das Differenzial eines veränderlichen Bruches wird gefunden, wenn man von dem Produkte aus dem Differenzial des Zählers in den Nenner das Produkt aus dem Differenzial des Nenners in dem Zähler subtrahiret und dieses Resultat durch das Quadrat des Nenners dividiret,** nämlich $\mathrm{d}\left(\frac{ax}{y}\right) = \frac{ay\mathrm{d}x - ax\mathrm{d}y}{y^2}$.

Denn vermög (576) ist $\mathrm{d}\left(\frac{ax}{y}\right) = \frac{a(x + \mathrm{d}x)}{(y + \mathrm{d}y)} - \frac{ax}{y}$

$$= \frac{ax + a\mathrm{d}x}{y + \mathrm{d}y} - \frac{ax}{y} = \frac{axy + ay\mathrm{d}x - axy - ax\mathrm{d}y}{y^2 + y\mathrm{d}y}$$

$= \frac{ay\mathrm{d}x - ax\mathrm{d}y}{y^2 + y\mathrm{d}y} = \frac{ay\mathrm{d}x - ax\mathrm{d}y}{y^2}$, weil in dem Nenner $y\mathrm{d}y$ in Rücksicht y^2 verschwindet.

Anmerkung. Es wird wohl hoffentlich Niemand so voreilig seyn, und wird schon bey dem vorhergehenden Ausdrucke $\frac{ax + a\mathrm{d}x}{y + \mathrm{d}y} - \frac{ax}{y}$ in dem Nenner $\mathrm{d}y$ in Rücksicht y, und in dem Zähler $a\mathrm{d}x$ in Rücksicht ax, oder gar in dem letzten Ausdrucke auch $ay\mathrm{d}x$ und $ax\mathrm{d}y$ hinweglassen wollen; wenn ein solcher sich nur daran erinnert, daß es verlanget werde die unendlich kleine Veränderung der Funktion zu finden, wenn in derselben jede veränderliche Größe um einen unendlich kleinen Theil wächst, so wird er von seiner Voreiligkeit alsogleich abstehen.

Und

Fig.

VII. $d\left(ax^m(b+cx^n)^p\right)=max^{m-1}dx(b+cx^n)^p+pax^m\times$ $(b+cx^n)^{p-1}\times ncx^{n-1}dx = max^{m-1}dx(b+cx^n)^p$ $+npacx^{m+n-1}dx(b+cx^n)^{p-1}$.

Auch Wurzelgrößen lassen sich nach dieser Regel differenziren, weil man jede Wurzelgröße als eine Potenz mit gebrochenen Exponenten vorstellen kann, nämlich

$$\text{VIII. } d\left(\sqrt[n]{ax^m}\right)=d\left(a^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}}\right)=\frac{m}{n}.a^{\frac{1}{n}}x^{\frac{m}{n}-1}dx.$$

$$\text{IX. } d\left(\sqrt{\frac{a^2x}{a-x}}\right)=d\left(\frac{\sqrt{a^2x}}{\sqrt{(a-x)}}\right)=d\left(\frac{ax^{\frac{1}{2}}}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}\right)=$$

$$d\left(ax^{\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}\right)=\tfrac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}ax^{\frac{1}{2}}\times$$

$$dx(a-x)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\text{X. } d\left(\sqrt[3]{2ax^2-x^3}\right)=d\left((2ax^2-x^3)^{\frac{1}{3}}\right)=\tfrac{1}{3}(2ax^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}\times$$

$$(4axdx-3x^2dx)=\frac{4axdx-3x^2dx}{3(2ax^2-x^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{(4ax-3x^2)dx}{3\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}}$$

Die zweyten Potenzwurzeln, wenn sie nicht zu sehr zusammengesetzt sind, und vor dem Wurzelzeichen keine veränderliche Größe enthalten, lassen sich sehr geschwinde differenziren, wenn man das Differenzial der Größe unter dem Zeichen durch die doppelte gegebene 2te Potenzwurzel dividiret, nämlich

$d(a\sqrt{X})=\dfrac{a.dX}{2\sqrt{X}}$, es möge X was immer für eine Funktion von x bedeuten; denn $d(a\sqrt{X})=d(aX^{\frac{1}{2}})=\tfrac{1}{2}aX^{\frac{1}{2}-1}dX=$ $\tfrac{1}{2}aX^{-\frac{1}{2}}dX=\dfrac{a.dX}{2X^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{a.dX}{2\sqrt{X}}$

Fig. sicht dieses Gliedes als unendlich kleine Größen von höheren Ordnungen verschwinden.

Es ist demnach nach dieser Regel

I. $d(ax) = d(ax^1) = 1.\,ax^{1-1}dx = ax^0 dx = adx.$

II. $d(ax^2) = 2axdx;\ d(ax^3) = 3ax^2dx.$

III. $d(ax^{-2}y^3) = -2ax^{-3}y^3dx + 3ax^{-2}y^2dy.$

IV. $d(ax^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}}dx;\ d(ax^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{3}{2}ax^{-\frac{5}{2}}dx.$

Diese Regel erstrecket sich auch auf die Potenzen von mehrnamigen Größen, weil x jede sowohl einfache als auch zusammengesetzte Größe bedeuten kann; z. B.

V. $d\left((ax+x^2)^3\right) = 3(ax+x^2)^{3-1}\,d(ax+x^2) =$

$3(ax+x^2)^2.(adx+2xdx) = (3a+6x)dx(ax+x^2)^2.$ Denn man setze nur $ax+x^2 = y$, so ist $(ax+x^2)^2 = y^2$, $(ax+x^2)^3 = y^3$,

$dy = adx + 2xdx$, und $d\left((ax+x^2)^3\right) = d(y^3) = 3y^2dy$

$= 3(ax+x^2)^2.(adx+2xdx).$

VI. $d\left(\left(ax^2+by^2+\frac{cx^4}{y^2}\right)^n\right) = d\left((ax^2+by^2+cx^4y^{-2})^n\right)$

$= n(ax^2+by^2+cx^4y^{-2})^{n-1} \times (2axdx+2bydy+$
$4cx^3y^{-2}dx - 2cx^4y^{-3}dy).$ Es ist aus diesem Beyspiele zu ersehen, daß sich auch Brüche mit veränderlichen Nennern nach dieser Regel differenziren lassen. Es ist nämlich

$d\left(\frac{a^2b}{xy}\right) = d(a^2bx^{-1}y^{-1}) = -a^2bx^{-2}y^{-1}dx - a^2bx^{-1}y^{-2}dy;$

ingleichen $d\left(\frac{bx}{a^2-cx}\right) = d\left(bx(a^2-cx)^{-1}\right) =$
$bdx(a^2-cx)^{-1} - bx(a^2-cx)^{-2} \times -cdx = bdx(a^2-cx)^{-1}$
$+ bcxdx(a^2-cx)^{-2}.$

(160); es ist aber lognat$\left(1+\frac{dx}{x}\right)=\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+$ Fig.
$\frac{dx^3}{3x^3}-\frac{dx^4}{4x^4}+\ldots$ vermög (167); folglich auch d(lognat x) $=$
$\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}-\ldots$ und endlich d(lognat x) $=\frac{dx}{x}$,
weil bey dieser Reihe in Rücksicht des ersten Gliedes alle darauf folgende Glieder als unendlich kleine Größen von höheren Ordnungen verschwinden.

Da nun x jede zusammengesetzte Größe, nämlich jede Funktion von einer oder von mehreren veränderlichen Größen vorstellen kann, so ist auch **das Differenzial des natürlichen Logarithmus von was immer für einer Funktion gleich dem Differenzial der Funktion getheilet durch die Funktion selbst.** Und nun lassen sich nach dieser Regel folgende Funktionen sehr leicht differenziren.

I. $d\left(\text{lognat}\,(a^3+by^2)\right)=\frac{2bydy}{a^3+by^2}$; um dieses recht deutlich einzusehen setze man $a^3+by^2=x$, so ist $dx=2bydy$, und folglich $d\left(\text{lognat}(a^3+by^2)\right)=d\,(\text{lognat}\,x)=\frac{dx}{x}$ $=\frac{2bydy}{a^3+by^2}$, wenn man für x und dx wieder ihre Werthe setzet.

II. $d\left(\text{lognat}\sqrt{a^2+x^2}\right)=\frac{d\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)}{\sqrt{a^2+x^2}}=$
$\frac{2xdx}{2\sqrt{a^2+x^2}\times\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{xdx}{a^2+x^2}$; oder $d\left(\text{lognat}\sqrt{a^2+x^2}\right)$
$=d\left(\text{lognat}\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)=d\left(\tfrac{1}{2}.\text{lognat}(a^2+x^2)\right)$
$=\frac{\frac{1}{2}.2xdx}{a^2+x^2}=xdx\,(a^2+x^2)^{-1}$.

Fig. Nach dieser Formel lassen sich nun die Gleichungen für die Kegelschnittslinien sehr leicht differenziren, das ist die Veränderungen der Ordinaten für eine unendlich kleine Vermehrung oder Verminderung der Abscissen bey diesen krummen Linien lassen sich sehr leicht aus ihren Gleichungen bestimmen.

Es ist nämlich bey dem Kreise $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$; folglich $dy = \frac{2adx - 2xdx}{2\sqrt{(2ax-x^2)}} = \frac{(a-x)dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Imgleichen $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ ist die Gleichung für die positiven Ordinaten, wenn die Abscissen vom Mittelpunkte gezählet werden; folglich ist die Differenzialgleichung für diesen Fall $dy = -\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$.

Aus der Gleichung für die Parabel $y = \sqrt{px}$ folgt $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}} = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$.

Aus den drey Gleichungen für die Ellipse (541.) $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - x^2)}$, $y = \sqrt{\left(px - \frac{px^2}{2a}\right)}$, folgen die Differenzialgleichungen $dy = -\frac{bxdx}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$, $dy = \frac{(ab - bx)dx}{a\sqrt{(2ax-x^2)}}$, $dy = \frac{(ap - px)dx}{2a\sqrt{(px - px^2 : 2a)}}$

Und eben so kann man die Differenzialgleichungen für die Hyperbel aus den Gleichungen dieser krummen Linie finden.

580. **Das Differenzial des natürlichen Logarithmus von was immer für einer veränderlichen Größe ist gleich dem Differenzial der veränderlichen Größe getheilet durch die veränderliche Größe selbst**; nämlich $d(\text{lognat}\, x) = \frac{dx}{x}$.

Denn vermög (576) ist $d(\text{lognat}\, x) = \text{lognat}\,(x + dx) - \text{lognat}\, x = \text{lognat}\left(\frac{x + dx}{x}\right) = \text{lognat}\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$ vermög (160);

581. Aus der Gleichung $d(\text{lognat } X) = \frac{d(X)}{X}$ es möge X was immer für eine Funktion von x bedeuten, folgt auch, wenn man beyderseits mit X multipliciret, $d(X) = X.\, d(\text{lognat } X)$, **nämlich das Differenzial von was immer für einer Funktion ist gleich der Funktion selbst multipliziret mit dem Differenzial ihres natürlichen Logarithmus.** Fig.

Z. B. $d\left(\frac{x^m}{y^n}\right) = \frac{x^m}{y^n}.d\left(\log \text{lognat} \frac{x^m}{y^n}\right) = x^m y^{-n} \times$

$d(\text{ lognat } x^m - \text{lognat } y^n) = x^m y^{-n}.\left[d(m \text{lognat } x) - \right.$

$\left. d(n \text{lognat } y)\right] = x^m y^{-n}.\left(\frac{m dx}{x} - \frac{n dy}{y}\right)$

$= m x^{m-1} y^{-n} dx - n x^m y^{-n-1} dy.$

582. Diese eben entwickelte Regel leistet uns sehr gute Dienste, wenn **Exponenzialgrößen** (Größen mit veränderlichen Exponenten) zu differenziren sind. Es ist nämlich

I. $d(a^{mx}) = a^{mx}.\, d(\text{lognat } a^{mx}) = a^{mx}.\, d(mx.\text{lognat } a)$ $= m a^{mx} dx.\text{lognat } a.$ Dieses Differenzial läßt sich auch auf folgende Art finden; es sey $a^{mx} = y$, so ist $mx.\text{ lognat } a = \text{lognat } y$, folglich $m dx.\text{lognat } a = \frac{dy}{y}$, und $dy = m y dx.\text{ lognat } a$ $= m a^{mx} dx.\text{ lognat } a = d(a^{mx})$.

II. $d(ax^n b^{mx}) = ax^n b^{mx}.\, d(\text{lognat } ax^n b^{mx}) = ax^n b^{mx}.\, d(La + n.Lx + mx.Lb) = ax^n b^{mx}.\left(\frac{n dx}{x} + m dx.Lb\right) = dx(ax^{n-1} b^{mx} + max^n b^{mx}.\text{ lognat } b)$

III. $d(ax^x) = ax^x.\, d(Lax^x) = ax^x.\, d(La + x\, Lx) = ax^x.(dx\, L\, x + dx) = dx(ax^x.\text{lognat} x + ax^x)$.

IV. $d(h^{mx}) = m h^{mx} dx$, wenn die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $= h$, und folglich $Lh = 1$ gesetzet wird; wir werden in der Folge öfters lognat h, lognat x u. s. w. durch Lh, Lx bezeichnen.

 V.

Fig. III. $d\left(\text{lognat}\,\frac{a-x}{a+x}\right) = d[L(a-x) - L(a+x)]$

$= d\left(\text{lognat}\,(a-x)\right) - d\left(\text{lognat}\,(a+x)\right)$

$= -\frac{dx}{a-x} - \frac{dx}{a+x} = -\frac{2adx}{a^2-x^2} = +\frac{2adx}{x^2-a^2}$

$= 2adx\,(x^2-a^2)^{-1}$.

IV. $d\left(\text{lognat}\,(x+\sqrt{a^2+x^2})\right) = \frac{dx + d(\sqrt{a^2+x^2})}{x+\sqrt{a^2+x^2}} =$

$\frac{dx + 2xdx : 2\sqrt{a^2+x^2}}{x+\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = dx(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

V. $d\,(ax^m.\,\text{lognat}\,bx^n) = max^{m-1}\,dx.\,\text{lognat}\,bx^n +$

$\frac{nbx^{n-1}dx}{bx^n}.\,ax^m = max^{m-1}dx.\,\text{lognat}\,bx^n + nax^{m-1}dx.$

VI. $d\left(ax^m.\,(\text{lognat}\,bx)^n\right) = max^{m-1}\,dx.\,(\text{lognat}\,bx)^n$

$+ n.(\text{lognat}\,bx)^{n-1}.\,d\,(\text{lognat}\,bx).\,ax^m$

$= max^{m-1}\,dx.\,(\text{lognat}\,bx)^n + nax^{m-1}dx.\,(\text{lognat}\,bx)^{n-1}.$

VII. $d[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2.\,\text{lognat}\,(x+\sqrt{x^2-a^2})]$

$= dx\sqrt{x^2-a^2}.$

Wäre eine logarithmische Funktion, die sich auf gemeine Logarithmen bezieht, z. B. $a.$ logvulg x zu differenziren, so muß man selbe ohne Veränderung des Werthes auf natürliche Logarithmen reduciren, und sodann das gesuchte Differenzial nach eben dieser Regel bestimmen; es ist nämlich $a.$ logvulg x $= ma.$ lognat x, wenn man $0{,}43429448.. = m$ setzet (180), und folglich $d(a.\text{logvulg}\,x) = \frac{madx}{x}$.

$$d(\cos z) = -zdz + \frac{z^3dz}{2.3} - \frac{z^5dz}{2.3.4.5} + \frac{z^7}{2\ldots7} - .$$ Fig.

$$\text{oder}\begin{cases} d(\sin z) = dz.(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2\ldots6} + \ldots) \\ d(\cos z) = -dz.(z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2\ldots7} + .) \end{cases}$$

nämlich $\begin{cases} d(\sin z) = +dz.\cos z \\ d(\cos z) = -dz.\sin z \end{cases}$ wenn man für die unendl. Reihen wieder ihre Werthe setzet.

Und nun lassen sich die Differenzialformeln für die übrigen trigonometrischen Funktionen sehr leicht ableiten, nämlich

III. $d(\tang z) = \frac{dz}{\cos^2 z}$; denn $\tang z = \frac{\sin z}{\cos z}$; folglich auch $d(\tang z) = d\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right) = \frac{dz.\cos z \times \cos z + dz.\sin z \times \sin z}{\cos^2 z}$

$$= \frac{dz(\sin^2 z + \cos^2 z)}{\cos^2 z} = \frac{dz.1^2}{\cos^2 z} = \frac{dz}{\cos^2 z}.$$

Eben so findet man IV. $d(\cot z) = -\frac{dz}{\sin^2 z}$.

V. $d(\sec z) = \frac{dz.\sin z}{\cos^2 z}$; denn $\sec z = \frac{1}{\cos z}$; folglich $d(\sec z) = d\left(\frac{1}{\cos z}\right) = \frac{dz.\sin z}{\cos^2 z}$. Und eben so findet man VI. $d(\operatorname{cosec} z) = -\frac{dz.\cos z}{\sin^2 z}$.

Diese Formeln sind hinreichend alle Funktionen, bey denen Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. w. vorkommen, zu differenziren. Z. B. $d\left(\frac{y^n.\sin my}{\tang^3 y}\right) = d(y^n.\sin my.\tang^{-3}y)$

$$= ny^{n-1}dy.\sin my.\tang^{-3}y + my^n dy.\cos my.\tang^{-3}y$$

$$-3\tang^{-4}y.\frac{dy}{\cos^2 y}.y^n.\sin my = ny^{n-1}dy.\sin my.\tang^{-3}y$$

 +

V. $d\left(h^{(2ax-x^2)}\right) = (2a-2x)dx\,h^{(2ax-x^2)}$

VI. $d\left(h^{mxh^{nx}}\right) = h^{mxh^{nx}} \times d\left(Lh^{mxh^{nx}}\right) = h^{mxh^{nx}} \times d\left(mxh^{nx}\right)$

$= h^{mxh^{nx}} \times \left(mdxh^{nx} + mnxdxh^{nx}\right) = (1+nx)dx.mh^{x(n+mh^{nx})}$

Anmerkung. Daß $d(a^x) = a^x dx.La$ sey, läßt sich auch auf folgende Art erweisen. Vermög (182) ist $a^x = 1 + x.(La) + \frac{x^2}{2}.(La)^2 + \frac{x^3}{2.3}.(La)^3 + \frac{x^4}{2.3.4}.(La)^4 + ;$ folglich auch $d(a^x) = dx(La) + xdx(La)^2 + \frac{x^2dx}{2}.(La)^3 + \frac{x^3dx}{2.3}(La)^4 + ..$ oder $d(a^x) = (1 + x.(La) + \frac{x^2}{2}.(La)^2 + \frac{x^3}{2.3}.(La)^3 + ..) \times dx.La$, und endlich $d(a^x) = a^x dx.La$. Oder unmittelbar aus der Fundamentalregel $d(a^{mx}) = a^{m(x+dx)} - a^{mx} = a^{mx}.a^{mdx} - a^{mx} = a^{mx}.[1 + mdx.La + \frac{m^2dx^2.(La)^2}{1.2} + \frac{m^3.dx^3.(La)^3}{1.2.3} + ...] - a^{mx} = ma^{mx}dx.La.$

583. Auch die trigonometrischen Funktionen lassen sich differenziren; es ist nämlich für den Halbmesser 1, wenn man die wirkliche Länge eines Bogens mit z bezeichnet,

I. $d(\sin z) = dz.\cos z$; und II. $d(\cos z) = - dz.\sin z$.

Denn vermög (445) ist

$$\sin z = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.....7} + ...$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.....6} + ...$$

folglich auch

$$d(\sin z) = dz - \frac{z^2dz}{2} + \frac{z^4dz}{2.3.4} - \frac{z^6dz}{2....6} + ..$$

jeden Formel dz sucht, und dabey die allerersten Eigenschaften Fig.
der trigonometrischen Funktionen auch mit in Erwägung zieht.

$$1)\ dz = \frac{a.\,d(\sin z)}{\cos z} = \frac{a.\,d(\sin z)}{\sqrt{(a^2 - \sin^2 z)}}.$$

$$2)\ dz = -\frac{a.\,d(\cos z)}{\sin z} = -\frac{a.\,d(\cos z)}{\sqrt{(a^2 - \cos^2 z)}}.$$

$$3)\ dz = \frac{\cos^2 z.\,d(\tang z)}{a^2} = a^2.\,d(\tang z) : \left(\frac{a^2}{\cos z}\right)^2$$

$$= \frac{a^2.\,d(\tang z)}{\sec^2 z} = \frac{a^2.\,d(\tang z)}{a^2 + \tang^2 z}.$$

$$4)\ dz = -\frac{\sin^2 z.\,d(\cot z)}{a^2} = -\frac{a^2 d(\cot z)}{\operatorname{cosec}^2 z} = -\frac{a^2 d(\cot z)}{a^2 + \cot^2 z}.$$

$$5)\ dz = \frac{\cos^2 z.\,d(\sec z)}{a.\sin z} = \frac{\cos z.\,d(\sec z)}{\tang z} = \frac{a^2.\,d(\sec z)}{\sec z.\,\tang z}$$

$$= \frac{a^2.\,d(\sec z)}{\sec z.\sqrt{(\sec^2 z - a^2)}}.$$

$$6)\ dz = -\frac{\sin^2 z.\,d(\operatorname{cosec} z)}{a.\cos z} = -\frac{a^2.\,d(\operatorname{cosec} z)}{\operatorname{cosec} z.\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 z - a^2)}}$$

$$7)\ dz = \frac{a.\,d(\operatorname{sinv} z)}{\sin z} = \frac{a.\,d(\operatorname{sinv} z)}{\sqrt{(2a.\operatorname{sinv} z - \operatorname{sinv}^2 z)}}.$$

$$8)\ dz = -\frac{a.\,d(\operatorname{cosv} z)}{\cos z} = -\frac{a.\,d(\operatorname{cosv} z)}{\sqrt{(2a.\operatorname{cosv} z - \operatorname{cosv}^2 z)}}$$

Setzen wir nun bey dem nämlichen Halbmesser a den Sinus des z Bogens $= x$, nämlich in der Formel 1) $\sin z = x$, in der Formel 2) $\cos z = x$, in der Formel 3) $\tang z = x$, u. s. w. welche Bezeichnungen nichts anderes bedeuten als $\sin \text{Arc}\, z = x$, $\cos \text{Arc}\, z = x$, $\tang \text{Arc}\, z = x$, u. s. w. Aus diesen Bezeichnungen folgt $z = \text{Arc} \sin x$, $z = \text{Arc} \tang x$ u. s. w. und auch $dz = d(\text{Arc} \sin x)$, $dz = d(\text{Arc} \tang x)$, u. s. w. Aus eben diesen Bezeichnungen $\sin z = x$, $\cos z = x$, $\tang z = x$, folgt $d(\sin z) = dx$, $d(\cos z) = dx$, $d(\tang z) = dx$, u. s. w. Substituiren wir nun diese Werthe in

Fig. $+ my^n dy.\cos my.\mathrm{tang}^{-3}y - 3y^n dy.\sin my.\cos^{-2}y.\mathrm{tang}^{-4}y$. u. s. w.

Anmerkung. Die Differenzialformeln für die trigonometrischen Funktionen lassen sich auch aus der Fundamentalregel (576) auf folgende Art ableiten.

$$d(\sin z) = \sin(z + dz) - \sin z = \frac{\sin z.\cos dz + \sin dz.\cos z}{a} - \sin z$$

für den Halbmesser $= a$ vermög (442. I.); es ist aber $\cos dz$ in Rücksicht des $\sin z$ so viel als $\cos 0 = a =$ dem Halbmesser (440. III.), und in dieser nämlichen Voraussetzung ist $\sin dz = dz$, nämlich der Sinus eines unendlich kleinen Bogens ist dem Bogen selbsten gleich; folglich

$$d(\sin z) = \frac{a.\sin z + dz.\cos z}{a} - \sin z = \frac{dz.\cos z}{a}$$

für den Halbmesser a, und für den Halbmesser 1 ist $d(\sin z) = dz.\cos z$, wie ehevor.

Es ist also für den Halbmesser oder ganzen Sinus $= a$,

$$1)\ d(\sin z) = \frac{dz.\cos z}{a};$$

$$2) d(\cos z) = d(\sin(90^\circ - z)) = -\frac{dz.\cos(90^\circ - z)}{a} = -\frac{dz.\sin z}{a};$$

$$3)\ d(\mathrm{tang}\ z) = \frac{a^2 dz}{\cos^2 z};\ 4)\ d(\cot z) = -\frac{a^2 dz}{\sin^2 z};$$

$$5)\ d(\sec z) = \frac{a dz.\sin z}{\cos^2 z};\ 6)\ d(\mathrm{cosec}\ z) = -\frac{a dz.\cos z}{\sin^2 z};$$

$$7)\ d(\mathrm{sinvers}\ z) = d(a - \cos z) = \frac{dz.\sin z}{a};$$

$$8)\ d(\mathrm{cosvers}\ z) = d(a - \sin z) = -\frac{dz.\cos z}{a}.$$

584. Aus diesen letzten 8 Formeln fließen nun folgende Gleichungen für das Differenzial dz eines Kreisbogens z bey einem Kreise dessen Halbmesser $= a$ ist, wenn man aus einer je-

$= - \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{(1-y^3)}}$; $d(\text{arc tang}(3+x^2)) = \frac{2x dx}{10+6x^2+x^4}$; Fig.

u. s. w.

585. Anmerkung. Einige Meßkünstler pflegen die unendlich kleinen Größen von höheren Ordnungen, die wir (577.... 580) in Rücksicht einer unendlich kleinen Größe der ersten Ordnung als verschwindend hinweggelassen haben, durch verschiedene Kunstgriffe und Umschweife gar künstlich zu verbergen. Man kann z. B. das $udydz$, $ydudz$, $zdudy$, $dudydz$ bey der Bestimmung des $d(uyz)$ dergestalt verstecken, daß es bey dem Kalkul auf dem Papiere gar nicht zum Vorschein kömmt, und zwar auf folgende Art.

Es sey y eine Funktion von x (nämlich y hänge dergestalt von x ab, daß sich y alsobald ändern müße, sobald sich x verändert) und zwar y sey eine solche Funktion von x, daß $y = \text{lognat}\, x$ statt finde, man möge statt x was immer setzen. Nun vermehre man x um ein beliebiges endliches Stück Dx (Differenz von x), so muß nothwendig auch y um irgend ein gewisses Stück Dy (Differenz von y) vermehret werden, damit sodann die Gleichung $y + Dy = \text{lognat}(x + Dx)$ noch immer statt finde; aus diesen zwey Gleichungen folgt durch die Subtraktion $Dy = \text{lognat}(x + Dx) - \text{lognat}\, x$
$= \text{lognat}(1 + \frac{Dx}{x}) = \frac{Dx}{x} - \frac{(Dx)^2}{2x^2} + \frac{(Dx)^3}{3x^3} - \frac{(Dx)^4}{4x^4} + .$

und $\frac{Dy}{Dx} = \frac{1}{x} - \frac{Dx}{2x^2} + \frac{(Dx)^2}{3x^3} - \frac{(Dx)^3}{4x^4} + \ldots$

Dieser Differenzquotient $\frac{Dy}{Dx}$ nähert sich nun um so mehr dem Werthe $\frac{1}{x}$ je kleiner Dx angenommen wird; dieser Werth $\frac{1}{x}$ heißt die Gränze des Differenzquotienten; endlich wird

die-

Fig. den letzten 8 Formeln, so erhalten wir sodann folgende Gleichungen, welche uns in der Integralrechnung sehr gute Dienste leisten werden; nämlich

$$\text{I. } d(\text{Arc sin} x) = \frac{a dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = a dx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{II. } d(\text{Arc cos} x) = -\frac{a dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = -a dx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{III. } d(\text{Arc tang} x) = \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2} = a^2 dx(a^2 + x^2)^{-1}.$$

$$\text{IV. } d(\text{Arc cot} x) = -\frac{a^2 dx}{a^2 + x^2} = -a^2 dx(a^2 + x^2)^{-1}.$$

$$\text{V. } d(\text{Arc sec} x) = \frac{a^2 dx}{x\sqrt{(x^2 - a^2)}} = a^2 x^{-1} dx(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{VI. } d(\text{Arc cosec} x) = -\frac{a^2 dx}{x\sqrt{(x^2 - a^2)}} = -a^2 x^{-1} dx(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{VII. } d(\text{Arc sinv } x) = \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = a dx(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= a x^{-\frac{1}{2}} dx(2a - x)^{-\frac{1}{2}} = a x^{-1} dx(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{VIII. } d(\text{Arc cosv } x) = -\frac{a dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = -a dx(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -a x^{-\frac{1}{2}} dx(2a - x)^{-\frac{1}{2}} = -a x^{-1} dx(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Aus diesen acht Formeln ist es zugleich deutlich zu ersehen, wie die trigonometrischen Funktionen y^n. arc sin y, $\frac{2}{3}$arc cos $\sqrt{y^3}$, arc tang $(3 + x^2)$, u. s. w. für einen ganzen Sinus $= a$ zu differenziren sind; wird hingegen bey der Rechnung der ganze Sinus $= 1$ zum Grunde gelegt, so darf man nur in diesen Formeln allenthalben $a = 1$ setzen; so z. B. ist in dieser Voraussetzung $d(y^n. \text{arc sin} y) = ny^{n-1} dy. \text{arc sin} y$ $+ \frac{y^n dy}{\sqrt{(1 - y^2)}}$; $d(\frac{2}{3}\text{arc cos} \sqrt{y^3}) = d(\frac{2}{3}\text{arc cos} y^{\frac{3}{2}})$

$=$

ten Theile dx statt Dx substituiret wird? Um dieser Frage aus- Fig.
zuweichen nehmen einige der neuesten Meßkünstler für das Differenzial der veränderlichen Größe x was immer für eine mit x gleichartige aber dabey endliche Größe an ohne zu bestimmen auf was für eine Art diese angenommene Größe von x abhänge, bezeichnen diese endliche aber dabey mehr als unbekannte Größe mit dx, und sagen das Differenzial der Funktion y, welche von x auf was immer für eine Art abhängt (in unserem Beyspiele das Differenzial des lognat x) ist gleich dem Produkte aus dem angenommenen endlichen Differenzial dx der veränderlichen Größe x multipliciret mit der Gränze des Differenzquotienten, oder welches einerley ist, das Differenzial von y ist die vierte Proportionalgröße zur Einheit, zur Gränze des Differenzquotienten, und zu dem angenommenen endlichen Differenzial dx der veränderlichen Größe x, wovon y abhängt, nämlich in unserem Beyspiele $1 : \frac{1}{x} = dx : d(y)$, und folglich $d(y) = \frac{dx}{x}$; nun ist $y = \text{lognat}\, x$, und folglich $d(y) = d(\text{lognat}\, x)$ gesetzet worden; es ist also auch $d(\text{lognat}\, x) = \frac{dx}{x}$, woraus wieder $d(x) = x . d(\text{lognat}\, x)$ fließt. Es wäre überflüßig, wenn wir uns bey dieser endlichen Differenzialrechnung länger aufhielten, welche mit der unsrigen als der ursprünglich deutschen auf einerley Resultate führet und wirklich auf einerley Resultate führen muß, weil diejenigen Größen als z. B. in dem gegebenen Beyspiele $(Dx)^2$, $(Dx)^3$, $(Dx)^4$, u. s. w. die wir als unendlich kleine Größen von höheren Ordnungen in Rücksicht einer unendlich kleinen Größe des ersten Ranges als verschwindend hinweglassen, bey dieser Methode, schon vermög der Erklärung des Differenzials von einer Funktion, gänzlich hinwegfallen.

Von

Fig. dieser Differenzquotient $\frac{Dy}{Dx}$ der Gränze $\frac{1}{x}$ völlig gleich, nämlich $\frac{Dy}{Dx} = \frac{1}{x}$, wenn man Dx verschwinden läßt, das ist wenn man in völliger Schärfe $Dx = 0$ setzet; diese verschwundene Differenz Dx nenne man nun das Differenzial von x, und bezeichne dieses Differenzial mit dx, und da bey dem Uebergange der endlichen Differenz Dx in das Differenzial $dx = 0$ auch die endliche Differenz Dy in das Differenzial $dy = 0$ sich verwandelt, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ das Differenzialverhältniß der angenommenen Gleichung, woraus $dy = \frac{dx}{x}$ folgt; oder weil man $y = \text{lognat}\, x$, und folglich $dy = d(\text{lognat}\, x)$ gesetzet hat, so ist auch $d(\text{lognat}\, x) = \frac{dx}{x}$. Aus dieser Gleichung fließt nun der schon oben (581) entwickelte Lehrsatz $d(x) = x.\, d(\text{lognat}\, x)$.

Nach diesem Lehrsatze läßt sich uyz auf folgende Art differenziren; $d(uyz) = uyz.\, d(\text{lognat}\, uyz) = uyz \times d(\text{lognat}\, u + \text{lognat}\, y + \text{lognat}\, z) = uyz.\, [d(\text{lognat}\, u) + d(\text{lognat}\, y) + d(\text{lognat}\, z)] = uyz.\left(\frac{du}{u} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}\right) = yz\,du + uz\,dy + uy\,dz$, allwo $udydz$, $ydudz$, $zdudy$, $dudydz$ gar nicht auf dem Papiere erscheinen.

Imgleichen $d(x^m) = x^m.\, d(\text{lognat}\, x^m) = x^m.\, d(m\,\text{lognat}\, x) = x^m.\, \frac{m\,dx}{x} = mx^{m-1}\, dx$, allwo wieder dx^2, dx^3, dx^4, .. gänzlich verstecket sind. Könnte man nicht bey dieser Methode fragen, warum in der Gleichung $\frac{Dy}{Dx} = \frac{1}{x} - \frac{Dx}{2x^2} + \frac{(Dx)^2}{3x^3} - \frac{(Dx)^3}{4x^4} +$ .. nur in dem ersten und nicht auch in dem zweyten

ten

einmal dergestalt differenziret, daß dx (vermög der gegebenen Fig.
Erklärung des zweyten Differenzials) als eine unveränderliche Größe angesehen wird; es ist nämlich $dd(ax^m) = d(d(ax^m)) = d(max^{m-1}\,dx) = m.(m-1)ax^{m-2}\,dx^2$.

Eben so findet man bey dem Kreise aus der Differenzialgleichung $dy = -x\,dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ das zweyte Differenzial $ddy = -dx^2(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}} \times -2x\,dx \times -x\,dx = -dx^2(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2dx^2(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}$, nämlich $ddy = -a^2dx^2(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}} = dd(\sqrt{a^2-x^2})$. Aus der Differenzialgleichung der Parabel $dy = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$ fließt $ddy = -\frac{1}{4}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}dx^2 = dd(\sqrt{px})$. Aus der Gleichung für die Logistik $y = ch^{\frac{x}{a}}$ folgt $dy = \frac{ch^{\frac{x}{a}}\,dx}{a} = d(ch^{\frac{x}{a}})$, und ferner $ddy = \frac{ch^{\frac{x}{a}}\,dx^2}{a^2}$, u. s. w.

Und eben so läßt sich das dritte Differenzial einer gegebenen Funktion von x bestimmen, wenn man das zweyte Differenzial nach den gewöhnlichen Regeln noch einmal dergestalt differenziret, daß wieder dx für unveränderlich angesehen wird; denn es ist das dritte Differenzial einer Funktion von x nichts anders, als der Unterschied, um welchen das zweyte Differenzial sich verändert, wenn man in demselben die veränderliche Größe x noch einmal um ihr Differenzial dx wachsen oder abnehmen läßt. Und auf diese Art kann man weiter zu den 4ten, 5ten Differenzialen fortgehen. Man pflegt gemeiniglich das zweyte Differenzial von y mit ddy oder d^2y, das dritte mit d^3y, das vierte mit d^4y u. s. w. zu bezeichnen.

Z. B. aus der Gleichung $y = ax^m$ fließt

$dy = max^{m-1}\,dx = d(ax^m)$;

$d^2y = m.(m-1)ax^{m-2}dx^2 = dd(ax^m)$;

Fig. Von den zweyten, dritten, und höheren Differenzialen.

586. Die Differenzialen, von denen wir bisher gehandelt haben, heissen die ersten Differenzialen; z. B. bey der Gleichung für irgend eine krumme Linie $y = ax^m$ ist $dy = max^{m-1}dx$ das erste Differenzial der Ordinate y, nämlich die Veränderung dy der Ordinate y ist gleich $max^{m-1}dx$, wenn die Abscisse x um ein unendlich kleines Stück dx wächst oder abnimmt. Nun kann man die Frage aufwerfen, um wie viel dieses erste Differenzial $dy = max^{m-1}dx$ der Ordinate sich verändern müsse, wenn die Abscisse wieder um ein eben solches unendlich kleines Stück dx wächst oder abnimmt. Wenn wir diese Veränderung von dy mit ddy bezeichnen, so haben wir sodann $ddy = madx(x + dx)^{m-1} - max^{m-1}dx = madx.\left[x^{m-1} + (m-1)x^{m-2}dx + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} \times x^{m-3}dx^2 + ..\right] - max^{m-1}dx = m.(m-1).ax^{m-2}dx^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2}.ax^{m-3}dx^3 + \frac{m.....(m-3)}{1.2.3} \times ax^{m-4}dx^4 + ...$ das ist $ddy = m.(m-1).ax^{m-2}dx^2$, weil alle darauffolgende Glieder in Rücksicht des ersten verschwinden.

Wir sehen aus diesem, daß ddy eine unendlich kleine Größe von der zweyten Ordnung sey, weil $m.(m-1).ax^{m-2}dx^2$ von eben dieser Ordnung ist. Diese Veränderung oder dieser Unterschied, um welchen das erste Differenzial einer Funktion von x sich verändert, wenn man die veränderliche Größe x in der Differenzialgleichung wieder um ihr Differenzial dx wachsen oder abnehmen läßt, heißt das zweyte Differenzial der nämlichen Funktion; so ist in unserem Beyspiele $m.(m-1) \times ax^{m-2}dx^2$ das zweyte Differenzial der Funktion ax^m, nämlich $m.(m-1).ax^{m-2}dx^2 = dd(ax^m) = ddy = d(dy)$.

Auch ist es aus diesem leicht zu ersehen, daß man das zweyte Differenzial einer gegebenen Funktion sehr leicht finde, wenn man das erste Differenzial nach den vorigen Regeln noch ein=

so wird das gesuchte Differenzial nach den gewöhnlichen Regeln gefunden, wenn man nur noch dabey ddy für das zweyte Differenzial von dy, und ddz für das zweyte Differenzial von dz annimmt, allwo ddy, ddz unendlich kleine Größen von der zweyten Ordnung bedeuten; nämlich. Fig.

$dd(ayz) = d(d(ayz)) = d(azdy + aydz) = adzdy + azddy + adydz + ayddz = 2adydz + azddy + ayddz$. Wäre dy unveränderlich, so wäre $ddy = 0$, und folglich $dd(ayz) = 2adydz + ayddz$; wäre hingegen dz unveränderlich, so wäre $dd(ayz) = 2adydz + azddy$,

Imgleichen $d\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$;

setzt man nun dx unveränderlich, so ist $d\left(\frac{ydx}{dy}\right) = dx - \frac{ydxddy}{dy^2}$.

$$d\left(\frac{y^2dy^3}{adx^2}\right) = \frac{2aydx^2dy^4 + 3ay^2dx^2dy^2ddy - 2ay^2dxddxdy^3}{a^2dx^4}.$$

Eben so findet man aus der Differenzialgleichung

$dz = \frac{ydy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = ydy(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}}$, wenn man sie noch einmal differenziret, folgende Differenzialgleichung

$$ddz = d[ydy(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}}]$$

$$= dy^2(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}} + yddy(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \tfrac{1}{2}ydy(dx^2 + dy^2)^{-\frac{3}{2}}.d(dx^2 + dy^2)$$

$$= (dy^2 + yddy).(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \tfrac{1}{2}ydy(dx^2 + dy^2)^{-\frac{3}{2}}.(2dxddx + 2dyddy)$$

$$= (dy^2 + yddy).(dx^2 + dy^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- (ydxdyddx + ydy^2ddy).(dx^2 + dy^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{dy^2 + yddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(ydxdyddx + ydy^2ddy)}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Fig. $d^3y = m.(m-1).(m-2)ax^{m-3}dx^3 = d^3(ax^m)$;
$d^n y = m.(m-1).\ldots.(m-n+1)ax^{m-n}dx^n$.

Aus der Gleichung $y = a.\text{lognat}\, x$ folgt
$dy = +\ ax^{-1}dx = d(a.Lx)$;
$d^2y = -\ ax^{-2}dx^2 = d^2(a.Lx)$;
$d^3y = +2ax^{-3}dx^3 = d^3(a.Lx)$;
$d^4y = -6ax^{-4}dx^4 = d^4(a.Lx)$.

Aus der Gleichung $y = ax^2$ fließt $dy = 2axdx$, $d^2y = 2adx^2$, $d^3y = 0$, $d^4y = 0$, u. s. w. welches sehr leicht einzusehen ist, weil ax^2 das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges vorstellet, bey der die zweyten Differenzen beständig, und folglich die dritten $= 0$ sind. Z. B. unsere Funktion ax^2 ist in dem gegenwärtigen Zustande $= ax^2$
im 2ten $= a(x + dx)^2 = ax^2 + 2axdx + adx^2$
im 3ten $= a(x + 2dx)^2 = ax^2 + 4axdx + 4adx^2$
im 4ten $= a(x + 3dx)^2 = ax^2 + 6axdx + 9adx^2$
im 5ten $= a(x + 4dx)^2 = ax^2 + 8axdx + 16adx^2$
folglich sind die ersten Differenzen von jeden zweyen nächst auf einander folgenden Zuständen $= (2axdx + adx^2)$, $(2axdx + 3adx^2)$, $(2axdx + 5adx^2)$; die zweyten Differenzen aber $= 2adx^2$, $2adx^2$, $2adx^2$ sind beständig, und folglich die dritten $= 0$.

587. Wir haben bisher nur Funktionen von einer einzigen veränderlichen Größe zum 2ten, 3ten, 4tenmale differenziret, und dabey das erste Differenzial dx der veränderlichen Größe für unveränderlich angesehen. Wenn x die Abscisse einer krummen Linie bedeutet, so wird gemeiniglich bey der Anwendung dx für unveränderlich angesehen, weil man sich öfters vorstellet, daß die Abscisse in unendlich viele gleiche Theile getheilet sey, deren jeder $= dx$ ist. Hingegen ist in eben diesem Falle das erste Differenzial dy der Ordinate y, das erste Differenzial dz des Bogens z, wie auch das erste Differenzial ds des Flächenraums s veränderlich. Wenn nun eine Funktion von mehreren veränderlichen Größen z. B. ayz zum zweyten male zu differenziren ist, allwo auch dy, dz veränderlich sind,

$d(axy + y^3) = aydx - axdy - 3y^2dy$ seyn; in der nämlichen Voraussetzung ist $d(axy - y^3) = aydx - axdy + 3y^2dy$. Die negativen Differenzialen werden übrigens in der Rechnung eben so behandelt, wie man sonst die negativen Größen zu behandeln pflegt. Fig.

Anwendung der Differenzialrechnung auf die Bestimmung der Subtangenten, Tangenten, Normalen, Subnormalen, und Asymptoten der krummen Linien.

589. Aufgabe. **Eine allgemeine Formel für die Subtangente einer jeden krummen Linie von parallelen Ordinaten zu finden.**

Auflösung. Es sey die krumme Linie BMC, SP die Abscissenlinie, A der Anfangspunkt der Abscissen; man gedenke an einen beliebigen Punkt M die Tangente TM; die Ordinate dieses Punktes sey PM $= y$, und die zugehörige Abscisse AP $= x$; man vermehre die Abscisse um ein beliebiges endliches Stück Pp, und ziehe die Ordinate pm, so wird diese Ordinate von der vorigen um das Stück Rm verschieden seyn, wenn man MR parallel zu Pp zieht. Durch M und m ziehe man die Sekante Sm, so ist das Dreyeck MRm ∾ SPM, und folglich Rm : RM (oder Pp = PM (y : PS, es ist demnach die Subsekante PS $= \frac{y.\mathrm{Pp}}{\mathrm{Rm}}$. Nun stelle man sich vor, 194

daß Pp ohne Ende abnehme, so wird der Punkt m sich dem Punkte M, und S dem T ohne Ende nähern; das ist der Punkt m wird unendlich nahe bey M, und S bey T liegen, wenn man Pp unendlich klein setzet; in diesem Falle wird demnach der Unterschied zwischen der endlichen Subtangente PT und zwischen der Subsekante PS unendlich klein oder $= 0$ in Rücksicht einer endlichen Größe, und folglich in eben diesem Falle $PS = PT$; in dieser nämlichen Voraussetzung wird aber auch $\mathrm{Pp} = d(\mathrm{AP}) = dx$, und $\mathrm{Rm} = d(\mathrm{PM}) = dy$; folglich ist, wenn wir PT statt PS, dx statt Pp, und dy

Fig. $$= \frac{(dy^2 + yddy).(dx^2 + dy^2) - ydxdyddx - ydy^2ddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{dx^2dy^2 + ydx^2ddy + dy^4 - ydxdyddx}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}};$$

nimmt man aber dx für unveränderlich an, so ist

$$ddz = (dx^2dy^2 + ydx^2ddy + dy^4).(dx^2 + dy^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Anmerkung. Bey der Anwendung der zweyten und höheren Differenzialen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben geben die Umstände und Bedingungen der Aufgabe zu erkennen, von was für einer veränderlichen Größe eigentlich das erste Differenzial unveränderlich sey.

588. Wir haben bereits in mehreren Fällen gesehen, daß die Differenzialen von solchen Funktionen negativ sind, welche von einer veränderlichen Größe dergestalt abhangen, daß die Funktionen abnehmen, da die veränderliche Größe in denselben wächst, und umgekehrt; so z. B. ist das Differenzial des Cosinus, der Cotangente, der Cosekante eines Bogens z negativ, weil diese Funktionen abnehmen, da die veränderliche Größe in denselben nämlich der Bogen z zunimmt, oder umgekehrt weil diese Funktionen wachsen, wenn der Bogen z abnimmt. Eben so fanden wir das Differenzial der Ordinate eines Kreises vom Mittelpunkte gerechnet negativ, weil diese Ordinaten in Rücksicht ihrer Abscissen abnehmende Größen sind. Es ist auch schon aus der Erklärung und aus der Entstehung des Differenzials von einer Funktion gar leicht zu ersehen, daß die Differenzialen derjenigen Funktionen, welche in Rücksicht ihrer veränderlichen Größen abnehmend sind, negativ seyn müßen. Man muß bey der Anwendung der Differenzialrechnung dieser Erinnerung jederzeit wohl eingedenk seyn; wenn z. B. die Funktion $axy + y^3$ zu differenziren wäre, worinn y auf irgend eine Art dergestalt von x abhangt, daß y abnimmt indem x wächst oder umgekehrt, so müßte

Aus der Gleichung $y = ch^{\frac{x}{a}}$ für die Logistik Fig. 189 Fig. 194

folgt $dy.dx^{-1} = \frac{ch^{\frac{x}{a}}}{a}$; folglich $PT = y : \frac{ch^{\frac{x}{a}}}{a} = ch^{\frac{x}{a}} \times \frac{a}{ch^{\frac{x}{a}}}$

$= a$; in der **Logistik ist demnach die Subtangente unveränderlich.**

591. Die Gleichung für die Cycloide Fig. (197) ist $y = \sqrt{(2ax - x^2)} + z$, wenn wir den Bogen $AQ = z$ setzen; also $dy = (adx - xdx).(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} + dz$; aber $z =$ Arc sinv x für den Halbmesser a, und vermög (584. VII) $dz = d(\text{Arc sinv}\, x) = adx(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$; folglich $dy = (adx - xdx).(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} + adx(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$= (2a - x)\, dx(2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(2a - x)dx\,(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}{(2ax - x^2)},$$

nämlich $dy = dx\,(2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$ **ist die Differenzialgleichung für die Cycloide.** Daraus läßt sich nun die Subtangente

$$PT = \frac{y}{(2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{xy}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$$ bestimmen. Aus dieser Gleichung folgt $\sqrt{(2ax - x^2)} : x = y : PT$, nämlich $PQ : PA = PM : PT$; **bey der Cycloide läuft demnach die Tangente MT parallel mit der dazugehörigen Sehne des Erzeugungskreises auf der Achse.**

592. Aus der allgemeinen Formel für die Subtangente einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten lassen sich nun auch sehr leicht allgemeine Formeln für die Tangente, Normale, und Subnormale ableiten, es ist nämlich

Fig. statt Rm in der Gleichung $PS = \frac{y.\,Pp}{Rm}$ substituiren, die
194
gesuchte allgemeine Formel für die Subtangente $PT = \frac{y\,dx}{dy}$,

oder $PT = \frac{y}{dy.\,dx^{-1}}$, oder auch $PT = y\,dx.\,dy^{-1}$.

590. Nach dieser Formel läßt sich nun die Subtangente bey einer jeden krummen Linie bestimmen, deren Gleichung für parallele Ordinaten bekannt ist, wenn man aus der gegebenen Gleichung den Werth von dy oder von dx suchet, und denselben in der gefundenen allgemeinen Formel substituiret. Z. B. in der Parabel ist $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$,

und $dy.\,dx^{-1} = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$, folglich $PT = \frac{y}{\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}$

$= \frac{2x^{\frac{1}{2}}y}{p^{\frac{1}{2}}}$, oder wenn wir für y seinen Werth setzen, $PT = 2x$, welches mit (527. I.) vollkommen übereinstimmet. Aus eben dieser Gleichung $y = \sqrt{px}$, folgt auch $x = \frac{y^2}{p}$, $dx = \frac{2y\,dy}{p}$,

und $dx.\,dy^{-1} = \frac{2y}{p}$; folglich $PT = \frac{y.\,2y}{p} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$ wie ehevor.

Aus der Gleichung $y = \frac{a^2}{x}$ für die Hyperbel an der Asymptote Fig. 185 folgt $dy = -a^2x^{-2}\,dx$, folglich

$PT = \frac{y}{-a^2x^{-2}} = -\frac{yx^2}{a^2} = -\frac{a^2}{x}.\frac{x^2}{a^2} = -x$;

das Zeichen (—) zeigt an, daß der Durchschnittspunkt T von der Ordinate an gerechnet, nicht in die Gegend des Anfangspunktes, sondern auf die entgegengesetzte Seite falle, welches wieder mit (564) vollkommen übereinstimmet.

Aus

593. Auch für AT und AG lassen sich allgemeine For- Fig. 194
meln angeben. Es ist nämlich $AT = \frac{ydx}{dy} - x$, und $AG = y - \frac{xdy}{dx}$; denn es ist $AT = PT - AP$ $= \frac{ydx}{dy} - x$, und $PT : PM = AT : AG$, nämlich $\frac{ydx}{dy} : y = \frac{ydx}{dy} - x : AG$, und folglich $AG = y - \frac{xdy}{dx}$.

Nach diesen zwey Formeln läßt sich die Lage der Asymptote einer krummen Linie von parallelen Ordinaten bestimmen, wenn die Asymptote mit der Abscissenlinie entweder einen gewissen Winkel einschließt, oder mit derselben parallel läuft. Man muß um die Lage der Asymptoten zu bestimmen, aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie statt y und dy in den beyden Formeln ihre Werthe substituiren, und sodann in den zwey gefundenen Gleichungen von AT und AG die Absciſſe $x = \infty$, oder $x = -\infty$ setzen, wenn die krumme Linie negative Abscissen zuläßt, weil man sich vorstellen kann, daß die Asymptote in einer unendlichen Entfernung mit dem Schenkel der krummen Linie zusammenfalle, und denselben gleichsam an diesem Orte berühre. Erhält man nun in dieser Voraussetzung für AT und AG bestimmte Werthe durch gegebene Größen ausgedrückt, so ist dadurch die Lage der Asymptote bekannt, wenn man bey den gefundenen Ausdrücken von AT und AG die Zeichen + und — gehörig in Erwägung zieht. Z. B. bey der Hyperbel an der ersten Axe für die Abscissen vom Scheitel gerechnet ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 + 2ax)}$, und $dy = \frac{(bx + ab)dx}{a\sqrt{(x^2 + 2ax)}}$, folglich $AT = \frac{ax}{x + a}$ und $AG = \frac{bx}{\sqrt{(x^2 + 2ax)}}$; setzen wir nun $x = \infty$, so ist

Fig. 194 I. Die Subnormale $PN = \frac{ydy}{dx}$, oder $PN = \frac{y}{dx.dy^{-1}}$, oder auch $PN = ydy.dx^{-1}$. Denn $TPM \backsim PMN$, folglich $TP \left(\frac{ydx}{dy} : PM (y = PM (y : PN\right.$, nämlich $PN = \frac{ydy}{dx}$

II. Die Normale $MN = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}\right)}$, oder $MN = y(1 + dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$ folgt aus dem rechtwinklichten Dreyecke PMN.

III. Die Tangente $TM = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}\right)}$, oder $TM = \left(y^2 + \frac{y^2}{dy^2.dx^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ folgt aus dem rechtwinklichten Dreyecke TPM.

Z. B. Aus der allgemeinen Gleichung für die ganze Familie der Parabeln $y^{m+n} = p^m x^n$, folgt $y = p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$, und $dy = \frac{n}{m+n} \cdot p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n} - 1} dx$; substituiren wir nun diesen Werth in der Formel I, so ist die Subnormale PN $= y \cdot \frac{n}{m+n} \cdot p^{\frac{m}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n} - 1} = \frac{n}{m+n} \cdot p^{\frac{2m}{m+n}} x^{\frac{2n}{m+n} - 1}$; setzen wir $m = 1$, und auch $n = 1$, so ist $PN = \frac{1}{2}p$ die Subnormale der gemeinen Parabel, welche demnach unveränderlich ist.

Die Differenzialgleichung des Kreises für die Ordinaten vom Mittelpunkte gerechnet ist $dy = - xdx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, und $dy^2 = x^2dx^2 (a^2 - x^2)^{-1}$; substituiren wir nun diesen Werth in der Formel II, so ist in dem Kreise die Normale $= (y^2 + y^2x^2(a^2 - x^2)^{-1})^{\frac{1}{2}} = (a^2 - x^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = a =$ dem Halbmesser und folglich unveränderlich.

593.

ist AT $= x$, und AG $= \frac{1}{2}\sqrt{px}$; also für $x = \infty$ ist auch Fig.
AT und AG unendlich groß; für $x = -\infty$ ist AG gar unmöglich; die Parabel hat demnach keine Asymptoten.

Wenn die krumme Linie keine unendlichen Abscissen zuläßt, so drücke man AT und AG durch y und andere bekannte Größen aus, setze sodann $y = +\infty$ oder $y = -\infty$, und bestimme daraus die Lage der Asymptoten; dieses geschieht, wenn bey einer krummen Linie die Asymptote in einer endlichen Entfernung von dem Anfangspunkte der Abscissen gerechnet mit den Ordinaten parallel läuft, oder auch wenn die Ordinate des Anfangspunktes selbst schon unendlich groß und folglich eine Asymptote ist. Man findet bey dergleichen krummen Linien, die keine unendliche Abscissen zulassen, auch sehr leicht den Abstand der Asymptote von dem Anfangspunkte, wenn man aus der gegebenen Gleichung untersuchet, was für eine Abscisse zu einer unendlichen Ordinate gehöre. Wenn die Abscissenlinie oder eine Parallele derselben eine Asymptote seyn sollte, so giebt solches auch die Gleichung schon sehr leicht zu erkennen, wenn sie für eine unendliche positive oder negative Abscisse eine unendlich kleine oder auch eine endliche Ordinate zuläßt. Die krumme Linie Fig. 173, und die verschiedenen Gleichungen für dieselbe (519) können diese Fälle erläutern. 195

594. Bey den krummen Linien, deren Ordinaten alle aus einem Punkte gehen, wird die Subtangente BT Fig. 195 auf der Geraden BT gezählet, welche auf BM senkrecht steht. Die allgemeine Formel der Subtangente für die Ordinaten aus einem Punkte läßt sich auf folgende Art ableiten.

Es sey des Abscissenkreises Halbmesser $=$ AB $=$ BP $= c$, AP $= x$, BM $= y$, Pp $= dx$ unendlich klein, MR ein Kreisbogen aus B beschrieben, oder welches einerley ist, MR eine auf BM und auch auf Bm senkrechte Gerade, so ist Rm $= dy$, und das Dreyeck MRm $\backsim$ TBM; folglich Rm (dy : MR $=$ BM (y : BT $= \frac{y \cdot \text{MR}}{dy}$; es ist

Fig. AT $= a$ und AG $= b$; wenn man demnach an dem Scheitel der Hyperbel eine Senkrechte $= b$ auf die erste Achse errichtet, durch den Mittelpunkt der ersten Achse und durch den Mittelpunkt dieser Senkrechten b eine gerade Linie führet, so wird diese Gerade eine Asymptote der Hyperbel seyn, welches mit (560) vollkommen übereinstimmet.

Wenn bey der Voraussetzung $x = \infty$, oder $x = -\infty$ auch AT $= \infty$ wird, hingegen AG einen endlichen bekannten Werth erhält, oder auch sich in o verwandelt, so ist dieß ein Zeichen, daß im ersten Falle die Asymptote in der gefundenen Entfernung AG mit der Abscissenlinie parallel laufe, im letzten Falle aber die Abscissenlinie selbst eine Asymptote sey. Z. B. bey der Logistik ist $y = ch^{\frac{x}{a}}$, und $dy = a^{-1}ch^{\frac{x}{a}}\,dx$, folglich AT $= a - x$, und AG $= ch^{\frac{x}{a}} - a^{-1}ch^{\frac{x}{a}}x$; setzen wir nun $x = +\infty$, so ist AT $= -\infty$, und auch AG unendlich groß und negativ, woraus sich nichts bestimmen läßt; setzen wir hingegen $x = -\infty$, so ist AT $= \infty$, und AG $= ch^{-\frac{\infty}{a}} + a^{-1}ch^{-\frac{\infty}{a}}.\,\infty = \frac{c(a+\infty)}{ah^{\frac{\infty}{a}}} = \frac{\infty c}{ah^{\frac{\infty}{a}}}$

nämlich es ist AG unendlich klein oder $= 0$, weil $h^{\frac{\infty}{a}}$ ein unendlich Großes von einem viel höheren Range seyn muß als ∞c, welches man einigermassen einsehen kann, wenn man $h^{\frac{\infty}{a}}$ in eine Reihe auflöset; es ist demnach bey der Logistik ($y = ch^{\frac{x}{a}}$) die Abscissenlinie selbst die Asymptote.

Wenn die Gleichung der krummen Linie zwar unendliche Abscissen zuläßt, aber in dieser Voraussetzung für AT und für AG unendliche oder gar auch unmögliche Werthe giebt, so ist dieß ein Zeichen, daß sie keine Asymptoten von der erwähnten Beschaffenheit habe. Z. B. in der Parabel ist

Anwendung der Differenzialrechnung auf die Bestimmung des Krümmungshalbmessers der krummen Linien. Fig.

595. Es sey BC Fig. 196. eine krumme Linie, die 196
Gerade AB berühre dieselbe in B; über CB sey ein biegsamer Faden gelegt, und von B bis A nach der Richtung der Tangente ausgezogen (es kann auch AB = o seyn); nun stelle man sich vor, daß der Faden ABC von der krummen Linie BC dergestalt abgewickelt werde, daß der abgewickelte Theil immer gerade ausgezogen sey, so wird bey dieser Bewegung der Punkt A eine krumme Linie AMm beschreiben, welche folgende Eigenschaften hat.

I. Nachdem die krumme Linie BC bis C *abgewickelt ist*, so kann ein **unendlich kleiner** Bogen Mm der krummen Linie AM an dem Orte M angesehen werden, als wäre er mit dem Halbmesser MC = AB + BC aus dem Mittelpunkte C beschrieben, das ist der unendlich kleine Bogen Mm kann als ein Kreisbogen von dem Halbmesser MC angesehen werden,

II. Der abgewickelte Theil des Fadens steht an jedem Orte *auf der krummen Linie AM senkrecht*, nämlich CM steht in dem Punkte M senkrecht auf der Tangente dieses Punktes, weil beym Kreise der Halbmesser im Berührungspunkte auf der Tangente senkrecht steht.

III. MC liegt demnach in der Richtung der Normale des Punktes M.

IV. Wenn man auch durch den Punkt m, der unendlich nahe bey M liegt, auch die Normale mC zieht, so ist MC = mC, und C der **Vereinigungspunkt** der zwey Normalen MC und mC, weil in einem Kreisbogen alle Normalen dem Halbmesser gleich sind, und sich in dem Mittelpunkte vereinigen.

V. Die krumme Linie AM *hat* an dem Orte M die nämliche Krümmung als ein Kreis von dem Halbmesser MC; aus dieser Ursache wird MC der **Krümmungshalbmesser** (radius

cur-

Fig. 195 aber auch BP (c : BM (y = Pp (dx : MR = $\frac{y\mathrm{d}x}{c}$; und folglich die Formel für die Subtangente BT $= \frac{y^2\mathrm{d}x}{c\mathrm{d}y}$, oder BT $= \frac{y^2}{c\mathrm{d}y.\mathrm{d}x^{-1}}$. Z. B. Bey der *logistischen Spirallinie* ist $y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{2c\pi}}$, $\mathrm{d}y = \frac{c\mathrm{d}x}{2c\pi}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{2c\pi}}.L\frac{b}{c}$, und $c\mathrm{d}y.\mathrm{d}x^{-1} = \frac{c}{2\pi}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{2c\pi}}.L\frac{b}{c} = \frac{y}{2\pi}.L\frac{b}{c}$; folglich ist die Subtangente BT $= y^2 : \frac{y}{2\pi}.L\frac{b}{c} = \frac{2\pi y}{Lb - Lc}$. Nun läßt sich auch der Winkel BMT bestimmen, welchen die logistische Spirallinie an jedem Orte mit der dazugehörigen Ordinate einschließt; denn MB : BT = sintot : tang BMT, nämlich $y : \frac{2\pi y}{Lb - Lc} = 1$: tang BMT, also tang BMT $= \frac{2\pi}{\mathrm{lognat}\,b - \mathrm{lognat}\,c}$; bey der logistischen Spirallinie ist demnach der erwähnte Winkel unveränderlich. Einige Meßkünstler nehmen diese Eigenschaft der *logistischen Spirallinie* in die Erklärung.

Ferner ist für die Ordinaten aus einem Punkte die Subnormale BN $= c\mathrm{d}y.\mathrm{d}x^{-1}$; denn BT ($\frac{y^2\mathrm{d}x}{c\mathrm{d}y}$: BM (y = BM (y : BN $= c\mathrm{d}y.\mathrm{d}x^{-1}$.

Die Normale MN $= (y^2 + c^2\mathrm{d}y^2.\mathrm{d}x^{-2})^{\frac{1}{2}}$, und die Tangente TM $= \frac{y}{c}\left(c^2 + \frac{y^2}{\mathrm{d}y^2.\mathrm{d}x^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ wegen den rechtwinklichten Dreyecken TBM und MBN.

Gleichung $\frac{dudz + uddz}{dx} = 0$ folgt nun $u = -\frac{dudz}{ddz}$, oder Fig. 196
$u = -\frac{dydz}{ddz}$ weil $du = d(MG) = mg - MG = Rm = dy$ ist; diesen Werth substituire man statt u in der Gleichung A, so ist $k = \frac{dydz^2}{-dxddz}$.. B; es ist aber $dz^2 = dx^2 + dy^2$, und $ddz = \frac{dyddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$, weil dx für unveränderlich angenommen ist; folglich ist auch, wenn man für dz^2 und ddz diese Werthe in der Gleichung B substituiret, endlich die gesuchte allgemeine Formel für den Krümmungshalbmesser

$$k = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}, \text{ oder } k = \frac{(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy . dx^{-2}}.$$

In diese gefundene Formel können wir auch die Normale $MN = n$ hineinbringen: es ist nämlich (592. II.) die Normale $n = y(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$; daraus folgt $(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{y}$, und $(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{3}{2}} = \frac{n^3}{y^3}$; substituiren wir diesen Werth in der gefundenen allgemeinen Formel, so ist endlich $k = \frac{n^3}{-y^3 ddy . dx^{-2}}$, allwo dx für unveränderlich angenommen ist.

597. Z. B. $y = \sqrt{(px \mp \frac{px^2}{2a})}$ ist die Gleichung für senkrechte Ordinaten der Ellipse und Hyperbel von dem Scheitel der ersten Achse gezählet, allwo das obere Zeichen (—) zur Ellipse und das untere (+) zur Hyperbel gehöret; diese nämliche Gleichung stellet uns die Parabel vor, wenn wir $2a = \infty$ setzen; auch der Kreis wird durch diese Gleichung ausgedrücket, wenn man $p = 2a$ setzet, und das obere Zeichen

Fig. 196 curvaturæ, oder radius osculi) der krummen Linie AM an dem Orte M genennt.

Die krumme Linie BC pflegt man die **Evolute** (die abgewickelte) und die krumme AM die **Evolvente** (die durch Abwicklung entstandene Linie) zu nennen.

596. Aufgabe. **Eine allgemeine Formel für den Krümmungshalbmesser einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten zu finden.**

Auflösung. Es sey AD die Abscissenlinie der krummen Linie AM, deren Krümmungshalbmesser zu suchen ist, AP $= x$, PM $= y$, AM $= z$, pm unendlich nahe bey PM, MR parallel zu AD, MC und mC die Richtungen der Normalen von M und m, C ihr **Vereinigungspunkt**, und folglich MC $=$ mC der Krümmungshalbmesser des unendlich kleinen Bogens Mm; ferner sey CG parallel zu AD, MG $= u$, und der gesuchte Krümmungshalbmesser MC $= k$, so ist Pp $= dx =$ MR, Rm $= dy$, und Mm $= dz$; nun ist MRm ein rechtwinklichtes Dreyeck, weil man den unendlich kleinen Bogen Mm (er möge zum Kreise oder zu einer anderen krummen Linie gehören) von einer geraden Linie nicht unterscheiden kann, folglich $Mm^2 = MR^2 + Rm^2$, nämlich $dz^2 = dx^2 + dy^2$, und $dz = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$. Auch ist das Dreyeck MRm ∽ MGC, folglich MR(dx : Mm(dz = MG(u : MC(k, nämlich $k = \frac{u dz}{dx}$ .. A. Aus dieser Gleichung läßt sich u sehr leicht wegschaffen, denn es fließt daraus $dk = \frac{du dz + u ddz}{dx} = 0$ (es ist nämlich $dk = d(MC) = mC - MC = 0$, weil in dem unendlich kleinen Bogen Mm der Krümmungshalbmesser MC $=$ mC ist, und dx als das Differenzial der Abscisse für unveränderlich angesehen werden kann); und aus dieser Glei-

Ellipse auch an dem Scheitel der kleinen Achse der Krümmungs- Fig. 196
halbmesser dem halben Parameter dieser Achse gleich.

598. Die gefundene allgemeine Formel für den Krümmungshalbmesser $k = \frac{(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{- ddy . dx^{-2}}$ ist bloß durch die Differenzialen von x und y ausgedrückt, die man jederzeit finden kann, sobald die Gleichung für die krumme Linie gegeben ist. Wenn man für denjenigen Ort der krummen Linie, dessen Krümmungshalbmesser gesucht wird, die Normale n nach (592. II.) bestimmet, so läßt sich daraus eine allgemeine Formel für den Krümmungshalbmesser k angeben, die **keine zweyten Differenzialen enthält**; es ist nämlich, wenn man des Punktes M Normale $MN = n$ setzet, der Krümmungshalbmesser $k = \frac{n^2}{n - ydn . dy^{-1}}$.

Denn MP (y : MN (n = MG (u : MC (k, nämlich $k = \frac{un}{y}$ .. A; nun ist $dk = \frac{uydn + nydu - nudy}{y^2} = 0$, folglich $u = \frac{nydu}{ndy - ydn}$, oder $u = \frac{nydy}{ndy - ydn}$, weil $du = d(MG) = mg - MG = Rm = dy$ seyn muß; es ist also auch wenn wir diesen Werth in der Gleichung A statt u substituiren, $k = \frac{n^2 dy}{ndy - ydn} = \frac{n^2}{n - ydn . dy^{-1}}$.

Z. B. in der Parabel entspricht der Abscisse x die Normale $n = (\frac{1}{4}p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ durch y ausgedrückt, also $dn = \frac{ydy}{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ydy}{n}$, und $ydn . dy^{-1} = \frac{y^2}{n}$; folglich $k = \frac{n^3}{n^2 - y^2} = \frac{n^3}{(\frac{1}{4}p^2 + y^2) - y^2} = \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$ wie ehevor. Um k in x auszudrücken substituire man statt n seinen Werth durch

x

Fig. 190 chen beybehält. Nun folgt aus dieser Gleichung $dy = \left(\frac{1}{2}p \mp \frac{px}{2a}\right) d \left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $ddy = -\frac{1}{4}p^2 dx^2 \times \left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}}$, und $-y^3 ddy.dx^{-2} = -\left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right)^{\frac{3}{2}} \times -\frac{1}{4}p^2 dx^2 \left(px \mp \frac{px^2}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}}.dx^{-2} = \frac{1}{4}p^2$; folglich ist (wenn wir in der allgemeinen Formel $k = \frac{n^3}{-y^3 ddy.dx^{-2}}$ diesen Werth substituiren) der Krümmungshalbmesser $k = \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$, nämlich in allen vier Kegelschnittslinien, weil a in der gefundenen Gleichung sich nicht mehr befindet, ist der Krümmungshalbmesser an jedem Orte gleich dem Würfel der Normale dieses Ortes getheilet durch das Quadrat des halben Parameters. Bey dem Kreise ist allenthalben die Normale $n = a$, und $p = 2a$, folglich $k = \frac{a^3}{a^2} = a =$ dem Halbmesser, welches für sich klar ist. Bey der Parabel, Ellipse, und Hyperbel ist an dem Scheitel der Achse die Normale $n = \frac{1}{2}p$, welches sich aus der allgemeinen Formel für die Normale $n = (y^2 + y^2 dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$ gar leicht bestimmen läßt, wenn man darinnen für y^2 und dy^2 ihre Werthe substituiret, und sodann $x = 0$ setzet; es ist demnach an den Scheiteln dieser drey Kegelschnittslinien der Krümmungshalbmesser $k = \frac{\frac{1}{8}p^3}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{1}{2}p$. Da die Gleichung für senkrechte Ordinate der Ellipse von dem Scheitel der kleinen Achse gezählet, auch durch $y = \sqrt{(px - \frac{px^2}{2a})}$ vorgestellet wird, wenn $2a$ die kleine Achse und p ihren Parameter bedeutet, so ist bey der

El-

$k = -\frac{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay}$; das Zeichen — zeiget an, daß der Krümmungshalbmesser sich nicht von der krummen Linie nach der Gegend der Abscisse, sondern nach der entgegengesetzten Seite erstrecke, und daß folglich in diesem Falle die krumme Linie ihre erhabene (convexe) und nicht ihre hohle (concave) Seite der Abscissenlinie zeige. Fig.

Aus der Gleichung für die gleichseitige Hyperbel an der Asymptote $y = a^2x^{-1}$ folgt $dy = -a^2x^{-2}dx$, $dy^2 . dx^{-2} = +a^4x^{-4}$, und $ddy = +2a^2x^{-3}dx^2$, $-ddy . dx^{-2} = -2a^2x^{-3}$; es ist demnach für die Abscisse x der Krümmungshalbmesser $k = \frac{(1+a^4x^{-4})^{\frac{3}{2}}}{-2a^2x^{-3}} = -\frac{(a^4+x^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2x^3}$; setzen wir nun $x = 1000a$, und $a = 1$ duodecimalzolle, so ist bey einer solchen Hyperbel in der Entfernung von $13\frac{8}{9}$ Klaftern auf der Asymptote von dem Anfangspunkte gezählet der Krümmungshalbmesser schon größer als der ganze Durchmesser unserer Erdkugel, es ist nämlich in diesem Falle der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{(1+1000^4)^{\frac{3}{2}}}{2.1000^3} = \frac{(1000^4)^{\frac{3}{2}}}{2.1000^3} = \tfrac{1}{2}.1000^3 = 500$$

Millionen Zollen mehr einem Bruche des Zolles, welchen man findet, wenn man bey $(1+1000^4)^{\frac{3}{2}}$ den 1 nicht hinwegläßt; dieser Bruch aber ist schon so klein, daß man ihn auf einem gewöhnlichen Maßstabe nicht mehr angeben kann, es beträgt nämlich dieser Bruch nur $\frac{75}{100000}$ eines Zolles. Da im gegenwärtigen Falle bey 500 Millionen Zollen sich ein Fehler einschleicht, der nur $\frac{75}{100000}$ eines Zolles beträgt, da man doch einen ganzen Zoll in Rücksicht 1000^4 hinweggelassen hat, wie groß würde wohl der Fehler seyn, wenn man

Fig. 596. x ausgedrückt, nämlich $n^3 = (\frac{1}{4}p^2 + px)^{\frac{3}{2}}$; es ist sodann

$k = \frac{(\frac{1}{4}p^2 + px)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2}$; man setze $x = 0$, so ist $k = \frac{1}{2}p$; man setze $x = \frac{3}{4}p$, so ist $k = 4p$. Um zu erforschen an welchem Orte der Krümmungshalbmesser $= \frac{27}{2}p$ sey, so setze man

$\frac{(\frac{1}{4}p^2 + px)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2} = \frac{27}{2}p$, und man wird aus dieser Gleichung die zugehörige Abscisse $x = 2p$ finden.

Es ist $n = (y^2 + y^2 dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$, und $dn = (ydy + ydy^3 dx^{-2} + y^2 dy\, ddy\, dx^{-2} - y^2 dy^2 dx^{-3} ddx)(y^2 + y^2 dy^2 . dx^{-2})^{-\frac{1}{2}}$, wenn kein Differenzial für unveränderlich angesehen wird; folglich auch, wenn man (in der Gleichung $k = \frac{n^2}{n - ydn . dy^{-1}}$) gehörig substituiret, $k = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$, oder wenn man dx für unveränderlich annimmt, $k = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{- dxddy}$

$= \frac{(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{- ddy . dx^{-2}}$ wie oben (596.)

Wir wollen nach dieser Formel einige Krümmungshalbmesser bestimmen. Z. B. aus der Gleichung für die Logistik $y = ch^{\frac{x}{a}}$, folgt $dy = a^{-1} ch^{\frac{x}{a}} dx$, und $dy^2 . dx^{-2} = a^{-2} c^2 h^{\frac{2x}{a}}$, $ddy = a^{-2} ch^{\frac{x}{a}} dx^2$, und $- ddy . dx^{-2} = - a^{-2} ch^{\frac{x}{a}}$, folglich ist für die Abscisse x der Krümmungshalbmesser

$k = - \frac{(1 + a^{-2} c^2 h^{\frac{2x}{a}})^{\frac{3}{2}}}{a^{-2} ch^{\frac{x}{a}}} = - \frac{(a^2 + c^2 h^{\frac{2x}{a}})^{\frac{3}{2}}}{ach^{\frac{x}{a}}}$, oder auch

k

durch M′, Q′ die Gerade P′M′, so ist der Winkel Q′A′C = CBQ, Fig. 197
und auch arc A′Q′ = arc BQ (271), also auch die Sehne A′Q′ = BQ; aber vermög (286) BQ = MC = CM′, also A′Q′ = CM′, und A′C gleich und parallel zu M′Q′ (286.); folglich P′M′ senkrecht auf A′B′; nun ist A′C = arc BQ = arc A′Q′, weil MQ oder BC = arc AQ, und A′B = arc AQB ist (570); folglich auch A′C = arc A′Q′, oder Q′M′ = arc A′Q′. **Die Evolute A′M′D′ der Cycloide AMA′ ist demnach selbst eine Cycloide von dem nämlichen Erzeugungskreise.** Wenn man also zwischen zwey cycloidischen Bögen ein Pendel D′T (einen Senkel) so schwingen läßt, wie es beynahe Fig. 197 ausweiset, so wird derjenige Punkt A des Pendels, welcher von dem Aufhängspunkte D′ um den doppelten Durchmesser des Erzeugungskreises A′B′ oder ED entfernet ist, während der Schwingung eine Cycloide beschreiben. Da AD′ = dem Bogen A′Q′B′ = 2 A′B′ ist, so ist die Länge der halben Cycloide dem doppelten Durchmesser des Erzeugungskreises gleich; und jeder Bogen A′M′ ist = MM′ = 2A′Q′; **die Cycloide läßt sich demnach genau rectificiren.**

I. **Anmerkung.** Aus der gegebenen Gleichung der 196
Evolvente AM Fig. 196. läßt sich die Gleichung für die Evolute BC auf folgende Art bestimmen. Es sey AD die Abscissenlinie der Evolvente, $AP = x$, $PM = y$, und das bekannte Stück AB der Abscissenlinie AD, nämlich der Krümmungshalbmesser des Punktes A sey $AB = b$; BQ durch B auf AD senkrecht gezogen, sey die Abscissenlinie der Evolute, B der Anfangspunkt der Abscissen, die Abscisse $BQ = t$, und die senkrechte Ordinate $CQ = u$; nun findet in den ähnlichen Dreyecken MRm und MGC folgende Proportion statt, $Mm : MR = MC : MG$, nämlich

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} : dx = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy} : MG = \frac{(dx^2 + dy^2)}{-ddy},$$

und folglich $BQ = MG - PM = \frac{(dx^2 + dy^2)}{-ddy} - y = t$

Fig. man nicht einen ganzen Zoll sondern nur einen unendlich kleinen Theil eines Zolles in Rücksicht 1000^4 für o angesehen hätte? Könnte man wohl in einem solchen Falle an der schärfesten Richtigkeit des Resultates noch zweifeln? Es ist kaum möglich zu glauben, daß es wirklich so abstrakte Meßkünstler geben sollte, die im Ernste zu behaupten scheinen, die geometrische Schärfe (rigor geometricus) wird vernachlässiget, für die Anwendung sind Fehler zu befürchten, wenn man einen unendlich kleinen Theil eines Bogens (dessen Krümmungshalbmesser den ganzen Durchmesser unserer Erdkugel übertrifft) für eine gerade Linie, oder im erforderlichen Falle für einen Kreisbogen ansieht, oder welches auf eines hinausläuft, wenn man eine unendlich kleine Größe hinwegläßt, die zu einer endlichen zu addiren oder davon abzuziehen ist.

Aus der Differenzialgleichung der Cycloide $dy = dx(2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$ vermög (591) folgt $dy^2 . dx^{-2} = 2ax^{-1} - 1$, $ddy = - ax^{-2} dx^2 (2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, und $- ddy . dx^{-2} = + ax^{-2}(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$; folglich $k = \frac{(2ax^{-1})^{\frac{3}{2}}}{ax^{-2}(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}}$ $= 2\sqrt{2a\ 2a - x)}$, nämlich bey der Cycloide Fig. 197 ist in dem Punkte M der Krümmungshalbmesser $MM' = 2\sqrt{AB.BP}$
197 $= 2\sqrt{BQ^2} = 2BQ$, und läuft zugleich parallel mit QB, weil $AB : BQ = BQ : BP$ statt findet, und vermög (591) MT mit AQ parallel läuft. Setzen wir nun $x = o$, so ist des Punktes A Krümmungshalbmesser $k = 4a = 2AB = AD'$; also D′ ein Punkt in der Evolute A′M′D′ der Cycloide AMA′; setzen wir $x = 2a$, so ist $k = o$; also A′ ein gemeinschaftlicher Punkt der Cycloide AMA′ und ihrer Evolute A′M′D′. Es sey $A'B' = BD' = AB$ senkrecht auf A′D in dem Punkte A′, und darauf der Halbkreis $A'QB' = AQB$ beschrieben; man ziehe die Sehne A′Q′ parallel zu MM′ oder BQ, und

matik keinen beträchtlichen Einfluß hat, so können wir uns auch nicht länger dabey aufhalten. Fig.

II. Anmerkung. Die Entwicklung der allgemeinen Formeln für die Subnormale, Normale, Tangente, und für den Krümmungshalbmesser derjenigen krummen Linien, deren Ordinaten zwar mit einander parallel sind, aber dabey keinen rechten, sondern einen gegebenen schiefen Winkel mit der Abscissenlinie einschließen, überlasse ich dem eigenen Fleiße der Anfänger; es kömmt bey dieser Entwicklung nur darauf an, daß man aus den schiefgeneigten Ordinaten und ihren Differenzialen, auch diejenigen senkrechten Linien, welche wir fast allenthalben mit PM, Rm u. s. w. bezeichnet haben, durch Hilfe des gegebenen Neigungswinkel der Ordinaten trigonometrisch ausdrückt, und diese Werthe in den bereits gefundenen allgemeinen Formeln für senkrechte Ordinaten gehörig substituiret. Man wird nach vorgenommener Untersuchung z. B. die Subnormale $= \frac{y.\cos m + y dy.dx^{-1}}{1 + \cos m.dy.dx^{-1}}$ finden, wenn man den unveränderlichen Neigungswinkel der parallelen Ordinaten mit m bezeichnet, und den ganzen Sinus in den Tafeln $= 1$ setzet.

599. Auch bey den krummen Linien, deren Ordinaten aus einem Punkte gehen, läßt sich eine allgemeine Formel für den Krümmungshalbmesser MC angeben Fig. 195; es 195 ist nämlich, wenn man den Halbmesser des Abscissenkreises AB $= c$, AP $= x$, BM $= y$, MC $= k$ setzet, der Krümmungshalbmesser $k = \frac{(y^2 + c^2 dy^2.dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{y^2 + 2c^2 dy^2.dx^{-2} - c^2 y ddy.dx^{-2}}$.

Denn es sey Bm unendlich nahe bey BM; aus B sey mit dem Halbmesser BM der unendlich kleine Kreisbogen MR gezogen, den man für eine gerade Linie ansehen kann, die sowohl auf BM als auf Bm senkrecht steht; C sey der Vereinigungspunkt der zwey unendlich nahe bey einander liegenden Normalen, und folglich MC der Krümmungshalbmesser an

 dem

Fig. 196 ferner ist MR : Rm = MG : CG, nämlich $dx : dy = \frac{(dx^2+dy^2)}{-ddy} : CG = \frac{dy(dx^2+dy^2)}{-dxddy}$; und folglich

$$CQ = AP + CG - AB = x + \frac{dy\,(dx^2+dy^2)}{-dxddy} - b = u;$$

oder $t = \left(\frac{1 + dy^2 . dx^{-2}}{-ddy . dx^{-2}}\right) - y$,

und $u = x + \left(\frac{dy . dx^{-1} + dy^3 . dx^{-3}}{-ddy . dx^{-2}}\right) - b.$

Wenn man nun in diesen zwey Formeln für b, für y, für dy, dy^2, dy^3, und für ddy aus der gegebenen Gleichung der Evolvente die gehörige Werthe substituiret, und sodann aus diesen zwey Gleichungen x hinwegschaft, so wird man endlich die gesuchte Gleichung für die Evolute durch t, durch u, und durch andere unveränderliche Größen ausgedrückt erhalten.

Es sey z. B. AM eine gemeine Parabel auf der Achse AD, so ist $y = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$, $dy^2 = \frac{1}{4}px^{-1}dx^2$, $dy^3 = \frac{1}{8}p^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}dx^3$, $ddy = -\frac{1}{4}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}dx^2$, und vermög dem vorhergehenden $AB = b = \frac{1}{2}p$; folglich $t = \frac{1+\frac{1}{4}px^{-1}}{\frac{1}{4}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}} - p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$

$$= 4p^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}, \text{ und } u = x + \frac{\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}p^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}p = 3x;$$

schaft man nun aus diesen zwey Gleichungen ($t = 4p^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, und $u = 3x$) die Größe x hinweg, so ist endlich $u^3 = \frac{27}{16}pt^2$ die gesuchte Gleichung für die Evolute der gemeinen Parabel. Diese Gleichung zeigt uns an, daß die Evolute der gemeinen Parabel eine cubische Parabel sey, deren Parameter $= \frac{27}{16}p$ ist. Da diese Lehre von der Evolution auf die ausübende Mathe-

matik

und daraus fließt wieder $du = \frac{udydz - uyddz}{ydz}$. Fig.

Es ist also auch $\frac{udydz - uyddz}{ydz} = \frac{c^2udy^2 - c^2uyddy - y^3dx^2 + uy^2dx^2}{c^2ydy}$;

und folglich $u = \frac{y^2dx^2dz}{ydx^2dz + c^2dyddz - c^2dzddy}$.

Nun substituire man diesen Werth in der Gleichung B, so ist

$k = \frac{cydxdz^2}{ydx^2dz + c^2dyddz - c^2dzddy}$ . . . . , C

Es ist aber vermög dem vorhergehenden $dz = \frac{1}{c}\cdot(y^2dx^2 + c^2dy^2)^{\frac{1}{2}}$,

und $ddz = \frac{ydydx^2 + c^2dyddy}{c.(y^2dx^2 + c^2dy^2)^{\frac{1}{2}}}$; folglich ist auch, wenn man diese Werthe in der Gleichung C gehörig substituiret, die gesuchte allgemeine Formel für den Krümmungshalbmesser

$k = \frac{(y^2dx^2 + c^2dy^2)^{\frac{3}{2}}}{y^2dx^3 + 2c^2dxdy^2 - c^2ydxddy}$, oder endlich

$k = \frac{(y^2 + c^2dy^2.dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{y^2 + 2c^2dy^2.dx^{-2} - c^2yddy.dx^{-2}}$.

3. B. Aus der Gleichung für die archimedeische Spirallinie $y = \frac{x}{2\pi}$ folgt $dy = \frac{dx}{2\pi}$, und $ddy = 0$; folglich ist der Krümmungshalbmesser $k = \left(y^2 + \frac{c^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \left(y^2 + \frac{2c^2}{4\pi^2}\right)$

$= \frac{(4\pi^2y^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi(4\pi^2y^2 + 2c^2)}$; setzet man $y = 0$, so ist $k = \frac{c}{4\pi}$

setzet man aber $y = c$, so ist $k = \frac{c(4\pi^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{8\pi^3 + 4\pi}$. Es verhält sich demnach bey der archimedeischen Spirallinie der Krümmungshalbmesser beym Anfange der Spirale zum Krümmungshalbmesser am Ende des ersten Schraubenganges

Fig. dem Orte M; aus C sey eine Senkrechte CG auf BM ge-
195 führet, so wird CG auch auf Bm senkrecht stehen, weil der Winkel GBg unendlich klein ist: über dieses sey der Bogen $AM = z$, und die Gerade $MG = u$. Vermög dieser Benennung ist nun $Pp = dx$ und $MR = c^{-1}ydx$, weil $BP(c : BM(y = Pp(dx : MR = c^{-1}ydx$ statt findet; auch ist $Mm = dz = \sqrt{(MR^2 + Rm^2)} = \frac{1}{c}\cdot(y^2dx^2 + c^2dy^2)^{\frac{1}{2}}$, und $Gg = d(CG) = c^{-1}dx(y-u)$ weil $BP(c : BG(y-u = Pp(dx : Gg = c^{-1}dx(y-u)$ sich verhält. Ferner ist das Dreyeck $MRm \backsim CGM$, folglich $MR(c^{-1}ydx : Rm(dy = MG(u : CG$, nämlich $CG = cuy^{-1}dydx^{-1}$ .. A; und $MR(c^{-1}ydx : Mm(dz = MG(u : MC(k$, nämlich $k = cuy^{-1}dzdx^{-1}$ ... B. In dieser letzten Gleichung läßt sich u auf folgende Art wegschaffen.

Aus der Gleichung A fließt $d(CG) = -(cy^{-1}dudydx^{-1} - cuy^{-2}dy^2dx^{-1} + cuy^{-1}ddydx^{-1}) = Gg$; das Differenzial von CG muß negativ genommen werden, weil CG eine abnehmende Größe ist (588); es ist also $Gg = cuy^{-2}dy^2dx^{-1} - cy^{-1}dudydx^{-1} - cuy^{-1}ddydx^{-1}$;
aber es ist auch $Gg = c^{-1}dx(y-u)$ vermög dem vorhergehenden: folglich auch $c^{-1}dx(y-u) = cuy^{-2}dy^2dx^{-1} - cy^{-1}dudydx^{-1} - cuy^{-1}ddydx^{-1}$; und daraus fließt

$$du = \frac{c^2udy^2 - c^2uyddy - y^3dx^2 + uy^2dx^2}{c^2ydy}$$

(In Fig. 195 liegt G zwischen B und M; fällt aber G auf die Verlängerung von MB über B herüber, so ist in der Gleichung A das Differenzial von CG positiv, nämlich $Gg = +(cy^{-1}dudydx^{-1} - cuy^{-2}dy^2dx^{-1} + cuy^{-1}ddydx^{-1})$, hingegen ist in einem solchen Falle auch $Gg = c^{-1}dx(u-y)$, woraus ebenfalls $du = \frac{c^2udy^2 - c^2uyddy - y^3dx^2 + uy^2dx^2}{c^2ydy}$ fließt.)

Aus der Gleichung B folgt $dk = cy^{-1}dudzdx^{-1} - cuy^{-2}dydzdx^{-1} + cuy^{-1}ddzdx^{-1} = 0$, weil $k = MC$ ungeändert bleibt, wenn AP nur um das Differenzial Pp wächst;

 und

nämlich $y = c$, und dabey dx unveränderlich gesetzet ist; es Fig.
muß aber in einem solchen Falle, wenn man in unserer aus richtigen Gründen abgeleiteten Formel y statt c substituiret,

$$k = \frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + 2dxdy^2 - ydxddy}$$ seyn. Aus dieser Ursache hat L'Abbé Sauri pag. 188 die Aufgabe 109 gänzlich fehlsam aufgelöset. Der Fehler hat seinen Ursprung in der falschen Voraussetzung, vermög welcher in diesen Schriften bey einem jeden Punkte einer solchen krummen Linie die Ordinate dem Halbmesser des Abscissenkreises gleichgesetzet wird.

Anwendung der Differenzialrechnung auf die Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Funktionen (de Maximis & Minimis).

600. Wenn eine Funktion von x so beschaffen ist, daß sie bis auf einen gewissen endlichen Werth zunimmt und von da wieder abnimmt indem x beständig zunimmt oder beständig abnimmt, so heißt dieser ihr Werth ein Größtes; z. B. $10x - x^2 + 2$ ist eine solche Funktion, die ein Größtes hat, denn setzet man statt x nach der Ordnung die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, so erhält man die entsprechenden Werthe der Funktion 2, 11, 18, 23, 26, 27, 26, 23, 18, 11, 2, allwo man sieh, daß die Funktion nur bis auf den Werth 27 zunimmt, und von da wieder abnimmt, indem x beständig wächst; 27 ist also der größte Werth dieser Funktion, und der Werth der veränderlichen Größe x ist in diesen Falle $= 5$, der statt x gesetzt das größte Resultat zum Vorschein bringt. Nimmt aber eine Funktion von x bis auf einen gewissen endlichen Werth ab und von da wieder zu, indem x beständig wächst oder beständig abnimmt so heißt dieser ihr Werth ein Kleinstes; z. B. $x^2 - 8x + 18$ ist eine Funktion, die ein Kleinstes hat; denn setzet man nach der Ordnung statt x die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so erhält man die entsprechenden Werthe

Fig. $= \frac{c}{4\pi} : \frac{c(4\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}}{8\pi^3+4\pi} = 2\pi^2+1 : \sqrt{(4\pi^2+1)^3}$; es verhalten sich aber die Krümmungen bey einer jeden krummen Linie an verschiedenen Orten gegeneinander wie umgekehrt die dazugehörigen Krümmungshalbmesser; folglich verhält sich bey der archimedeischen Spirallinie die Krümmung im Anfangspunkte, zur Krümmung am Endpunkte des ersten Schraubenganges $= \sqrt{(4\pi^2+1)^3} : 2\pi^2+1$. Man setze statt y seinen Werth, so ist $k = \frac{(x^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}{2\pi(x^2+2c^2)}$ durch die Abscisse ausgedrücket.

195 **Anmerkung.** Wenn man in Fig. 195 $PM = y$ setzet, so ist $BM = y+c$, und folglich für diesen Fall der Krümmungshalbmesser $k = \frac{((y+c)^2+c^2dy^2.dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{(y+c)^2+2c^2dy^2.dx^{-2}-c^2(y+c)ddy.dx^{-2}}$, Nun setze man $c = \infty$, so wird AP in eine gerade Abscissenlinie übergehen, die senkrechten Ordinaten werden miteinander parallel laufen, und der Krümmungshalbmesser wird sich in $k = \frac{(c^2+c^2dy^2.dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{c^3+2c^2dy^2.dx^{-2}-c^3ddy.dx^{-2}} = \frac{(1+dy^2.dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy.dx^{-2}}$ verwandeln, welches mit (596) vollkommen übereinstimmet.

Ich muß noch allhier erinnern, daß die allgemeine Formel des Krümmungshalbmessers für die Ordinaten aus einem Punkte in mehreren Abhandlungen über die Differenzialrechnung fehlerhaft sey; z. B. L'Abbé Sauri cours complet de Mathem. Paris 1778 pag. 176; C. Scherffer Calcul. Diff. Viennæ 1771 pag. 98, und mehr andere lateinische und französische Schriftsteller bestimmen für die Ordinaten aus einem Punkte den Krümmungshalbmesser $k = \frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3+dxdy^2-ydxddy}$, weil die Ordinate gleich dem Halbmesser des Abscissenkreises

 nämlich

in der gegebenen Funktion statt x gesetzet giebt im ersten Falle ein Größtes und im zweyten ein Kleinstes. Fig.

Z. B. Aus der ehevor angeführten Funktion $10x - x^2 + 2$ folgt $d(10x - x^2 + 2) = 10dx - 2xdx$; um nun denjenigen Werth von x zu finden, der ein Größtes oder ein Kleinstes giebt, setze man $(10dx - 2xdx) = 0$, so ist auch $10dx = 2xdx$, $10 = 2x$, und $x = 5$; dieser Werth 5 statt x in die Funktion gesetzt giebt $50 - 25 + 2 = 27 = R$; in der nämlichen Funktion setze man $5 + e$ statt x, so ist $10(5+e) - (5+e)^2 + 2 = 27 - e^2 = R'$; nun ist $R' < R$, nämlich $27 - e^2 < 27$, es möge e eine positive oder eine negative noch so kleine endliche Größe bedeuten; folglich ist 27 das größte Resultat der gegebenen Funktion, und es muß $x = 5$ gesetzet werden, damit die gegebene Funktion ihren möglichst größten positiven Werth erhalte.

Eben so findet man, daß bey einer krummen Linie, welche durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}p + p^{\frac{1}{3}}(x-p)^{\frac{2}{3}}$ ausgedrückt ist, der Abscisse $x = p$ die kleinste Ordinate entspreche, und daß die kleinste Ordinate $y = \frac{1}{2}p$ sey; denn aus dieser Gleichung folgt $dy = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{3}}dx(x-p)^{-\frac{1}{3}}$, nämlich $d(\frac{1}{2}p + p^{\frac{1}{3}}(x-p)^{\frac{2}{3}})$ $= \dfrac{2p^{\frac{1}{3}}dx}{3(x-p)^{\frac{1}{3}}}$; um nun den Werth von x zu finden, der ein Größtes oder ein Kleinstes giebt, setze man den Nenner des Differenzials nämlich $3(p-x)^{\frac{1}{3}} = 0$, weil sich aus dem Zähler nichts finden läßt, so folgt daraus $(p-x)^{\frac{1}{3}} = 0$, und auch $p - x = 0$, und endlich $x = p$; diesen gefundenen Werth p setze man in der gegebenen Gleichung statt x, so ist $y = \frac{1}{2}p = R$; ferner setze man $p + e$ statt x in der nämlichen Gleichung, so ist $y = \frac{1}{2}p + p^{\frac{1}{3}}.(e)^{\frac{2}{3}} = R'$; es ist aber $R' > R$, es möge e eine positive oder eine negative Größe be-

Fig. der Funktion 18, 11, 6, 3, 2, 3, 6, 11, allwo man sieht, daß die Funktion bis auf den Werth 2 abnimmt und von da wieder zu wachsen anfängt, indem x beständig zunimmt.

601. Es ist allerdings daran gelegen sich eine leichte Methode bekannt zu machen, nach der man bey einer gegebenen Funktion von x denjenigen Werth der veränderlichen Größe x bestimmen kann, der statt x in die Funktion gesetzt das größte oder das kleinste Resultat zum Vorschein bringt, wenn die gegebene Funktion eines Größten oder Kleinsten fähig ist. Dieses geschieht auf folgende Art.

Man differenzire die gegebene Funktion, bringe alle Glieder dieses Differenzials, wenn sie Brüche sind, auf einen gemeinschaftlichen Nenner, setze sodann entweder den Zähler oder den Nenner dieses Differenzials $=0$, und bestimme aus dieser Gleichung den Werth von x, so wird dieser gefundene Werth in der gegebenen Funktion statt x gesetzt das größte oder das kleinste Resultat zum Vorschein bringen, wenn die gegebene Funktion eines Größten oder eines Kleinsten fähig ist. Wenn weder aus dem Zähler noch auch aus dem Nenner des Differenzials von der gegebenen Funktion, nachdem man jeden besonders $=0$ gesetzet hat, ein wirklicher oder möglicher Werth für x sich bestimmen läßt, nämlich wenn jede dieser zwey Gleichungen auf etwas ungereimtes führet, so ist dieses ein Zeichen, daß die gegebene Funktion keines Größten oder Kleinsten fähig sey. Ob der gefundene Werth von x in der gegebenen Funktion statt x gesetzt ein größtes oder ein kleinstes Resultat zum Vorschein bringe, läßt sich auf folgende Art sehr leicht entscheiden (wenn dieses nicht schon zum Voraus aus der Eigenschaft der gegebenen Funktion bekannt seyn sollte): es sey der gefundene Werth von $x=a$, man setze in der gegebenen Funktion diesen Werth a statt x, das aus dieser Substitution abgeleitete Resultat sey $=R$; ferner setze man in der nämlichen Funktion $a+e$ statt x, allwo e eine beliebige sehr kleine positive oder negative Größe bedeutet, dieses zweyte Resultat sey $=R'$; ist nun $R' < R$ man möge e für positiv oder für negativ ansehen, so ist R ein Größtes; ist aber im Gegentheile $R' > R$ man möge e für positiv oder für negativ ansehen, so ist R ein Kleinstes, nämlich der gefundene Werth a

in

gen BC′ die erhabene Seite der Abscissenlinie zeiget, und die Tangente T′M′ irgend eines Punktes M′ in diesem Bogen BC läuft wieder mit der Abscissenlinie parallel, so ist die Ordinate P′ M′ des Punktes M′ in diesem Bogen BC′ die kleinste. Denn in dem ersten Falle liegt jede andere Ordinate des Bogens BC unter der parallelen Tangente TM, und im zweyten Falle erstrecket sich jede andere Ordinate des Bogens BC′ über die parallele Tangente T′M′ hinaus. Fig. 198

II. Wenn die krumme Linie einen Schnabel bildet Fig. 199, dessen beyde Theile BM und AM der Abscissenlinie ihre erhabene Seite zeigen, und die Tangente TM des Schnabels fällt mit der Ordinate zusammen, so ist unter allen Ordinaten des Schnabels die Ordinate PM des Berührungspunktes die größte. Wenn aber beyde Theile des Schnabels BM und MC Fig. 200. ihre hohle Seite der Abscissenlinie zeigen, und die Tangente des Schnabels fällt wieder mit der Ordinate zusammen, so ist die Ordinate des Berührungspunktes M ein Kleinstes. Dieses erhellet augenscheinlich aus Fig. 199 und 200; Fig. 199 kann durch $y = p - p^{\frac{1}{3}}(x - p)^{\frac{2}{3}}$, und Fig. 200 durch $y = p + p^{\frac{1}{3}}(x - p)^{\frac{2}{3}}$ auf der Abscissenlinie AP ausgedrücket werden. 199 200

Man kann demnach die größte oder die kleinste Ordinate einer gegebenen krummen Linie bestimmen, welche durch $y = X$ ausgedrücket ist, allwo X was immer für eine Funktion von der Abscisse x vorstellet, wenn man untersuchet, an welchem Orte die Tangente entweder mit der Abscissenlinie parallel läuft, oder an welchem Orte selbe mit der Ordinate zusammen fällt. Nun ist an dem Orte, allwo die Tangente mit der Abscissenlinie parallel läuft $d(X) = 0$ in Rücksicht dx; denn es ist an diesem Orte die Subtangente $\frac{ydx}{dy} = \infty$, folglich $dy : dx = y : \infty$, und $dy = 0$ in Rücksicht dx gleichwie $y = 0$ ist in Rücksicht ∞; und da aus der Gleichung für die krumme

Li-

Fig. bedeuten; folglich ist $4p$ die kleinste Ordinate dieser krummen Linie, und es muß $x = p$ gesetzet werden, damit man die kleinste Ordinate erhalte.

602. Die angeführte Methode den größten oder den kleinsten Werth einer gegebenen Funktion zu bestimmen beruhet auf folgenden Gründen.

Jede Funktion einer veränderlichen Größe x, z. B. $x^2 - 8x + 18$ kann als eine Gleichung irgend einer krummen Linie angesehen werden, wenn man die gegebene Funktion der Ordinate y einer solchen krummen Linie gleich setzet, und durch die veränderliche Größe x die Abscissen bezeichnet, und über dieses im erforderlichen Falle die gegebene Funktion mit der für die Einheit angenommenen Linie z. B. $c = 1$ dergestalt verbindet, daß sie ein linearischer Ausdruck wird; in unserem Beyspiele ist nämlich $y = \frac{x^2}{c} - 8x + 18c$ eine Gleichung für eine krumme Linie von senkrechten oder auch schiefgeneigten und dabey parallelen Ordinaten. Wenn nun die gegebene Funktion eines größten oder eines kleinsten Werthes fähig ist, so wird auch die dazugehörige krumme Linie eine größte oder eine kleinste Ordinate haben, und durch eine solche größte oder kleinste Ordinate wird zugleich der größte oder der kleinste Werth der gegebenen Funktion vorgestellet. Folgende allgemeine Eigenschaften der krummen Linien führen auf eine Regel um die größten oder die kleinsten Ordinaten zu finden, und beweisen die angeführte Methode (601), nach der man bey einer gegebenen Funktion den größten oder den kleinsten Werth bestimmen kann.

198 I. Wenn bey einer krummen Linie von parallelen Ordinaten Fig. 198 ein Bogen BC die hohle Seite der Abscissenlinie zeiget, und die Tangente TM irgend eines Punktes M in diesem hohlen Bogen läuft mit der Abscissenlinie parallel, so ist die Ordinate PM des Punktes M unter allen Ordinaten dieses hohlen Bogens die größte. Wenn aber der Bogen

Orte läuft das Differenzial oder das Element des Bogens selbst mit der Absciſſe parallel. Und eben so leicht iſt es einzusehen, daß an demjenigen Orte einer krummen Linie, allwo die Tangente mit der Ordinate zuſammenfällt, $dx = 0$ sey Fig. 199; denn die Absciſſe x bleibt an einem ſolchen Orte völlig ungeändert, wenn man die Ordinate y nur um dy oder den Bogen BM nur um ſein Differenzial wachſen oder abnehmen läßt, weil an einem ſolchen Orte das Differenzial oder das Element des Bogens mit der Ordinate zuſammenfällt. Fig.

Iſt einmal die Absciſſe z. B. $x = a$ gefunden, welche den Ort anzeiget, an welchem die Tangente mit der Absciſſenlinie parallel läuft oder mit der Ordinate zuſammenfällt, ſo iſt dadurch auch die Ordinate $y = R$ des Berührungspunktes beſtimmet, wenn man den gefundenen Werth a in der gegebenen Gleichung ſtatt x ſetzet; und ſodann iſt es leicht zu unterſuchen, ob die gefundene Absciſſe $x = a$ des Berührungspunktes ein Größtes oder ein Kleinſtes zum Vorſchein bringe; man muß nämlich in dieſer Abſicht $a + e$ ſtatt x in der gegebenen Gleichung ſubſtituiren, um die zu $a + e$ gehörige Ordinate $y = R'$ zu erhalten, und muß darauf beurtheilen, ob R' größer oder kleiner als R ſey, da man die Größe e einmal für poſitiv, und ſodann für negativ anſiehet.

603. **Anmerkung.** Es giebt krumme Linien, die an mehreren Orten mit größten oder kleinſten Ordinaten verſehen ſind: aus dieſer Urſache muß man bey der Unterſuchung eines Größten oder eines Kleinſten die Größe e ſehr klein annehmen, damit man ſich nicht von einer nämlichen größten oder kleinſten Ordinate zu weit entferne, und etwan dadurch zu einer andern größten oder kleinſten Ordinate gelange; man kann deßwegen die Größe e ſo klein gedenken, daß man bey der Subſtitution alle ihre Potenzen, welche die zweyte überſteigen, hinweglaſſen könne. Da dergleichen mit mehreren größten und kleinſten Ordinaten verſehene krumme Linien bey der ausübenden Mathematik faſt niemals vorkommen, ſo wollen

wir

Fig. Linie $y = X$ auch $dy = d(X)$ folgt, so ist an diesem Orte auch $d(X) = 0$. Hingegen ist an dem Orte, allwo die Tangente mit der Ordinate zusammenfällt $dx = 0$ in Rücksicht dy; denn es ist an diesem Orte die Subtangente $\frac{y dx}{dy} = 0$, und folglich $dy : dx = y : 0$, nämlich $dx = 0$ in Rücksicht dy. Man kann demnach den Ort der parallelen Tangente nämlich die entsprechende Abscisse und Ordinate finden, wenn man die Gleichung X differenziret welche die Ordinate durch die Abscisse x ausgedrücket vorstellet, dieses Differenzial nämlich $d(X) = 0$ setzet, und sodann aus dieser Gleichung den Werth von x suchet. Hingegen läßt sich der Ort finden, an welchem die Tangente mit der Ordinate zusammenfällt, wenn man den gemeinschaftlichen Nenner des Differenzials der Ordinate durch x ausgedrückt $= 0$ setzet, und aus dieser Gleichung x entwickelt; denn es sey z. B. in einem solchen Falle $dy = d(X) = \frac{P dx}{Q}$, allwo P und Q was immer für Funktionen von x sind, so ist $dx = \frac{Q dy}{P}$; setzt man nun $dx = 0$ in Rücksicht dy, so ist auch $\frac{Q dy}{P} = 0$, und auch $Q = 0$, nämlich in dem Differenzial $dy = d(X) = \frac{P dx}{Q}$ ist der Nenner $Q = 0$, wenn die Tangente mit der Ordinate zusammfällt; wäre nun $Q = 3(x - p)$, so ist $3(x - p) = 0$, und folglich $x = p$.

Daß an demjenigen Orte der krummen Linie, allwo die Tangente mit der Abscissenlinie parallel läuft, $dy = 0$ sey, nämlich daß an diesem Orte die Ordinate kein Differenzial habe, erhellet auch schon daher, weil an einem solchen Orte Fig. 198 die Ordinate y sich gar nicht verändert, wenn man die Abscisse x nur um dx oder auch den Bogen BM nur um sein Differenzial vermehret oder vermindert, denn an einem solchen Or-

der Abscisse BP' durch $y = p \pm \sqrt{p^{-1}(p - x)^3}$ vorgestellet. Fig.
Aus der vorigen Gleichung $y = p + p^{-2}(x - p)^3$ folgt $dy = \frac{3(x-p)^2 dx}{p^2}$; setzet man dieses Differenzial $= 0$, so ist $x = p$, und auch $y = p = R$, und $R' = p + p^{-2}e^3$; nun ist $R' > R$ wenn man e für positiv ansieht; hingegen $R' < R$ wenn man e für negativ ansieht; also in M weder eine größte noch auch eine kleinste Ordinate, sondern nur entweder ein Wendungspunkt oder aber ein Schnabel, welches man aus der Gestalt der krummen Linie jederzeit sehr leicht beurtheilen kann, wenn man ein Stück derselben verzeichnet. Die Abscisse und Ordinate des Wendungspunktes und auch des Schnabels einer krummen Linie läßt sich bestimmen, wenn man untersuchet, an welchem Orte das erste Differenzial der Ordinate ein Größtes oder ein Kleinstes wird, das ist wenn man die Gleichung für die krumme Linie zum zweytenmale differenziret, und bey diesem zweyten Differenzial der Ordinate entweder den Zähler oder den Nenner $= 0$ setzet; denn es ist aus dem blossen Anblicke solcher krummen Linien, die entweder mit Schnabeln oder mit Wendungspunkten versehen sind, gar leicht zu ersehen, daß die ersten Differenzialen der Ordinaten bis zu einem solchen Punkte wachsen und von da wieder abnehmen, oder umgekehrt, und daß folglich bey einem dergleichen Punkte der krummen Linie das erste Differenzial der Ordinate entweder ein Größtes oder ein Kleinstes wird.
Z. B. aus der Gleichung $y = a^3(a^2 + x^2)^{-1}$ für die krumme Linie Fig. 173. auf der Abscisse Cp folgt $dy = -2a^3 x dx (a^2 + x^2)^{-2}$, und $ddy = -2a^3 dx^2 (a^2 + x^2)^{-2} + 8a^3 x^2 dx^2 (a^2 + x^2)^{-3} = \frac{2a^3(3x^2 - a^2)dx^2}{(a^2 + x^2)^3}$; setzen wir nun $(3x^2 - a^2)dx^2 = 0$, so ist $3x^2 = a^2$, und $x = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, und $y = a^3(a^2 + \frac{1}{3}a^2)^{-1} = \frac{3}{4}a$, nämlich die zum Wendungspunkte gehörige Abscisse Cp ist bey dieser krummen Linie $= \frac{1}{3}a\sqrt{3} = \frac{1}{3}AC.\sqrt{3}$, und die Ordinate $pm = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}AC$. 173

Fig. wir von ihnen auch keine weitere Erwähnung machen. Selbst die **Prüfung eines Größten oder Kleinsten durch die Größe** c **ist in den meisten Fällen entbehrlich**, weil solche Funktionen, die ein einziges Größtes zulassen, gemeiniglich von 0 angefangen bis auf einen gewissen endlichen Werth wachsen und von da wieder bis 0 abnehmen, wie z. B. die Ordinaten eines Kreises $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$. Hingegen die Funktionen, welche ein einziges Kleinstes zulassen, nehmen gemeiniglich von ∞ angefangen bis auf einen gewissen endlichen Werth ab, und wachsen von da wieder bis ∞, als z. B. der Krümmungshalbmesser $k = \frac{(a^4 + x^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^4x^3}$ für die gleichseitige Hyperbel an der Asymptote: man findet aus dieser Funktion, wenn man ihr Differenzial $= 0$ setzet, daß zu der Abscisse $x = a$ der kleinste Krümmungshalbmesser gehöre, und daß dieser Krümmungshalbmesser $k = a\sqrt{2}$ sey, und daß folglich die Hyperbel am Scheitel die größte Krümmung habe.

Es kann sich zuweilen ereignen, daß bey einer krummen Linie an irgend einem Punkte die Tangente mit der Abscissenlinie parallele laufe, oder mit der Ordinate zusammenfalle, ohne daß deßwegen die Ordinate des Berührungspunktes ein größtes oder ein Kleinstes sey; dieses kann geschehen, wenn die krumme Linie eben an diesem Orte auf einer Seite des Berührungspunktes die hohle und auf der anderen Seite die erhabene Seite der Abscissenlinie zeiget, nämlich wenn an eben diesem Orte ein **Wendungspunkt** (punctum flexus contrarii), oder zuweilen auch ein **Rückkehrpunkt** oder ein **Schnabel** (punctum regressus, seu cuspis) befindlich ist; in Fig. 201
201 ist eine krumme Linie mit einem solchen Wendungspunkte M abgebildet, welche auf der Abscisse AP durch $y = p + p^{-2}(x - p)^3$, auf der Abscissenlinie AQ aber durch $y = p + (p^2x - p^3)^{\frac{1}{3}}$ ausgedrückt ist; in Fig. 200 aber wird die krumme Linie mit dem Schnabel oder Rückkehrpunkte auf

der

$ADB = EPFQ$ sey $= x$, so ist, wenn wir $180 = c$ setzen, Fig.
dieses Bogens Länge $ADB = \frac{ax\pi}{c} = ac^{-1}x\pi$; es ist also auch 202
der Umkreis $EPFQ = ac^{-1}x\pi$, der Durchmesser $EF = ac^{-1}x$, und die Kreisfläche $PQ = \frac{1}{4}a^2c^{-2}x^2\pi$; ferner ist $GH = \sqrt{EG^2 - EH^2} = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}a^2c^{-2}x^2)} = \frac{1}{2}ac^{-1}(4c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; und folglich der Kegel $EFG = \frac{1}{3}PQ.GH = \frac{1}{24}a^3c^{-3} \times x^2\pi(4c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}a^3c^{-3}\pi(4c^2x^4 - x^6)^{\frac{1}{2}}$; davon ist das Differenzial $= \frac{\frac{1}{24}a^3c^{-3}\pi(16c^2x^3dx - 6x^5dx)}{2\sqrt{(4c^2x^4 - x^6)}}$; setzt man nun den Zähler dieses Differenzials $= 0$, so ist $x = \frac{2}{3}c.\sqrt{6} = 120^\circ \times 2{,}44949 = 293{,}9388^\circ = 293^\circ\, 56'\, 20''$; der Bogen ADB muß demnach $293^\circ\, 56'\, 20''$, und folglich der Bogen AB oder der Winkel ACB $66^\circ\, 3'\, 40''$ enthalten, damit der Kegel EFG ein Größtes wird.

IV. **In einen gegebenen Kreis das größte Rechteck** 203
DB zu verzeichnen. Fig. 203.

Auflösung. Es sey der Durchmesser $AC = a$, und $AE = x$ von der Beschaffenheit, daß man mittelst der Senkrechten EB das gesuchte Rechteck DB verzeichnen könne, so ist $EC = a - x$, $EB^2 = ax - x^2$, $AB = \sqrt{AE^2 + EB^2} = \sqrt{ax}$, $BC = \sqrt{(a^2 - ax)}$, und folglich das Rechteck BD $= AB.BC = (a^3x - a^2x^2)^{\frac{1}{2}}$; davon ist das Differenzial $= \frac{(a^3 - 2a^2x)dx}{2(a^3x - a^2x^2)^{\frac{1}{2}}}$; setzt man nun den Zähler $= 0$, so ist $x = \frac{1}{2}a$, $AE = \frac{1}{2}AC$, und folglich das gesuchte Rechteck ein Quadrat.

Wäre nun dieser Kreis der Durchschnitt eines runden Baumes, so wird unter allen viereckigten Balken, die man aus diesem Baume aushauen kann, derjenige die größte Menge der Materie enthalten, dessen Durchschnitt ein Quadrat ist; jedoch wird dieser Balken nicht der stärkste seyn, wenn er in hori=

Fig. Dergleichen krumme Linien mit Wendungspunkten, und auch jene mit Schnabeln haben auf die ausübende Mathematik keinen bedeutenden Einfluß, derowegen wollen wir uns auch nicht länger dabey aufhalten.

604. Damit sich ein Anfänger die angeführte Methode (601) die größten und kleinsten Werthe der Funktionen zu bestimmen durch die Uebung geläufig mache, wollen wir nachstehende Beyspiele hiehersetzen.

I. **Eine Zahl a (z. B. 10) oder auch eine gerade Linie in zwey Theile dergestalt zu theilen, daß ihr Produkt ein Größtes wird.**

Auflösung. Es sey ein Theil $= x$, so ist der andere $= a - x$, und ihr Produkt $= ax - x^2$, man setze nun $\mathrm{d}(ax - x^2) = (a - 2x)\mathrm{d}x = 0$, so ist $x = \frac{1}{2}a = 5$ der erste Theil, und folglich auch der zweyte Theil $= \frac{1}{2}a = 5$, dem ersten gleich; das größte Produkt aber ist $= \frac{1}{4}a^2 = 25$.

II. **Eine Zahl x zu finden, daß $\sqrt[x]{x}$ ein Größtes wird.**

Auflösung. Es ist in diesem Falle $\mathrm{d}(\sqrt[x]{x}) = \mathrm{d}(x^{\frac{1}{x}})$ $= x^{\frac{1}{x}} . \mathrm{d}(Lx^{\frac{1}{x}}) = x^{\frac{1}{x}} . \mathrm{d}(x^{-1} . Lx) = x^{\frac{1}{x}} . (-x^{-2}\mathrm{d}xLx$ $+ x^{-2}\mathrm{d}x) = x^{\frac{1}{x}-2}\mathrm{d}x(1 - Lx) = 0$; also $Lx = 1 = Lh$, und $x = h = 2,7182818\ldots..$ Und nun ist $\sqrt[h]{h} = 1,4446678$, hingegen ist $\sqrt[2]{2} = 1,4142136$, und $\sqrt[3]{3} = 1,4422496$.

III. **Aus einer gegebenen Kreisfläche ABD Fig. 202**
202 **soll ein Stück ACB ausgeschnitten, und aus dem Ueberreste ein Kegel EFG gebildet werden; wie viel Grade, Minuten, und Sekunden muß der Bogen AB des wegzunehmenden Ausschnittes ACB enthalten, damit der Kubikinhalt des Kegels EGF ein Größtes wird?**

Auflösung. Es sey der Halbmesser AC $= a$, so ist der Umkreis ABD $= 2a\pi$; die Anzahl der Grade des Bogens

ADB

VI. **Einen Cylinder anzugeben, der in der möglichst kleinsten Oberfläche den möglichst größten Kubikinhalt enthält, oder welches einerley ist, der mit der möglichst kleinsten Oberfläche einen gegebenen Kubikinhalt** $= a$ **einschließt.** Fig. 203

Auflösung. Der Durchmesser der Grundfläche dieses Cylinders sey $= x$, so ist der dazugehörige Umkreis $= \pi x$, und die Grundfläche $= \frac{1}{4}\pi x^2$; also des Cylinders Höhe $= \frac{a}{\frac{1}{4}\pi x^2}$ vermög (415. IV.); und folglich seine ganze Oberfläche $= \frac{2}{4}\pi x^2 + \pi x . \frac{a}{\frac{1}{4}\pi x^2} = \frac{1}{2}\pi x^2 + 4ax^{-1}$. Davon ist das Differenzial $(\pi x - 4ax^{-2})\,dx = 0$; also der Durchmesser $x = \sqrt[3]{\frac{4a}{\pi}}$, und des Cylinders Höhe $= \frac{a}{\sqrt[3]{\left(\frac{4a}{\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{4a}{\pi}}$; der gesuchte Cylinder ist demnach gleichseitig.

605. Wenn der größte oder der kleinste Werth einer Funktion zu bestimmen ist, die mehrere veränderliche Größen enthält, so muß man die vorgegebene Funktion differenziren, und darauf die Summe aller Glieder, die mit dem Differenzial einer nämlichen veränderlichen Größe multipliciret sind, besonders $= 0$ setzen; aus der Verbindung dieser Gleichungen lassen sich sodann die gesuchten Größen bestimmen. Z. B. man soll eine Zahl a in drey solche Theile zerfällen, daß das Produkt aus der dritten Potenz des ersten Theils, aus der zweyten Potenz des zweyten Theils, und aus der ersten Potenz des dritten Theils ein Größtes wird. Dieses kann nun auf folgende Art geschehen. Es sey der erste Theil $= x$, der zweyte $= y$, so ist der dritte Theil $= a - x - y$, und das angeführte Produkt ist $= ax^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$; davon ist das Differenzial $= 3ax^2y^2dx + 2ax^3ydy - 4x^3y^2dx - 2x^4ydy - 3x^2y^3dx - 3x^3y^2dy = (3ax^2y^2 - 4x^3y^2$ —

Fig. zontaler Lage an beyden Enden unterstützet eine Last tragen
203 soll. Für einen solchen Fall läßt sich der stärkste Balken bestimmen, wenn man aus der Mechanik annimmt, daß die Stärke eines viereckigten Balkens dem Produkte aus dem Quadrate der Höhe BC^2 in die Grundlinie AB des Durchschnittes proportional sey; in dieser Voraussetzung kann die Stärke dieses Balkens, wenn er mit der Seite AB aufliegen soll, durch $BC^2 . AB = a^{\frac{5}{2}}x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ ausgedrücket werden; davon ist das Differenzial $= (\frac{1}{2}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}})\,dx$; dieses $= 0$ gesetzt giebt $x = \frac{1}{3}a$, nämlich $AE = \frac{1}{3}AC$. Man muß demnach den Durchmesser in drey gleiche Theile theilen, und durch den ersten Theilungspunkt E die Senkrechte EB errichten um den Durchschnitt desjenigen viereckigten Balkens zu erhalten, welcher mit der schmalen Seite AB aufgelegt die möglichst größte Last zu tragen im Stande ist. Da $AB = \sqrt{ax}$, $BC = \sqrt{(a^2 - ax)}$, und $x = \frac{1}{3}a$, so verhält sich $AB : BC = \sqrt{\frac{1}{3}a^2} : \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = 1 : \sqrt{2}$ oder beynahe $= 2 : 3$. Die Last aber, die ein solcher Balken mit der Seite AB aufgelegt tragen kann, verhält sich zur Last, die er mit der Seite BC aufgelegt zu erhalten im Stande ist, gleichwie 2 zu $\sqrt{2}$, oder gleichwie $\sqrt{2}$ zu 1, nämlich gleichwie 3 : 2 beynahe.

V. In den Durchschnitt BD einer Kugel Fig. 203
203 **den halben Durchschnitt eines geraden Kegels zu verzeichnen, dessen krumme Oberfläche ein Größtes ist.**

Auflösung. Es sey der halbe Durchschnitt des Kegels das Dreyeck CEB, der Durchmesser $CA = a$, und $CE = x$, so ist $EB = \sqrt{(ax - x^2)}$, $BC = \sqrt{ax}$, des Halbmessers EB halber Umkreis $= \pi . \sqrt{(ax - x^2)}$, und folglich die krumme Oberfläche des Kegels $= \pi . \sqrt{(ax - x^2)} \times \sqrt{ax} = \pi \sqrt{(a^2x^2 - ax^3)}$; davon ist das Differenzial $= \frac{(2a^2x - 3ax^2)\pi\,dx}{2\sqrt{(a^2x^2 - ax^3)}}$; dessen Zähler $= 0$ gesetzt giebt $x = \frac{2}{3}a$, nämlich $CE = \frac{2}{3}CA$.

VI.

III. Einen Bruch zu finden, der seine *mte* Potenz (z. B. sein Quadrat) um die möglichst größte Differenz übersteiget. Fig.

IV. Es ist zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels ein Punkt gegeben; man soll durch diesen Punkt die kürzeste gerade Linie an beyde Schenkel ziehen.

V. Eine gerade Linie in drey Theile dergestalt zu theilen, daß aus selben das möglichst größte Dreyeck könne verzeichnet werden.

VI. In eine Kugel den größten Kegel, und in den Kegel den größten Cylinder einzuschreiben.

VII. Den inneren Durchmesser und die Höhe eines cylindrischen Gefässes (z. B. eines Pulvercimemts) anzugeben, welches bey der möglichst kleinsten inneren Oberfläche einen gegebenen Kubikinhalt enthält.

VIII. Aus einem gegebenen geraden Kegel die größte parabolische Fläche auszuschneiden.

IX. Den Ort der stärksten Krümmung bey der Logistik zu bestimmen.

X. Die Pulverkammer AEB eines Pöllers Fig. 204, bey dem der Durchmesser der Bombe AG $= a$ Schuhe enthält, soll aus einer halben Kugel DEF und aus einem Cylinder ADFB bestehen; diese Kammer soll bis auf die Berührungsebene pmq angefüllet b ℔ Pulver enthalten, wovon 1 Kubikschuh c ℔ wiegt; wie groß muß der Durchmesser DF und wie groß die Höhe AD des Cylinders seyn, damit die ganze innere Oberfläche der Kammer mA+AD+DEF+FB+Bm ein Kleinstes sey, und damit folglich dadurch die Bombe den möglichst größten Stoß erhalte? Wie groß soll hingegen der Durchmesser, wie groß die Höhe des Cylinders seyn, wenn sich daran keine Halbkugel befindet? Wie soll der Durchmesser des Cylinders zu seiner Höhe sich verhalten, wenn in dem zweyten oder in dem ersten Falle die Kammer nur bis auf eine Ebene, welche um eine gegebene Größe von dem untersten Punkte m der Bombe absteht, angefüllet auch b ℔ Pul- 204

Fig. $-3x^2y^3)dx+(2ax^3y-2x^4y-3x^3y^2)dy$; setzen wir nun
203 $(3ax^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3)dx=0$, und auch
$(2ax^3y-2x^4y-3x^3y^2)dy=0$, so folgt
daraus $3a-4x-3y=0$
und $2a-2x-3y=0$

subtr. $a-2x=0$; nämlich $x=\frac{1}{2}a$, und $y=\frac{1}{3}a$, folglich der dritte Theil $=\frac{1}{6}a$. Setzen wir nun $a=12$, so sind die gesuchten Theile $=6,4,2$, deren Produkt $=6^3.4^2.2=6912$ ein Größtes ist.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Verfahrens auf folgende Art überzeugen. Es ist bey dem größten Werthe der angeführten Funktion $P=ax^3y^2-x^4y^2-x^3y^3$, wenn man nur x allein für veränderlich ansieht, $dP=(3ax^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3)dx=0$; und in dieser nämlichen Funktion, wenn man nur y allein für veränderlich ansieht, ist bey dem größten Werthe $dP=(2ax^3y-2x^4y-3x^3y^2)dy=0$; es ist demnach bey dem größten Werthe dieser nämlichen Funktion, wenn x und y beyde zugleich für veränderlich angesehen werden,
sowohl $(3ax^2y^2-4x^3y^2-3x^2y^3)dx=0$,
als auch $(2ax^3y-2x^4y-3x^3y^2)dy=0$. Und eben so läßt sich die gegebene Regel erweisen, wenn die Funktion noch mehrere veränderliche Größen enthielte.

606. Die Anfänger können das Vergnügen haben folgende Beyspiele durch eigenen Fleiß auszuarbeiten.

I. Die größten oder die kleinsten Ordinaten, und auch die Wendungspunkte der krummen Linie zu bestimmen, welche durch die Gleichung $y=864x-\frac{252x^2}{a}+\frac{28x^3}{a^2}-\frac{x^4}{a^3}$ ausgedrückt ist.

II. Eine Zahl x von der Beschaffenheit zu finden, daß $\frac{x}{\log vulg\, x}$ ein Kleinstes wird.

III.

$d(X)$ und $d(X')$ unendlich kleine Größen sind; und folglich Fig. ist bey dem Werthe der veränderlichen Größe $x = a$ diese nämliche Funktion $y = \frac{0 + d(X)}{0 + d(X')} = \frac{d(X)}{d(X')}$.

Die Funktion $y = \frac{\sqrt{(x^4 + 2ax^3 - 3a^4)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$ wird $= \frac{0}{0}$ für $x = a$; es wird also auch $y^2 = \frac{x^4 + 2ax^3 - 3a^4}{x^2 - a^2} = \frac{0}{0}$ für $x = a$; nun ist für diesen Fall $y^2 = \frac{4x^3dx + 6ax^2dx}{2xdx}$ $= 2x^2 + 3ax = 2a^2 + 3a^2 = 5a^2$, und folglich $y = a\sqrt{5}$.

$y = \frac{1}{Lx} - \frac{x}{Lx}$ wird $= \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$ für $x = 1$, oder es wird $y = \frac{1 - x}{Lx} = \frac{0}{0}$ für $x = 1$; nun ist für diesen Fall $y = \frac{d(1-x)}{d(Lx)} = -dx : \frac{dx}{x} = -x$; also $y = -1$.

$y = \frac{Lx}{\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{0}{0}$ für $x = 1$, wird für diesen Fall $= \frac{dx}{x} : \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)}}$ $= \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x^2} = 0$; hingegen wird $y = \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{Lx} = \frac{0}{0}$ $= \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)}} : \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{1}{0} = \infty$ für $x = 1$.

Zuweilen wird auch $\frac{d(X)}{d(X')} = \frac{0}{0}$; in einem solchen Falle muß man auch $\frac{d(d(X))}{d(d(X'))}$ nämlich $\frac{dd(X)}{dd(X')}$ entwickeln, und darinnen nach vorgenommener Abkürzung für die veränderliche Größe den gehörigen Werth setzen. Z. B. wenn man

Fig. ver enthalten soll? Hat der Abstand der Ebene pq von dem Punkte m einen Einfluß auf das blosse Verhältniß des Durchmessers zur Höhe des Cylinders? Wie groß muß nach eben dieser Bedingung der Durchmesser, wie groß die Höhe des Cylinders seyn, wenn der ganze innere Raum Amp + Bmq + Dq + DEF angefüllet b ℔ Pulver enthalten soll?

Von dem Werthe des Bruches $\frac{0}{0}$ nebst dem Gebrauche der Differenzialrechnung bey den Reihen.

607. Es eräugnet sich zuweilen, daß bey einem gewissen Werthe der veränderlichen Größe eine gebrochene Funktion $= \frac{0}{0}$ wird; z. B. bey der Reihe $a, ax, ax^2, ax^3, \ldots\ldots ax^{n-1}$ ist die Summe von n Gliedern $s = \frac{ax^n - a}{x - 1}$, es möge x was immer bedeuten; setzt man $x = 1$, so ist $s = \frac{0}{0}$. Der Werth eines solchen Bruches läßt sich bestimmen, wenn man den Zähler und Nenner besonders differenziret, dieses Differenzial gehörig abkürzet, und sodann statt der veränderlichen Größe denjenigen Werth setzet, welcher die gebrochene Funktion auf $\frac{0}{0}$ bringet. In unserem Beyspiele ist $s = \frac{\mathrm{d}(ax^n - a)}{\mathrm{d}(x - 1)}$ $= \frac{nax^{n-1}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = nax^{n-1} = na$ für den Fall $x = 1$; und wirklich ist die Summe von n Gliedern bey der angeführten Reihe $= na$, wenn man $x = 1$ setzet, weil sodann jedes Glied $= a$ wird.

Der Grund von der gegebenen Regel ist leicht einzusehen. Es sey z. B. die gegebene Funktion $Y = \frac{X}{X'}$ also beschaffen, daß sich selbe bey dem Werthe der veränderlichen Größe $x = a$ in $y = \frac{0}{0}$ verwandelt, so ist bey einem jeden endlichen Werthe der veränderlichen Größe auch $y = \frac{X + \mathrm{d}(X)}{X' + \mathrm{d}(X')}$, weil

$\mathrm{d}(X)$

folglich $A - 1 = 0$ nämlich $A = 1$ Fig.

$$3B - \frac{1}{2a^2} = 0 \qquad B = \frac{1}{2.3.a^2}$$

$$5C - \frac{1.3}{2.4.a^4} = 0 \qquad C = \frac{1.3}{2.4.5.a^4}$$

$$7D - \frac{1.3.5}{2.4.6.a^6} = 0 \qquad D = \frac{1.3.5}{2.4.6.7.a^6}$$

und $z = x + \frac{x^3}{2.3.a^2} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5.a^4} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.a^6} + \ldots\ldots$

Diese Reihe ist mit (351) einerley; sie stellet nämlich den Bogen durch seinen Sinus ausgedrückt vor; wenn man diese Reihe umkehret, so findet man x durch z ausgedrückt wie (445). Auf die nämliche Art läßt sich der Bogen durch seine Tangente ausgedrückt finden, u. s. w.; wir können uns aber allhier nicht damit beschäftigen, da wir das nothwendige von dieser Materie schon bereits am gehörigen Orte nämlich (§. 351, 445, und 453) vorgetragen haben.

609. Es sey y eine Funktion von x; es wachse x um dx, nämlich x verwandle sich in $x+dx$, so wird y in $y+dy$ übergehen; $x+dx$ wachse wieder um dx, nämlich $x+dx$ verwandle sich in $x+2dx$, so wird $y+dy$ in $y+dy+d(y+dy)$ $=y+2dy+ddy$ übergehen; $x+2dx$ nehme wieder um dx zu, das ist aus $x+2dx$ werde $x+3dx$, so wird $y+2dy+ddy$ sich in $y+2dy+ddy+d(y+2dy+ddy) = y + 3dy + 3d^2y + d^3y$ verwandeln, u. s. w. nämlich bey dem Werthe $x+4dx$ der veränderlichen Größe wird die Funktion y den Werth $y+4dy+6d^2y+4d^3y+d^4y$ haben; aus diesem ist nun klar abzunehmen, daß die Coefficienten von $dy, d^2y, d^3y, d^4y, \ldots\ldots$ mit den Coefficienten der Newtonischen Formel einerley sind, oder daß die Coeffizienten von dy in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges, die Coefficienten von d^2y in einer arithmetischen Reihe des 2ten Ranges u. s. w. fortwachsen, bey denen sich das allgemeine Glied nach (203) bestimmen läßt;

wenn

Fig. man die Gleichung $ax+ax^2+ax^3+ax^4+\ldots+ax^n=\frac{ax^{n+1}-ax}{x-1}$ ordentlich differenziret, und gehörig abkürzet, so erhält man die Summe der Reihe $a+2ax+3ax^2+4ax^3+\ldots+nax^{n-1}=\frac{nax^{n+1}-(n+1)ax^n+a}{(x-1)^2}=s$. Setzen wir nun in dieser Summenformel $x=1$, so ist $s=\frac{0}{0}$, und auch für eben diesen Fall $\frac{d(X)}{d(X')}=\frac{n(n+1)ax^n-n(n+1)ax^{n-1}}{2(x-1)}=\frac{0}{0}$; hingegen ist $\frac{dd(X)}{dd(X')}=\frac{n^2(n+1)ax^{n-1}-(n-1)n(n+1)ax^{n-2}}{2}$ $=\frac{1}{2}a.n.(n+1)$ für $x=1$; folglich ist für diesen Fall die Summe $s=\frac{1}{2}a.n.(n+1)=$ der Summe der Reihe $a+2a+3a+4a+\ldots+na$.

608. Vermög (584.I.). ist $d(\text{Arc}\sin x)=adx\,(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, oder wenn wir $\text{Arc}\sin x=z$ setzen, so ist $dz=adx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, oder $dz=dx\left(1+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{1.3x^4}{2.4.a^4}+\frac{1.3.5.x^6}{2.4.6.a^6}+\ldots\right)\ldots\mathfrak{A}$; nun läßt sich z durch x ausgedrücket finden, wenn man für z eine unendliche Reihe mit unbestimmten Coefficienten von der Beschaffenheit annimmt, daß ihr Differenzial mit $\mathfrak{A}$ einerley Gestalt hat; man setze nämlich

$$z=Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+Ex^9+\ldots\mathfrak{B},$$

so ist $dz=dx\,(A+3Bx^2+5Cx^4+7Dx^6+9Ex^8+\ldots)$

$$\text{also auch}=dx\left(1+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{1.3.x^4}{2.4.a^4}+\frac{1.3.5.x^6}{2.4.6.a^6}+\ldots\right)$$

$$=dx(A+3Bx^2+5Cx^4+7Dx^6+\ldots)$$

$$\text{und } 0=\left.\begin{matrix}A\\-1\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}3B\\-\frac{1}{2a^2}\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}5C\\-\frac{1.3}{2.4.a^4}\end{matrix}\right\}x^4+\left.\begin{matrix}7D\\-\frac{1.3.5}{2.4.6.a^6}\end{matrix}\right\}x^6+\ldots$$

folg-

folglich $h^{x+a} = h^x + ah^x + \frac{a^2h^x}{2} + \frac{a^3h^x}{2.3} + \frac{a^4h^x}{2.3.4} + \ldots\ldots$ Fig.

$= h^x.(1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^4}{2.3.4} + \ldots\ldots) = h^x.\, h^a.$

Es sey $y = \sin u$ für den Halbmesser 1; man soll für eben diesen Halbmesser $\sin(u + z)$ finden. In diesem Falle ist $x = u$, $c = z$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} = \cos u$, $\frac{d^2y}{du^2} = -\sin u$, $\frac{d^3y}{du^3}$ $= -\cos u$, $\frac{d^4y}{du^4} = \sin u$, $\frac{d^5y}{du^5} = \cos u$, $\frac{d^6y}{du^6} = -\sin u$; u.s.w.

folglich $\sin(u + z) = \sin u + z.\cos u - \frac{z^2}{2}.\sin u$ $- \frac{z^3}{2.3}.\cos u + \frac{z^4}{2.3.4}.\sin u + \frac{z^5}{2.3.4.5}.\cos u$ $- \frac{z^6}{2\ldots6}.\sin u - \frac{z^7}{2\ldots7}.\cos u + \ldots\ldots$ Man setze $u = 0$, so ist $\sin u = 0$, und $\cos u = 1$; folglich $\sin z$ $= z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2\ldots5} - \frac{z^7}{2\ldots7} + \ldots\ldots$ wie (445).

Es sey $y = \log \text{vulg} \sin x$ für den Halbmesser 1, und das Modell der gemeinen Logarithmen sey $= m$, so ist y $= m.\log\text{nat} \sin x$, und $\frac{dy}{dx} = \frac{m.\,d(\sin x)}{\sin x} = \frac{m.\cos x}{\sin x}$, oder $\frac{dy}{dx} = m.\cot x$, und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{m}{\sin^2 x}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2m\cos x}{\sin^3 x}$, u. s. w. folglich $\log\text{vulg} \sin(x + a) = \log\text{vulg} \sin x$ $+ am.\cot x - \frac{a^2m}{2\sin^2 x} + \ldots\ldots$

Einen vollständigen Gebrauch der Differenzialrechnung bey der Lehre der Reihen findet man bey dem großen Analysten L. Euler in seinen Instit. Calc. Diff.

Achte

Fig. wenn man demnach in der Funktion y, statt der veränderlichen Größe x die Größe $x+ndx$ setzet, so wird sich diese Funktion y in

$$y'=y+ndy+\frac{n.n-1}{2}.d^2y+\frac{n.n-1.n-2}{2.\ 3.}.d^3y$$
$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.\ 3.\ 4}.d^4y+\frac{n.n-1.\ldots.n-4}{2.3.4.5}.d^5y+\ldots$$

verwandeln.

Setzen wir nun $ndx=c$, so ist $n=\frac{c}{dx}$ unendlich groß, und folglich $n.(n-1)=n.n=n^2=\frac{c^2}{dx^2}$, $n.n-1.n-2$ $=n.n.n=n^3=\frac{c^3}{dx^3}$, u. s. w. Wenn man demnach in der Funktion y, statt der veränderlichen Größe x die Größe $x+c$ setzet, so wird diese Funktion y in

$$y'=y+c.\frac{dy}{dx}+\frac{c^2}{2}.\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{c^3}{2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{c^4}{2.3.4}.\frac{d^4y}{dx^4}\ldots$$

sich verwandeln.

Ist nun c negativ, so ist

$$y'=y-c.\frac{dy}{dx}+\frac{c^2}{2}.\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{c^3}{2.3}.\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{c^4}{2.3.4}.$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{c^5}{2..5}.\frac{d^5y}{dx^5}+\ldots.$$

Es sey z. B. $y=x^2-2x+1$, man verlangt den Werth y' dieser Funktion für $x+1$ zu wissen; nun ist für diesen Fall $c=1$, $\frac{dy}{dx}=2x-2$, $\frac{d^2y}{dx^2}=2$, $\frac{d^3y}{dx^3}=0$, u. s. w. folglich $y'=x^2-2x+1+(2x-2+\frac{1}{2}.2)=x^2$

Es sey $y=h^x$; man soll h^{x+a} bestimmen; in diesem Falle ist $c=a$, $\frac{dy}{dx}=h^x$, $\frac{d^2y}{dx^2}=h^x$, $\frac{d^3y}{dx^3}=h^x$, u. s. w.

folg-

durch die Differenzirung wieder die gegebene Differenzialgröße herstellet, noch eine unveränderliche Größe hinzuzusetzen sey, läßt sich nicht anders als aus den Umständen und Bedingungen der Aufgabe entscheiden, welche zu ihrer Auflösung der Integralrechnung bedarf, wie es weiter unten zu ersehen seyn wird. Indessen pflegt man zu einem jeden gefundenen Integrale, + Constans, oder + Const, oder auch nur + C hinzuzusetzen, um das vollständige Integrale zu erhalten, allwo C diejenige unveränderliche positive oder negative Größe bedeutet, welche man aus den Umständen der Aufgabe zu bestimmen hat; zuweilen ist auch $C = 0$. In dem angeführten Beyspiele ist demnach $\int adx = ax + C$. Fig.

612. Die unveränderliche oder beständige Größe C läßt sich bey einem gefundenen Integrale auf folgende Art bestimmen. **Man erwäge genau, was für eine Größe durch das gesuchte Integrale vorgestellet werde, und untersuche sodann aufmerksam, bey welchem aus den Umständen der Aufgabe schon bekannten Werthe des gesuchten Integrals auch der Werth der dazugehörigen veränderlichen Größe bekannt sey; diese zwey bekannten Werthe substituire man nun gehörig in die gefundene Integralgleichung, so wird sich daraus die gesuchte unveränderliche Größe C bestimmen lassen.** Es sey z. B. bey der Integralgleichung $y = \int adx = ax + C$, welche aus der Differenzialgleichung $dy = adx$ abgeleitet wird, aus den Umständen der Aufgabe bekannt, daß bey dem Werthe a^2 des gesuchten Integrals $\int adx$, die veränderliche Größe x den Werth $\frac{3}{2}a$ habe, nämlich daß für $y = a^2$ die dazugehörige veränderliche Größe $x = \frac{3}{2}a$ sey, so ist $a^2 = a . \frac{3}{2}a + C$, nämlich $C = -\frac{1}{2}a^2$, und folglich das gesuchte vollständige Integrale $y = ax - \frac{1}{2}a^2$. Ist hingegen für $y = 0$ vermög den Umständen $x = -b$, so ist $0 = a \times -b + C$, nämlich $C = ab$, und folglich für einen solchen Fall $y = ax + ab$. Wäre aber für $y = 0$, auch $x = 0$, so ist $0 = a . 0 + C$, nämlich

Fig.

Achte Vorlesung.

Von der Integralrechnung.

Gründe der Integralrechnung.

610. Eine Funktion von einer oder von mehreren veränderlichen Größen, welche Differenziale enthält, wird eine **Differenzialgröße** genennt. Aus einer gegebenen Differenzialgröße diejenige Größe finden, aus deren Differenzirung die gegebene Differenzialgröße entsteht, heißt **integriren**, oder auch summiren; und eine solche gefundene Größe wird das **Integrale** von der gegebenen Differenzialgröße genennt; so z. B. ist von der Differenzialgröße $2a^2dx - \frac{3}{4}b^2dy$, das Integrale $= 2a^2x - \frac{3}{4}b^2y$, weil dieses Integrale nach (576) differenziret wieder die gegebene Differenzialgröße herstellet. Das gesuchte Integrale von einer gegebenen Differenzialgröße wird durch Vorsetzung des Buchstaben oder vielmehr Zeichens $\int$ angezeiget; es ist nämlich in dem angeführten Beyspiele $\int(2a^2dx - \frac{3}{4}b^2dy) = 2a^2x - \frac{3}{4}b^2y$, oder auch $\int(2a^2dx - \frac{3}{4}b^2dy) = \int 2a^2dx - \int\frac{3}{4}b^2dy = 2a^2.\int dx - \frac{3}{4}b^2.\int dy = 2a^2x - \frac{3}{4}b^2y$.

611. Und eben so ist $\int adx = ax$; es kann auch $\int adx = ax \pm b$, oder auch $\int adx = ax \pm a^2$ oder auch $\int adx = ax + 2ab - c^2$ u. s. w. gesetzet werden; denn jedes von diesen Integralen bringet durch die Differenzirung wieder adx zum Vorschein, weil (576. II.) die **unveränderlichen** Glieder einer Funktion kein Differenzial haben, und in der Differenzialgröße gar nicht erscheinen. Ob zu einem gefundenen Integrale, welches schon bereits die Eigenschaft hat, daß es

614. Vermög (580) ist $d(a.Lx) = \frac{adx}{x} = ax^{-1}dx$; Fig.
folglich ist auch $\int \frac{adx}{x} = a.Lx$, oder vielmehr $\int \frac{adx}{x} = \int ax^{-1}dx$ $= a.Lx + C$, es möge x eine einfache oder zusammengesetzte Größe bedeuten; so z. B. ist $\int \frac{mydy}{n(b^2+y^2)} = \int \frac{m}{2n} \cdot \frac{2ydy}{b^2+y^2}$ $= \frac{m}{2n}.L(b^2+y^2) + C$. Wenn nämlich bey einer gebrochenen Differenzialgröße in dem Zähler das Differenziale des Nenners mit was immer für einem unveränderlichen Coefficienten verbunden sich befindet, so ist das Integrale einer solchen gebrochenen Differenzialgröße jederzeit gleich dem natürlichen Logarithmus des Nenners mit dem nämlichen unveränderlichen Coefficienten verbunden. Es ist demnach $\int \frac{mx^{n-1}dx}{a^n+x^n} = \int \frac{m}{n} \cdot \frac{nx^{n-1}dx}{a^n+x^n} = \frac{m}{n}.L(a^n+x^n)$ $= L(a^n+x^n)^{\frac{m}{n}} + C$. Imgleichen $\int \frac{xdx - \frac{1}{2}adx}{ax - x^2 + a^2}$ $= \int -\frac{1}{2}\left(\frac{adx - 2xdx}{ax - x^2 + a^2}\right) = -\frac{1}{2}.L(ax - x^2 + a^2) =$ $-L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + C$.

Bey dergleichen logarithmischen Integralen pflegt man öfters die unveränderliche Größe durch LC zu bezeichnen: in dem gegebenen Beyspiele kann man nämlich $\int \frac{xdx - \frac{1}{2}adx}{ax - x^2 + a^2}$ $= -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + LC$ setzen. Wäre nun bey dem Werthe o des gesuchten Integrals auch $x = 0$, so müßte $0 = -L\sqrt{(a.0 - 0^2 + a^2)} + LC$ seyn, woraus $LC = La$, und folglich $\int \frac{xdx - \frac{1}{2}adx}{ax - x^2 + a^2} = -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + La$ $= L\left(\frac{a^2}{ax - x^2 + a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ fließt. Wenn man nach der vorigen

Fig. lich $C = o$, und folglich $y = \int a dx = ax$. Gemeiniglich sind die Umstände der Aufgabe also beschaffen, daß bey dem Werthe o des gesuchten Integrals auch der Werth der dazugehörigen veränderlichen Größe bekannt sey. Bey der Anwendung der Integralrechnung wird jederzeit aus einer Differenzialgleichung zwischen veränderlichen Größen, die Gleichung in endlichen Gliedern zwischen eben diesen veränderlichen Größen gesucht. Es ist leicht einzusehen, daß man in solchen Fällen die anfänglich noch unbekannte aber dabey unveränderliche Größe C nach Belieben auf einer oder auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens bey der integrirten Gleichung hinzusetzen könne; aus der Differenzialgleichung $dy = a dx$ folgt nämlich $y = ax + C$, oder auch $y + C = ax$. Wir werden in der Folge um die Weitläuftigkeit zu vermeiden gemeiniglich die Differenzialgrößen für sich allein betrachtet integriren ohne selbe als Differenzialgleichungen ausdrücklich anzusetzen.

613. Wenn man die Entstehungsart der Differenzialgrößen aus den endlichen Funktionen (aus den dazugehörigen Integralen) aufmerksam betrachtet, so lassen sich durch den umgekehrten Weg zu verschiedenen Differenzialgrößen die dazugehörigen Integralen ohne Schwirigkeit finden. Es ist z. B. $d(axy) = ay dx + ax dy$; folglich $\int(ay dx + ax dy) = axy$, oder vielmehr $\int(ay dx + ax dy) = axy + C$. Und eben so muß $\int(\frac{ay dx - ax dy}{y^2}) = \frac{ax}{y} + C$ seyn, weil $d(\frac{ax}{y} + C) = \frac{ay dx - ax dy}{y^2}$ ist. Hingegen ist $\int(\frac{abx dy - aby dx}{y^2}) = \int - b(\frac{ay dx - ax dy}{y^2}) = -b . \int(\frac{ay dx - ax dy}{y^2}) = -b . \frac{ax}{y} = C - \frac{abx}{y}$.

614.

$\int(ax^2 - bx^{-3} + 2cx^{-\frac{1}{3}})dx = \int ax^2 dx - \int bx^{-3} dx + \int 2cx^{-\frac{1}{3}} dx$ Fig.

$= \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^{-2} + 3cx^{\frac{2}{3}} + C.$

616. Die vorgetragene Regel $\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$ heißt die Fundamentalregel der Integralrechnung; sie findet bey allen einnamigen Differenzialen, und auch bey allen aus abgesönderten einnamigen Gliedern zusammengesetzten Differenzialgrößen statt, worinnen die veränderliche Größe in einem jeden Gliede besonders auf was immer für eine Potenz erhoben vorkömmt, der unveränderliche Exponent m einer solchen einnamigen Potenz möge übrigens ganz oder gebrochen, positiv oder negativ seyn, **den einzigen Fall ausgenommen**, wenn $m = -1$ seyn sollte; es ist nämlich $\int ax^{-1}dx$ keineswegs $= \frac{ax^{-1+1}dx}{dx(-1+1)} = \frac{ax^0}{0}$; sondern es ist vermög (614) $\int ax^{-1}dx = \int\frac{adx}{x} = a.Lx$; **wenn demnach in der Folge bey einigen allgemeinen Formeln nach geschehener Integration ein Glied von dieser Gestalt** $a.\frac{x^0}{0}$ **zum Vorschein kommen sollte, so muß jederzeit dafür** $a.Lx$ **geschrieben werden, es möge** x **was immer bedeuten.** Es ist leicht einzusehen, daß die Fundamentalregel der Integralrechnung $\int ax^m dx = a.\frac{x^{m+1}}{m+1}$ in dem Falle $m = -1$ eine Ausnahme leiden müße. Denn da das Differenzial $ax^{-1}dx$ nach den Regeln der Differenzialrechnung aus **gar keiner Potenz** von x entstehen kann, so kann auch die Differenzialgröße $ax^{-1}dx$ **gar keine Potenz** von x zu ihrem Integrale haben, sondern das Integrale von $ax^{-1}dx$ ist $= a.Lx$, weil nur dieses Integrale die Differenzialgröße $ax^{-1}dx$ wieder herstellet, wenn man es nach (580) differenzieret.

Fig.

tigen Bezeichnung $\int \frac{x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}a\mathrm{d}x}{ax - x^2 + a^2} = -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)}$ $+ C$ bey dem Werth o des gesuchten Integrals, auch $x = 0$ setzet, so ist $0 = -La + C$, nämlich $C = La$, und folglich wieder $\int \frac{x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}a\mathrm{d}x}{ax - x^2 + a^2} = -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + La$ $= L\left(\frac{a^2}{ax - x^2 + a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ wie ehevor.

615. Vermög (579) ist $\mathrm{d}\left(\frac{ax^n}{n}\right) = ax^{n-1}\mathrm{d}x$; also $\int ax^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{ax^n}{n}$; man setze $n - 1 = m$, so ist $\int ax^m\mathrm{d}x$ $= \frac{ax^{m+1}}{m+1} = \frac{ax^{m+1}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x(m+1)}$ eine Formel, welche anzeiget, wie man zu einer einnamigen Differenzialgröße das zugehörige Integrale zu suchen habe. Diese Formel führet auf folgende Regel; **das Integrale eines einnamigen Differenzials, worinnen sich was immer für eine Potenz der veränderlichen Größe befindet, wird gefunden, wenn man in der Differenzialfunktion den unveränderlichen Exponenten der veränderlichen Größe um 1 vermehret, und sodann diese Funktion mit dem Produkte, aus dem Differenzial der veränderlichen Größe in den um 1 vermehrten Exponenten, dividiret.** Z. B.

$$\int \mathrm{d}x = \int x^0\mathrm{d}x = \frac{x^{0+1}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x(0+1)} = x + C.$$

$$\int ax^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x(\frac{2}{3}+1)} = \tfrac{3}{5}ax^{\frac{5}{3}} + C.$$

$$\int -ax^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = -\frac{ax^{-\frac{3}{2}+1}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x(-\frac{3}{2}+1)} = 2ax^{-\frac{1}{2}} + C.$$

∫

Jmgleichen $\int(\frac{1}{2}a^2 + bx)\mathrm{d}x\sqrt{(a^2x + bx^2)} = \int\frac{1}{2}(a^2\mathrm{d}x + 2bx\mathrm{d}x)(a^2x + bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(a^2\mathrm{d}x + 2bx\mathrm{d}x)(a^2x + bx^2)^{\frac{3}{2}}}{(a^2\mathrm{d}x + 2bx\mathrm{d}x).\frac{3}{2}}$ Fig.

$= \frac{1}{3}(a^2x + bx^2)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}.$

Hingegen läßt sich $(a^2\mathrm{d}x + bx\mathrm{d}x)(a^2x + bx^2)^{\frac{1}{2}}$ nach dieser Regel nicht integriren, weil man die Größe ausser dem Zeichen keineswegs für das Differenziale der Größe unter dem Zeichen mit einem unveränderlichen Coefficienten verbunden ansehen kann; diese Differenzialgröße kann nur integriret werden, wenn man sie also ansetzet, $\int(a^2\mathrm{d}x + bx\mathrm{d}x)(a^2x + bx^2)^{\frac{1}{2}} = \int a^2x^0\mathrm{d}x.(a^2x + bx^2)^{\frac{1}{2}} + \int bx\mathrm{d}x(a^2x + bx^2)^{\frac{1}{2}} = \int a^2x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x(a^2 + bx)^{\frac{1}{2}} + \int bx^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x(a^2 + bx)^{\frac{1}{2}}$, und sodann jedes von diesen letzten zwey Gliedern durch Kunstgriffe entwickelt, welche in der Folge vorkommen werden

618. Die Differenzialgrößen von folgender Gestalt $(a + bx^g + cx^h + \ldots)^k ex^q\mathrm{d}x(A + Bx^m + Cx^n + \ldots)^p$ lassen sich integriren, wenn k und p ganze positive Zahlen sind, denn man darf nur die Potenzen k und p wirklich entwickeln, selbe sowohl untereinander als auch mit $ex^q\mathrm{d}x$ multipliciren, und darauf jedes Glied nach den bereits gegebenen Regeln integriren. Es ist z. B. für den einfachsten Fall

$$\int x^n\mathrm{d}x(a + bx^m)^p = \mathrm{Const} + a^p.\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$+ \frac{p.a^{p-1}b}{1}.\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}$$
$$+ \frac{p(p-1)a^{p-2}b^2}{1.\,2}.\frac{x^{2m+n+1}}{2m+n+1}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)a^{p-3}b^3}{1.\,2.\,3}.\frac{x^{3m+n+1}}{3m+n+1} + \ldots$$

 Denn

Fig. 617. Die Fundamentalregel der Integralrechnung erstrecket sich auch unmittelbar auf diejenigen Differenzialgrößen, welche aus zusammengesetzten zwey- oder mehrnamigen Potenzen bestehen, und dabey also beschaffen sind, daß sie ausser dem Zeichen das wirkliche Differenziale der Größe unter dem Zeichen mit was immer für einem unveränderlichen Coefficienten verbunden enthalten; z. B. $axdx(b+cx^2)^{-\frac{2}{3}}$ läßt sich nach der Fundamentalregel integriren, weil die Größe $axdx$ ausser dem Zeichen (ausser den Klammern) nichts anders ist, als das Differenzial von der Größe $b+cx^2$ unter dem Zeichen (inner den Klammern) multipliciret mit dem unveränderlichen Coefficienten $\frac{a}{2c}$; es ist nämlich $\int axdx(b+cx^2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{axdx(b+cx^2)^{-\frac{2}{3}+1}}{2cxdx(-\frac{2}{3}+1)}$

$$= \frac{3a}{2c}(b+cx^2)^{\frac{1}{3}} + C.$$

Man gelanget zu eben diesem Integrale durch nachstehende Substitution und Verwandlung, welche in der Integralrechnung öfters vorkömmt; man setze die Größe unter dem Zeichen $b+cx^2=z$, so ist $x^2=\frac{z-b}{c}$, $2xdx=\frac{dz}{c}$ und

$axdx(b+cx^2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{adz}{2c}.z^{-\frac{2}{3}} = \frac{a}{2c}.z^{-\frac{2}{3}}dz$; folglich

$\int axdx(b+cx^2)^{-\frac{2}{3}} = \int\frac{a}{2c}.z^{-\frac{2}{3}}dz = \frac{3a}{2c}.z^{\frac{1}{3}}$, nämlich

$\int axdx(b+cx^2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{3a}{2c}(b+cx^2)^{\frac{1}{3}}$, wenn man wieder statt z seinen Werth setzet.

Allgemeine Formel um $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ zu entwickeln, wenn $(n+1):m$ eine ganze positive Zahl bedeutet. Fig.

619. Die in vorigen (618) entwickelte allgemeine Formel für das Integrale von $x^n dx(a+bx^m)^p$ läuft ohne Ende fort, wenn p was immer für eine negative, oder auch eine positive gebrochene Zahl bedeutet. Ein solches Integrale durch eine unendliche Reihe ausgedrücket ist gar nicht zu verwerfen, sondern in der Anwendung von recht guten Nutzen, wenn nur die unendliche Reihe sehr schnell abnimmt; im Gegentheile ist es von einem sehr eingeschränkten Gebrauche.

Zuweilen läßt sich $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ durch eine endliche Reihe angeben, wenn schon p keine ganze positive Zahl ist, und zwar dazumal, wenn $(n+1):m$ eine ganze positive Zahl bedeutet, m, n, p mögen übrigens wie immer beschaffen seyn.

Es ist nämlich von der Differenzialgröße $x^n dx(a+bx^m)^p$ wenn man die ganze positive Zahl $\frac{n+1}{m}=g$, und $g+p=q$ setzet, sodann das gesuchte Integrale

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = \text{Const} + \frac{1}{mb^g}.\left\{\frac{(a+bx^m)^q}{q}\right.$$
$$-\left(\frac{g-1}{1}\right)a.\frac{(a+bx^m)^{q-1}}{q-1}$$
$$+\left(\frac{g-1}{1}\right)\left(\frac{g-2}{2}\right)a^2.\frac{(a+bx^m)^{q-2}}{q-2}$$
$$\left.-\left(\frac{g-1}{1}\right)\left(\frac{g-2}{2}\right)\left(\frac{g-3}{3}\right)a^3.\frac{(a+bx^m)^{q-3}}{q-3}+\ldots\right\}$$

Denn man setze nur die Größe unter dem Zeichen $a+bx^m = z$, so ist $x = b^{-\frac{1}{m}}(z-a)^{\frac{1}{m}}$, $dx = \frac{1}{m}b^{-\frac{1}{m}}dz(z-a)^{\frac{1}{m}-1}$, und $x^n = b^{-\frac{n}{m}}(z-a)^{\frac{n}{m}}$; und endlich, wenn man bey der

Fig. Denn es ist vermög (185) die Potenz

$$(a + bx^m)^p = a^p + \frac{pa^{p-1}bx^m}{1} + \frac{p(p-1)a^{p-2}b^2x^{2m}}{1.2}$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)a^{p-3}b^3x^{3m}}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

und folglich $\int x^n dx(a + bx^m)^p = \int a^p x^n dx + \frac{\int pa^{p-1}bx^{m+n}dx}{1}$

$$+ \int \frac{p(p-1)a^{p-2}b^2x^{2m+n}dx}{1.2} + \ldots = C + a^p.\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$+ \frac{pa^{p-1}b}{1}.\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} + \ldots\ldots$$

Diese Reihe, deren Fortgang einleuchtend ist, bricht jederzeit ab, so oft p eine ganze positive Zahl bedeutet, m und n mögen übrigens beschaffen seyn, wie sie wollen. Nur ist dabey wohl zu merken, daß wenn darinnen bey der Anwendung ein Glied die Gestalt $A.\frac{x^0}{0}$ erhalten sollte, selbes $= A.\text{lognat}\,x$ sey vermög (616). Auch die Differenzialgrößen von der Gestalt $ax^g dx(bx^h + cx^k)^p$ lassen sich nach dieser allgemeinen Formel integriren, wenn man ohne Veränderung des Werthes ein Glied der Größe unter dem Zeichen von der veränderlichen Größe befreyet; es ist nämlich $ax^g dx(bx^h + cx^k)^p = ax^g dx \times x^{hp}.\frac{(bx^h + cx^k)^p}{(x^h)^p} = ax^{g+hp}dx(b + cx^{k-h})^p$; oder auch $ax^g dx(bx^h + cx^k)^p = ax^{g+kp}dx(bx^{h-k} + c)^p$. Es sey z. B. $\int x^{-\frac{9}{2}} dx(e^{\frac{3}{2}} x - x^{\frac{5}{2}})^2$ zu entwickeln, so ist $\int x^{-\frac{9}{2}} dx(e^{\frac{3}{2}} x - x^{\frac{5}{2}})^2 = \int x^{-\frac{5}{2}} dx(e^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}})^2$; man setze nun $a = a^{\frac{3}{2}}, b = -1, p = 2, n = -\frac{5}{2}, m = \frac{3}{2}$, und substituire diese Werthe in der allgemeinen Formel, so ist nach vorgenommener Reduktion das gesuchte Integrale $\int x^{-\frac{5}{2}} dx(e^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}})^2 = C - \frac{2}{3}e^3 x^{-\frac{3}{2}} - 2e^{\frac{3}{2}}.Lx + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Allohne Veränderung des Werthes die veränderliche Größe F g. unter dem Zeichen aus einem Gliede in das andere schaffet. Auch ist noch bey dieser allgemeinen Formel wohl zu merken, daß wenn darinnen bey der Anwendung ein Glied die Gestalt $A.\frac{(a+bx^m)^0}{0}$ erhalten sollte, selbes $= A.\text{lognat}(a+bx^m)$ seyn müße.

Die Integration der Differenzialgröße $x^{-\frac{3}{2}}dx(e^2x^{\frac{1}{2}}-2)^{-2}$ soll den Gebrauch dieser Formel erläutern; diese Differenzialgröße scheint bey dem ersten Anblicke gar nicht zu der gegenwärtigen allgemeinen Formel zu gehören, weil $\frac{n+1}{m}$ nämlich $\frac{-\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{2}}$ keine ganze positive Zahl bedeutet; allein da nach vorgenommener Vorbereitung $x^{-\frac{3}{2}}dx(e^2x^{\frac{1}{2}}-2)^{-2} = x^{-\frac{5}{2}}dx(e^2-2x^{-\frac{1}{2}})^{-2}$ wird, allwo nun $\frac{-\frac{5}{2}+1}{-\frac{1}{2}} = +3$ ist, so gehört diese Differenzialgröße allerdings zu der gegenwärtigen allgemeinen Formel; es ist nämlich (wenn man $g=3$, $q=g+p=3-2=1$, $a=e^2$, und $b=-2$ setzet) nach gehöriger Substitution und Reduktion das gesuchte Integrale

$$\int x^{-\frac{5}{2}}dx(e^2-2x^{-\frac{1}{2}})^{-2} = C+\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}e^2.L(e^2-2x^{-\frac{1}{2}})$$
$$-\tfrac{1}{4}e^4(e^2-2x^{-\frac{1}{2}})^{-1} = \int x^{-\frac{3}{2}}dx(e^2x^{\frac{1}{2}}-2)^{-2}.$$

Die Anfänger können untersuchen, ob nachstehende Differenzialgrößen hieher gehören, und belieben solche zu integriren, wenn sie finden sollten, daß sie sich mittelst dieser allgemeinen Formel entwickeln lassen. Als

1) $\frac{x^5dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$; 2) $2xdx(1+x^{-1})^{-2}$; 3) $\frac{dx}{x+x^3}$;

4) $\frac{x^{\frac{9}{2}}dx}{(x+x^{\frac{3}{2}})^5}$; 5) $(x^{-\frac{1}{3}}-2x^{-2})dx(1+ax^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}$;

Fig. zu integrirenden Differenzialgröße für $(a + bx^m)^p$, für x^n, und für dx ihre Werthe substituiret, $\int x^n dx(a + bx^m)^p$

$$= \int b^{-\frac{n}{m}} (z - a)^{\frac{n}{m}} \cdot \frac{1}{m} b^{-\frac{1}{m}} dz (z - a)^{\frac{1}{m} - 1} \cdot (z)^p$$

$$= \int \frac{z^p dz}{mb^{\frac{n+1}{m}}} (z - a)^{\frac{n+1}{m} - 1}$$, woraus deutlich zu ersehen ist, daß dieses Integrale durch eine endliche Reihe sich bestimmen lasse, wenn $(n + 1) : m$ eine ganze positive Zahl bedeutet. Um diese Reihe auf eine bequeme Art zu entwickeln, setze man $(n + 1) : m = g$, und $g + p = q$, so ist $\int \frac{z^p dz}{mb^{\frac{n+1}{m}}} (z - a)^{\frac{n+1}{m} -}$

$$= \int \frac{z^{q-g} dz}{mb^g} (z - a)^{g-1}$$; nun ist vermög (185) die Potenz

$$(z - a)^{g-1} = z^{g-1} - (g-1) a z^{g-2} + \left(\frac{g-1}{1}\right)\left(\frac{g-2}{2}\right) a^2 z^{g-3} - \ldots$$

folglich $\int \frac{z^{q-g} dz}{mb^g} (z - a)^{g-1} = \frac{1}{mb^g} \cdot \int [z^{q-1} dz - (g-1) a z^{q-2} dz$

$$+ \left(\frac{g-1}{1}\right)\left(\frac{g-2}{2}\right) a^2 z^{q-3} dz - \left(\frac{g-1}{1}\right)\left(\frac{g-2}{2}\right)\left(\frac{g-3}{3}\right) a^3 z^{q-4} dz + \ldots]$$

$$= \frac{1}{mb^g} \left\{ \frac{z^q}{q} - (g-1) a \cdot \frac{z^{q-1}}{q-1} + \left(\frac{g-1}{1}\right)\left(\frac{g-2}{2}\right) a^2 \cdot \frac{z^{q-2}}{q-2} - \ldots \right\},$$

nämlich es ist, wenn man statt z wieder seinen Werth setzet, sodann endlich $\int x^n dx(a + bx^m)^p = C + \frac{1}{mb^g} \cdot \left\{ \frac{(a + bx^m)^q}{q} \right.$

$$\left. - \left(\frac{g-1}{1}\right) a \cdot \frac{(a + bx^m)^{q-1}}{q - 1} + \left(\frac{g-1}{1}\right)\left(\frac{g-2}{2}\right) a^2 \cdot \frac{(a + bx^m)^{q-2}}{q - 2} - \right\},$$

allwo $(n + 1) : m = g$, und $g + p = q$ gesetzet ist; zuweilen ist auch $n = 0$.

Es giebt mehrere Differenzialgrößen, welche erst durch eine leichte Vorbereitung die Eigenschaft erhalten, daß $(n + 1) : m$ einer ganzen positiven Zahl gleich wird, wenn man nämlich

ohne

7) $\int ax^{-\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}} = \int ax^{-1}dx(2ax^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc sin v}x$, Fig.
oder $\int ax^{-\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}} = \int ax^{-1}dx(2ax^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$
$= \text{Arc}\cos(a-x)$;

8) $\int -ax^{-\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}} = \int -ax^{-1}dx(2ax^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$
$= \text{Arc cosv}\,x$, oder $\int -ax^{-\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc}\sin(a-x)$.

Daß diese Integralformeln richtig sind, erhellet daher, weil sie durch die Differenzirung wieder die zu integrirenden Differenzialgrößen herstellen.

Nun läßt sich auch $dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, wie auch $-xdx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$; imgleichen $dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{\frac{1}{2}}$, und $-dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}$ integriren; es ist nämlich

9) $\int dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{1}{2}a.\,\text{Arc}\sin x$;

10) $\int -dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a.\,\text{Arc}\cos x - \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}$;

11) $\int dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = \int x^{\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{\frac{1}{2}} = \int x^1 dx(2ax^{-1}-1)^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2}a.\,\text{Arc}\cos(a-x) - \frac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax-x^2)}$;

12) $\int -dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}} = \int -x^{\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{\frac{1}{2}}$
$= \int -x^1 dx(2ax^{-1}-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a-x)\sqrt{(2ax-x^2)}$
$+ \frac{1}{2}a.\,\text{Arc}\sin(a-x)$.

Diese vier letzten Formeln sind durch folgende Kunstgriffe integriret. Es ist $\int dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \int\left[\frac{1}{2}dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\right] = \int\left[\frac{1}{2}dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$

$$= \int\left[\tfrac{1}{2}dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}x^2dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a^2dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \int\left[\tfrac{1}{2}dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}x^2dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right] + \tfrac{1}{2}a.\int adx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

nun ist ganz richtig der 1. Theil $\int\left[\frac{1}{2}dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$

=

Fig. 6) $x^3 dx(x^4 - a^2x^2)^3$; 7) $\dfrac{a^3 dx}{x^2\sqrt{(ax + x^2)}}$;

8) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}x^2 dx \sqrt[3]{(a^3 + 2a^2x + ax^2)}}{\sqrt{(a+x)}}$; 9) $axdx(a^2x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}$;

u. s. w.

Fundamentalverzeichniß derjenigen Differenzialformeln, welche durch Kreisbögen sich integriren lassen.

620. Die (584. I.. VIII) gefundenen Differenzialgrößen $adx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, u. s. w. lassen sich nach den bisher gegebenen Gründen nicht anders als durch unendliche Reihen integriren; hingegen finden wir durch den umgekehrten Weg, wenn wir auf ihre Entstehungsart acht geben vermög (584. I.. VIII)

1) $\int adx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc sin } x$; 2) $\int -adx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc cos } x$;

3) $\int a^2dx(a^2 + x^2)^{-1} = \text{Arc tang } x$; 4) $\int -a^2dx(a^2 + x^2)^{-1} = \text{Arc cot } x$;

5) $\int a^2x^{-1}dx(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc sec } x$, oder $\int a^2x^{-1}dx(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc cos } \dfrac{a^2}{x}$, weil für den Halbmesser a nach trigonometrischen Gründen $\text{Arc sec } x = \text{Arc cos } \dfrac{a^2}{x}$ ist, denn es sey $\text{Arc sec } x = z$, so ist $x = \sec z = \dfrac{a^2}{\cos z}$, also $\cos z = \dfrac{a^2}{x}$, und $z = \text{Arc cos} \dfrac{a^2}{x} = \text{Arc sec } x$;

6) $\int -a^2x^{-1}dx(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc cosec } x$, oder $\int -a^2x^{-1}dx(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc sin} \dfrac{a^2}{x}$;

Wenn man die zwölf entwickelten Integralformeln ohne Veränderung des Werthes dergestalt einrichtet, daß sie sich auf den Tabularhalbmesser $= 1$ beziehen, und über dieses bey den Formeln 7), 8), 11), 12) die Größe $2a = c$ setzet, und jede derselben mit einem schicklichen unveränderlichen Coefficienten multipliciret, so findet man sodann nach vorgenommener Reduktion folgende zwölf Integralformeln, welche bey der Anwendung der Integralrechnung vom häufigen Gebrauche sind; als Fig.

I. $\int bx^0 dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} = b.\,\text{arc sin}\,(x:a)$.

II. $\int -bx^0 dx(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} = b.\,\text{arc cos}\,(x:a)$.

III. $\int bx^0 dx(a^2+x^2)^{-1} = \frac{b}{a}.\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a}$.

IV. $\int -bx^0 dx(a^2+x^2)^{-1} = \frac{b}{a}.\,\text{arc cot}\,\frac{x}{a}$.

V. $\int bx^{-1} dx(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{b}{a}.\,\text{arc cos}\,\frac{a}{x}$.

VI. $\int -bx^{-1} dx(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{b}{a}.\,\text{arc sin}\,\frac{a}{x}$.

VII. $\int bx^{-\frac{1}{2}} dx(c-x)^{-\frac{1}{2}} = \int bx^{-1} dx(cx^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$
$= b.\,\text{arc cos}(1-2x:c)$.

VIII. $\int -bx^{-\frac{1}{2}} dx(c-x)^{-\frac{1}{2}} = \int -bx^{-1} dx(cx^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}$
$= b.\,\text{arc sin}\,(1-2x:c)$.

IX. $\int bx^0 dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a^2b.\,\text{arc sin}(x:a) + \frac{1}{2}bx\sqrt{(a^2-x^2)}$.

X. $\int -bx^0 dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a^2b.\,\text{arc cos}\,(x:a) - \frac{1}{2}bx\sqrt{(a^2-x^2)}$.

XI. $\int bx^{\frac{1}{2}} dx(c-x)^{\frac{1}{2}} = \int x^1 dx(cx^{-1}-1)^{\frac{1}{2}} =$
$\frac{1}{8}bc^2.\,\text{arc cos}\,(1-2x:c) - \frac{1}{8}b(2c-4x)\sqrt{(cx-x^2)}$

XII. $\int -bx^{\frac{1}{2}} dx(c-x)^{\frac{1}{2}} = \int -bx^1 dx(cx^{-1}-1)^{\frac{1}{2}} =$
$\frac{1}{8}bc^2.\,\text{arc sin}\,(1-2x:c) + \frac{1}{8}b(2c-4x)\sqrt{(cx-x^2)}$.

Die

Fig. $= \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2 - x^2)}$, weil dieses Integrale durch die Differenzirung wieder die zu integrirende Differenzialgröße herstellet; und der zweyte Theil ist vermög dem vorhergehenden $\frac{1}{2}a.\int a dx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a.\,\text{Arc}\sin x$; folglich $\int dx(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{1}{2}a.\,\text{Arc}\sin x$. Und eben so findet man $\int - dx(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a.\,\text{Arc}\cos x - \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2 - x^2)}$

Um $\int dx(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ zu integriren, setze man $x = a - y$, so ist $dx = -dy$, $2ax = 2a^2 - 2ay$, $x^2 = a^2 - 2ay + y^2$, und $2ax - x^2 = a^2 - y^2$; folglich $\int dx(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ $= \int - dy(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a.\,\text{Arc}\cos y - \frac{1}{2}y\sqrt{(a^2 - y^2)}$, nämlich $\int dx(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a.\,\text{Arc}\cos(a - x) - \frac{1}{2}(a - x) \times \sqrt{(2ax - x^2)}$, wenn man für y, und $a^2 - y^2$ wieder ihre Werthe setzet. Und eben so findet man $\int - dx(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}a.\,\text{Arc}\sin(a - x) + \frac{1}{2}(a - x)\sqrt{(2ax - x^2)}$.

Weiter unten sollen zwey allgemeine Formeln gegeben werden, wodurch man eine unzählige Menge der Differenzialgrößen mittelst der Kreisbögen integriren kann, ohne daß man zu besonderen Kunstgriffen wie im gegenwärtigen Falle die Zuflucht zu nehmen genöthiget wird.

621. Diese entwickelten zwölf integralformeln beziehen sich auf einen Kreis, dessen Halbmesser $= a$ ist. Aus dieser Ursache ist bey Arc der Buchstabe A gewählet worden, um die Bezeichnung Arc von arc zu unterscheiden, welche letztere Bezeichnung arc (mit klein a) in der Folge jederzeit auf den Halbmesser $= 1$ sich beziehen soll. Um diese Formeln für die Anwendung auf das vortheilhafteste einzurichten, muß man sie ohne Veränderung des Werthes auf den Halbmesser $= 1$ reduciren, damit sie mit der Sinustafel für den ganzen Sinus $= 1$, und auch mit der Tafel für die Längen der Kreisbögen eines Kreises von dem Halbmesser $= 1$ übereinstimmen.

Wenn

Fig.

$$\begin{array}{l} \text{arc } 56^\circ = 0,977384381\,\text{I} \\ \text{arc } 19' = 0,005268760 \\ \hline \text{arc } 56^\circ\, 19' = 0,9829112571 = \text{arc tang}(x:a) \\ \text{mult. mit } a = 13,09 \\ \hline \end{array}$$

giebt $a.\text{arc tang}(x:a) = 12,866308355$ Schuhen.

622. Mittelst der gefundenen zwölf Formeln lassen sich nun eine Menge Differenzialgrößen durch eine blosse Vergleichung und Substitution sehr leicht integriren. Z. B. nach der Formel III ist $\int \frac{a\mathrm{d}x}{b+cx^2} = \int \frac{a\mathrm{d}x:c}{(b+cx^2):c} = \int \frac{a}{c} x^0 \mathrm{d}x\left(\frac{b}{c}+x^2\right)^{-1}$

$$= \frac{a}{c} : \frac{b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}} \times \text{arc tang}\left(x : \frac{b^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{a}{\sqrt{bc}}.\text{arc tang}\sqrt{\frac{cx^2}{b}}.$$

Eben so findet man nach der Formel IX,

$$\int a\mathrm{d}x\sqrt{(b-cx^2)} = ac^{\frac{1}{2}}.\int x^0\mathrm{d}x\left(\frac{b}{c}-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{ab}{2\sqrt{c}}.\text{arc sin}\sqrt{\frac{cx^2}{b}}$$

$+ \frac{1}{2}ax\sqrt{(b-cx^2)}$; u. s. w.

Fundamentalverzeichniß derjenigen verwickelten Differenzialgrößen, welche durch Hilfe der natürlichen Logarithmen sich integriren lassen.

623. Folgende neun Formeln sind durch Hilfe der natürlichen Logarithmen integriret; sie können in der Anwendung wichtige Dienste leisten, und sind zugleich Grundformeln, wodurch sich wieder unzählige andere Differenzialgrößen integriren lassen, wie es weiter unten zu ersehen seyn wird. Diese neun Formeln sind

I. $\int \frac{b\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = \int bx^0\mathrm{d}x(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}} = C + b.L(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$.

II. $\int bx^0\mathrm{d}x(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} = C + \frac{1}{2}bx\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 b.L(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$.

III. $\int \frac{b\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2 \pm ax)}} = \int bx^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x(x \pm a)^{-\frac{1}{2}} = \int bx^{-1}\mathrm{d}x(1 \pm ax^{-1})^{-\frac{1}{2}}$

$= \text{const} + b.L\,(x \pm \frac{1}{2}a + \sqrt{x^2 \pm ax})$.

IV.

Fig. Die Einrichtung dieser Formeln für den Tabular-Halbmesser $= 1$ ist leicht einzusehen; es ist z. B. vermög (620) die 7te Formel $\int ax^{-\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}} = \text{Arc}\cos(a-x)$ für den Halbmesser a; man setze die wirkliche Länge dieses Kreisbogens $\text{Arc}\cos(a-x) = u$, und für den Tabularhalbmesser $= 1$ sey eines Bogens wirkliche Länge $= t$, der mit u einerley Anzahl der Grade enthält, so ist $\cos \text{Arc}\, u = (a-x)$ für den Halbmesser a; nun ist $a : 1 = \cos \text{Arc}\, u : \cos \text{arc}\, t$ vermög (445), nämlich $a : 1 = a - x : \cos \text{arc}\, t$; also $\cos \text{arc}\, t = (1 - x : a)$ und $t = \text{arc}\cos(1 - x : a)$ für den Halbmesser 1; ferner ist wegen der Aehnlichkeit der Bögen, $1 : a = t : u$, nämlich $1 : a = \text{arc}\cos(1 - x : a) : \text{Arc}\cos(a - x)$, folglich $\text{Arc}\cos(a - x) = a.\text{arc}\cos(1 - x : a)$; aber es ist $\text{Arc}\cos(a-x) = \int ax^{-\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}}$; also auch $\int ax^{-\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}} = a.\text{arc}\cos(1-x:a) = a.\int x^{-\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}}$, und $\int x^{-\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc}\cos(1-x:a)$, oder endlich, wenn man $2a = c$ setzet, und beyde Theile der Gleichung mit b multipliciret, $\int bx^{-\frac{1}{2}}dx(c-x)^{-\frac{1}{2}} = b.\text{arc}\cos(1 - 2x : c)$; u. s. w.

Es sey zum Beyspiel aus der Differenzialgleichung $dz = a^2dx(a^2+x^2)^{-1}$ die Größe z zu suchen, so ist $z = \int a^2dx(a^2+x^2)^{-1} = a.\text{arc tang}(x : a) + C$; es sey für $z = 0$, auch $x = 0$; also $C = 0$, und $z = a.\text{arc tang}(x : a)$; nun setze man $a = 13{,}09$ Schuhen, und $x = 19{,}64$ Schuhen, so ist für diesen Fall $z = 12{,}866308355$ Schuhen; denn es ist in dieser Voraussetzung $\frac{x}{a} = \frac{19{,}64}{13{,}09} = 1{,}5003819$; zu dieser Tangente $1{,}5003819$ gehören sehr genau $56^\circ\ 19'$, und es ist nach den berechneten Tafeln für den Halbmesser 1

arc

ten Kunstgriff leichter integriren läßt. Es ist $\int dx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} =$ Fig.
$\int[\frac{1}{2}dx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}dx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}] = \int[\frac{1}{2}dx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}$
$+ \frac{\frac{1}{2}dx(x^2 \pm a^2)}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}}] = [\int \frac{1}{2}dx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^2 dx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}}] \pm$
$\int \frac{1}{2}a^2 dx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}}$; nun ist ganz richtig der erste Theil
$\int[\frac{1}{2}dx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^2 dx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2}x\sqrt{(x^2 \pm a^2)}$,
und der zweyte Theil ist vermög dem vorhergehenden
$\pm \int \frac{1}{2}a^2 dx(x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2}a^2 . L(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$; folglich ist
$\int dx(x^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}} = C + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 . L(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$.

Um die Formel III für das Zeichen + zu finden, nämlich um $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + ax)}}$ zu entwickeln, setze man $x = z - \frac{1}{2}a$, so ist $dx = dz$, $x^2 = z^2 - az + \frac{1}{4}a^2$, $ax = az - \frac{1}{2}a^2$, und $\sqrt{(x^2 + ax)} = \sqrt{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)}$; folglich $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + ax)}}$
$= \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)}} = \text{lognat}\,(z + \sqrt{z^2 - \frac{1}{4}a^2})$ vermög dem vorhergehenden, und endlich ist, wenn man statt z wieder seinen gehörigen Werth $x + \frac{1}{2}a$ setzet,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + ax)}} = C + \text{lognat}\,(x + \tfrac{1}{2}a + \sqrt{x^2 + ax}).$$

Um die Formel III für das Zeichen — zu finden, muß man $x = z + \frac{1}{2}a$ setzen, und sodann die Reduktion eben so vornehmen, wie es für das Zeichen + geschehen ist.

Auf die nämliche Art findet man auch die Formel IV, da man nämlich $x = z - \frac{1}{2}a$ bey dem Zeichen +, und $x = z + \frac{1}{2}a$ bey dem unteren Zeichen — setzet.

Die Formel V wird gefunden, wenn man $x = \frac{a}{z} = az^{-1}$ setzet; denn es ist sodann $dx = -az^{-2}dz$, $x^2 = a^2 z^{-2}$, und

Fig. IV. $\int b dx \sqrt{x^2 \pm ax} = \int b x^{\frac{1}{2}} dx (x \pm a)^{\frac{1}{2}} = \int b x^1 dx (1 \pm a x^{-1})^{\frac{1}{2}}$
$= C + \frac{1}{4} b (2x \pm a) \sqrt{x^2 \pm ax} - \frac{1}{8} a^2 b . L (x \pm \frac{1}{2} a + \sqrt{x^2 \pm ax})$.

V. $\int \frac{b dx}{x \sqrt{(a^2 \pm x^2)}} = \int b x^{-1} dx (a^2 \pm x^2)^{-\frac{1}{2}} = C - \frac{b}{a} . L \left(\frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x.} \right)$.

VI. $\int \frac{b dx}{a^2 - x^2} = \int b x^0 dx (a^2 - x^2)^{-1} = C + \frac{b}{2a} . L \left(\frac{a + x}{a - x} \right)$

VII. $\int \frac{b dx}{x^2 - a^2} = \int b x^0 dx (x^2 - a^2)^{-1} = C + \frac{b}{2a} . L \left(\frac{x - a}{x + a} \right)$

VIII. $\int \frac{b dx}{ax \pm x^2} = \int b x^{-1} dx (a \pm x)^{-1} = \int b x^{-2} dx (a x^{-1} \pm 1)^{-1}$

$= \text{const} + \frac{b}{a} . L \left(\frac{x}{a \pm x} \right) = C - \frac{b}{a} . L \left(\frac{a \pm x}{x} \right)$.

IX. $\int \frac{b dx}{x^2 - ax} = \int b x^{-1} dx (x - a)^{-1} = \int b x^{-2} dx (1 - a x^{-1})^{-1}$

$= \text{const} + \frac{b}{a} . L \left(\frac{x - a}{x} \right) = C - \frac{b}{a} . L \left(\frac{x}{x - a} \right)$.

Diese neun Formeln sind durch folgende Kunstgriffe integriret.

Bey der Formel I setze man $\sqrt{(x^2 \pm a^2)} = z - x$, so ist $x^2 \pm a^2 = z^2 - 2zx + x^2$, woraus $x = \frac{1}{2} z \mp \frac{1}{2} a^2 z^{-1}$, $dx = \frac{1}{2} dz \pm \frac{1}{2} a^2 z^{-2} dz$, $z - x = z - (\frac{1}{2} z \mp \frac{1}{2} a^2 z^{-1}) = \frac{1}{2} z \pm \frac{1}{2} a^2 z^{-1} = \sqrt{(x^2 \pm a^2)}$, und $z = x + \sqrt{(x^2 \pm a^2)}$ folgt; es ist also durch diese Substitution

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = \int \frac{\frac{1}{2} dz \pm \frac{1}{2} a^2 z^{-2} dz}{\frac{1}{2} z \pm \frac{1}{2} a^2 z^{-1}} = \int \frac{z^2 dz \pm a^2 dz}{z^3 \pm a^2 z} = \int \frac{dz}{z}$$

$= \text{lognat}\, z$, nämlich $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = \text{lognat} (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$, wenn man wieder statt z seinen Werth setzet, und endlich $\int b x^0 dx (x^2 \pm a^2)^{-\frac{1}{2}} = C + b . \text{lognat} (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$, wenn man beyderseits mit b multipliciret.

Durch eine eben solche Verwandlung kann die Formel II gefunden werden, welche sich aber durch folgenden schon bekann-

ten

624. Durch Hilfe dieser logarithmischen Integralformeln lassen sich nun eine Menge Differenzialgrößen durch die blosse Vergleichung und Substitution integriren. Z. B. nach der Formel I ist $\int \frac{a dx}{\sqrt{(cx^2-b)}} = \int \frac{a}{c^{\frac{1}{2}}} x^0 dx \left(x^2 - \frac{b}{c}\right)^{-\frac{1}{2}}$ Fig.

$= C + \frac{a}{\sqrt{c}} . L\left(x + \sqrt{\left(x^2 - \frac{b}{c}\right)}\right)$.

Eben so ist $\int a dx \sqrt{(b+cx^2)} = ac^{\frac{1}{2}} . \int x^0 dx (bc^{-1} + x^2)^{\frac{1}{2}}$

$= \text{const} + \frac{1}{2} ac^{\frac{1}{2}} x \sqrt{\left(\frac{b}{c} + x^2\right)} + \frac{1}{2} ac^{\frac{1}{2}} \frac{b}{c} . L(x + \sqrt{bc^{-1} + x^2})$

$= \text{const} + \frac{1}{2} ax \sqrt{(b+cx^2)} + \frac{1}{2} abc^{-\frac{1}{2}} . L(x + \sqrt{bc^{-1} + x^2})$.

Es sey nun aus der Differenzialgleichung $dR = dx \sqrt{(x^2 + ax)}$ die Größe R zu suchen, so ist nach der 4ten Formel $R = C + \frac{1}{4}(2x + a)\sqrt{x^2 + ax} - \frac{1}{8}a^2 . L(x + \frac{1}{2}a + \sqrt{x^2 + ax})$; für $R = 0$, sey auch $x = 0$, so ist $C = \frac{1}{8}a^2 . L \frac{1}{2}a$; also $R = \frac{1}{8}a^2 . \text{lognat} \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}(2x + a)\sqrt{x^2 + ax} - \frac{1}{8}a^2 . \text{lognat}(x + \frac{1}{2}a + \sqrt{x^2 + ax})$. Man setze $a = 40$, und $x = 9$ Klaftern, so ist $R = 121{,}241852$ Quadratklaftern, weil R ein Flächenausdruck ist; die Rechnung um R in Zahlen zu finden, wird auf folgende Art angelegt.

lognat $\frac{1}{2}a$ = lognat 20 =		$2{,}99573227$
mult. mit $\frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{8} . 1600$ =		200
giebt $\frac{1}{8}a^2 .$ lognat $\frac{1}{2}a$ =		$599{,}146454 = A$
ferner ist $\sqrt{(x^2+ax)} = \sqrt{(81+360)} = \sqrt{441} = 21$		
multipl. mit $\frac{1}{4}(2x+a) = \frac{1}{4}(58) = 14{,}5$		
giebt $\frac{1}{4}(2x+a)\sqrt{x^2+ax}$	$= 304{,}5$	$= B$
	$A + B$ =	$903{,}646454 = C$
$L(x + \frac{1}{2}a + \sqrt{x^2+ax}) = L50 =$		$3{,}91202301$
multipl. mit $\frac{1}{8}a^2$ =		200
giebt $\frac{1}{8}a^2 L(x + \frac{1}{2}a + \sqrt{x^2+ax}) = 782{,}404602$		$= D$
und endlich $C - D$		$= 121{,}241852 = R$

Fig. $\sqrt{(a^2 \pm x^2)} = \sqrt{(a^2 \pm a^2 z^{-2})} = a z^{-1} \sqrt{(z^2 \pm 1)}$; folglich
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a^2 \pm x^2)}} = \int \frac{-a z^{-2} dz}{a z^{-1} . a z^{-1} \sqrt{(z^2 \pm 1)}} = \int -\frac{1}{a} dz (z^2 \pm 1)^{-\frac{1}{2}}$$
$= -\frac{1}{a} . L(z + \sqrt{z^2 \pm 1})$, und endlich wenn man wieder statt z seinen Werth $\frac{a}{x}$ setzet,
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(a^2 \pm x^2)}} = C - \frac{1}{a} . L\left(\frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right).$$

Die Formel VI wird gefunden, wenn man nach (152) den Bruch $\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{(a+x)(a-x)}$ in zwey andere zerleget; man setze nämlich $\frac{1}{(a+x)(a-x)} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x}$, so ist $\frac{1}{(a+x)(a-x)} = \frac{aA - Ax + aB + Bx}{(a+x)(a-x)}$, und $0 = (aA + aB - 1) + (B - A)x$, es möge x was immer bedeuten, folglich $(aA + aB - 1) = 0$, und auch $B - A = 0$, woraus $A = \frac{1}{2a}$, und $B = \frac{1}{2a}$ folgt; es ist demnach
$$\frac{1}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a(a+x)} + \frac{1}{2a(a-x)} = \frac{1}{a^2 - x^2},$$
und $\int \frac{b dx}{a^2 - x^2} = \int \left(\frac{b dx}{2a(a+x)} + \frac{b dx}{2a(a-x)}\right) = \frac{b}{2a} . \int \frac{dx}{a+x} - \frac{b}{2a} . \int \frac{-dx}{a-x} = C + \frac{b}{2a} . L(a+x) - \frac{b}{2a} . L(a-x)$
$= C + \frac{b}{2a} . L\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$. Auf die nämliche Art wird die 7te, 8te, und 9te Formel gefunden; die zwey letzteren können auch nach (619) entwickelt werden.

624.

für $(n-r):m=1$ Fig.

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = C + \frac{x^f(a+bx^m)^{p+1}}{bg} - \frac{af}{bg}.\int x^{n-m}dx(a+bx^m)^p;$$

für $(n-r):m=2$ ist

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = C + \frac{x^f(a+bx^m)^{p+1}}{bg} - \frac{afx^{f-m}(a+bx^m)^{p+1}}{b^2g(g-m)}$$
$$+\frac{a^2f(f-m)}{b^2g(g-m)}.\int x^{n-2m}dx(a+bx^m)^p;$$

für $(n-r):m=3$ ist

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = C + \frac{x^f(a+bx^m)^{p+1}}{bg} - \frac{afx^{f-m}(a+bx^m)^{p+1}}{b^2g(g-m)}$$
$$+\frac{a^2f(f-m)x^{f-2m}(a+bx^m)^{p+1}}{b^3g(g-m)(g-2m)}$$
$$-\frac{a^3f(f-m)(f-2m)}{b^3g(g-m)(g-2m)}.\int x^{n-3m}dx(a+bx^m)^p;$$

für $(n-r):m=4$ ist

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = C + \frac{x^f(a+bx^m)^{p+1}}{bg} - \frac{afx^{f-m}(a+bx^m)^{p+1}}{b^2g(g-m)}$$
$$+\frac{a^2f(f-m)x^{f-2m}(a+bx^m)^{p+1}}{b^3g(g-m)(g-2m)}$$
$$-\frac{a^3f(f-m)(f-2m)x^{f-3m}(a+bx^m)^{p+1}}{b^4g(g-m)(g-2m)(g-3m)}$$
$$+\frac{a^4f(f-m)(f-2m)(f-3m)}{b^4g(g-m)(g-2m)(g-3m)}.\int x^{n-4m}dx(a+bx^m)^p;$$

für $(n-r):m=5$ ist $\int x^n dx(a+bx^m)^p = C +$ u. s. w., wovon der Fortgang leicht einzusehen ist.

Diese allgemeine Formel beruhet auf folgenden Gründen. Es ist nach den Regeln der Differenzialrechnung $d(x^{k+1}(a+bx^m)^{p+1})$
$= (k+1)x^k dx(a+bx^m)^{p+1} + (p+1)x^{k+1}.mbx^{m-1}dx(a+bx^m)^p$
$= (k+1)x^k dx(a+bx^m)^p(a+bx^m) + (bmp+bm)x^{k+m}dx(a+bx^m)^p$
$= (ak+a)x^k dx(a+bx^m)^p + (bk+b+bmp+bm)x^{k+m}dx(a+bx^m)^p;$

 folg=

Fig. Es ist aus diesem Beyspiele einigermassen zu ersehen, was diese logarithmischen Integralformeln bedeuten. Da bereits ausführliche auf das genaueste berechnete Hilfstafeln vorhanden sind, worinnen nebst andern unentbehrlichen Tafeln auch die natürlichen Logarithmen, die wirklichen Längen der Sinus und Tangenten, und auch die wirklichen Längen der Kreisbögen für den Halbmesser 1 anzutreffen sind, so ist es für die Anwendung eben so gut, wenn man eine Differenzialgröße mittelst der Kreisbögen, oder auch mittelst der natürlichen Logarithmen integriret, als wenn das Integrale wirklich algebraisch ausgedrückt wäre, weil man in der Ausübung das gesuchte Resultat gemeiniglich zuletzt in Zahlen anzugeben hat. Dergleichen Hilfstafeln enthält das im vorigen Jahre von mir herausgegebene Werk unter dem Titel: **logarithmische, trigonometrische, und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln.**

Allgemeine Formel um $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^r dx(a+bx^m)^p$ zu entwickeln, wenn $(n-r):m$ einer ganzen positiven oder negativen Zahl gleich ist.

625. Wenn die Differenzialgröße $x^n dx(a+bx^m)^p$ nach keiner einzigen der bereits gegebenen Regeln sich integriren läßt, $x^r dx(a+bx^m)^p$ aber eine Differenzialgröße vorstellet, die sich entweder mittelst der Kreisbögen, oder mittelst der natürlichen Logarithmen integriren läßt, so kann das gesuchte Integrale $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^r dx(a+bx^m)^p$ entwickelt werden, wenn nur $(n-r):m$ eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet; und zwar auf folgende Art.

Um das gesuchte $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ auf das bekannte Integrale $\int x^r dx(a+bx^m)^p$ zu bringen, setze man $(1+n-m)=f$, und $(1+n+mp)=g$, so ist

für

wieder wie ehevor $(1+n-m)=f$, und $(1+n+mp)$ Fig.
$=g$ setzet; wenn demnach $n-2m=r$, nämlich $(n-r):m=2$ ist, so läßt sich das Integrale $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ nach der Formel für $(n-r):m=2$ auf das Integrale $\int x^r dx(a+bx^m)^p$ bringen; ist nun eines von diesen zweyen Integralen bekannt, so ist dadurch auch das zweyte bestimmet.

Uud eben so findet man die Formel für $(n-r):m=3$, wenn man $k+m=n-2m$, nämlich $k=n-3m$ in der Gleichung A setzet, daraus $\int x^{n-2m}dx(a+bx^m)^p$ ableitet, und diesen Werth in der Gleichung C substituiret; u. s. w.

626. Nun läßt sich $\int -Ax^6dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}} = -A.\int x^6dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ durch Hilfe dieser Formel auf das bekannte Integrale $\int x^0dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ bringen (623. I.), weil $\frac{n-r}{m}=\frac{6-0}{2}=3$ ist; es ist nämlich (wenn man $n=6$, $r=0$, $m=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=c^2$, $b=1$ setzet, darauf $1+n-m=1+6-2=5=f$, $1+n+mp=1+6+2.-\frac{1}{2}=6=g$ bestimmet, und endlich diese Werthe in der allgemeinen Formel bey $(n-r):m=3$ gehörig substituiret)

$$\int x^6dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{6}x^5(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{5}{6.4}c^2x^3(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{5.3}{6.4.2}c^4x(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{5.3.1.}{6.4.2.}c^6.\int x^0dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}};$$

und folglich auch, weil $\int x^0dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}=L(x+\sqrt{x^2+c^2})$ ist,

$$\int -Ax^6dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}=C-\tfrac{1}{6}Ax^5(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{5}{6.4}Ac^2x^3(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{5.3}{6.4.2}Ac^4x(x^2+c^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{5.3.1}{6.4.2}Ac^6.L(x+\sqrt{x^2+c^2}),$$

oder wenn man reduciret

$$\int -Ax^6dx(x^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}=C-5Ax\left(\frac{x^4}{30}-\frac{2c^2x^2}{48}+\frac{c^4}{16}\right)\sqrt{x^2+c^2}+\frac{5}{16}Ac^6.L(x+\sqrt{x^2+c^2})$$

Fig. folglich $x^{k+m}\mathrm{d}x(a+bx^m)^p = \frac{\mathrm{d}(x^{k+1}(a+bx^m)^{p+1})}{b(mp+m+k+1)}$

$-\frac{a(k+1)x^k\mathrm{d}x(a+bx^m)^p}{b(mp+m+k+1)}$, und $\int x^{k+m}\mathrm{d}x(a+bx^m)^p$

$= \int\frac{\mathrm{d}(x^{k+1}(a+bx^m)^{p+1})}{b(mp+m+k+1)} - \frac{a(k+1).\int x^k\mathrm{d}x(a+bx^m)^p}{b(mp+m+k+1)}$,

nämlich es ist $\int x^{k+m}\mathrm{d}x(a+bx^m)^p = \frac{x^{k+1}(a+bx^m)^{p+1}}{b(mp+m+k+1)}$

$-\frac{a(k+1)}{b(mp+m+k+1)}.\int x^k\mathrm{d}x(a+bx^m)^p \ldots\ldots \mathfrak{A}$.

In dieser Gleichung $\mathfrak{A}$ setze man $k+m=n$, nämlich $k=n-m$, so ist $\int x^n\mathrm{d}x(a+bx^m)^p = \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{p+1}}{b(1+n+mp)}$

$-\frac{a(1+n-m)}{b(1+n+mp)}.\int x^{n-m}\mathrm{d}x(a+bx^m)^p \ldots\ldots \mathfrak{B}$, woraus die Formel für $n-m=r$, nämlich für $(n-r):m=1$ folget, wenn man $1+n-m=f$, und $1+n+mp=g$ setzet; wenn demnach $n-m=r$, nämlich $(n-r):m=1$ ist, so läßt sich nach dieser Formel das Integrale $\int x^n\mathrm{d}x(a+bx^m)^p$ auf das Integrale $\int x^r\mathrm{d}x(a+bx^m)^p$ bringen.

In der Gleichung $\mathfrak{A}$ setze man $k+m=n-m$, nämlich $k=n-2m$, so ist $\int x^{n-m}\mathrm{d}x(a+bx^m)^p$

$=\frac{x^{1+n-2m}(a+bx^m)^{p+1}}{b(1+n+mp-m)} - \frac{a(1+n-2m)}{b(1+n+mp-m)}.\int x^{n-2m}\mathrm{d}x(a+bx^m)^p$;

man substituire diesen Werth in der Gleichung $\mathfrak{B}$, so ist

$$\int x^n\mathrm{d}x(a+bx^m)^p = \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{p+1}}{b(1+n+mp)}$$

$$-\frac{a(1+n-m)x^{1+n-2m}(a+bx^m)^{p+1}}{b^2(1+n+mp)(1+n+mp-m)}$$

$$+\frac{a^2(1+n-m)(1+n-2m)}{b^2(1+n+mp)(1+n+mp-m)}\int x^{n-2m}\mathrm{d}x(a+bx^m)^p \ldots \mathfrak{C}.$$

woraus die Formel für $(n-r):m=2$ folget, wenn man wie-

Fig.

Allgemeine Formel um $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^r dx(a+bx^m)^q$ zu entwickeln, wenn $(n-r):m$, und auch $p-q$ ganze positive oder negative Zahlen sind.

627. Um das gesuchte $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ auf das bekannte Integrale $\int x^r dx(a+bx^m)^q$ zu bringen, setze man $n+1=g$, so ist für $p-q=1$

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = C + \frac{x^g}{g}(a+bx^m)^p - \frac{bmp}{g}.\int x^{n+m}dx(a+bx^m)^{p-1};$$

für $p-q=2$ ist

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = C + \frac{x^g}{g}(a+bx^m)^p - \frac{bmpx^{g+m}}{g(g+m)}(a+bx^m)^{p-1}$$
$$+\frac{b^2m^2p(p-1)}{g(g+m)}.\int x^{n+2m}dx(a+bx^m)^{p-2};$$

für $p-q=3$ ist

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = C + \frac{x^g}{g}(a+bx^m)^p - \frac{bmpx^{g+m}}{g(g+m)}(a+bx^m)^{p-1}$$
$$+\frac{b^2m^2p(p-1)x^{g+2m}}{g(g+m)(g+2m)}(a+bx^m)^{p-2}$$
$$-\frac{b^3m^3p(p-1)(p-2)}{g(g+m)(g+2m)}.\int x^{n+3m}dx(a+bx^m)^{p-3};$$

für $p-q=4$ ist

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = C + \frac{x^g}{g}(a+bx^m)^p - \frac{bmpx^{g+m}}{g(g+m)}(a+bx^m)^{p-1}$$
$$+\frac{b^2m^2p(p-1)x^{g+2m}}{g(g+m)(g+2m)}(a+bx^m)^{p-2}$$
$$-\frac{b^3m^3p(p-1)(p-2)x^{g+3m}}{g(g+m)(g+2m)(g+3m)}(a+bx^m)^{p-3}$$
$$+\frac{b^4m^4p(p-1)(p-2)(p-3)}{g(g+m)(g+2m)(g+3m)}.\int x^{n+4m}dx(a+bx^m)^{p-4};$$

 für

Fig. Aus diesem Beyspiele ist nun deutlich zu ersehen, wie die gefundene allgemeine Formel für ganze positive $(n-r):m$ zu gebrauchen ist. Wenn aber $(n-r):m$ eine ganze negative, und folglich $(r-n):m$ eine ganze positive Zahl seyn sollte, so muß man das bekannte $\int x^r dx(a+bx^m)^p$ auf das gesuchte Integrale $\int x^n dx(a+bx^m)^p$ bringen, und sodann ergiebt sich das letzte sehr leicht durch eine blosse Versetzung. So z. B. läßt sich $\int x^{-\frac{3}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$ durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^{\frac{1}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$ bestimmen (621.XI.), weil dieses letzte bekannte Integrale $\int x^{\frac{1}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$ auf das gesuchte $\int x^{-\frac{3}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$ wegen $(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}):1=2$ sich bringen läßt; es ist nämlich (wenn man $n=\frac{1}{2}$, $r=-\frac{3}{2}$, $m=1$, $p=\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=-1$, $(1+n-m)=(1+\frac{1}{2}-1)=\frac{1}{2}=f$, $(1+n+mp)=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=2=g$ setzet, und in der allgemeinen Formel bey $(n-r):m=2$ diese Werthe substituiret) $\int x^{\frac{1}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ $-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\int x^{-\frac{3}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$; und daraus folgt durch die Versetzung $\int x^{-\frac{3}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = -4x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ $-2x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 8.\int x^{\frac{1}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$;

nämlich $\int x^{-\frac{3}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = C - 4x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}$

$+(2-4x)(x-x^2)^{\frac{1}{2}} - \text{arc}\cos(1-2x)$,

oder auch $\int x^{-\frac{3}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = C - 4x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}$

$+(2-4x)(x-x^2)^{\frac{1}{2}} + \text{arc}\sin(1-2x)$, weil vermög (621. XII.) das Integrale $-8.\int x^{\frac{1}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = +\int -8x^{\frac{1}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = \text{arc}\sin(1-2x) + (2-4x)(x-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, und endlich wenn man gehörig reduciret

$$\int x^{-\frac{3}{2}} dx(1-x)^{\frac{1}{2}} = \text{Const} - 2\sqrt{\left(\frac{1-x}{x}\right)} + \text{arc}\sin(1-2x)$$

All-

gende Formel bey $p - q = 3$ zum Vorschein bringet; Fig.
u. s. w.

Aus diesen Formeln ist es nun deutlich zu ersehen, daß $\int x^n dx(a + bx^m)^p$ sich auf $\int x^{n+tm} dx(a + bx^m)^q$ bringen lasse, wenn $p - t = q$, nämlich $p - q = t$ ist, allwo t eine ganze positive Zahl vorstellet; und dieses letztere Integrale $\int x^{n+tm} dx(a + bx^m)^q$ läßt sich endlich nach der Formel (625) auf $\int x^r dx(a + bx^m)^q$ bringen wenn $(n + tm - r) : m$, und folglich auch $(n - r) : m$ eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet, weil $tm : m$ schon für sich eine ganze Zahl ist.

Wenn aber $p - q$ eine negative, und folglich $q - p$ eine positive ganze Zahl bedeutet, so muß man das bekannte $\int x^r dx(a + bx^m)^q$ auf das gesuchte Integrale $\int x^n dx(a + bx^m)^p$ bringen, und sodann ergiebt sich das gesuchte mit gehöriger Beyziehung der Formel (625) sehr leicht durch eine blosse Versetzung.

628. Der Gebrauch dieser allgemeinen Formel ist aus folgenden Beyspielen zu ersehen.

$\int x^{-5} dx(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$ läßt sich durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^{-1} dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc}\cos(1 : x)$ bestimmen; denn es sind (wenn man $n = -5$, $m = 2$, $r = -1$, $p = \frac{3}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$, $a = -1$, und $b = 1$ setzet) sowohl $p - q$ als auch $(n - r) : m$ ganze Zahlen, nämlich $p - q = 2$, und $(n - r) : m = -2$; nun setze man auch noch $1 + n = 1 - 5 = -4 = g$, und substituire alle diese Werthe in der allgemeinen Formel bey $p - q = 2$, so ist

$$\int x^{-5} dx(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = -\tfrac{1}{4} x^{-4}(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{4.2} x^{-2}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \tfrac{3}{4.2} . \int x^{-1} dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

nämlich es ist nach gehöriger Reduktion

$$\int x^{-5} dx(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = C + \left(\frac{2 - 5x^2}{8x^4}\right)\sqrt{(x^2 - 1)} + \tfrac{3}{8} . \text{arc}\cos\frac{1}{x}.$$

Und

Fig. für $p - q = t$ ist

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = C + \frac{x^g}{g}(a+bx^m)^p - \frac{bmpx^{g+m}}{g(g+m)}(a+bx^m)^{p-1}$$
$$+ \frac{b^2m^2p(p-1)x^{g+2m}}{g(g+m)(g+2m)}(a+bx^m)^{p-2}$$
$$- \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\left\{\begin{array}{l} \pm \dfrac{b^{t-1}m^{t-1}p(p-1)\dots(p+2-t)x^{g+(t-1)m}}{g(g+m)(g+2m)\dots(g+(t-1)m)}(a+bx^m)^{p+1-t} \\ \mp \dfrac{b^t m^t p(p-1)\dots\dots\dots(p+1-t)}{g(g+m)(g+2m)\dots(g+(t-1)m)} \cdot \int x^{n+tm}dx(a+bx^m)^{p-t} \end{array}\right.$$

das obere Zeichen wird bey einer ungeraden, und das untere bey einer geraden Zahl t gebrauchet.

Diese allgemeine Formel beruhet auf folgenden Gründen. Es ist nach den Regeln der Differenzialrechnung $d(x^{k+1}(a+bx^m)^e) = (k+1)x^k dx(a+bx^m)^e + bmex^{k+m}dx(a+bx^m)^{e-1}$; folglich $x^k dx(a+bx^m)^e = \frac{d(x^{k+1}(a+bx^m)^e)}{k+1} - \frac{bme}{k+1} \times x^{k+m}dx(a+bx^m)^{e-1}$; und $\int x^k dx(a+bx^m)^e = \frac{x^{k+1}}{k+1}(a+bx^m)^e - \frac{bme}{k+1} \cdot \int x^{k+m}dx(a+bx^m)^{e-1}$ .. A. In dieser Gleichung A setze man $k = n$, und $e = p$, so ist $\int x^n dx(a+bx^m)^p = \frac{x^{n+1}}{n+1}(a+bx^m)^p - \frac{bmp}{n+1} \cdot \int x^{n+m}dx(a+bx^m)^{p-1}$ ... B, woraus die Formel für $p - 1 = q$, nämlich für $p - q = 1$ fließt, wenn man $n + 1 = g$ setzet. Setzet man ferner $k = n + m$ und $e = p - 1$ in der Gleichung A, bestimmet daraus $\int x^{n+m}dx(a+bx^m)^{p-1}$, und substituiret diesen Werth in der Gleichung B, so wird man die Formel für $p - q = 2$ erhalten. Darauf muß man $k = n + 2m$ und $e = p - 2$ in der Gleichung A setzen um den Werth $\int x^{n+2m}dx(a+bx^m)^{p-2}$ zu erhalten, welcher in der schon entwickelten Formel bey $p - q = 2$ substituiret die darauffolgen-

Fig.

$p - q$, und auch $(n - r) : m$ ganze Zahlen sind; in solchen Fällen muß man bey dem gesuchten, und auch bey dem bekannten Integrale, ohne Veränderung des Werthes die veränderliche Größe unter dem Zeichen aus einem Gliede in das andere schaffen, und sodann erst die Substitution und Reduktion vornehmen.

Z. B. $\int x^{-3} dx (1 + x^2)^{\frac{3}{2}}$ läßt sich auf das bekannte Integrale $\int x^{-1} dx (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = C - L\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)$ bringeu, wenn man das gesuchte $\int x^{-3} dx (1 + x^2)^{\frac{3}{2}}$ in $\int x^0 dx (x^{-2} + 1)^{\frac{3}{2}}$ und das bekannte Integrale $\int x^{-1} dx (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ in $\int x^{-2} dx (x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}} = C - L\left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right)$ verwandelt, und darauf $\int x^0 dx (x^{-2} + 1)^{\frac{3}{2}}$ auf $\int x^{-2} dx (x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}}$ bringet; es ist nämlich vermög der Formel (627)

$\int x^0 dx (x^{-2} + 1)^{\frac{3}{2}} = x (x^{-2} + 1)^{\frac{3}{2}} - 3x^{-1} (x^{-2} + 1)^{\frac{1}{2}}$
$- 3 . \int x^{-4} dx (x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}}$; nun ist nach der Formel (625) wenn man $\int x^{-4} dx (x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}}$ auf das bekannte Integrale $\int x^{-2} dx (x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}}$ bringet,

$\int x^{-4} dx (x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}} = - \frac{1}{2} x^{-1} (x^{-2} + 1)^{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{2} . \int x^{-2} dx (x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}}$; folglich ist auch, wenn man diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung substituiret,

$$\int x^0 dx (x^{-2} + 1)^{\frac{3}{2}} = x (x^{-2} + 1)^{\frac{3}{2}} - 3x^{-1} (x^{-2} + 1)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \tfrac{3}{2} x^{-1} (x^{-2} + 1)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{2} . \int x^{-2} dx (x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}};$$

und endlich, wenn man statt $\int x^0 dx (x^{-2} + 1)^{\frac{3}{2}}$ und statt $\int x^{-2} dx (x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ihre Werthe setzet, und gehörig abkürzet

$\int$

Fig. Und eben so läßt sich $\int x^2 dx(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$ durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^0 dx(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$, oder auch mittelst $\int x^0 dx(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ entwickeln, allwo man auch die allgemeine Formel (625) zu Hilfe nehmen muß.

Auch $\int x^2 dx(1 + x^2)^{-3}$ läßt sich durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^0 dx(1 + x^2)^{-1} = \text{arc tang } x$ bestimmen, weil $p - q$ und auch $(n - r) : m$ ganze Zahlen sind, wenn man $n = 2$, $r = 0$, $p = -3$, $q = -1$ und $m = 2$ setzet; aber $p - q = -2$ ist eine negative Zahl; derowegen bringe man das bekannte $\int x^0 dx(1 + x^2)^{-1}$ auf das gesuchte Integrale $\int x^2 dx(1 + x^2)^{-3}$, man setze nämlich $p = -1$, $q = -3$, $n = 0$, $r = 2$, $m = 2$, $a = 1$, $b = 1$, und $n + 1 = 1 = g$, und substituire diese Werthe bey $p - q = -1 + 3 = 2$, so ist

$$\int x^0 dx(1 + x^2)^{-1} = x(1 + x^2)^{-1} + \tfrac{2}{3} x^3 (1 + x^2)^{-2} + \tfrac{8}{3} \cdot \int x^4 dx(1 + x^2)^{-3} \ldots\ldots \mathfrak{A};$$

man bringe sodann $\int x^4 dx(1 + x^2)^{-3}$ auf $\int x^2 dx(1 + x^2)^{-3}$ mittelst der Formel (625), so ist

$$\int x^4 dx(1 + x^2)^{-3} = -x^3(1 + x^2)^{-2} + 3 . \int x^2 dx(1 + x^2)^{-3};$$

folglich ist auch, wenn man in der Gleichung $\mathfrak{A}$ statt $\int x^4 dx(1 + x^2)^{-3}$ diesen Werth substituiret,

$$\int x^0 dx(1 + x^2)^{-1} = x(1 + x^2)^{-1} + \tfrac{2}{3} x^3 (1 + x^2)^{-2} - \tfrac{8}{3} x^3 (1 + x^2)^{-2} + 8 . \int x^2 dx(1 + x^2)^{-3};$$

daraus fließt durch die Versetzung

$$\int x^2 dx(1 + x^2)^{-3} = -\tfrac{1}{8} x(1 + x^2)^{-1} + \tfrac{1}{4} x^3 (1 + x^2)^{-2} + \tfrac{1}{8} \int x^0 dx(1 + x^2)^{-1},$$

und endlich wenn man gehörig reduciret,

$$\int x^2 dx(1 + x^2)^{-3} = C + \frac{x^3 - x}{8(1 + x^2)^2} + \tfrac{1}{8} . \text{arc tang } x.$$

629. Es kann sich bey dem Gebrauche dieser Formel (627) zutragen, daß bey der Entwicklung, der Nenner $g(g + m)(g + 2m) \ldots$ eines Gliedes $= 0$ wird, und daß folglich wegen diesem Umstande $\int x^n dx(a + bx^m)^p$ sich auf $\int x^r dx(a + bx^m)^q$ nicht unmittelbar bringen lasse, wenn schon

Von einigen anderen nothwendigen Verwandlungen, wodurch verschiedene Differenzialgrößen die Integrationsfähigkeit erhalten; von der Verwandlung der Differenzialgröße $x^n dx(a + bx^m + cx^{2m})^p$ in $Az^q dz(f + cz^{2m})^p + Bz^r dz(f + cz^{2m})^p + Cz^t dz(f + cz^{2m})^p + ..$; und von der Integration der rationalen Brüche. Fig.

630. Wenn eine Differenzialgröße von der Gestalt $x^n dx(a+bx^m)^p$ nach (619) oder (618) sich nicht integriren läßt, und m weder ± 2 noch auch ± 1 bedeutet, so muß man $x^n dx(a+bx^m)^p$ entweder in $Ay^q dy(a+by^{\pm 2})^p$, oder in $Bz^r dz(a+bz^{\pm 1})^p$ verwandeln, und darauf genau untersuchen, ob sich die gegebene Differenzialgröße vielleicht unter einer von diesen zweyen Verwandlungen auf Kreisbögen, oder auf Logarithmen bringen lasse.

$x^n dx(a+bx^m)^p$ läßt sich ohne Veränderung des Werthes in $Ay^q dy(a+by^{\pm 2})^p$ verwandeln, wenn man $x^m = y^{\pm 2}$ setzet; denn es ist sodann $x = y^{\pm \frac{2}{m}}$, $dx = \pm \frac{2}{m} y^{\pm \frac{2}{m} - 1} dy$, $x^n = y^{\pm \frac{2n}{m}}$; und folglich $x^n dx(a+bx^m)^p = \pm \frac{2}{m} y^{\pm \frac{(2n+2)}{m} - 1} \times dy(a+by^{\pm 2})^p$, oder wenn man $\pm \frac{2}{m} = A$, und $\pm \left(\frac{2n+2}{m}\right) - 1 = q$ setzet, $x^n dx(a+bx^m)^p = Ay^q dy(a+by^{\pm 2})^p$. Und eben so läßt sich $x^n dx(a+bx^m)^p$ in $Bz^r dz(a+bz^{\pm 1})^p$ verwandeln.

Z. B. um $\frac{dx\sqrt{x}}{1+x^3} = x^{\frac{1}{2}} dx(1+x^3)^{-1}$ zu integriren, setze man $x^3 = y^2$, so ist $x = y^{\frac{2}{3}}$, $dx = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} dy$, und $x^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{3}}$; folglich $\int x^{\frac{1}{2}} dx(1+x^3)^{-1} = \int \frac{2}{3} y^0 dy(1+y^2)^{-1}$ =

$$\text{Fig.}\ \int x^{-3}dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = C + \left(\frac{2x^2-1}{2x^2}\right)\sqrt{(1+x^2)}$$
$$-\tfrac{3}{2}.\,L\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

Durch eine eben solche Verwandlung läßt sich $\int x^{-1}dx(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$ durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^{-1}dx(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$ bestimmen, welches wohl zu merken ist. Ein gleiches wäre auch bey der allgemeinen Formel (625) zu beobachten, wenn daselbst sich eben dieses eräugnen sollte.

Anmerkung. Mittelst der zwey allgemeinen Formeln (625) und (627) lassen sich nun eine Menge Differenzialgrößen auf die Integralformeln bringen, welche in den zwey vorausgeschickten Fundamentalverzeichnißen (621) und (623) sich befinden. Z. B. alle Differenzialgrößen von der Gestalt $x^{2k}dx(a-x^2)^{\frac{2g+1}{2}}$, $x^{\pm 2k}dx(a \pm x^2)^{-g}$, $x^{-(2k+1)}dx(x^2-a)^{\pm\frac{2g+1}{2}}$, u. s. w. lassen sich durch Kreisbögen, alle Differenzialgrößen von der Gestalt $x^{2k}dx(x^2 \pm a)^{\frac{2g+1}{2}}$, $x^{-(2k+1)}dx(a \pm x^2)^{\pm\frac{2g+1}{2}}$, $x^{\frac{2k+1}{2}}dx(x \pm a)^{\frac{2g+1}{2}}$, u. s. w. lassen sich mittelst der Logarithmen, nach (625) und (627) integriren, wenn g und k ganze Zahlen sind. Man muß aber, um die **Weitläufigkeit** zu vermeiden, bey der vorzunehmenden Integration einer Differenzialgröße von der Gestalt $x^n dx(a+bx^m)^p$, jederzeit genau untersuchen, ob sie sich nicht nach (619) integriren lasse. Z. B. $\int x^{-\frac{3}{2}}dx(x \pm a)^{-\frac{1}{2}}$ scheint nur durch Hilfe des bekannten Integrals $\int x^{-\frac{1}{2}}dx(x \pm a)^{-\frac{1}{2}}$ integrabel zu seyn; allein wenn man bey diesem Integrale $\int x^{-\frac{3}{2}}dx(x \pm a)^{-\frac{1}{2}}$, die veränderliche Größe unter dem Zeichen aus einem Gliede in das andere schaffet, so sieht man alsogleich, daß es sich nach (619) entwickeln lasse.

Von

folglich $x^n dx(a + bx^m + cx^{2m})^p = z^{m-1}\left(z^m - \frac{b}{2c}\right)^{\frac{n+1}{m}-1} \times$ Fig.

$dz(a - \frac{b^2}{4c} + cz^{2m})^p$; woraus nun deutlich zu ersehen ist, daß $x^n dx(a + bx^m + cx^{2m})^p$ in $Az^q dz(f + cz^{2m})^p + Bz^r dz(f + cz^{2m})^p + Cz^t dz(f + cz^{2m})^p + \ldots$ sich verwandeln lasse, wenn nur $(n+1):m$ einer ganzen positiven Zahl gleich ist.

Z. B. Um $x^{\frac{1}{2}}dx(3 - 6x^{\frac{3}{2}} - 4x^3)^{-\frac{3}{2}}$ zu integriren, setze man $x^{\frac{3}{2}} = z^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}$, so ist $x^3 = z^3 - \frac{3}{2}z^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{16}$, $x = (z^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4})^{\frac{2}{3}}$, $dx = z^{\frac{1}{2}}dz(z^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4})^{-\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{2}} = (z^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}$; folglich $\int x^{\frac{1}{2}}dx(3 - 6x^{\frac{3}{2}} - 4x^3)^{-\frac{1}{2}} = \int z^{\frac{1}{2}}dz(\frac{45}{4} - 4z^3)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}dz(\frac{45}{16} - z^3)^{-\frac{1}{2}}$; nun läßt sich dieser letzte Ausdruck $\int \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}}dz(\frac{45}{16} - z^3)^{-\frac{1}{2}}$ vermög dem vorhergehenden durch Hilfe der Kreisbögen integriren, wenn man $z^3 = y^2$ setzet; es läßt sich demnach auch die gegebene Differenzialgröße durch die Kreisbögen integriren; man findet nach vorgenommener Reduktion

$$\int x^{\frac{1}{2}}dx(3 - 6x^{\frac{3}{2}} - 4x^3)^{-\frac{1}{2}} = C + \tfrac{1}{3}.\,\text{arc sin}\left(\frac{4x^{\frac{3}{2}} + 3}{\sqrt{45}}\right).$$

633. Wann ein rationaler Bruch $\frac{dx.\,X}{X'}$ sich nach keiner einzigen von den bereits gegebenen Regeln integriren läßt, so muß man denselben dergestalt verwandeln, daß der höchste Exponent von x im Zähler wenigstens um eine Einheit kleiner sey, als der höchste Exponent von x im Nenner, welches durch eine blosse Division des Zählers durch den Nenner geschehen kann, wenn der Bruch nicht schon ehevor diese Eigenschaft haben sollte. Sodann muß man bedacht seyn diesen Bruch in andere Brüche nach (152) zu zerlegen, deren Nenner die Gestalten haben x^g, $(a + bx)^k$, $(f + gx^2)^r$,

Fig. $= \frac{2}{3}\text{arc tang}\, y$, nämlich $\int x^{\frac{1}{2}} dx (1 + x^3)^{-1} = C + \frac{2}{3}\text{arc tang}\, x^{\frac{3}{2}}$, wenn man wieder statt y seinen Werth setzet.

Durch eine eben solche Verwandlung findet man $\int x dx (a + bx^4)^{-\frac{1}{2}} = C + \frac{1}{2} b^{-\frac{1}{2}} . L(x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{ab^{-1} + x^4})$, wenn man nämlich $x^4 = y^2$ setzet; u. s. w.

631. Um $\frac{x dx \sqrt{(a + bx^2)}}{\sqrt{(f + gx^2)}}$ zu integriren, setze man $\sqrt{(f + gx^2)} = z$, so ist $x^2 = \frac{z^2 - f}{g}$, $x dx = \frac{z dz}{g}$, und folglich $\int \frac{x dx \sqrt{(a + bx^2)}}{\sqrt{(f + gx^2)}} = \int g^{-\frac{3}{2}} dz \sqrt{(ag - bf) + bz^2}$, welches sich entweder durch Logarithmen, oder durch Kreisbögen integriren läßt, nachdem die Coefficienten $(ag - bf)$ und b beschaffen sind.

Auf die nämliche Art läßt sich $x^{2k+1} dx (a + bx^2)^{\pm\left(\frac{2g+1}{2}\right)} \times (f + gx^2)^{\pm\frac{1}{2}}$ integriren, wenn man $\sqrt{(f + gx^2)} = z$ setzet, allwo g und k ganze positive Zahlen vorstellen.

Um $\frac{a dx + x dx}{(2ax + x^2)^{\frac{1}{2}} (a + \sqrt{2ax + x^2})}$ zu integriren, setze man auch $\sqrt{(2ax + x^2)} = z$, u. s. w.

632. Um eine Differenzialgröße von der Gestalt $x^n dx (a + bx^m + cx^{2m})^p$ zu integriren, muß man das zweyte Glied unter dem Zeichen hinwegschaffen, welches sehr leicht geschieht, wenn man $x^m = z^m - \frac{b}{2c}$ setzet; denn es ist sodann $x^{2m} = z^{2m} - \frac{bz^m}{c} + \frac{b^2}{4c^2}$, $x = \left(z^m - \frac{b}{2c}\right)^{\frac{1}{m}}$,

$dx = z^{m-1} dz \left(z^m - \frac{b}{2c}\right)^{\frac{1}{m} - 1}$, und $x^n = \left(z^m - \frac{b}{2c}\right)^{\frac{n}{m}}$;

folg-

$$\int\left(\frac{x^{\frac{3}{6}}dx + a\,dx}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}\right) = \int\left(\frac{6z^8dz + 6az^5dz}{z^4 + z^3}\right) = \int 6z^5dz(1+z)^{-1}$$ Fig.

$+\int 6az^2dz(1+z)^{-1}$, welches sich nach (619) sehr leicht entwickeln läßt.

635. Wenn eine Differenzialgröße von der Gestalt $x^n dx(a+bx^m)^p$ sich nach keiner von den bereits gegebenen Regeln integriren läßt, so muß man das gesuchte Integrale entweder mittelst der allgemeinen Formel (618), oder auch mittelst der Formel (619) in einer unendlichen Reihe darstellen; man muß aber, um das gesuchte Integrale in einer sehr schnell abnehmenden Reihe zu erhalten, zuweilen verschiedene Vorbereitungen treffen, man muß nämlich bald die veränderliche, bald auch eine der beständigen Größen unter dem Zeichen aus einem Gliede in das andere schaffen, und sodann erst die Substitution und Reduktion vornehmen. Zuweilen kann auch die Formel (625) oder auch (627) das gesuchte Integrale von $x^n dx(a+bx^m)^p$ in einer so schnell abnehmenden Reihe geben, daß man das summatorische Glied, welches mit dem Integrationszeichen $\int$ behaftet ist, gänzlich hinweglassen könne. Dabey muß man aus den Umständen der Aufgabe genau untersuchen, welche aus den unendlichen Reihen, die man aus den vier angeführten allgemeinen Formeln erhalten kann, am schleunigsten zusammen laufe. Wenn eine Differenzialgröße von der Gestalt $x^n dx(a+bx^g+cx^k+ex^m+\ldots)^p$ zu integriren wäre, und sich nach keiner der gegebenen Regeln entwickeln ließe, so muß man nach (187) die Potenz p in eine Reihe auflösen, darauf diese Reihe mit $x^n dx$ multipliciren, und endlich jedes Glied nach der Fundamentalregel integriren; u. s. w.

Fig. $(a + bx + cx^2)^q$, $(a + bx^m + cx^{2m})^r$, u. s. w. allwo g, k, m, p, q, r ganze positive Zahlen sind, und muß darauf jeden dieser Brüche nach den bereits gegebenen Regeln besonders integriren. Z. B. Die Differenzialgleichung

$$dy = \frac{(2x^6 - 6x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x + 12)dx}{x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x}$$

$$= 2xdx + \frac{(2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - x + 12)dx}{x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x} = 2xdx$$

$+ \frac{(2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - x + 12)dx}{x(x-2)^2(1+x+x^2)}$ läßt sich integriren, wenn man $\frac{2x^4 + 4x^3 - 8x^2 - x + 12}{x(x-2)^2(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x-2)^2}$ $+ \frac{Dx+E}{1+x+x^2}$ setzet, sodann nach (152) die Coefficienten $A = 3$, $B = 2$, $C = -1$, $D = -3$, $E = 0$ bestimmet, und endlich die gefundenen Brüche $\frac{3dx}{x} + \frac{(2x-1)dx}{(x-2)^2}$ $- \frac{3xdx}{1+x+x^2}$ nach den bereits gegebenen Regeln integriret. Man findet nach vorgenommener Reduktion $y = C + x^2$ $- 3(x-2)^{-1} + 3.Lx + 2.L(x-2) - \frac{3}{2}.L(1+x+x^2)$ $+ 3^{\frac{1}{2}}.\text{arc tang}((2x+1):3^{\frac{1}{2}})$.

634. Um $\frac{dx\sqrt{x} + adx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}$ und mehr dergleichen Differenzialgrößen zu integriren, muß man selbe auf folgende Art verwandeln; $\frac{dx\sqrt{x} + adx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}dx + adx}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{3}{6}}dx + adx}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}$; sodann setzet man um diesen Bruch rational zu machen, $x^{\frac{1}{6}} = z$, so ist $x = z^6$, $dx = 6z^5dz$, $x^{\frac{3}{6}} = z^3$, $x^{\frac{4}{6}} = z^4$; und folglich

∫

Eben so ist $\int a^{mx}x^{n-1}dx = \frac{a^{mx}x^{n-1}}{m.\,La} - \frac{(n-1)}{m.\,La}.\int a^{mx}x^{n-2}dx$; Fig.

und folglich $\int a^{mx}x^{n}dx = \frac{a^{mx}x^{n}}{m.\,La} - \frac{na^{mx}x^{n-1}}{m^2.(La)^2} + \frac{n(n-1)}{m^2.(La)^2} \times$
$\int a^{mx}x^{n-2}dx$.

Aus dem nämlichen Grunde ist $\int a^{mx}x^{n-2}dx = \frac{a^{mx}x^{n-2}}{m.\,La}$
$- \frac{(n-2)}{m.\,La}.\int a^{mx}x^{n-3}dx$; folglich $\int a^{mx}x^{n}dx = \frac{a^{mx}x^{n}}{m.\,La}$
$- \frac{na^{mx}x^{n-1}}{m^2.(La)^2} + \frac{n(n-1)a^{mx}x^{n-2}}{m^3.(La)^3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{m^3.(La)^3}.\int a^{mx}x^{n-3}dx$;
u. s. w. wovon der Fortgang deutlich einzusehen ist. Es ist nämlich, wenn man reduciret,

$$\int a^{mx}x^{n}dx = C + \frac{a^{mx}}{m.La}\left(x^{n} - \frac{nx^{n-1}}{m.La} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{m^2.(La)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{m^3.(La)^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}}{m^4.(La)^4} - ..\right).$$

Diese Reihe bricht ab, wenn n einer ganzen positiven Zahl gleich ist, im Gegentheile läuft sie ohne Ende fort. Setzet man $a = h$, so ist $La = Lh = 1$; und folglich

$$\int h^{mx}x^{n}dx = C + \frac{h^{mx}}{m}\left(x^{n} - \frac{nx^{n-1}}{m} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{m^2} - ..\right).$$

So z. B. ist $\int c^3h^{cx}x^2dx = C + h^{cx}(c^2x - 2cx + 2)$.

638. Auf die nämliche Art läßt sich $x^m(Lx)^n dx$ integriren, welches man auch findet, wenn man $Lx = z$ setzet; denn es ist sodann $x = h^z$, $dx = h^z dz$, $x^m = h^{mz}$; folglich

$$\int x^m(Lx)^n dx = \int h^{(m+1)z}z^n dz = \frac{h^{(m+1)z}}{m+1}\left(z^n - \frac{nz^{n-1}}{m+1} + \frac{n(n-1)z^{n-2}}{(m+1)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)z^{n-3}}{(m+1)^3} +..\right),$$ nämlich

Fig. **Von der Integration der Exponentialgrößen, und der trigonometrischen Funktionen.**

636. Vermög (582) ist $d(ab^{mx}) = madxb^{mx}.Lb$; folglich $\int madx^{mx}.Lb = ab^{mx}$; und $\int adxb^{mx} = \frac{ab^{mx}}{m.Lb}$, welches man auch findet, wenn man $b^{mx} = y$ setzet; denn es ist sodann $x = \frac{Ly}{m.Lb}$, und $dx = \frac{dy}{my.Lb}$; folglich $\int adxb^{mx} = \int \frac{ady}{m.Lb}$ $= \frac{ay}{m.Lb} = \frac{ab^{mx}}{m.Lb} + C$. Ist nun $b = h =$ der Grundzahl der natürlichen Logarithmen, so ist $\int adxh^{mx} = C + \frac{ah^{mx}}{m}$.

637. Um $\int a^{mx}x^n dx$ zu entwickeln muß man selbes so integriren, als wenn x^n unveränderlich wäre, und muß sodann von diesem Integrale, das Produkt aus dem Differenzial von x^n in das Integrale von $a^{mx}dx$ mit vorgesetztem Integrationszeichen $\int$ abziehen; es ist nämlich $\int a^{mx}x^n dx = \frac{a^{mx}x^n}{m.La}$ $- \int nx^{n-1}dx.\frac{a^{mx}}{m.La}$, oder $\int a^{mx}x^n dx = \frac{a^{mx}x^n}{m.La} - \frac{n}{m.La} \times$ $\int a^{mx}x^{n-1}dx$.

Denn es ist $\int a^{mx}x^n dx = \int (a^{mx}x^n dx + nx^{n-1}dx.\frac{a^{mx}}{m.La}$ $- nx^{n-1}dx.\frac{a^{mx}}{m.La}) = \int (a^{mx}x^n dx + nx^{n-1}dx.\frac{a^{mx}}{m.La})$ $- \int nx^{n-1}dx.\frac{a^{mx}}{m.La} = \frac{a^{mx}x^n}{m.La} - \frac{n}{m.La}.\int a^{mx}x^{n-1}dx$, weil dieses Integrale durch die Differenzirung wieder die gegebene Differenzialgröße $a^{mx}x^n dx$ herstellet.

$-\frac{1}{2}\cos(a+b)$; folglich ist $\int dz \sin mz \sin nz = \int \frac{1}{2} dz \cos(m-n)z$ Fig.
$-\int \frac{1}{2} dz \cos(m+n)z = C + \frac{\sin(m-n)z}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)z}{2(m+n)}$.

Dergleichen trigonometrische Differenzialgrößen lassen sich auch durch eine schickliche Substitution sehr leicht integriren. Z. B. um $\int dz \sin z \cos z$ zu finden setze man $\sin z = x$, so ist $\cos z = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $z = \text{arc} \sin x$, $dz = dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ vermög (584); folglich $\int dz \sin z \cos z = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 = C + \frac{1}{2}\sin^2 z$

Um $dz \sin^2 z$ zu entwickeln setze man $\sin z = x$, so ist $z = \text{arc} \sin x$, $dz = dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$; folglich $\int dz \sin^2 z = \int x^2 dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, nämlich es ist, wenn man $\int x^2 dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach (625) auf $x^0 dx (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \text{arc} \sin x$ bringet, $\int dz \sin^2 z = -\frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\text{arc} \sin x = C - \frac{1}{2}\sin z \cos z + \frac{1}{2}z$.

Durch eben diese Verwandlung, $\sin z = x$, findet man $\int dz \sin^3 z = C + \frac{1}{3}\cos^3 z + \frac{1}{2}\sin z$; und auch $\int dz(\sin z)^{-1} = \int \frac{dz}{\sin z} = C - L\left(\frac{1 + \cos z}{\sin z}\right)$, u. s. w.

Um $\int z^n dz \sin z$ zu finden, kann man das nämliche Verfahren anwenden, als es (637) bey $\int a^{mx} x^n dx$ geschehen ist, daß man nämlich im Anfange z^n für unveränderlich ansieht; man findet nach vorgenommener Reduktion

$$\int z^n dz \sin z = C - z^n \cos z + nz^{n-1} \sin z + n(n-1)z^{n-2} \cos z$$
$$-n(n-1)(n-2)z^{n-3} \sin z - n(n-1)(n-2)(n-3)z^{n-4} \cos z + \ldots$$

Diese Reihe bricht ab, wenn n einer ganzen positiven Zahl gleich ist; im Gegentheile läuft sie ohne Ende fort. Auf die nämliche Art läßt sich $z^n dz \cos z$ integriren. Man kann auch für $\int z^n dz \sin z$ und $\int z^n dz \cos z$ Reihen erhalten, wenn man aus (445) für $\sin z$, $\cos z$ die unendlichen Reihen substituiret, selbe mit $z^n dz$ multipliciret, und darauf jedes Glied besonders integriret; u. s. w.

Fig.

$$\int x^m (Lx)^n dx = C + \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[(Lx)^n - \frac{n(Lx)^{n-1}}{m+1} + \frac{n(n-1)(Lx)^{n-2}}{(m+1)^2} - \right].$$

Auch diese Reihe bricht ab, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, den einzigen Fall ausgenommen, wenn $m = -1$ seyn sollte; denn alsdann ist $\int x^{-1}(Lx)^n dx = C + \frac{(Lx)^{n+1}}{n+1}$, welches man findet, wenn man $Lx = z$ setzet.

639. Für den Halbmesser 1 ist $d(\frac{a \sin mz}{m}) = a dz \cos mz$, und $d(\frac{\cos mz}{m}) = -a dz \sin mz$ vermög (583); es ist also auch $\int a dz \cos mz = \frac{a \sin mz}{m}$, und $\int - a dz \sin mz = \frac{a \cos mz}{m}$; so z. B. ist $\int 2dz \sin 3z = -2\int - dz \sin 3z = -\frac{2}{3}\cos 3z$ oder vielmehr $\int 2dz \sin 3z = C - \frac{2}{3}\cos 3z$.

Für eben diesen Halbmesser ist $\int a dz \cos z (\sin z)^m = \int a(\sin z)^m . d(\sin z) = C + \frac{a(\sin z)^{m+1}}{m+1}$, und $\int a dz \sin z(\cos z)^m = \int a(\cos z)^m . d(-\cos z) = C - \frac{a(\cos z)^{m+1}}{m+1}$.

Auch $dz \sin mz \cos nz$ läßt sich integriren; denn es ist vermög (448. III.) $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b)$; folglich $\int dz \sin mz \cos nz = \int(\frac{1}{2}dz \sin(mz + nz) + \frac{1}{2}dz \sin(mz - nz)) = \int \frac{1}{2} dz \sin(m+n)z + \int \frac{1}{2} dz \sin.(m-n)z = C - \frac{\cos(m+n)z}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)z}{2(m-n)}$

Eben so läßt sich $dz \sin mz \sin nz$, und auch $dz \cos mz \cos nz$ integriren; denn vermög (448. I.) ist $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b)$

=

ßen in einem jeden Gliede einerley ist, z. B. in der Glei- Fig.
chung $y^3 dx + y^2 x dy + bx^3 dy = 0$ lassen sich die veränderlichen Größen absöndern, wenn man $\frac{y}{x} = z$, oder auch $\frac{x}{y} = z$ setzet; es sey im gegenwärtigen Beyspiele $\frac{y}{x} = z$, so ist $x = yz^{-1}$, und $dx = z^{-1}dy - yz^{-2}dz$; folglich ist die verwandelte Gleichung $y^3 z^{-1} dy - y^4 z^{-2} dz + y^3 z^{-1} dy + by^3 z^{-3} dy = 0$, woraus $\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{b + 2z^2}$, oder $\frac{4dy}{y} = \frac{4zdz}{b + 2z^2}$ fließt; davon ist das Integrale $4Ly = L(b + 2z^2) + LC$, nämlich $y^4 = C.(b + 2z^2)$, und endlich, wenn man wieder statt z seinen Werth setzet, $y^4 = C.(b + 2y^2 x^{-2})$. Auf die nämliche Art läßt sich $(ax + by)dx = (mx + ny)dy$ integriren.

Um $(ax + by + c)dx + (mx + ny + p)dy = 0$ zu integriren, setze man $ax + by + c = u$, und $mx + ny + p = z$, so fließt aus der Verbindung dieser zwey Gleichungen, $x = \frac{nu - bz + bp - cn}{an - bm}$, $y = \frac{az - mu + cm - ap}{an - bm}$, $dx = \frac{ndu - bdz}{an - bm}$ und $dy = \frac{adz - mdu}{an - bm}$; folglich ist die verwandelte Gleichung $(nu - mz)du + (az - bu)dz = 0$ welche sich ferner verwandeln und vermög dem vorhergehenden integriren läßt, wenn man $\frac{z}{u} = t$ setzet; u. s. w.

642. Um die Gleichung $ddy = ax^m dx^2$ zu integriren, worinn dx unveränderlich ist, setze man $dx = g$, so ist $ddy = ax^m dx.g$; davon ist das Integrale $dy = \frac{ax^{m+1}g}{m+1} + C$, oder auch $dy = \frac{ax^{m+1}g}{m+1} + Cg$, nämlich es ist, wenn man wie-

Fig.

Von der Integration der Differenzialfunktionen, welche mehrere veränderliche Größen enthalten, und der Differenzialgrößen von höheren Ordnungen.

640. Einige Differenzialfunktionen von mehreren untereinander verbundenen veränderlichen Größen lassen sich sehr leicht integriren, wenn man sich nur an ihre Entstehungsart erinnert; so z. B. ist $\int(3x^2y^{-1}z^2dz+2y^{-1}z^3xdx-x^2z^3y^{-2}dy) = x^2y^{-1}z^3 + C$. Imgleichen $\int(x^3dy + y^2dy + x^2dz + xdx + 2xzdx + 3x^2ydx) = \int(x^3dy + 3x^2ydx) + \int(x^2dz + 2xzdx) + \int y^2dy + \int xdx = x^3y + x^2z + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$. Eben so ist $\int[az^{\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{2}axz^{-\frac{1}{2}}dz + (2adx + 2bdy) \times (ax + by)^{-\frac{1}{2}}] = C + ax\sqrt{z} + 4\sqrt{(ax+by)}$.

641. Bey einer Differenzialgleichung von zwey veränderlichen Größen, wenn sie sich nicht nach den bereits gegebenen Regeln integriren läßt, muß man bedacht seyn die veränderlichen Größen von einander abzusöndern, und muß sodann die Integration nach den gegebenen Regeln vornehmen.

Z. B. Aus der Differenzialgleichung $ay^4x^{\frac{3}{2}}dy = bx^{\frac{1}{2}}y^3dx$ folgt $aydy = bx^{-1}dx$; davon ist das Integrale $\frac{1}{2}ay^2 = b.Lx + C$, oder auch $\frac{1}{2}ay^2 = b.Lx + b.LC$, nämlich $\frac{1}{2}ay^2 = b.LCx$, woraus $y = \sqrt{\left(\frac{2b}{a}.LCx\right)}$ fließt.

Zuweilen wird die Absönderung der veränderlichen Größen durch eine schickliche Substitution oder Verwandlung erhalten; z. B. aus der Differenzialgleichung $gxdx = ax^4ydy + 2abx^2y^3dy + ab^2y^5dy$ folgt $gxdx = aydy(x^2+by^2)^2$; nun setze man $x^2 + by^2 = z$, so ist $x^2 = z - by^2$, und $xdx = \frac{1}{2}dz - bydy$; folglich ist die verwandelte Gleichung $\frac{1}{2}gdz - bgydy = az^2ydy$, woraus $ydy = \frac{1}{2}gdz(bg+az^2)^{-1}$ fließt, welches sich mittelst der Kreisbögen integriren läßt.

In einer gleichartigen Differenzialgleichung, wo nämlich die Summe der Exponenten von den veränderlichen Grö-

ßen

$+\frac{addy}{du}-(\frac{xddy}{du}+\frac{dxdy}{du})$, es ist nämlich $z=\frac{ydx}{du}+\frac{ady}{du}$ Fig.
$-\frac{xdy}{du}+C=y.\frac{dx}{du}+(a-x)\frac{dy}{du}+C.$

643. Zuweilen läßt sich eine höhere Differenzialgleichung durch eine schickliche Substitution integriren, wenn man nämlich entweder $\frac{dx}{dy}=z$, oder $\frac{dy}{dx}=z$ setzet; z. B. um das Integrale der Gleichung $dx=\frac{ddy}{dy}(1+\frac{dy}{dx})^{-1}$ zu finden, worinn dx unveränderlich ist, setze man $\frac{dy}{dx}=z$, so ist $dx=\frac{dy}{z}$, $dy=zdx$, und $ddy=dzdx$; folglich ist die verwandelte Gleichung $\frac{dy}{z}=\frac{dzdx}{zdx}(1+z)^{-1}$, nämlich $dy=dz(1+z)^{-1}$; davon ist das Integrale $y=L(1+z)+LC$, oder $h^y=C(1+z)$, woraus $z=C^{-1}h^y-1$ folgt, oder wenn man statt z seinen Werth setzet, $\frac{dy}{dx}=C^{-1}h^y-1$, und endlich $\frac{Cdy}{h^y-C}=dx$, nämlich $x=\int(\frac{Cdy}{h^y-C})+C'$; um dieses letzte Integrale zu finden setze man $h^y=u$, so ist $y=Lu$, und $dy=\frac{du}{u}$; folglich $\int(\frac{Cdy}{h^y-C})=\int(\frac{Cdu}{u(u-C)}=L\frac{(u-C)}{u}$ $=L(\frac{h^y-C}{h^y})$, nämlich $x=L(\frac{h^y-C}{h^y})+LC'$.

Anmerkung. Ausführliche Abhandlungen über die Integration der Differenzialgrößen von mehreren veränderlichen Größen und der höheren Differenzialgleichungen findet man in L'Abbé Sauri Cours complet de Mathematiques. Wir können uns allhier in diese Untersuchung nicht weiter einlassen, und werden bey der Anwendung, wenn dergleichen Dif-

Fig.

der statt g seinen Werth setzet, $dy = \frac{ax^{m+1}dx}{m+1} + Cdx$; und endlich giebt eine fernere Integration $y = \frac{ax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + Cx + C'$; die beständigen Größen C und C′ müßen aus den Umständen der Aufgabe bestimmet werden, welche zu ihrer Auflösung einer solchen Integration bedarf.

Auf die nämliche Art findet man aus der Differenzialgleichung der dritten Ordnung $d^3y = ax^m dx^3 + bx^n dx^3$ durch eine dreymalige Integration $y = \frac{ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{bx^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{2}Cx^2 + C'x + C''$, wenn man im Anfange $dx^2 = g$ setzet; u. s. w.

Wenn in einer höheren Differenzialgleichung die veränderlichen Größen vermenget sind, so muß man untersuchen, ob nicht vielleicht das gesuchte Integrale ein Produkt aus den veränderlichen Größen sey; z. B. das Integrale der Differenzialgleichung $ddz = x^3ddy + 6x^2dxdy + 6xydx^2$, worinn dx unveränderlich ist, läßt sich also gleich einsehen, wenn man selbe ohne Veränderung des Werthes also schreibet,

$ddz = (x^3ddy + 3x^2dxdy) + (3x^2dxdy + 6xydx^2)$;

es ist nämlich nach der ersten Integration

$dz = x^3dy + 3x^2ydx + Cdx$; und nach der zweyten

$z = x^3y + Cx + C'$

Auf die nämliche Art läßt sich die Differenzialgleichung $dz = \frac{yddx}{du} + \frac{addy}{du} - \frac{xddy}{du}$ integriren, worinn du für unveränderlich angenommen wird, wenn man selbe ohne Veränderung des Werthes also schreibet, $dz = (\frac{yddx}{du} + \frac{dxdy}{du})$

+

nämlich $R = \int c h^{\frac{x}{a}} dx = a c h^{\frac{x}{a}} + C$; nun ist für $R = 0$, auch Fig.
$x = 0$, nämlich $0 = a c h^{0} + C = ac + C$; also $C =$
$-ac$, und $R = a c h^{\frac{x}{a}} - ac$, oder $R = ay - ac = a(y-c)$,
oder endlich $R = \frac{x(y-c)}{Ly - Lc}$ wie (569) wenn man statt a seinen Werth setzet. In der Gleichung $R = a(y-c)$ setze man $c = 0$, oder unendlich klein, so ist $R = ay$ der Flächenraum längst der ganzen Asymptote von PM herüber gerechnet.

III. Es sey Fig. 205 AMD eine gleichseitige Hyperbel, bey der jede Halbachse $= a$ ist, so ist $y = \sqrt{(x^2 - a^2)}$, wenn man den Anfangspunkt der Abscissen in dem Mittelpunkte B annimmt, und $\int dx \sqrt{(x^2 - a^2)} = C + \frac{1}{2} x \sqrt{(x^2 - a^2)} - \frac{1}{2} a^2 . L(x + \sqrt{x^2 - a^2})$; es ist aber in diesem Falle für $R = 0$ die Abscisse $x = a = AB$; also $C = \frac{1}{2} a^2 . La$, und $R = \frac{1}{2} a^2 . La + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}) - \frac{1}{2} a^2 . L(x + \sqrt{x^2 - a^2})$. Wie man diesen Flächenraum für ein in Zahlen gegebenes a und x zu berechnen habe ist aus (624) zu ersehen.

IV. Wenn man in Fig. 87. $CM = x$, $CA = a$ und $CMBA = R$ setzet, so ist $R = \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)} = C + \frac{1}{2} a^2 . \text{arc sin}(x : a) + \frac{1}{2} x \sqrt{(a^2 - x^2)}$; es ist aber für $R = 0$, auch $x = 0$; also $C = 0$, und $R = \frac{1}{2} a . \text{arc sin}(x : a) + \frac{1}{2} x \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Dieses erhellet augenscheinlich aus Fig. 87; denn es ist $\frac{1}{2} x \sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2} CM.MB = CBM$, und $\frac{1}{2} a^2 . \text{arc sin}(x : a) = ACB$. Wenn man diesen Flächenraum ACMB durch eine unendliche Reihe ausgedrückt haben will, so muß man $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ in der Gleichung $R = \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ in eine unendliche Reihe auflösen, selbe mit dx multipliciren, und sodann nach der Fundamentalregel jedes Glied integriren. Man erhält nach vorgenommener Reduktion für den Flächenraum ACMB die nämliche Reihe, welche (351) durch die Summirung der Elemente zum Vorschein kam. Es ist

auch

Differenzialgrößen vorkommen sollten, das abgängige beybringen und ersetzen.

Fig. 205

Anwendung der Integralrechnung Auf die Bestimmung des Flächeninhaltes krummlinigter Figuren, auf die Rektifikation der krummen Linien, und auf die Berechnung der Oberflächen und des Kubikinhaltes der Körper.

644. Aufgabe. **Eine allgemeine Formel für den Flächenraum einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten zu finden.**

Auflösung. Es sey die krumme Linie AMD Fig. 205, $AP = x$, $PM = y$, und der gesuchte Flächenraum APMA $= R$, man gedenke pm unendlich nahe bey PM diesseits gegen den Anfangspunkt A gerechnet oder auch auf der entgegengesetzen Seite, so ist $Pp = dx$, $RM = dy$, und PpmM $= dR$; es ist aber, weil man den unendlich kleinen Bogen Mm von einer geraden Linie nicht unterscheiden kann, PpmM $= \frac{1}{2}(PM + pm) . Pp = \frac{1}{2}(y + y - dy)dx = \frac{1}{2}(2y - dy)dx$ $= ydx$, weil dy in Rücksicht $2y$ für 0 anzusehen ist; folglich ist $dR = ydx$, und endlich $R = \int ydx + C$.

I. Nach dieser Formel läßt sich der Flächenraum bey einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten finden, wenn man aus der Gleichung für die krumme Linie statt y den Werth durch x ausgedrückt, oder auch statt dx seinen Werth durch y und dy ausgedrückt substituiret, und sodann das Integrale nach den gegebenen Regeln entwickelt. Es sey z. B. AMD eine Parabel, so ist $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; folglich $R = \int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; nun ist für $R = 0$, auch $x = 0$, also auch $C = 0$, und $R = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy$ wie (530)

II. Eben so ist bey der Logistik Fig. 188, wenn man $AP = x$, $PM = y$, und ABMP $= R$ setzet, $R = \int ydx + C$;

linie einen gegebenen schiefen Winkel einschließen, ist der Flächenraum sehr leicht zu bestimmen. Fig. 195

645. Bey den krummen Linien, deren Ordinaten aus einem Punkte gehen, läßt sich eine allgemeine Formel für den Flächenraum auf folgende Art finden. Man setze Fig. 195 den Halbmesser des Abscissenkreises AB $= c$, AP $= x$, BM $= y$, den Flächenraum APMA $= R$; ferner sey an den Punkt m, der unendlich nahe bey M liegt, die Ordinate Bm gezogen, und aus B mit dem Halbmesser BM der Kreisbogen MR gezogen, so ist Pp $= \mathrm{d}x$, MR $= \frac{y\mathrm{d}x}{c}$, und PMmp $=$ PMRp $= \mathrm{d}R$, weil MmR in Rücksicht PMRp für o anzusehen ist; nun ist PMRp $= \frac{1}{2}$(MR + Pp).PM, weil MR und Pp für gerade Linien können angesehen werden, worauf PM senkrecht steht, nämlich PMRp $= \frac{1}{2}(\frac{y\mathrm{d}x}{c} + \mathrm{d}x)\times(y-c) = \frac{\mathrm{d}x(y^2-c^2)}{2c}$; folglich $\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}x(y^2-c^2)}{2c}$, und $R = \int(\frac{\mathrm{d}x(y^2-c^2)}{2c}) + C$.

Wenn man hingegen ABMA $= R$ setzet, so ist $\mathrm{d}R =$ MBm $=$ MBR $= \frac{1}{2}$MR.BM $= \frac{\frac{1}{2}y^2\mathrm{d}x}{c}$, und folglich $R = \int\frac{y^2\mathrm{d}x}{2c} + C$. Wenn man in eben diesem Falle die Anzahl der Grade des Bogens AP oder des Winkels ABM $= u$ setzet, so ist $R = \frac{\pi y^2\mathrm{d}u}{360c} + C$.

646. Aufgabe. **Eine allgemeine Formel für die Länge des Bogens bey einer jeden krummen Linie von senkrechten Ordinaten zu finden.**

Auflösung. In Fig. 205 sey AP $= x$, PM $= y$, AM $= z$, pm unendlich nahe bey PM, und mR parallel zu AP, so ist mR $=$ Pp $= \mathrm{d}x$, RM $= \mathrm{d}y$, und mM $= \mathrm{d}z$;

nun

Fig. auch in der That die Anwendung der Integralrechnung auf die Bestimmung des Flächenraums und auf die Rektifikation der Bögen bey den krummen Linien, auf die Berechnung der Oberflächen und der Kubikinhalte der Körper, und auf verschiedene andere Gegenstände, nichts anders als eine abgekürzte Summirung der Elemente, nicht anders als eine sehr leichte und geschwinde Methode aus dem allgemeinen oder letzten Gliede in der unendlichen Reihe der Elemente die Summe selbst zu finden. Wenn man sich nämlich vorstellet, daß Fig. 205 die Abscisse AP $= x$ in unendlich viele gleiche Theile getheilet sey, deren jeder $= dx = \frac{x}{\infty}$ ist, und daß aus allen Theilungspunkten senkrechte Ordinaten bis an die krumme Linie geführet werden, so wird dadurch der Flächenrum APM in seine Elemente (in die eingeschriebenen oder auch umgeschriebenen Rechtecke) aufgelöset; pmMP $= ydx$ ist das letzte oder allgemeine Glied in der Reihe der Elemente und $\int ydx + C$ ist die Summe aller Elemente, welche zusammengenommen den Flächenraum APM geben, nämlich $\int yd. + C$ ist der Flächenraum APM selbst. Was die abgekürzte Redensart bedeute, **eine Größe sey in unendlich viele gleiche Theile getheilet, ein jeder Theil davon sey sodann unendlich klein**, ist bereits (573) erörtert worden. Daß die Summe der eingeschriebenen oder auch der umgeschriebenen Rechtecke bey einem krummlinigten Flächenraum ACB Fig. 84 von diesem Flächenraume um keine angebliche Größe verschieden sey, und folglich diesen gleich gesetzet werden könne, erhellet auch schon aus (342), wenn AB in unendlich viele gleiche Theile getheilet wird.

Es kann ein jeder durch eigenen Fleiß bey verschiedenen krummen Linien, deren Gleichungen für senkrechte Ordinaten bekannt sind, den Flächenraum berechnen. Auch bey den krummen Linien, deren parallele Ordinaten mit der Abscissen-

linie

Wenn man bey eben dieser Parabel AMD Fig. 205 den Bogen AM $= z$ durch die Ordinate y ausgedrückt haben will, so kann man gleich anfangs in der Formel $z = \int dy(1 + dx^2 . dy^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$ statt dx seinen Werth setzen; aus der Gleichung für die Parabel $\frac{y^2}{p} = x$ folgt nämlich $dx = \frac{2ydy}{p}$; Fig.

folglich $z = \int dy\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \int \frac{2}{p} . dy(y^2 + \frac{1}{4}p^2)^{\frac{1}{2}}$

$= C + \frac{y}{p} . \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}p^2)} + \frac{1}{4}p\ L(y + \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}p^2})$;

nun ist für $z = 0$, auch $y = 0$, nämlich $0 = C + \frac{1}{4}p . L\frac{1}{2}p$, also $C = -\frac{1}{4}p . L\frac{1}{2}p$, und $z = \frac{y}{p} . \sqrt{(y^2 + \frac{1}{4}p^2)}$

$+ \frac{1}{4}p . L\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + \frac{1}{4}p^2}}{\frac{1}{2}p}\right) =$ AM. Es sey $y = \frac{1}{2}p$, so ist $z = \frac{1}{4}p[\sqrt{2} + \text{lognat}(1 + \sqrt{2})]$ wie ehevor. Dieser gefundene Werth doppelt genommen ist $\frac{1}{2}p . [\sqrt{2} + \text{lognat}(1 + \sqrt{2})]$ die wirkliche Länge eines parabolischen Bogens, welchen die ganze Ordinate des Brennpunktes beyderseits abschneidet. Die gemeine Parabel läßt sich demnach mittelst der natürlichen Logarithmen rectificiren.

III. Es sey Fig. 87 CM $= x$, CA $= a$, und AB $= z$, so ist MB $= y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, $dy = -xdx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $dy^2 = x^2dx^2(a^2 - x^2)^{-1}$, folglich $z = \int dx(1 + x^2(a^2 - x^2)^{-1})^{\frac{1}{2}}$ $= \int adx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = a . \text{arc}\sin(x : a)$ für den ganzen Sinus $= 1$, oder $z = \text{Arc}\sin x$ für den ganzen Sinus $= a$, welches aus Fig. 87 deutlich erhellet, weil $x =$ CM $=$ EB $= \sin$ arc AB ist. Wenn man das Integrale $\int adx(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach (618) durch eine unendliche Reihe entwickelt, so findet

Fig. nun kann der unendlich kleine Bogen mM für eine gerade Linie angesehen werden; folglich $mM = \sqrt{(mR^2 + RM^2)}$, nämlich $dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$, oder $dz = dy(1 + dx^2 . dy^{-2})^{\frac{1}{2}}$; und endlich $z = \int dx(1 + dy^2 . dx^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$, oder $z = \int dy(1 + dx^2 . dy^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$.

I. Z. B. aus der Differenzialgleichung für die Cycloide $dy = dx(2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$ folgt $dy^2 = dx^2(2ax^{-1} - 1)$ vermög (591); folglich $z = \int dx(1 + 2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{2a} = 2\sqrt{2ax}$, allwo $C = 0$ ist; setzen wir nun $x = 2a$, so ist $z = 4a$, nämlich $A'M'D' = 2A'B'$ Fig. 197, und ein jeder anderer Bogen $A'M' = 2A'Q'$.

II. Aus der Gleichung für die Parabel $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ folgt $dy = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$; folglich $z = \int dx(1 + \frac{1}{4}px^{-1})^{\frac{1}{2}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} + C$; nun läßt sich $\int x^{-\frac{1}{2}} dx(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}}$ mittelst des bekannten Integrals (623. IV.) $\int x^{\frac{1}{2}} dx(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(2x + \frac{1}{4}p)\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)} - \frac{1}{128}p^2 . L(x + \frac{1}{8}p + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}px})$ nach der allgemeinen Formel (625) bestimmen; es ist nach vorgenommener Reduktion $\int x^{-\frac{1}{2}} dx(x + \frac{1}{4}p)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)} + \frac{1}{8}p . L(x + \frac{1}{8}p + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}px})$; folglich $z = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)} + \frac{1}{8}p . L(x + \frac{1}{8}p + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}px}) + C$; es ist aber für $z = 0$, auch $x = 0$, nämlich $0 = \frac{1}{8}p . L\frac{1}{8}p + C$; also $C = -\frac{1}{8}p . L\frac{1}{8}p$, und $z = \sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}px)} + \frac{1}{8}p . L(x + \frac{1}{8}p + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}px}) - \frac{1}{8}p . L\frac{1}{8}p = AM$ Fig. 205 wenn AM eine Parabel ist. Setzen wir nun $x = \frac{1}{4}p$, so ist $z = \frac{1}{4}p\sqrt{2} + \frac{1}{8}p . L(3 + 2\sqrt{2}) = \frac{1}{4}p\sqrt{2} + \frac{1}{4}p . L\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}p\sqrt{2} + \frac{1}{4}p . L(1 + \sqrt{2})$, nämlich $z = \frac{1}{4}p . [\sqrt{2} + \text{lognat}(1 + \sqrt{2})]$, weil $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ ist.

Wenn

3. B. Aus der Gleichung für die logistische Spirallinie Fig.
$y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{2c\pi}}$ folgt $x = \frac{2c\pi.(Ly-Lc)}{Lb - Lc}$, $dx = \frac{2c\pi dy}{y.(Lb-Lc)}$;
also $z = \int \frac{dy}{c}\left(c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb-Lc)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{c}\left(c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb-Lc)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
$+ C$; nun ist für $z = 0$, die Ordinate $y = c$, nämlich
$0 = \left(c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb-Lc)^2}\right)^{\frac{1}{2}} + C$; folglich $z = (\frac{y}{c} - 1) \times$
$\left(c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb-Lc)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$; setzt man nun $y = 0$ oder unendlich klein, so ist $\left(c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb-Lc)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ die wirkliche Länge der logistischen Spirallinie von dem Anfangspunkte der Abscissen bis in den Mittelpunkt des Abscissenkreises gerechnet.

Wenn man statt y seinen Werth setzet, so ist
$z = \left[\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{2c\pi}} - 1\right] \cdot \left(c^2 + \frac{4c^2\pi^2}{(Lb-Lc)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ die wirkliche Länge was immer für eines Bogens einer logistischen Spirallinie von dem Anfangspunkte der Abscissen gerechnet.

648. Aufgabe. **Eine allgemeine Formel für die krumme Oberfläche jener Körper zu finden, welche durch die Umdrehung der krummen Linien von senkrechten Ordinaten erzeuget werden.**

Auflösung. Es sey Fig. 205. CAD ein solcher Körper, der durch die Umdrehung der krummen Linie AMD um die Abscissenlinie AE erzeuget wird; AP sey $= x$, PM $= y$, und die krumme Oberfläche, welche bey der Umdrehung durch den Bogen AM erzeuget wird, sey $= Q$, so ist das Differenzial (oder das letzte Element) dieser Oberfläche nichts anders, als die Oberfläche des abgekürzten Kegels, wel-

Fig. man für z eben die Reihe, die wir (351) durch die Summirung der Kreiselemente erhalten haben.

IV. Bey der Ellipse ist für die Abscissen auf der großen Achse vom Mittelpunkte gerechnet $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; daraus folgt $dy = -\frac{bx\,dx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, und $dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{a^2(a^2 - x^2)}$, also $z = \int dx\left(1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \int dx\sqrt{\left(\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^4 - a^2x^2}\right)}$ $+ C$; dieses Integrale läßt durch keinen einzigen bisher bekannten Kunstgriff weder abgebraisch, noch mittelst der Kreisbögen, noch auch mittelst der Logarithmen sich entwickeln. Wäre es nun unumgänglich nothwendig die Länge eines elliptischen Bogens durch Rechnung zu finden, so müßte man die Zuflucht zu einer unendlichen Reiche nehmen, man könnte zu diesem Ende $\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^4 - a^2x^2} = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6$ $+ Dx^8 + \ldots$ setzen, und darauf die Coefficienten bestimmen; sodann muß man aus dieser unendlichen Reiche die Quadratwurzel ziehen, selbe mit dx multipliciren, und endlich jedes Glied dieser letzten Reihe besonders integriren; man kann um die Rechnung abzukürzen, $a^2 - b^2 = c^2$ setzen, allwo c die Excentricität der Ellipse nämlich den halben Abstand der Brennpunkte bedeutet.

647. Für die Ordinaten aus einem Punkte ist $z = \int \frac{dy}{c}(c^2 + y^2dx^2.dy^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$, oder auch $z = \int \frac{dx}{c} \times$ $(y^2 + c^2dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}} + C$ Fig. 195, wenn man $AP = x$, $BM = y$, $AB = c$, und $AM = z$ setzet, weil auch in diesem Falle $Mm = \sqrt{(MR^2 + Rm^2)}$ ist.

oder $b^2 - a^2 = c^2$ für für $b > a$ setzet, allwo c die Excentricität bedeutet. Das obere Zeichen — ist bey einem länglichten Elliptoides zu gebrauchen Fig. 178, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um die große Achse AB $= 2a$ erzeuget wird, wovon die kleine Achse DE $= 2b$ ist; und das untere Zeichen + gehört zu einem abgeplatteten Elliptoides Fig. 180, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um die kleine Achse ED $= 2a$ entsteht, wovon die große Achse AB $= 2b$ ist. Setzen wir in dem ersten Falle CP $= x$ Fig. 178, so ist das Stück der Oberfläche das länglichten Elliptoides von dem größten Kreise DE bis zum Parallelkreise MM′ gerechnet $Q = \int \frac{2bc\pi dx}{a^2} \left(\frac{a^4}{c^2} - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{a^2 b\pi}{c}$. arc sin $\frac{cx}{a^2} + \frac{bcx\pi}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2} - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$, allwo C $= 0$ seyn muß. Setzen wir nun $x =$ CB $= a$, so ist die Oberfläche des halben länglichten Elliptoides $= \frac{a^2 b\pi}{c}$. arc sin $\frac{c}{a}$ $+ b\pi(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^2 b\pi}{c}$. arc sin $\frac{c}{a} + b^2\pi$, wenn man wieder statt c den gehörigen Werth setzet; und folglich ist die Oberfläche des ganzen länglichten Elliptoides $= \frac{2a^2 b\pi}{c} \times$ arc sin $\frac{c}{a} + 2b^2\pi$; setzen wir ferner $a = b$, so verwandelt sich das Elliptoides in eine Kugel; in dieser Voraussetzung ist $c = 0$, und arc sin $\frac{c}{a} = \frac{c}{a}$; folglich ist sodann die Oberfläche $= \frac{2b^3\pi}{c} \cdot \frac{c}{a} + 2b^2\pi = 4b^2\pi =$ der Kugelfläche, wovon der Halbmesser $= b$ ist.

Setzen wir aber in dem zweyten Falle Fig. 180 CP $= x$, die Umdrehungsachse ED $= 2a$, und die große Achse AB $= 2b$,

Fig.

Fig. welcher bey der Umdrehung durch das Trapezium MPpm erzeuget wird, weil man mM für eine gerade Linie ansehen kann; vermög (394) aber ist die Oberfläche dieses abgekürzten Kegels $=(PM+pm)\pi.\ Mm=(y+y-dy)\pi(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$ $=2\pi y dy(1+dx^2 dy^{-2})^{\frac{1}{2}}$; folglich $dQ=2\pi y dy(1+dx^2.dy^{-2})^{\frac{1}{2}}$, und $Q=\int 2\pi y dy(1+dx^2.\ dy^{-2})^{\frac{1}{2}}+C$.

I. Es sey z. B. AM eine Parabel, so ist $dx=\frac{2ydy}{p}$;

folglich $Q=\int 2\pi y dy\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\int\frac{2\pi y}{p}(p^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{\pi}{6p}(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}+C$; nun ist für $Q=0$, auch $y=0$;

also $C=-\frac{1}{6}p^2\pi$, und $Q=\frac{\pi}{6p}(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}p^2\pi$.

II. Aus der Gleichung $Q=\int 2\pi y dy(1+dx^2.\ dy^{-2})^{\frac{1}{2}}$ folgt auch $Q=\int 2\pi y dx(1+dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}}+C$. Nach dieser Formel läßt sich die Oberfläche eines Elliptoides sehr leicht berechnen; es ist nämlich bey der Ellipse für die Abscissen vom Mittelpunkte gerechnet $y=\frac{b}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $dy=-\frac{bxdx}{a(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$,

und $dy^2=\frac{b^2x^2dx^2}{a^2(a^2-x^2)}$; folglich $Q=\int 2\pi.\frac{b}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\times$

$dx\left(1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right)^{\frac{1}{2}}=\int\frac{2b\pi dx}{a^2}(a^4-(a^2-b^2)x^2)^{\frac{1}{2}}$,

oder $Q=\int\frac{2b\pi dx}{a^2}(a^4\mp c^2x^2)^{\frac{1}{2}}$, nämlich $Q=\int\frac{2bc\pi dx}{a^2}\times$

$\left(\frac{a^4}{c^2}\mp x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C$, wenn man $a^2-b^2=c^2$ für $a>b$,

oder

Auf die nämliche Art lassen sich die Oberflächen von meh- Fig.
reren anderen runden Körpern berechnen; auch die Oberflächen von verschiedenen Afterpyramiden Fig. 120 kann man mittelst der Integralrechnung ohne Schwirigkeit finden.

649. Aufgabe. **Eine allgemeine Formel für den Kubickinhalt derjenigen Körper zu finden, welche durch die Umdrehung der krummen Linien von senkrechten Ordinaten entstehen.**

Auflösung. Es sey bey der krummen Linie AMD Fig. 205, AE die Umdrehungsachse, $AP = x$; $PM = y$, und der Kubickinhalt des Afterkegels $MAM' = K$, so ist der abgekürzte Kegel zwischen den Ebenen M'M und m'm das Differenzial von K; diesen abgekürzten Kegel kann man für einen Cylinder ansehen, weil die Halbmesser der zwey Grundflächen nur um eine unendlich kleine Größe nämlich um $RM = dy$ von einander verschieden sind; es ist demnach dK ein Cylinder, dessen Grundfläche = dem Kreise auf M'M, und dessen Höhe = Pp ist, nämlich $dK = PM^2 \pi . Pp = \pi y^2 dx$, und folglich $K = \int \pi y^2 dx + C$.

Es sey z. B. AMD eine Parabel, so ist $y^2 = px$; also $K = \int \pi px dx = \frac{1}{2}\pi px^2$, allwo $C = 0$ ist, oder auch $K = \frac{1}{2} y^2 \pi x =$ dem halben Produkte aus der Grundfläche in die Höhe wie (531).

Auf diese Art können nun verschiedene runde Körper berechnet werden; als z. B. länglichte und abgeplattete Elliptoiden, hyperbolische Afterkegel, welche nämlich durch die Umdrehung einer Hyperbel entweder um die erste oder um die zweyte Achse, oder auch um die eine Asymptote entstehen. Bey dem Afterkegel, welcher durch die Umdrehung einer gemeinen Hyperbel um die eine Asymptote entsteht, wird man den besonderen Umstand wahrnehmen, daß der Kubikinhalt eines solchen Körpers von AB oder von PM Fig 186 längst der ganzen Asymptote ohne Ende hinausgerechnet angeblich, endlich sey, obschon der Durchschnitt eines solchen Körpers durch die Umdrehungsachse gelegt größer als jede angebliche Größe, Fig. so ist bey dem abgeplatteten Elliptoides das Stück der Oberfläche von dem größten Kreise AB bis zum Parallelkreise MN gerechnet $Q = \int \frac{2bc\pi dx}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2}+x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{bc\pi x}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2}+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $+ \frac{a^2b\pi}{c}.L(x+\sqrt{\frac{a^4}{c^2}+x^2}) + C$; nun ist für $Q = 0$, auch $x = 0$, nämlich $0 = \frac{a^2b\pi}{c}.L\frac{a^2}{c} + C$; also $C = -\frac{a^2b\pi}{c}.L\frac{a^2}{c}$, und $Q = \frac{bc\pi x}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2}+x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2b\pi}{c} \times L\left[\frac{c}{a^2}\left(x+\sqrt{\frac{a^4}{c^2}+x^2}\right)\right]$. Setzen wir $x = CD = a$ und substituiret statt c^2 seinen Werth $b^2 - a^2$, so ist die halbe Oberfläche $= \frac{a^2b\pi}{c}.L\left(\frac{c}{a}+\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}}\right) + b^2\pi$, und folglich ist die ganze Oberfläche eines abgeplatteten Elliptoides, dessen Umdrehungsachse $= 2a$, der Durchmesser des größten Kreises $= 2b$, und die Excentricität der Erzeugungsellipse $= c$ ist, $Q = \frac{2a^2b\pi}{c}.L\left(\frac{c}{a}+\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}}\right) + 2b^2\pi$. Setzen wir ferner wie ehevor $b = a$, so verwandelt sich das abgeplattete Elliptoides in eine Kugel; in dieser Voraussetzung ist $c = 0$, und $L\left(\frac{c}{a}+\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}}\right) = L\left(\frac{c}{a}+1\right)$ $= L\left(1+\frac{c}{a}\right) = \frac{c}{a}$; folglich ist sodann die ganze Oberfläche $= \frac{2a^2b\pi}{c}.\frac{c}{a} + 2b^2\pi = 4b^2\pi =$ der Kugelfläche, wovon der Halbmesser $= b$ ist.

der Entfernung x von dem Anfange des Körpers zur Grund- Fig.
fläche parallel gelegt ist, so ist $t\mathrm{d}x$ das Differenzial oder das allgemeine Glied in der Reihe der Elemente eines solchen Körpers; und folglich der Kubickinhalt des Stückes vom Anfange bis zur parallelen Durchschnittsfläche t gerechnet $K = \int t\mathrm{d}x$. Läßt sich nun aus der Eigenschaft des Körpers, t in x ausdrucken, so läßt sich $t\mathrm{d}x$ integriren, und folglich der Kubikinhalt des vorgegebenen Pyramidalförmigen Körpers bestimmen.

Es sey z. B. DQA eine Afterpyramide Fig. 120, deren Höhe QP $= a$ ist; ihre Grundfläche sey $= b$, die ein Rechteck, oder ein Quadrat, oder sonst ein regelmässiges Vieleck seyn mag; diese Afterpyramide sey also beschaffen, daß alle ihre Seitenlinien aus Viertheilkreisen bestehen, welche aus dem Mittelpunkte P mit dem Halbmesser AP $=$ PQ beschrieben sind; setzen wir nun QR $= x$, und die Durchschnittsfläche EF $= t$, so ist vermög der Eigenschaft des Kreises die Gerade RF $= \sqrt{(2ax - x^2)}$; ferner verhält sich die Grundfläche DA zur Fläche EF wie PA^2 zu RF^2, nämlich $b : t = a^2 : 2ax - x^2$: also $t = \dfrac{2abx - bx^2}{a^2}$, und $K = \int\left(\dfrac{2bx\mathrm{d}x}{a} - \dfrac{bx^2\mathrm{d}x}{a^2}\right)$ $= \dfrac{bx^2}{a} - \dfrac{bx^3}{3a^2}$, allwo $C = 0$ ist; man setze $x = a$, so ist der Kubickinhalt der ganzen Afterpyramide $= \frac{2}{3}ab =$ zwey Drittheilen des Produktes aus der Grundfläche in die Höhe. Wenn die Seitenlinien einer solchen Afterpyramide Parabeln, Ellipsen, oder andere bekannte krumme Linien wären, so könnte der Kubickinhalt auf die nämliche Art berechnet werden.

652. Die Anwendung der Integralrechnung auf die verkehrte **Methode der Tangenten** wollen wir allhier nur ganz kurz berühren. Diese Methode besteht darinn, daß man aus einer bekannten Eigenschaft einer krummen Linie die Gleichung für dieselbe finde; dieses geht jederzeit an, so oft sich die bekannte Eigenschaft durch die Differenzialrechnung ausdrücken läßt. Es sey z. B. die Gleichung für die krumme Linie zu

Fig. unendlich groß ist, welches sehr leicht zu begreiffen ist, wenn man sich nur daran erinnert, daß bey einem solchen Afterkegel in einer unendlichen Entfernung die Körperelemente unendlich kleine Größen von der zweyten Ordnung, die Flächenelemente des Durchschnittes längst der Umdrehungsachse aber in eben dieser Entfernung unendlich kleine Größen von der ersten Ordnung sind.

650. Wenn die krummlinigte Fläche APM Fig 205. sich um die Gerade BG herum drehet, welche mit APM in einerley Ebene liegt, und mit der senkrechten Ordinate PM parallel läuft, so entsteht ein ringförmiger Körper, dessen Kubickinhalt sich auf folgende Art berechnen läßt. Bey dieser Umdrehung beschreibet jedes Flächenelement pmMP eine cylindrische Röhre, wovon der äussere Durchmesser = BP und der innere = Bp ist, die Höhe dieser cylindrischen Röhre aber ist = pm = PM = y; diese cylindrische Röhre ist das Differenzial des ringförmigen Körpers; setzen wir nun diesen Körper = K, den Abstand AB = c, AP = x, und PM = y, so ist die erwähnte cylindrische Röhre $dK = BP^2.\pi \times PM - Bp^2.\pi \times PM = \pi.PM(BP^2 - Bp^2) = \pi.PM[BP^2 - (BP - Pp)^2] = \pi y(BP^2 - BP^2 + 2BP.Pp - Pp^2) = 2\pi y.BP.Pp = 2\pi y(c + x)dx$; und folglich $K = \int 2\pi y(c + x)dx + C$.

Diese allgemeine Formel wird ein jeder auf besondere Beyspiele anwenden können, z. B. auf die Berechnung eines wirklichen Kreisringes. Auch die Oberflächen lassen sich bey dergleichen ringförmigen Körpern ohne Schwierigkeit finden. Es ist überflüssig zu erinnern, daß man $c = 0$ setzen müße, wenn AQ die Umdrehungsachse seyn sollte.

651. Auch die Kubikinhalte der Pyramidalförmigen Körper lassen sich mittelst der Integralrechnung berechnen. Man stelle sich vor, daß die Höhe eines pyramidalförmigen Körpers in unendlich viele gleiche Theile getheilet sey; man gedenke durch alle diese Theilungspunkte zur Grundfläche parallele Ebenen; der Flächeninhalt der Durchschnittsfläche sey = t, welche in

der

das ist $\frac{dx}{dy} = y^{\frac{1}{n}} (c^2 - y^{\frac{2}{n}})^{-\frac{1}{2}}$, und $dx = y^{\frac{1}{n}} dy (c^2 - y^{\frac{2}{n}})^{-\frac{1}{2}}$; Fig. diese Gleichung wieder integriret giebt endlich $x = \int y^{\frac{1}{n}} dy (c^2 - y^{\frac{2}{n}})^{-\frac{1}{2}} + c'$; man setze n einer ungeraden positiven Zahl gleich, z. B. $n = 1$, und dabey $c' = 0$, so ist $x = \int y dy (c^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{(c^2 - y^2)}$, und $y = \sqrt{(c^2 - x^2)}$ die Gleichung eines Kreises, wovon der Halbmesser $= c$ ist.

Die Anwendung der Integralrechnung auf verschiedene Gegenstände aus den mechanischen Wissenschaften soll in dem folgenden letzten Bande meiner Vorlesungen über die Mathematik vorkommen. Einige besondere Fälle aus der Geometrie, z. B. die Oberfläche eines schiefen Kegels, den Kubickinhalt der Angußscheiben sowohl bey den Kanonen als auch bey den Pöllern, die Oberfläche und den Kubickinhalt verschiedener Cylinderstücke u. s. w. wird ein geübter Leser durch eigenen Fleiß mittelst der Integralrechnung zu bestimmen im Stande seyn.

Ende des zweyten Bandes.

Einige

Fig. suchen, bey der die Subtangente $\frac{3}{2}$ der Abscisse gleich ist, so ist nach dieser Bedingung $\frac{ydx}{dy} = \frac{3}{2}x$; daraus folgt durch die Absönderung $\frac{3dy}{y} = \frac{2dx}{x}$, und integriret $3.Ly = 2.Lx + Lc$, nämlich $Ly^3 = Lcx^2$, und endlich $y^3 = cx^2$; die gesuchte krumme Linie ist demnach eine cubische Parabel.

Imgleichen eine krumme Linie von der Beschaffenheit zu finden, daß der Krümmungshalbmesser der *n*fachen Normale gleich sey. Es ist vermög (596) der Krümmungshalbmesser $= \frac{(1 + dy^2.dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy.dx^{-2}}$, und vermög (592. II.) die Normale $= y(1 + dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$; es ist also vermög der Bedingung der Aufgabe $\frac{(1+dy^2.dx^{-2})^{\frac{3}{2}}}{-ddy.dx^{-2}} = ny(1+dy^2.dx^{-2})^{\frac{1}{2}}$, woraus $nyddy + dx^2 + dy^2 = 0$ folgt; nun setze man $\frac{dx}{dy} = z$, so ist $dx = zdy$, $dy = \frac{dx}{z}$, und $ddy = -\frac{dxdz}{z^2} = -\frac{dzdy}{z}$; folglich ist die verwandelte Gleichung $-\frac{nydzdy}{z} + z^2dy^2 + dy^2 = 0$, oder wenn man die veränderlichen Größen absändert, $\frac{dy}{ny} = \frac{dz}{z(z^2+1)}$; diese Gleichung nach (633) oder auch noch (619) integriret giebt $\frac{1}{n}.Ly = L\frac{z}{\sqrt{(z^2+1)}} + Lc$, oder $Ly^{\frac{1}{n}} = L\frac{cz}{\sqrt{(z^2 + 1)}}$, nämlich $y^{\frac{1}{n}} = \frac{cz}{\sqrt{(z^2 + 1)}}$; daraus fließt $z = y^{\frac{1}{n}}(c^2 - y^{\frac{2}{n}})^{-\frac{1}{2}}$,

das

tion sehr geschwind auf folgende Art verrichtet werden. Man multiplicire mit der **erſten links ſtehenden** bedeutlichen Ziffer des Multiplikators den ganzen Multiplikandus von der Rechten gegen die Linken, und schneide in diesem Partialprodukte die ganzen Einheiten von den Decimalstellen gehörig ab; mit der **zweyten links ſtehenden** Ziffer des Multiplikators multiplicire man den ganzen Multiplikandus von der **zweyten rechts ſtehenden** Ziffer des Multiplikandus angefangen; mit der dritten **links** in die dritte **rechts** u. s. w. und schreibe diese Partialprodukte untereinander, so wird ihre Summe das gesuchte Hauptprodukt zum Vorschein bringen.

Beyspiele.

8,99875477	Multiplikandus	2,30258509
0,43429448	Multiplikator	3,9600901
3,599501908		6,90775527
269962643		207232658
35995019		13815510
1799751		20722
809887		23
35995		9,11844440
3599		
719		
3,908109521		

III. Wenn bey einem Bruche oder bey einem Verhältniße, so nach (70) mit der möglichst kleinsten Veränderung des Werthes abzukürzen ist, als z. B. bey 10000000000 : 31415926536, einmal die Quotienten 3, 7, 15, 1, 292, ... bestimmet worden, so lassen sich daraus die abgekürzten Brüche oder Verhältniße 1 : 3; 7 : 22; 106 : 333; 113 : 355; ..... auf folgende Art sehr geschwind ableiten;

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 3, & 7, & 15, & 1, & 292, \\
\hline
\frac{0}{1} & \frac{1}{3}, & \frac{7}{22}, & \frac{106}{333}, & \frac{113}{355}, & \frac{33102}{103993}
\end{array} \text{ u. s. w.}$$

nämlich man schreibe die gefundenen Quotienten in einer Linie dahin, ziehe darunter einen Querstrich, setze vorwärts $\frac{0}{1}$ an, und

schrei=

Einige Zusätze zu dem ersten Bande.

I. Die (49) vorgetragene Regel, den größten gemeinschaftlichen Theiler zweyer Zahlen zu finden, läßt sich auf folgende Art allgemein erweisen.

Es sey bey dem eigentlichen Bruche $\frac{a}{b}$ des Zählers und Nenners größter gemeinschaftlicher Theiler zu finden, und $\frac{b}{a} = c + \frac{d}{a}$, es bleibe nämlich d zum Reste, wenn man b durch a theilet; ferner sey $\frac{a}{d} = f + \frac{p}{d}$, und $\frac{d}{p} = m + \frac{q}{p}$, p aber sey durch q genau theilbar, das ist $\frac{p}{q} = n$, nämlich es sey

$$\frac{b}{a} = c + \frac{d}{a}, \text{ so ist } b = ac + d \,..\, A$$

$$\frac{a}{d} = f + \frac{p}{d} \qquad a = df + p \,..\, B$$

$$\frac{d}{p} = m + \frac{q}{p} \qquad d = pm + q \,..\, C$$

$$\frac{p}{q} = n \qquad p = qn \,......\, D$$

Substituiret man nun den Werth von p in der Gleichung C, so ist

$d = qmn + q$; diese Werthe in B substituiret geben

$a = qfmn + qf + qn$; und endlich in A substituiret

$b = qfmnc + qfc + qnc + qmn + q$;

woraus deutlich zu ersehen ist, daß der letzte Divisor nämlich q der größte gemeinschaftliche Theiler zu a und b sey.

II. Zuweilen sind Decimalbrüche, z. B. Logarithmen, miteinander zu multipliciren, deren Produkt man nur mit etlichen (z. B. mit 7) Decimalstellen richtig verlanget, und öfters auch nicht mehrere richtig erhalten kann; in solchen Fällen kann die Multiplika-

tion

die irrationalen Glieder den irrationalen gleich, so ist $a = y + z$, und $\sqrt{b} = 2\sqrt{yz}$; daraus folgt $a - y = z$ und auch $\frac{b}{4y} = z$; folglich $a - y = \frac{b}{4y}$, und endlich $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}$, $z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}$; es ist demnach $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}} + \sqrt{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}}$. Z. B. $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{2} + 1$. Imgleichen $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{11 + \sqrt{72}} = 3 + \sqrt{2}$.

VI. Vermög (184) ist $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + .$ daraus läßt sich nun $(a + b)^m$ sehr leicht entwickeln, wenn man $x = \frac{b}{a}$ setzet; denn es ist sodann $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m = 1 + m.\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}.\frac{b^2}{a^2} + ..$ nämlich $\left(\frac{a + b}{a}\right)^m = \frac{(a + b)^m}{a^m} = 1 + m.\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}.\frac{b^2}{a^2} + ..$ und endlich $(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)^{m-2}b^2}{1.2} + \ldots\ldots$

Es sey z. B. $m = 8$, so ist $(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$, welches man auf folgende Art gleichsam durch ein blosses Anschreiben findet.

$$\begin{array}{cccccc} a^8 & a^7 & a^6 & a^5 & a^4 & a^3 \\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 \\ \hline \end{array}$$
$$a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5$$

$$\begin{array}{ccc} a^2 & a^1 & a^0 \\ b^6 & b^7 & b^8 \\ \hline \end{array}$$
$$+ 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

nämlich aus einem jeden bereits schon gefundenen Coefficienten wird der Coefficient des nächst darauffolgenden Gliedes abgeleitet, wenn man den schon gefundenen Coefficienten mit dem Exponenten von a multipliciret, und durch die Stelle des Gliedes dividiret; z. B.

aus

schreibe für den ersten abgekürzten Bruch eine Einheit getheilt durch den ersten Quotienten; sodann wird jeder darauffolgende Bruch aus dem vorhergehenden bestimmet, indem man sagt

$7 \times 1 + 0 = 7$ getheilt durch $7 \times 3 + 1 = 22$;
$15 \times 7 + 1 = 106 \ldots\ldots 15 \times 22 + 3 = 333$;
$1 \times 106 + 7 = 113 \ldots\ldots 1 \times 333 + 22 = 355$;
$292 \times 113 + 106 = 33102 \ldots 292 \times 355 + 333 = 103993$.

IV. Bey den zusammengesetzten Potenzen es ist gar oft erforderlich, daß man eine Größe unter dem Zeichen (inner den Klammern) ohne Veränderung des Werthes aus einem Gliede hinwegschaffen muß; dieses kann gar leicht nach folgender Regel geschehen. **Man dividire alle Glieder unter dem Zeichen durch diejenige Größe, welche man aus einem Gliede hinwegschaffen will, und schreibe eben diese Größe auf die Potenz des gemeinschaftlichen Exponenten erhoben als Faktor ausser dem Zeichen.** Z. B. bey der Funktion $x^4\sqrt{(a^3 - ax^2)^{-3}} = x^4(a^3 - ax^2)^{-\frac{3}{2}}$ läßt sich x^2 aus dem zweyten Gliede unter dem Zeichen auf folgende Art wegschaffen; $x^4(a^3 - ax^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$= x^4 . \frac{(a^3 - ax^2)^{-\frac{3}{2}}}{(x^2)^{-\frac{3}{2}}} . (x^2)^{-\frac{3}{2}} = x^4 . \left(\frac{a^3 - ax^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} . x^{-3}$$

$$= x(a^3x^{-2} - a)^{-\frac{3}{2}}.$$

Imgleichen $(ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})^{-\frac{4}{3}} = x^{-2}(ax^{-1} - 1)^{-\frac{4}{3}}$; u. s. w.

V. Bey den verwickelten quadratischen Gleichungen von der Gestalt $x^4 + Ax^2 = B$, und auch in verschiedenen anderen Fällen kömmt der Ausdruck $x = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ zum Vorschein, welcher sich abkürzen läßt, wenn $(a^2 - b)$ ein vollkommenes Quadrat seyn sollte; es ist nämlich $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}} + \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{(a^2 - b)}}$. Um dieses einzusehen setze man $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$. so ist $a + \sqrt{b} = y + 2\sqrt{yz} + z$; nun setze man die rationalen Glieder des ersten Theiles dieser Gleichung den rationalen Gliedern des zweyten Theiles gleich, und folglich auch

man

Erinnerung

Ueber die im vorigen Jahre von mir herausgegebene, logarithmische trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln.

Um die Richtigkeit dieser Tafeln auf das äusserste zu treiben machte ich mich laut einer öffentlichen Ankündigung verbindlich für jede erste Anzeige eines jeden darinen entdeckten wesentlichen Druck- oder Rechnungsfehlers (der nämlich zu falschen Rechnungen Anlaß geben kann) einen kaiserlichen Dukaten zu bezahlen, und sodann die angezeigten Fehler bekannt zu machen, damit man doch einmal durch dieses Mittel das schon so lang vergebens gewünschte Werk, vollkommen fehlerfreye mathematische Hilfstafeln, erhalte. Bis itzt sind durch dieses Hilfsmittel nicht mehr als zwey Fehler (einer bey log 78583 und der andere bey log 95016) angezeiget worden.

Die Tafeln wurden nach geschehenem Abdrucke noch einmal durchgesehen, und die entdeckten Fehler in einer Beylage gedruckt. Diese Beylage ist aus Sorglosigkeit des Verlegers bey einigen Exemplarien nicht vorfindig; derowegen muß ich die wesentlichen Fehler bey dieser Gelegenheit noch einmal anzeigen. Als:

Seite XVI in der letzten Zeile bey log 7 die drey letzten Decimalziffern anstatt 372 müssen seyn 491. Seite LX Zeile 33 anstatt log sin a — log sin A muß seyn log sin A — log sin a. Bey log 64445 die 5te Decimalziffer muß seyn 8 statt 9. Bey log 78583 die 4te Decimalziffer 3 statt 8. Bey log 93448 die 5te Decimalziffer 7 statt 6. Bey log 95016 die 4te und 5te Decimalziffer 79 statt 97. Bey log 99864 die 4te Decimalziffer 4 statt 5. Auch kann die letzte Decimalziffer der Logarithmen bey 60844, 100360, 100390 um 1 vermehret werden. Bey tang 34° 23′ die 3te Decimalziffer 4 statt 5. Bey tang 89° 56′ die zwey letzten Dec. Ziff. 30 statt 28. Seite 370 bey Kubikw. von 2 die zwey letzten Dec. Ziff. 10 statt 05. Seite 372 Zeile 17 Spalte 4 statt 2214 muß seyn 2244. Seite 374 Zeile 30 Spalte 26 statt 21880 m. s. 21080, und Zeile 39 Spalte 23 statt 37770 m. s. 37700. Seite 396 Zeile 2 statt $(x^2 - c^2)$ m. s. $(x^2 + c^2)$. Seite 397 Zeile 8 in dem Zähler muß $(p - 3)$ wegbleiben. Nach der neuesten Bestimmung ist der Sternwarte von Prag Länge = 32° 10′ 30″, und Breite = 50° 5′ 46″. Der Sternwarte von Berlin Länge = 31° 2′ 30″ statt 31° 0′ 0″. Bey der Vergleichung der Fußmaaße England und London 135,12 statt 135,0.

Endlich kann auch noch allhier das Verzeichniß der Fehler Platz finden, welche man bey der Besorgung der Herausgabe von meinen Tafeln in verschiedenen der vorzüglichsten Auflagen von logarithmischen Tafeln zu entdecken Gelegenheit hatte: als

1. Adri-

aus dem Coefficienten 56 des 4ten Gliedes fließt der Coefficient des nächst darauffolgenden Gliedes $\frac{56.5}{4} = 70$.

VII. Wenn die in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Glieder einer arithmetischen Reihe eines höheren Ranges, z. B. die aufeinander folgenden Glieder 1, 3, 6, 10, 15, 21.... einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges gegeben sind, so kann die Summe von n Gliedern auf folgende Art sehr geschwind gefunden werden. Es ist vermög (197) die Summe $s = An^3 + Bn^2 + Cn$; nun setze man nach der Ordnung $n = 1, n = 2, n = 3$, und substituire für s die entsprechenden Werthe 1, 4, 10, **als die Summen von** 1, 2, **und** 3 **Gliedern**, so erhält man folgende drey Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 1 = A + B + C \text{ Summe von } 1 \\ 4 = 8A + 4B + 2C \ldots\ldots\ldots 2 \\ 10 = 27A + 9B + 3C \ldots\ldots\ldots 3 \end{array}\right\} \text{Glied.}$$

woraus durch die Subtraktion $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{2}$, und $C = \frac{1}{3}$ folgt; es ist demnach bey dieser Reihe die Summe von n Gliedern

$s = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

VIII. Die Regeln von den Verbindungen der Größen (213) fließen aus der vorausgeschickten Lehre der arithmetischen Reihen von höheren Ordnungen sehr natürlich; da z. B. bey 1, 2, 3, 4, 5, 6, .. verschiedenen Größen die Verbindungen zu dreyen (Ternen) 0, 0, 1, 4, 10, 20, .. sich ergeben, so müssen nothwendig bey n verschiedenen Größen $\frac{n(n-1)(n-2)}{3.2.1.}$ Ternen statt finden, denn die Zahlen 0, 0, 1, 4, 10, 20, .. folgen in einer arithmetischen Reihe des dritten Ranges auf einander, wovon das allgemeine Glied $t = \frac{n(n-1)(n-2)}{3.2.1}$ ist; um dieses allgemeine Glied, nämlich die Anzahl t der Ternen bey n verschiedenen Größen, zu finden, sey $t = An^3 + Bn^2 + Cn + D$ vermög (201); nun setze man nach der Ordnung $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$, und substituire statt t die entsprechenden Werthe 0, 0, 1, 4, so erhält man folgende vier Gleichungen

$$\begin{array}{l} 0 = A + B + C + D \\ 0 = 8A + 4B + 2C + D \\ 1 = 27A + 9B + 3C + D \\ 4 = 64A + 16B + 4C + D \end{array}$$

woraus durch die Subtraktion $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$, und $D = 0$ folgt; es ist demnach $t = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)$

$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3.2.1.}$, u. s. w.

Er=

3. Sherwin's Mathematical Tables, The Fourth Edition. London. 1761

Logarith. der Zahl	Stelle der Dec. Ziff.	Anstatt	Muß seyn
11685	7	2	7
14724	4	3	0
18915	4	7	8
21425	6.7	80	08
22839	7	9	1
23678	5	9	4
24623	7	6	0
25325	7	2	5
27078	7	9	6
27324	4	3	5
28940	5	6	9
29224	5	4	3
29575	5	1	2
31505	6	3	9
34259	6	5	4
34728	5	8	7
35380	5	3	5
38606	4	9	6
45973	6	3	2
46602	5	9	0
46941	6.7	32	23
51193	7	8	6
52492	6	4	3
52998	7	9	5
57793	5	8	7
59502	7	4	6
60844	7	3	7
61051	5	6	9
64125	5	3	2
64445	5	9	8
69140	5	0	2
74742	7	2	7
77024	5	3	2
80883	5	3	5
81722	5	7	3
81992	7	2	5
84490	5	1	0
85064	4	6	7
88619	7	3	8
90057	7	2	5
90131	4	9	8
91222	5	0	9
92988	7	0	9
96933	7	2	7

Trigonometrische Funktionen.		Stelle der Dec. Ziff.	Anstatt	Muß seyn
Log. Sin.	0° 3'	7	5	3
	16 5	5	2	3
	24 28	6	4	2
	24 39	4	3	2
	27 13	6	3	5
	68 34	7	0	6
Log. Tang.	0 36	4	8	0
	3 35	7	5	3
	11 59	3.5	786	685
	23 47	3	3	4
	32 59	7	4	8
	41 59	3	1	4
	46 20	4	0	2
	58 44	7	8	0
	58 45	7	0	8
	83 56	6	3	5
Sinus.	18 5	3	4	0
	24 60	3	3	2
	27 13	4	5	3
	55 0	7	9	0
	55 2	7	9	6
	55 3	7	0	3
	55 10	7	6	0
	61 56	7	2	7
	61 60	7	0	6
	74 32	4	8	7
	80 2	7	0	6
Tang.	58 0	5	2	3
	58 50	6	8	6
	62 0	7	1	6
	78 60	4	1	4

Bey log 30410 sind die drey ersten Dec. Ziff. versetzt. Nebst diesen Fehlern giebt es eine Menge Logarithmen, deren letzte Ziffer zu klein ist, als z. B. bey den Logarithmen der Zahlen 23991; 23992; 23993, u. s. w. Auch giebt es in dieser Tafeln mehrere Logarithmen, deren letzte Ziffer zu groß ist, als z. B. bey den Logarithmen der Zahlen 25499; 57374; 78700; u. s. w.

1. Adriani Vlacq Arithmetica Logarithmica, Goudæ 1628.

Logarith. der Zahl.	Stelle der Ziffer	Anstatt	Muß seyn	Logarith. der Zahl	Stelle der Ziffer	Anstatt	Muß seyn
20832	5	8	7	59838	7	8	7
23806	7	9	6	60844	8	2	7
24862	7	8	6	61163	7	4	8
27164	8	5	7	61872	7	7	4
29282	7	1	0	61999	6	9	8
33832	5	2	3	62090	8	4	7
36935	7	6	8	62759	7	7	6
39844	6	4	6	63688	7	9	7
39845	6	6	7	64183	6	1	2
41018	7	9	4	64445	6	9	8
41490	8	9	4	64953	7	6	9
42506	8	5	2	65537	7	7	6
44656	7	4	9	66759	6	1	0
48033	7	6	9	69579	7	6	8
48376	7·8	66	99	73653	6	8	9
49502	7	3	2	74832	10	2	2
49717	7	5	4	80554	7	3	7
50479	8	5	7	97105	8	7	6
59502	8	3	5	97828	6	5	6

2. Adr. Vlacq Trigonometria Artific. Goudæ 1633.

	Trigonometrische Funktionen	Stelle der Ziffer	Anstatt	Muß seyn		Trigonometrische Funktionen	Stelle der Ziffer	Anstatt	Muß seyn
Diff. Com.	0° 9′ 0″, 0 9 10	4·5	95	89	Log. Tang.	56°24′50″	9	6	8
						57 15 0	6	9	6
	1 29 20, 1 29 30	2	1	0		57 53 30	6.7	83	38
						68 19 20	8	2	3
Log. Sin.	31° 3′ 0″	6	9	6		78 53 40	8.9	45	54
	71 23 30	8	7	9		86 18 40	6.7	26	62
	71 36 0	8	6	4		87 55 40	9	6	8
	89 51 0	8	7	5					

5. J. C. Schulze, Sammlung logarithmischer und trigonometrischer Tafeln, Berlin 1778.

	Zahl	Stelle der Dec. Ziff.	Anstatt	Muß seyn		Zahl	Stelle der Dec. Ziff.	Anstatt	Muß seyn
Brigg. Logarith.	10757	5	8	9	Sinus	0° 19′	6	3	6
	10974	5	8	6		29 50	7	4	7
	15087	5	9	0		45 2	7	4	0
	16396	4	4	7		47 35	3	5	8
	21703	4	2	5		56 40	7	6	8
	29224	5	4	3		62 54	4	3	2
	29575	4	1	2		81 35	5	8	2
	29969	4	9	6	Tang.	28 5	4	3	5
	30852	5	6	8		46 51	7	2	8
	32167	4	2	4		89 56	4.5	28	30
	33557	4	8	7	Potenzen.	$(0,24)^8$	8	8	1
	34259	6	5	4		$(0,36)^3$	6	9	6
	34728	5	8	7		$(0,51)^5$	5..8	2525	0253
	35161	4	2	0		$(0,61)^6$	5..8	1838	2037
	35225	4	3	8		$(0,61)^7$	6..8	621	743
	42616	5	4	7		$(0,61)^8$	5..8	6999	7073
	45416	4	9	2		$(0,61)^9$	6..8	369	415
	51193	7	8	6		$(0,62)^9$	6	8	7
	53077	4	0	9		$(0,79)^5$	3	0	7
	53412	4	3	6		$(0,83)^7$	2..8	6564264	7136051
	55256	5	4	7		$(0,86)^7$	2..8	3579081	4792782
	59502	7	4	6		$(353)^2$	3	1	4
	61971	7	3	5		$(437)^2$	6	1	9
	64445	5	9	8		$(716)^2$	6	9	6
	69243	5	1	7		$(758)^2$	2	4	7
	73674	5	2	1		$(995)^2$	2	8	9
	97332	4	5	2		$(314)^3$	5	6	9
	sin. 52° 48′	4	3	2		$(376)^3$	3	3	1
	cot. 0° 3′ 50″	1	0	9					
	cot. 24° 30′	6	6	5		$\sqrt[3]{2}$	6.7	05	10

Diff. Log. Tang. 0° 4′ 20″ anstatt 170393 muß seyn 170333.
In der letzten Tafel 31 Sec = 0,0086111 anstatt 0,0080111.

4. Gardiner, Tables de Logarithmes, Avignon 1770.

Logarith. der Zahl	Stelle der Dec. Ziff.	Anstatt	Muß seyn
17740	6	5	3*
25803	4. 5	76	67
34259	6	5	4*
34728	5	8	7*
37696	4	3	2
38119	6	2	1*
42431	4	0	6
43284	5	3	2
44218	4	1	5
44781	4. 5	90	09*
46309	5	9	6*
46559	4. 6	400	003*
51193	7	8	6*
54681	6	5	6*
58987	4	6	7
59502	7	4	6*
59889	4	2	3
60844	7	7	8
63064	4. 5	87	78
64149	7	0	9*
64347	5	3	2
64445	5	9	8
64881	6. 7	57	75*
68128	5	1	2
68761	5	8	4
68859	7	6	7
69339	7	9	6*
69519	6. 7	53	35
69533	4	2	1
70076	5	9	6
71021	4	4	3
84393	5	4	0
85328	5	4	9
86486	7	4	8*
89322	4	8	9
89680	7	9	6*
93614	5	8	4*
94841	5	6	9
101213	6	7	6*
.... 14	6	1	0*
.... 15	6	5	4*
.... 16	5. 6	50	49*
.... 17	6	4	3*

Trigonometrische Funktionen.		Stelle der Dec. Ziffer.	Anstatt	Muß seyn
Log. Sin.	0° 6′ 36″	3	5	3*
	0 37 3	3	3	2*
	0 45 30	1	2	1*
	2 37 28	5	5	6*
	3 11 38	5	6	7*
	45 4 50	4	7	0*
	67 17 30	4	0	9*
	88 52 10	1	0	9*
Log. Tang.	0 9 17	2	5	3*
	0 11 47	3	1	4*
	0 14 23	6. 7	20	82*
	0 24 16	6	2	3*
	0 37 15	4	4	8*
	1 19 15	7	9	3*
	1 22 57	3	1	2*
	3 6 28	7	7	5*
	3 19 9	4	2	3*
	3 26 20	7	4	5
	3 34 20	5	4	7
	17 39 40	6	5	3*
	23 22 0	3	3	5*
	35 4 40	6	6	0*
	67 13 50	6. 7	59	60*
	73 20 50	5	0	6*
	88 3 10	0	31.	11.*

In der Tafel der Logarithmen in der ersten Spalte muß seyn 4670 anstatt 4770*; 5520 anstatt 3520; 7135 anstatt 7235*; bey der Differenz 185 auf dem Rande 5, 6 statt 6, 9*. Auf dem S Bogen 79 Degr. statt 89 Degr. Auf dem T. Bogen 12° 6′ 0″ statt 12° 50′ 0″*. Diff. Sin. 18° 44′ 20″ muß seyn 621 statt 221. Bey den logistischen Logarithmen in der ersten Spalte 52 statt 42*. Auf dem Yy Bogen bey log 825 die 8te und 9te Ziffer 48 statt 84: bey log 1125 die 13te Ziffer 3 statt 9; bey log 1135 die 13te Ziffer 1 statt 7. Auf der letzten Seite bey dem zweyten Beyspiele ist die Summe 5.8451886 statt 5.8401886*. Einige Fehler sind nicht in allen Exemplarien anzutreffen, weil diese Herausgabe der Gardinerschen Tafeln aus zwey verschiedenen untereinandergeworfenen Auflagen zusammengesetzt ist, wovon man sich gar leicht überzeugen kann, wenn man zwey oder mehr Exemplarien genau mit einander vergleicht. Die mit* bezeichneten Fehler hat schon bereits H. de la Lande dans la Connoissance de Temps de 1775 angezeiget.

Verbesserung einiger Druckfehler im II. Bande.

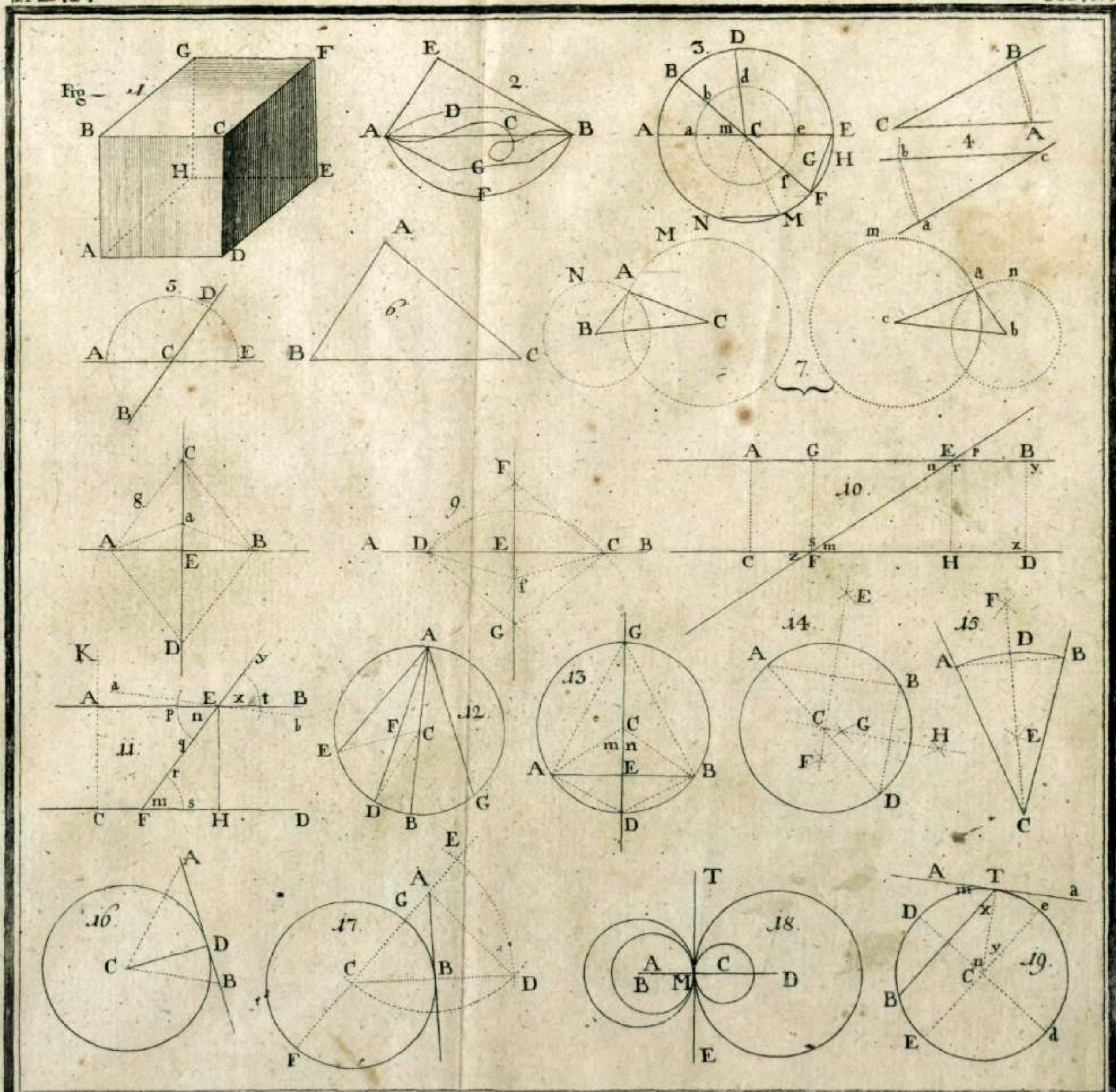
Seite	Zeile	Anstatt	Soll seyn
25	12	$\frac{1}{2}$ DHB	$\frac{1}{2}$ GHB
30	29	AC	AB
31	30	$n + 180$	$n \times 180$
60	24	AEB	AED
90	28	$5 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$	$5 \cdot \frac{1}{4}b^2\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$
103	21·24	$2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{5}{2}}, 2^{\frac{7}{2}}, \ldots\ldots$ (in Zählern)	$2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{3}{2}}, 2^{-\frac{5}{2}} \ldots$
128	24	Grundflächen	Grund- und Seitenflächen
131	19	dceBd	dCeBd
135	22	DM $<$	BM $<$
137	1	$3 \cdot 180$	$3 \cdot 108$
147	13	$\frac{AB}{s} \cdot \frac{AF}{s}$	$\frac{AD}{s} \cdot \frac{AF}{s}$
155	1	AF^2	AT^2
—	2	$\frac{(m-1)^2}{m^2} = BCG$	$\frac{(m-1)^2 a^2}{m^2} = BCD$
156	21	AC	AB
183	21	$\cos \frac{1}{2}c$	$\cos^2 \frac{1}{2}c$
186	26	204537,7	2045307,7
189	6	0,000298882	0,0002908882
195	24	101	1081
198	14	$\sin a . \cos b$ (im Nenner)	$\cos a . \cos b$
201	1	$= 45^\circ$	$= \tang 45^\circ$
205	2	sin DC	sin D
206	15	CDE	CDB
211	8	(Nach dem Worte) Logarithmus	(ist einzuschalten) von dem Sinus
233	20	$<$AB	$<$ABC
236	27	$- r \cos A . \cos B$	$+ r . \cos A \cos B$
237	1·3		
258	35	e	c

Verbesserung einiger Druckfehler im I. Bande.

Seite	Zeile	Anstatt	Soll seyn
63	9	469	496
68	20	$a^{-2}b^{\frac{3}{1}}$	$a^{-2}b^{\frac{1}{3}}$
84	1	Das zweyte Beyspiel ist	durchaus zu verbeßern
88	3	$(ax - x)^{-\frac{2}{3}}$	$(ax - x^2)^{-\frac{2}{3}}$
121	23	$\frac{130}{x}$	$\frac{132}{x}$
124	10	$3000 +$	$30000 +$
136	4	$3^x - 4$	$3^x + 4$
144	4	$= 23^x$	$= 24^x$
—	20	1030 fl.	1040 fl.
148	16	aber giebt er nur halb	giebt er gleichfals
—	18	27 fl.	45 fl.
155	20	$\frac{7}{x}$	$\frac{x}{7}$
177	9	$2A^2Bx^4$	$3A^2Bx^4$
—	18	$2A^2B$	$3A^2B$
187	4·5	23 (In Nennern)	21
—	7	27 (In Nennern)	25
202	22	(2,7182818)	log nat (2,7182818)
205	12	$\frac{6\;5}{5}$	$\frac{6\;4}{5}$
215	9	Pm	P^m
218	1	$\frac{1}{2}.2x^4 - 2x^3.x^2 - x = =$	$\frac{1}{2}.(2x^4 - 2x^3).(x^2 - x) =$
255	16	250	260
256	4	$250 =$	$260 =$
261	20	60 fach	40 fach
267	6	-6	-5
—	7	$x = -6$	$x = -5$
271	29	$z^3 + 20z^3 +$	$z^5 + 20z^2 +$
275	8	$x^4{}_{*} - 20x$	$x^4{}_{*} - 20x^2$
294	14	$\left(\frac{100 + c}{100}\right)^n$	$a.\left(\frac{100 + c}{100}\right)^n$
298	26	$a =$	$s =$

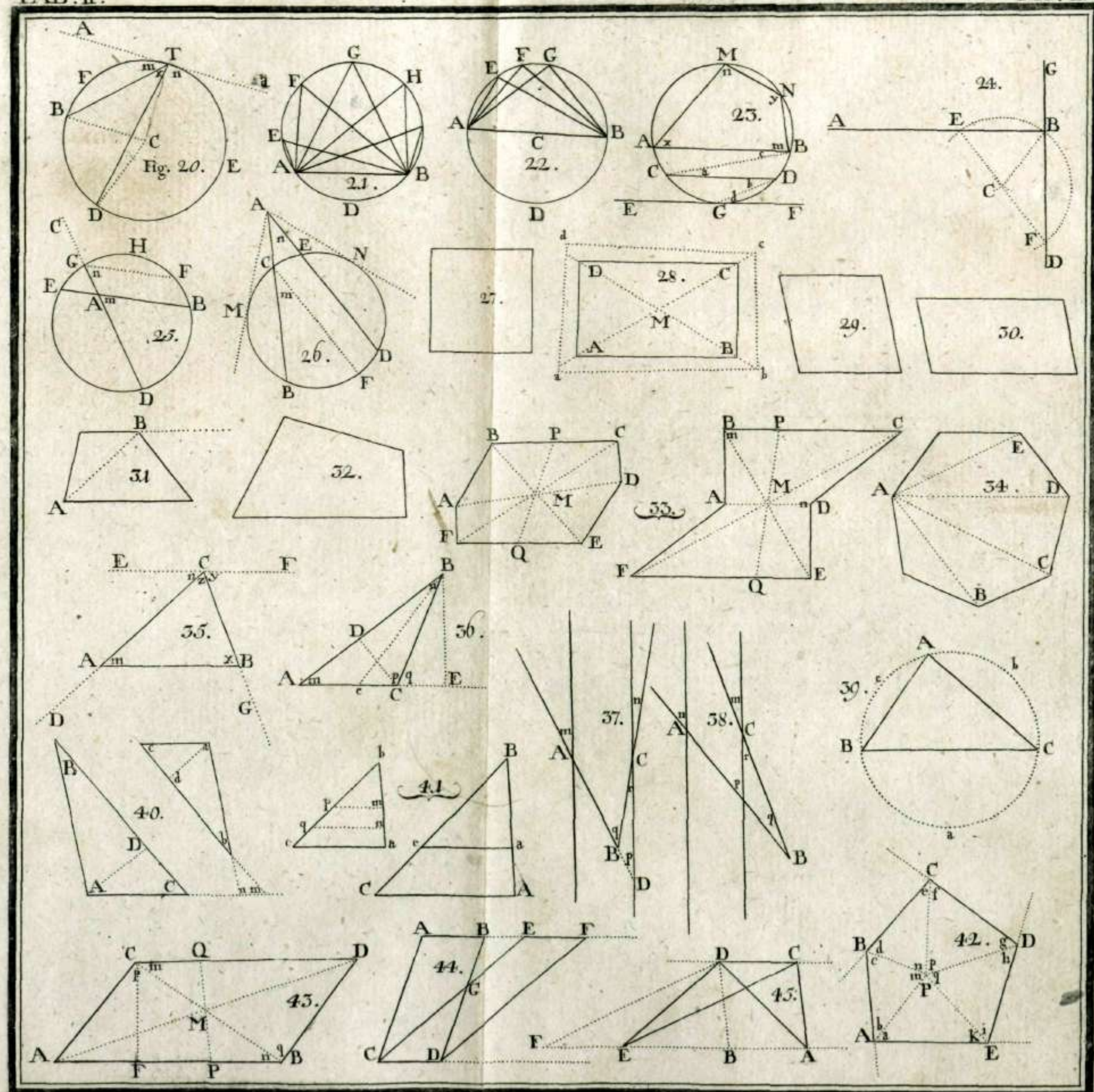
Verbesserung einiger Druckfehler im II. Bande.

Seite	Zeile	Anstatt	Soll seyn
266	14	(Nach dem Worte) gedenke	(ist einzuschalten) die Gerade BD und
291	26	Ep	Cp
292	2	CS	cs
342	11	Mm	M'M
347	33	P'A'	B'A'
349	22	$e + a$	$c + a$
—	27	$= e$	$= c$
352	25	N	N'
353	1.2.3.4	N	N'
354	10	BD^2	$D'B^2$
355	10	$C'B^2$	CB^2
360	18	CBD'	CBD
366	3	$PQ = x$	$BQ = x$
369	13	PQ'	P'Q'
379	16	(dx^2)	$(dx)^2$
389	20	$dx(ax^{n-1}b^{mx}$	$dx(nax^{n-1}b^{mx}$
414	2	d	dx

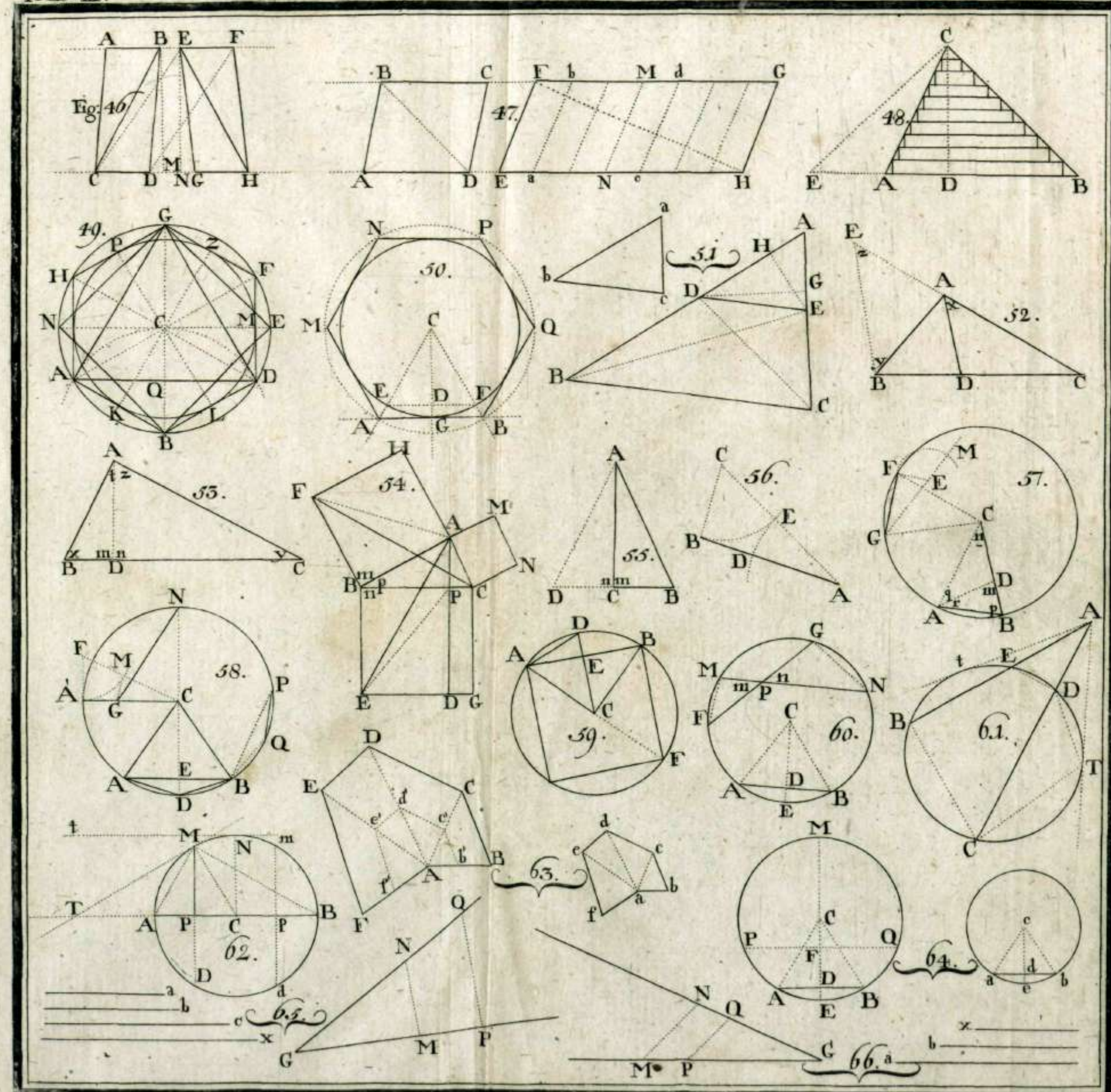


VEGA MATHEM. II. BAND.

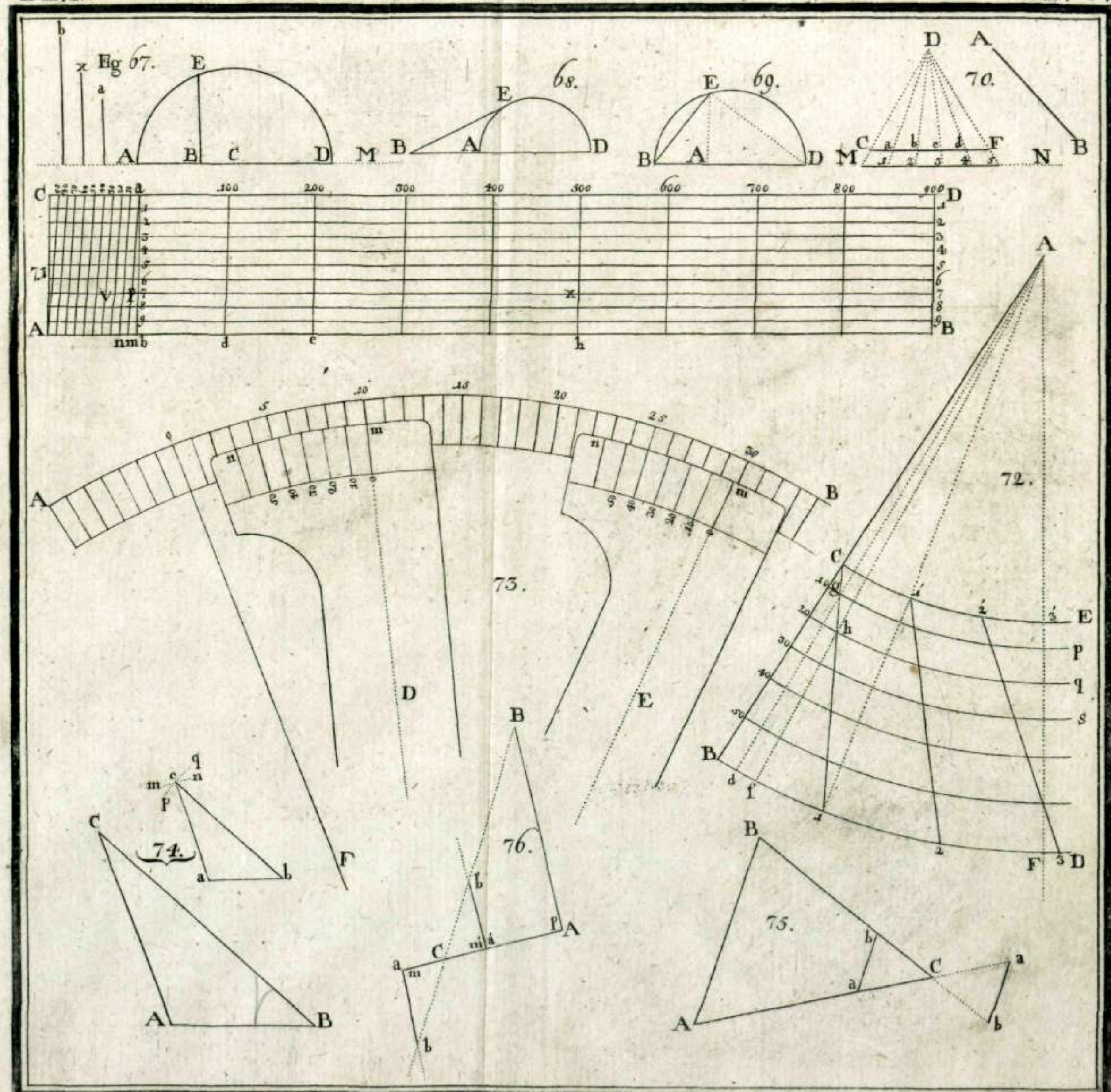
gestochen v. Frid. Deffmandt, Cannonier des K.K. 2ten Feld-Artil. Regt.



 gestochen v. F. Dorffmundt, Canonier.

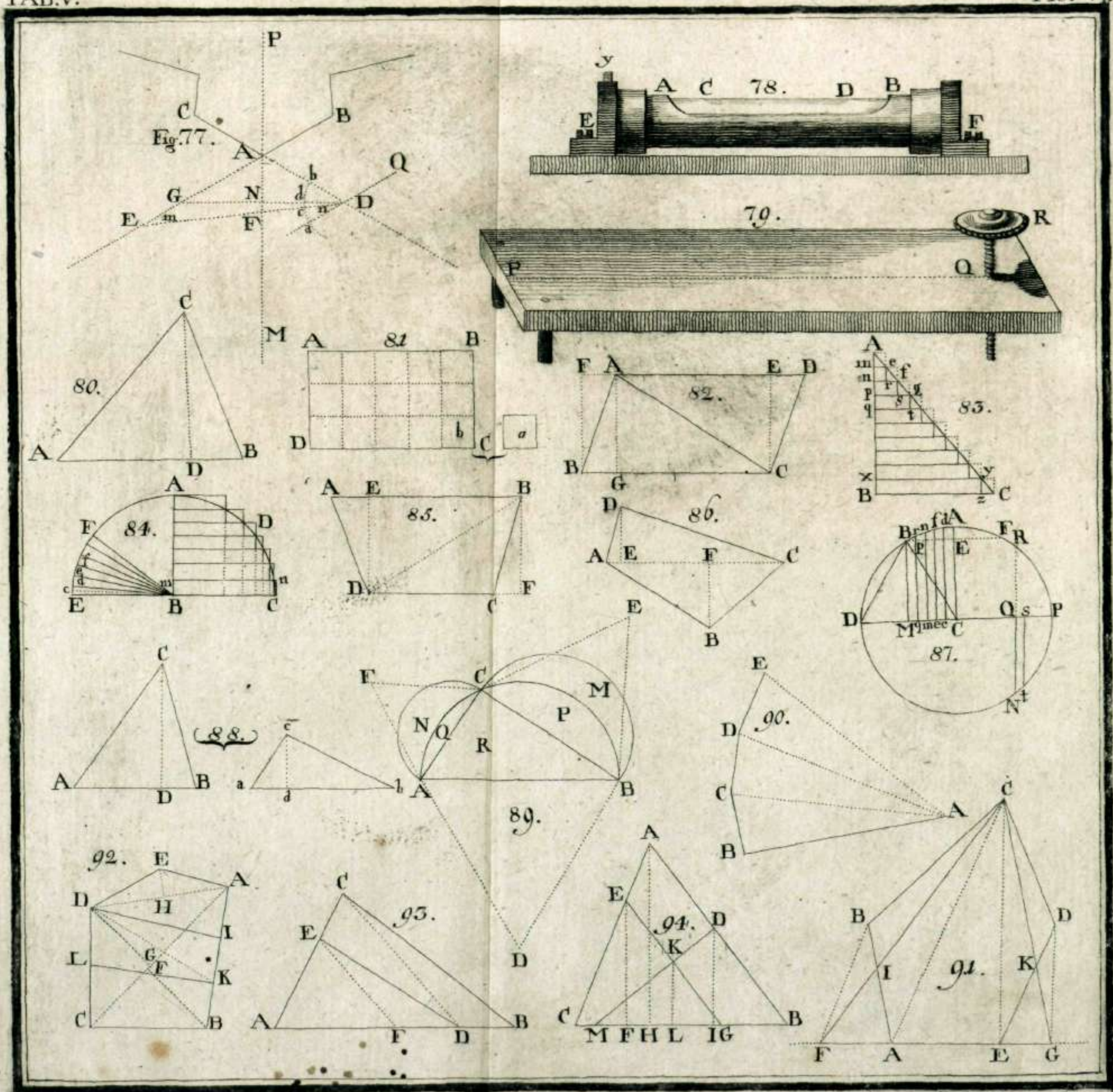


gestochen v. F. Dorffmundt. Canonier

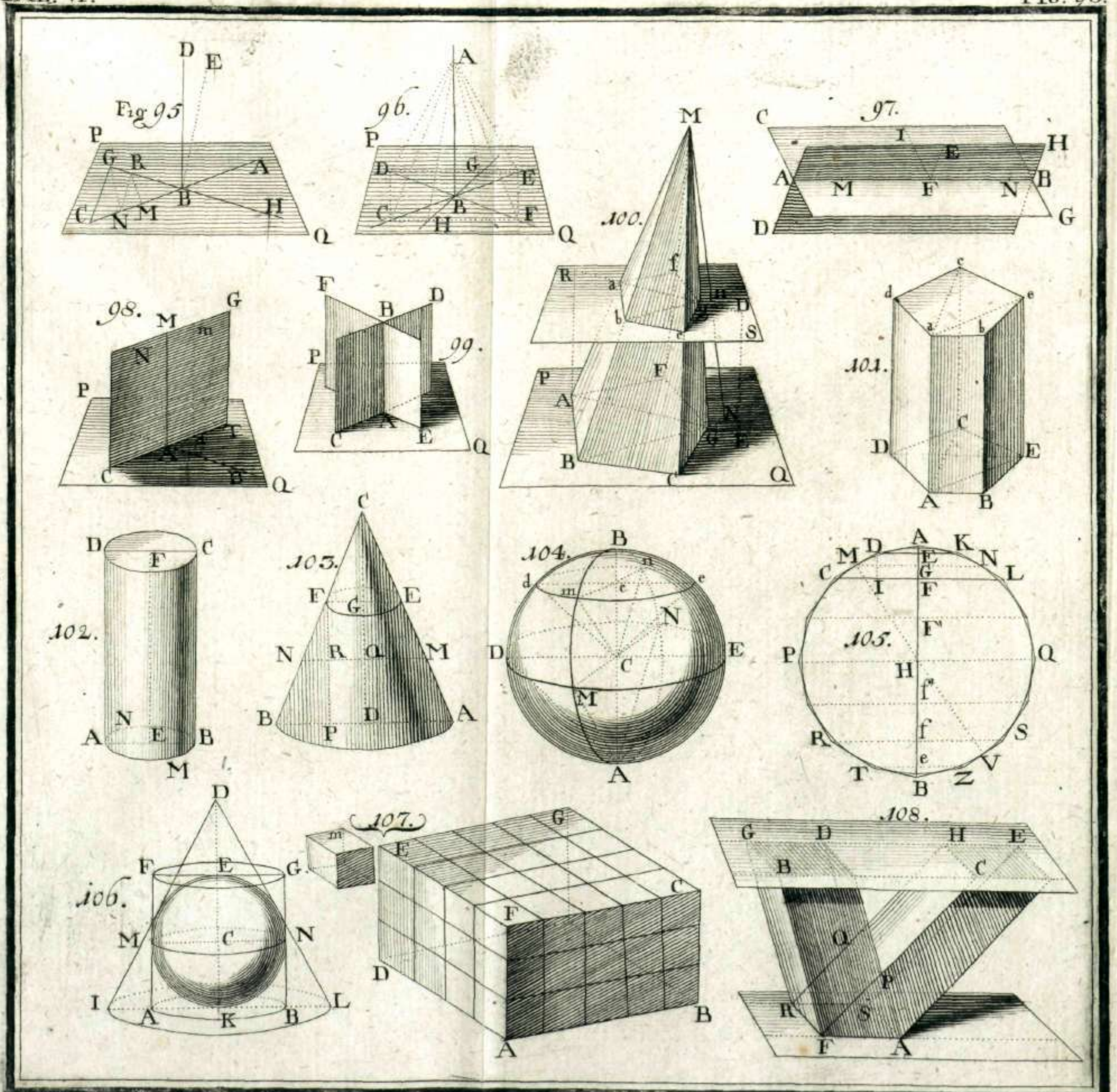


VEGA MATHEM. II. B.

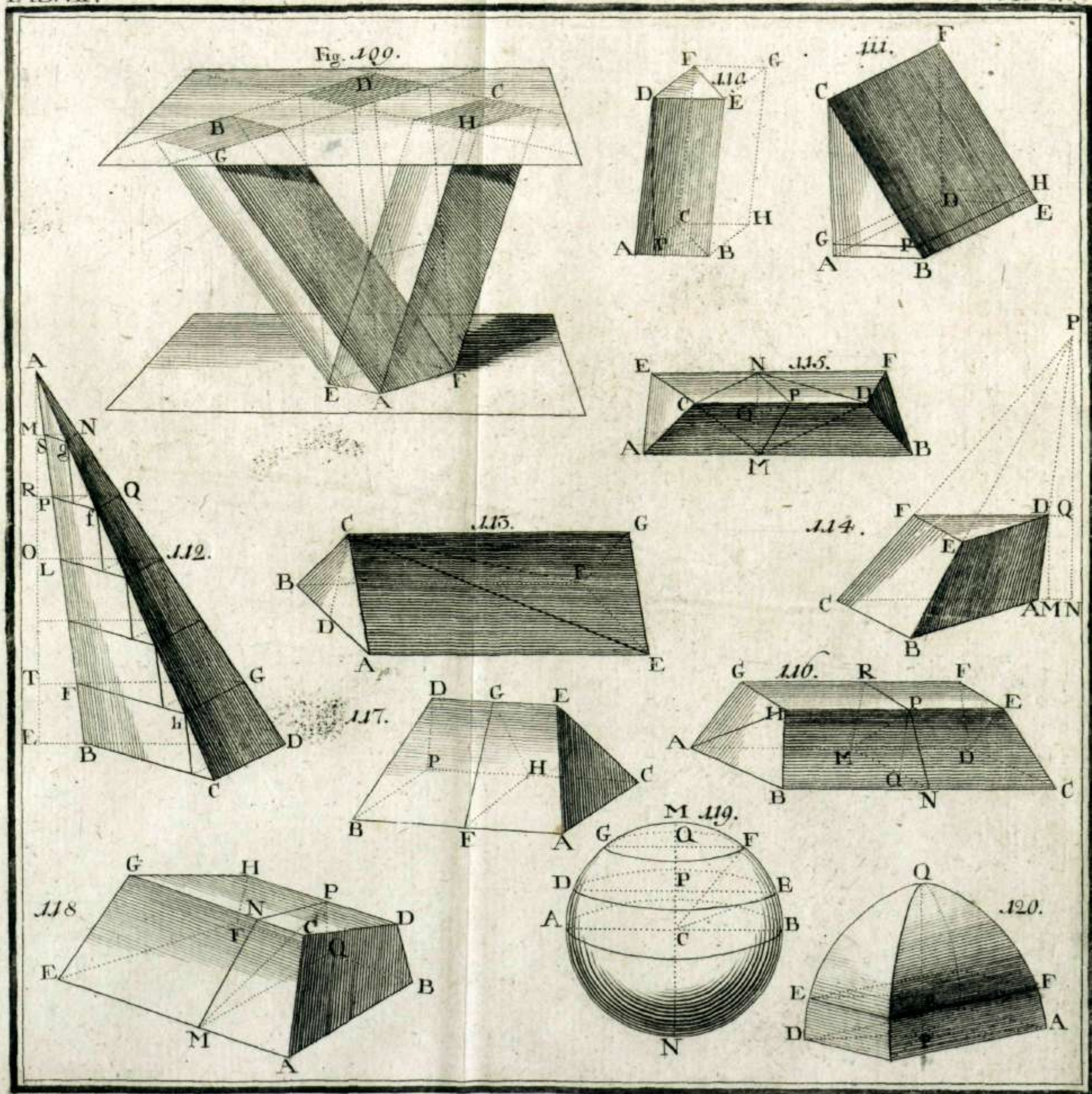
gestochen v F. Dorffmundt, Canonier



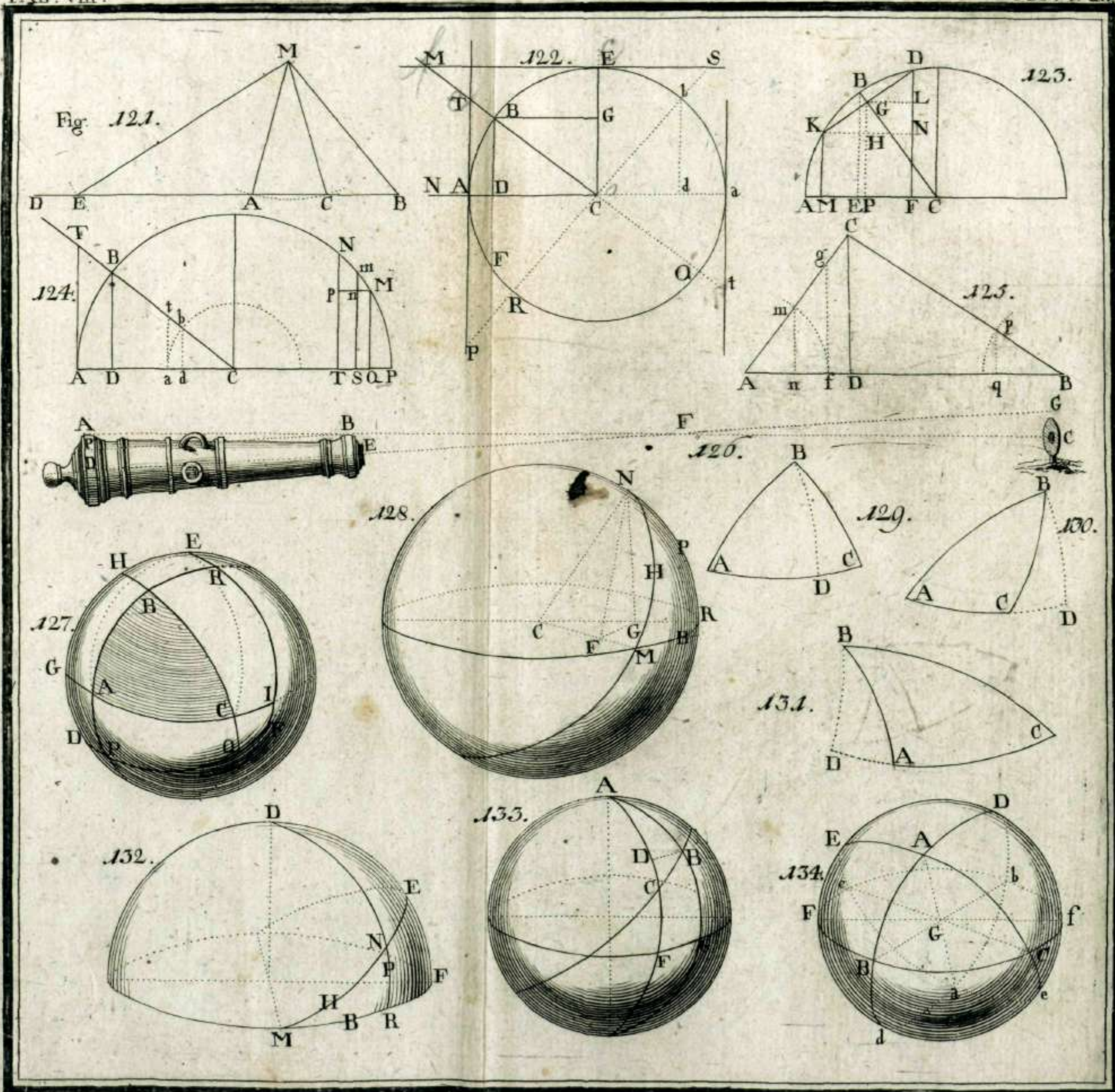
gestochen v. F. Dorffmundt. Canonier.



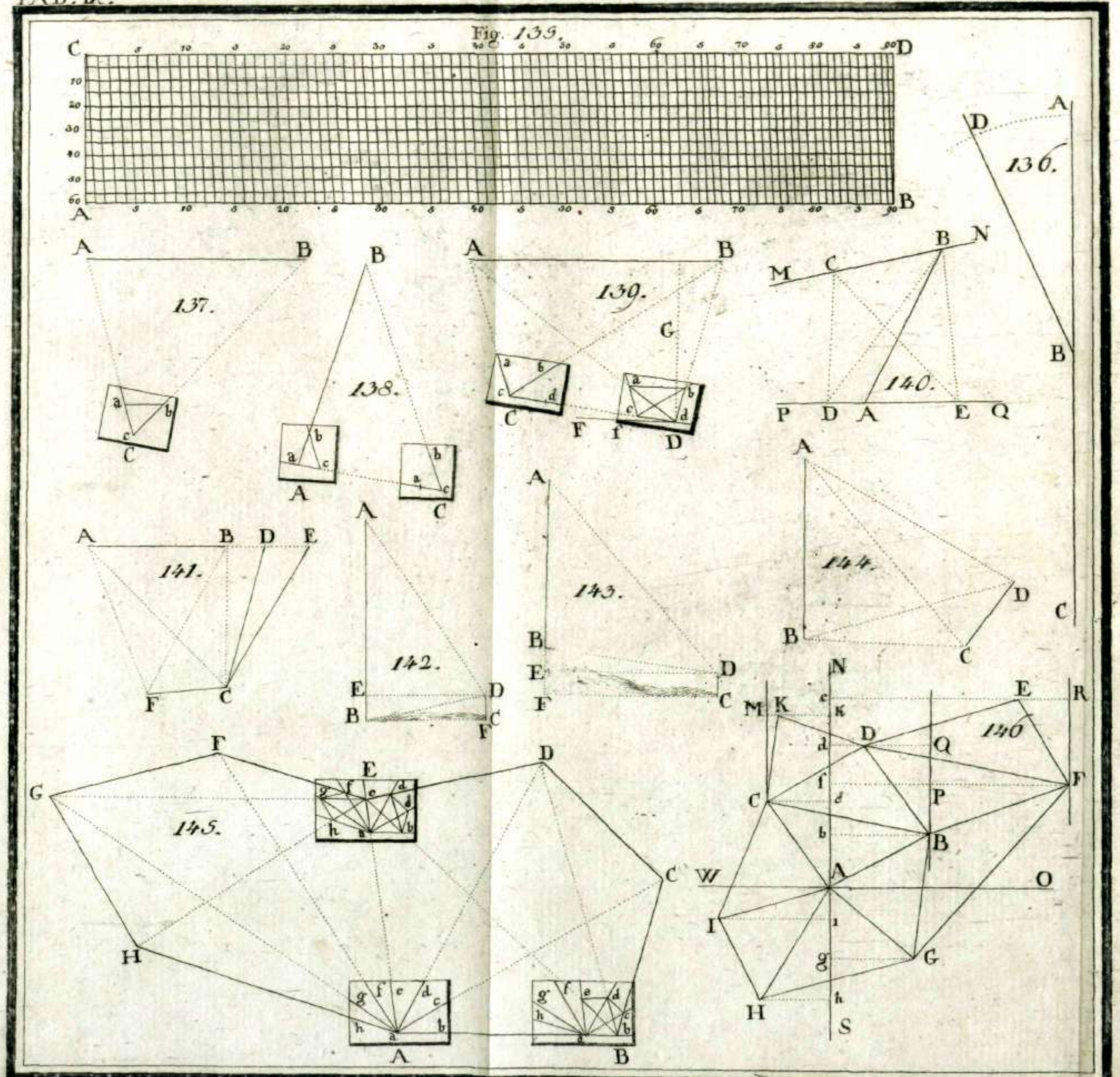
gestochen v. F. Dorffmundt, Canonier



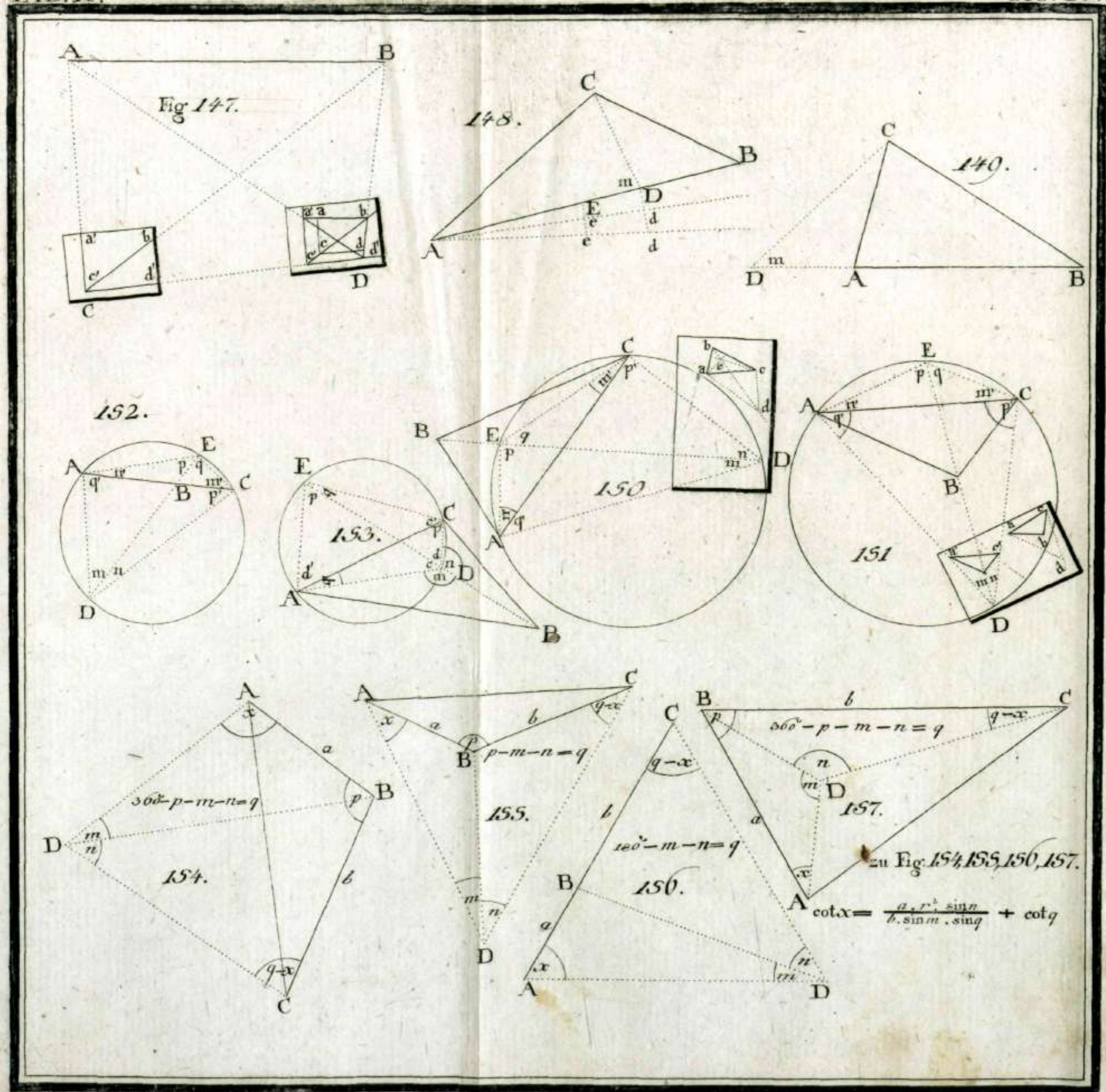
gestochen v. F. Dorffmeister, Caronitev



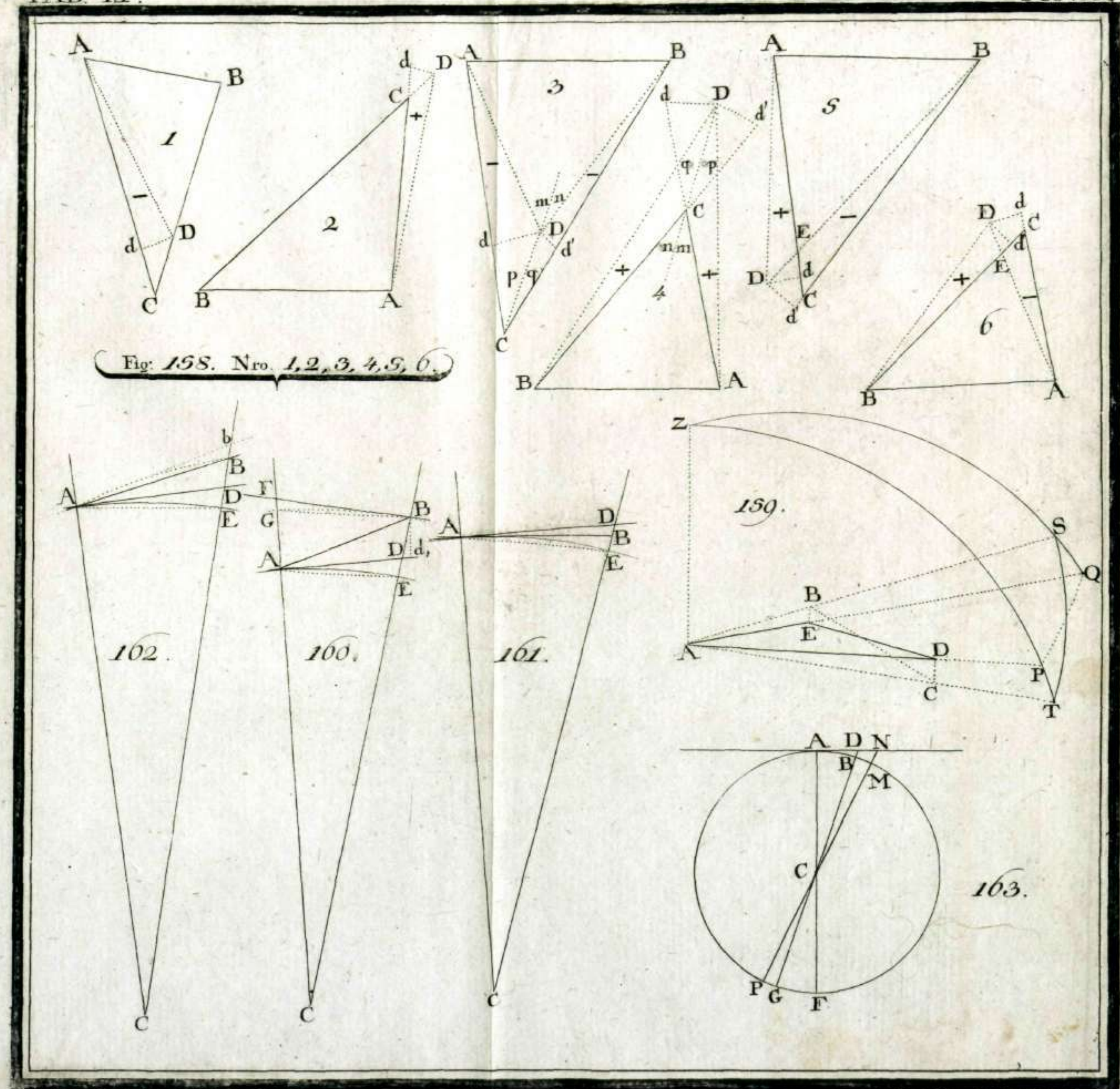
gestochen v. F. Dorffmundt, Canonier.



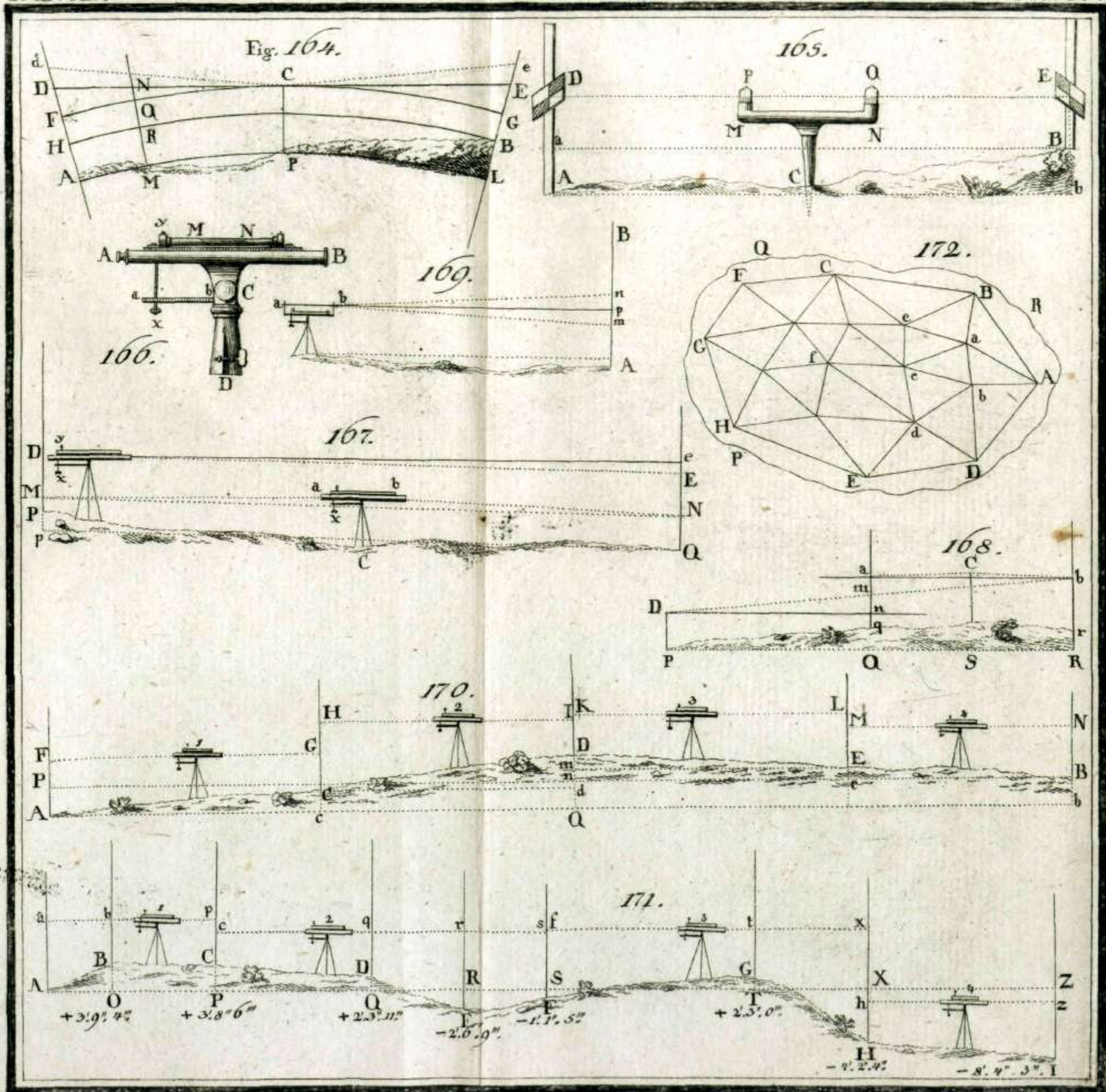
gest v F Dorffmundt, Conomier



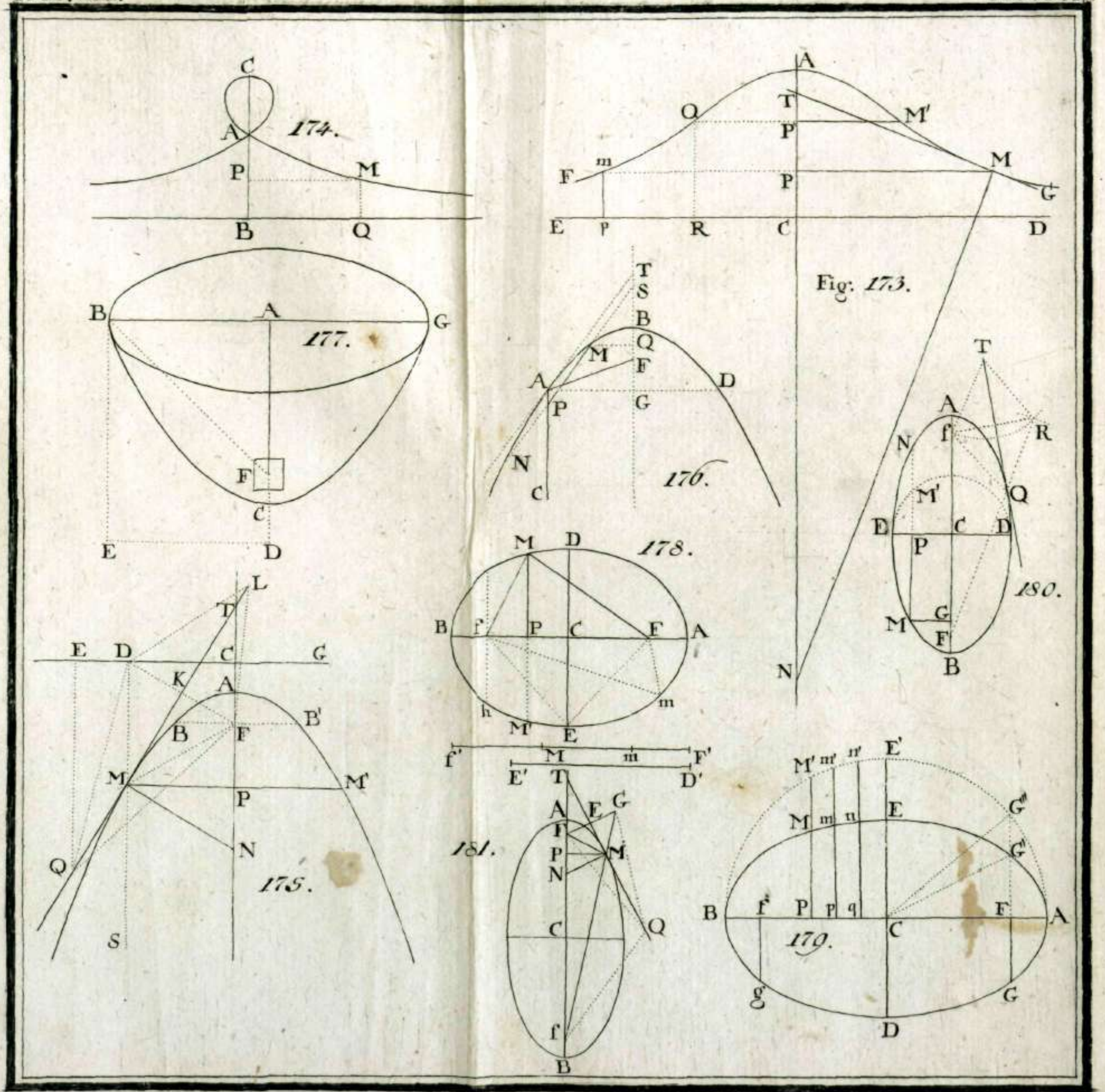
gest. v. F. Dorffmundt, Canonier.



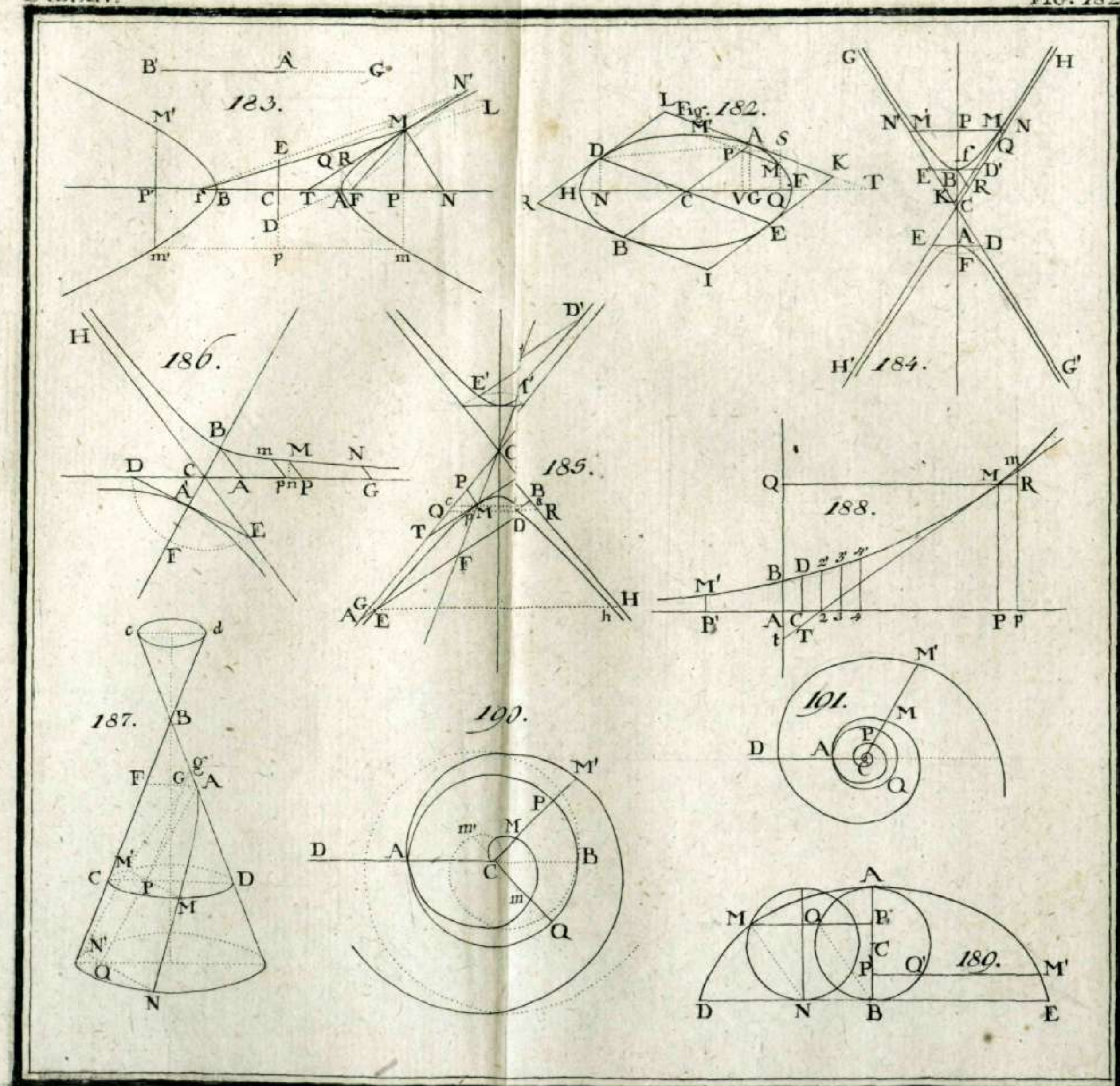
gest. v. F. Dorffmundt, Canonier



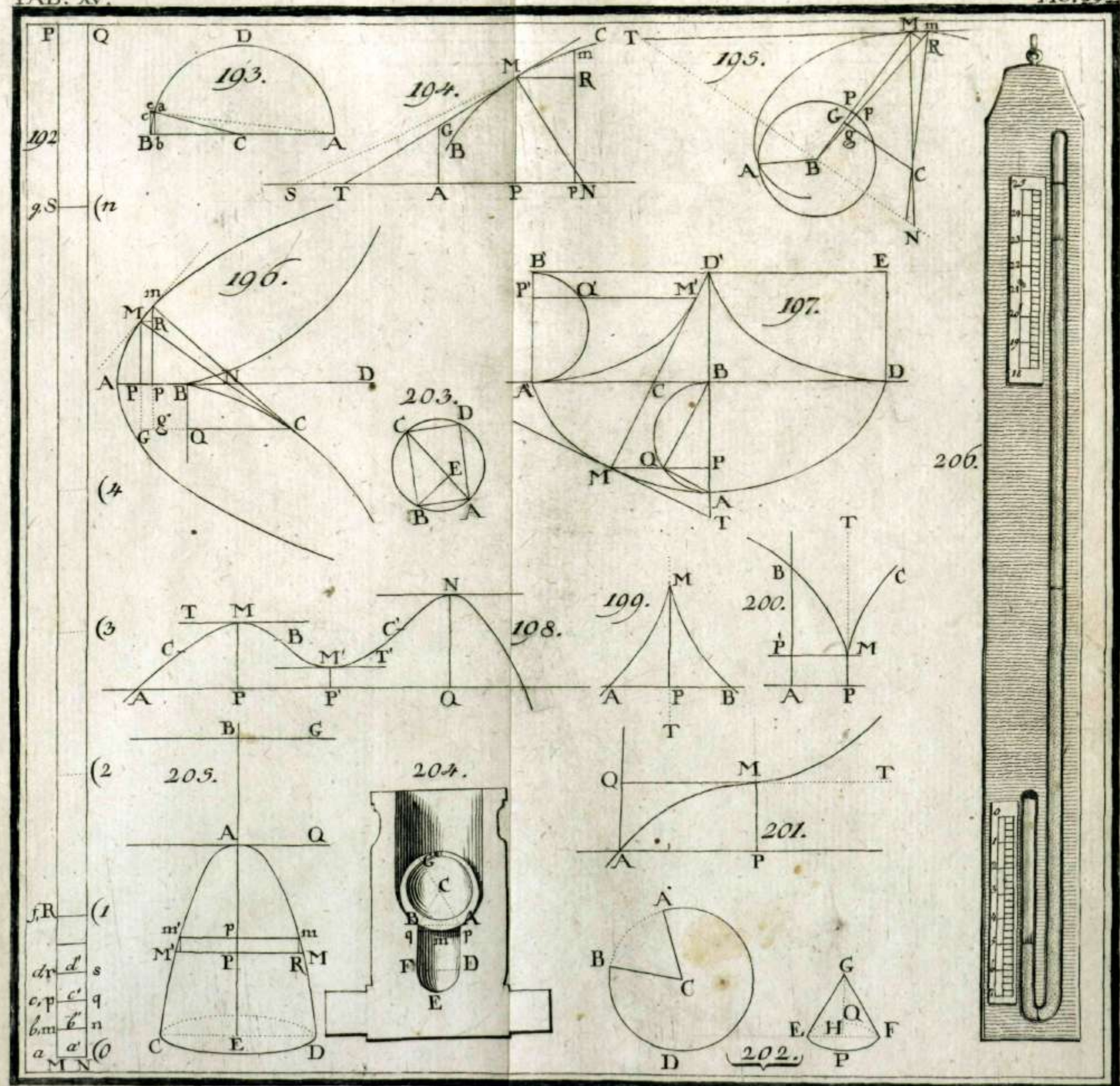
 gest. v. F. Dorffmundt, Canonier.



gest. v. F. Dorffmundt, Canonier.



gest. v. F. Dorffmundt, Canonier.



gest. v. F. Dorffmundt, Canonier.