Posebno zaporedje rombov

Marko Razpet

Vzemimo pozitivni realni števili p in q, pri čemer je $p \leq q$. Njuna sredina je na splošno vsako število $S(p,q)$, ki je s p in q natančno določeno in zanj velja relacija $p \leq S(p,q) \leq q$. Najenostavnejša sredina števil p in q je njuna *aritmetična sredina* $A(p,q) = (p+q)/2$, ki je na pravi sredini med p in q. Če sta p in q krajišči intervala na številski premici, potem je $A(p,q)$ kar njegovo središče. Prav tako je pomembna *geometrična sredina* $G(p,q)$ števil p in q, ki jo definiramo z relacijo $G(p,q) = \sqrt{pq}$. Očitno sta števili $A(p,q)$ in $G(p,q)$ s p in q natančno določeni. Ker je $A(p,q) = p + (q-p)/2 = q - (q-p)/2$, velja $p \leq A(p,q) \leq q$. Iz $p^2 \leq pq \leq q^2$ pa dobimo še $p \leq G(p,q) \leq q$.

Pomembna je relacija $G(p,q) \leq A(p,q)$, v kateri velja enačaj natanko takrat, ko je $p = q$. To vidimo iz zapisa

$$0 \leq (\sqrt{q} - \sqrt{p})^2 = p + q - 2\sqrt{pq} = 2(A(p,q) - G(p,q)).$$

Primer $p = q$ očitno ni zanimiv, zato bo v nadaljevanju $p < q$, ko velja $p < G(p,q) < A(p,q) < q$. Označimo $p_1 = G(p,q)$ in $q_1 = A(p,q)$. Ker je $p_1 < q_1$, velja $p_1 < G(p_1,q_1) < A(p_1,q_1) < q_1$ tako kot prej za p in q. Če označimo $p_2 = G(p_1,q_1)$ in $q_2 = A(p_1,q_1)$, velja $p_2 < G(p_2,q_2) < A(p_2,q_2) < q_2$. Ta postopek lahko nadaljujemo v nedogled. Če vzamemo $p_0 = p$ in $q_0 = q$ in $p_{n+1} = G(p_n,q_n)$ in $q_{n+1} = A(p_n,q_n)$ za $n = 0,1,2,\ldots$, dobimo neskončni zaporedji

$$p_0, p_1, p_2, \ldots \quad \text{in} \quad q_0, q_1, q_2, \ldots, \tag{1}$$

pri čemer je

$$p = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots < q_n < \ldots < q_2 < q_1 < q_0 = q. \tag{2}$$

Brez težav vidimo, da velja

$$q_1 - p_1 < \frac{p_0 + q_0}{2} - p_0 = \frac{q-p}{2},$$
$$q_2 - p_2 < \frac{p_1 + q_1}{2} - p_1 = \frac{q_1 - p_1}{2} < \frac{q-p}{4}, \ldots$$

V splošnem pa

$$q_n - p_n < \frac{q-p}{2^{n+1}}.$$

Za dovolj velik indeks n se zato p_n in q_n poljubno malo razlikujeta. Prvo zaporedje v (1) je naraščajoče in omejeno navzgor, drugo pa padajoče in omejeno navzdol. Členi obeh zaporedij se približujejo z naraščajočim indeksom n natančno določenemu številu $\mu(p,q)$, vsako s svoje strani. Zaporedji konvergirata proti številu $\mu(p,q)$ (glej na primer [2]). Za vsako naravno število je

$$p < p_n < \mu(p,q) < q_n < q.$$

Število $\mu(p,q)$ je ena od sredin števil p in q, imenujemo jo *aritmetično-geometrična sredina* števil p in q. Zapišemo jo lahko kot limiti: $\mu(p,q) = \lim p_n = \lim q_n$. Število $\mu(p,q)$ se s p in q ne izraža preprosto, ampak z eliptičnim integralom (glej na primer [1]).

Za $p = q$ bi dobili v (1) konstantni zaporedji, v (2) pa povsod enačaj in s tem $G(p,p) = A(p,p) = \mu(p,p) = p$.

Posebna lastnost zaporedij (1) je njuna hitra konvergenca. Za ilustracijo vzemimo primer $p = 8$ in $q = 24$. Rezultate vpišimo v tabelo 1, ki ji dodamo še ostre notranje kote $\alpha_n = 2\arctan(p_n/q_n)$ rombov.

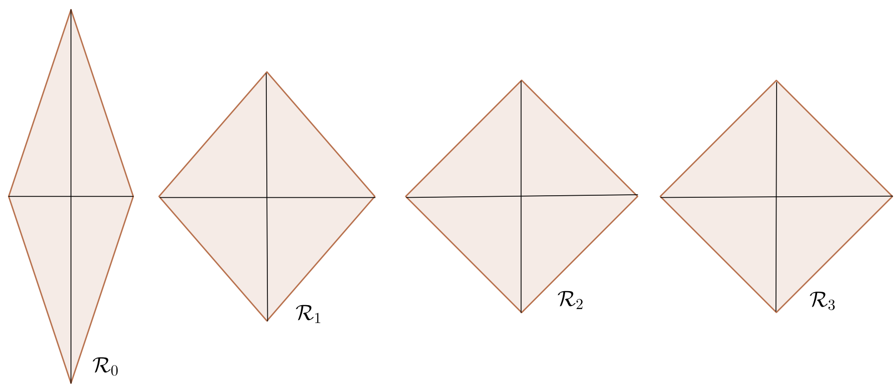
Na 11 decimalk je $\mu(8,24) = 14{,}90893426595$.

Hitro konvergenco bomo pojasnili v oceni, ki jo bomo izpeljali. Najprej je

$$q_{n+1} - p_{n+1} = A(p_n,q_n) - G(p_n,q_n) = \frac{p_n + q_n}{2} - \sqrt{p_n q_n} = \frac{(\sqrt{q_n} - \sqrt{p_n})^2}{2}.$$

n	p_n	q_n	α_n (°)
0	8,000000000000	24,000000000000	36,869897645844
1	13,856406460551	16,000000000000	81,786789298261
2	14,889677745633	14,928203230275	89,851944781240
3	14,908928043965	14,908940487954	89,999952177126
4	14,908934265958	14,908934265959	89,999999999995

TABELA 1.
Zaporedje rombov.



SLIKA 1.
Zaporedje rombov.

Zadnji kvocient razširimo:

- $$\frac{(\sqrt{q_n}-\sqrt{p_n})^2}{2} = \frac{(\sqrt{q_n}-\sqrt{p_n})^2(\sqrt{q_n}+\sqrt{p_n})^2}{2(\sqrt{q_n}+\sqrt{p_n})^2} = \frac{(q_n-p_n)^2}{2(\sqrt{q_n}+\sqrt{p_n})^2}.$$

Za vsoto korenov v zadnjem imenovalcu velja:

- $$\sqrt{q_n}+\sqrt{p_n} = 2A(\sqrt{p_n},\sqrt{q_n}) > 2G(\sqrt{p_n},\sqrt{q_n}) = 2\sqrt[4]{p_n q_n} > 2\sqrt[4]{p^2} = 2\sqrt{p}.$$

Če upoštevamo vse dobljene relacije, imamo nazadnje oceno

- $$q_{n+1}-p_{n+1} < \frac{(q_n-p_n)^2}{8p}.$$

To pomeni, da se v zaporedjih (1) število prvih ujemajočih se cifer števil p_n in q_n pri prehodu na p_{n+1} in q_{n+1} vsaj podvoji.

Za popestritev je smiselno načrtati zaporedje rombov $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots$, kjer ima $\mathcal{R}_n$ diagonali p_n in q_n. Diagonali se v vsakem rombu sekata pravokotno, se razpolavljata in razpolavljata kote. Na sliki 1 je začetek tega zaporedja. Z rastočim n rombi prehajajo v kvadrat z diagonalo $\mu(p,q)$. V tabeli 1 in na sliki 1 lahko opazujemo tudi, kako se pri tem koti α_n približujejo pravemu kotu.

Namesto rombov lahko vzamemo pravokotnike s stranicami p_n in q_n ali pa elipse z osmi p_n in q_n. Pravokotniki konvergirajo proti kvadratu s stranico $\mu(p,q)$, elipse pa proti krogu s premerom $\mu(p,q)$.

Literatura

[1] P. Eymard, J.-P. Lafon, *The number π*, AMS, Providence, Rhode Island 2004.

[2] I. Vidav, *Višja matematika I*, DZS, Ljubljana 1968.

× × ×