MOČNIK-NEUMANN

ARITHMETIK UND ALGEBRA FÜR DIE OBEREN CLASSEN

PER ASPERA AD ASTRA

L 4.—

Oblok

[illegible]	1	1	2
[illegible]	38	30	26
[illegible]		2	2
II [illegible]	5	5	10
[illegible]	–	1	1
[illegible]		1	–

225
1125
3375

Dr. Franz Ritter von Močniks

das Lehrbuch das libro di testo —

der

Arithmetik und Algebra

nebst einer

Aufgaben-Sammlung

für die

oberen Classen der Mittelschulen

bearbeitet von

Anton Neumann,
Professor am k. k. akademischen Gymnasium in Wien.

Fünfundzwanzigste, umgearbeitete Auflage.

Mit hohem k. k. Ministerialerlass vom 10. Januar 1898, Zahl 33153 allgemein zulässig erklärt.

Preis geheftet 3 K 20 h, gebunden ~~3 K 70 h~~.

Wien und Prag.
Verlag von F. Tempsky.
1898.

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

Inhalts=Verzeichnis.

Seite

Einleitung . . prefazione, avvertenza, proemio 1

Erster Abschnitt. ritaglio, ma qui capitolo

Addition und Subtraction.

I. Addition mit absoluten ganzen Zahlen 3
II. Subtraction mit absoluten ganzen Zahlen 5
III. Erste Erweiterung des Zahlengebietes 9
1. Null und negative Zahlen 9
2. Addition und Subtraction mit algebraischen Zahlen 11

Zweiter Abschnitt.

Multiplication und Division.

I. Multiplication mit ganzen Zahlen 13
II. Division mit ganzen Zahlen 19
III. Zahlensysteme 25
IV. Theilbarkeit der Zahlen 28
V. Zweite Erweiterung des Zahlengebietes 37
1. Gemeine Brüche 37
2. Decimalbrüche 43
VI. Unendlich große und unendlich kleine Zahlen und Grenzwerte der Veränderlichen 50
VII. Verhältnisse und Proportionen 52
1. Verhältnisse 52
2. Proportionen 53
3. Anwendung der Proportionen 58

Dritter Abschnitt.

Gleichungen des ersten Grades 61

I. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten 62
II. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten 65
III. Anwendung der Gleichungen des ersten Grades 69

Vierter Abschnitt.

Potenzieren, Radicieren und Logarithmieren.

I. Potenzen 72
II. Wurzeln 76
Dritte Erweiterung des Zahlengebietes 77
Vierte Erweiterung des Zahlengebietes 87
Quadrieren, Cubieren, Ausziehen der Quadrat= und der Cubikwurzel . . . 91
III. Logarithmen 100

Fünfter Abschnitt.

Gleichungen des zweiten Grades.

		Seite
I.	Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten	111
II.	Algebraische Gleichungen höheren Grades und Exponentialgleichungen, welche sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen	115
III.	Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten	120

Sechster Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen.

I.	Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades	124
II.	Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades	131

Siebenter Abschnitt.

Kettenbrüche 132

Achter Abschnitt.

Progressionen.

I.	Arithmetische Progressionen	141
II.	Geometrische Progressionen	143
III	Zinseszins- und Rentenrechnung	147

Neunter Abschnitt.

Combinationslehre.

I.	Permutationen, Combinationen und Variationen	152
II.	Binomischer Lehrsatz	160
III.	Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung	165

Anhang.

I.	Goniometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen	177
II.	Größte und kleinste Werte einer gegebenen Function	178
III.	Höhere numerische Gleichungen	179
IV.	Geometrische Darstellung der imaginären und der complexen Zahlen	185

Aufgaben-Sammlung.

1. Anwendung der Klammern	191
Addition und Subtraction.	
2. Addition mit absoluten ganzen Zahlen	192
3. Subtraction mit absoluten ganzen Zahlen	192
4. Addition und Subtraction mit algebraischen ganzen Zahlen	194
Multiplication und Division.	
5. Multiplication mit absoluten ganzen Zahlen	195
6. Multiplication algebraischer Zahlen	198
7. Division mit absoluten ganzen Zahlen	199

Seite
8. Division algebraischer Zahlen 203
9. Zahlensysteme 203
10. Theilbarkeit der Zahlen 204
11. Gemeine Brüche 207
12. Decimalbrüche 214
13. Verhältnisse und Proportionen mit Anwendungen 215
14. Gleichungen des ersten Grades.
1. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten 221
2. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten 225
3. Anwendung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten . . 227
4. Anwendung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten 234
Potenzieren, Radicieren und Logarithmieren.
15. Potenzen 238
16. Wurzeln 242
17. Imaginäre und complexe Zahlen 251
18. Quadrieren und Cubieren, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel . . 253
19. Logarithmen 256
Gleichungen des zweiten Grades.
20. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten 261
21. Höhere Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen 269
22. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten 271
23. Unbestimmte Gleichungen.
1. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades 278
2. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades 280
24. Kettenbrüche. 282
Progressionen.
25. Arithmetische Progressionen 284
26. Geometrische Progressionen 287
27. Zinseszins- und Rentenrechnung 291
Combinationslehre.
28. Permutationen, Combinationen und Variationen 297
29. Potenzen von Binomen 299
30. Wahrscheinlichkeitsrechnung 300
31. Anhang.
1. Goniometrische Lösung der quadratischen Gleichungen 304
2. Größte und kleinste Werte einer gegebenen Function 304
3. Höhere numerische Gleichungen 305

Einleitung.

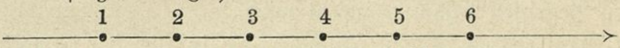
§. 1. Durch die Wahrnehmung mehrerer Dinge, welche als gleichartig angesehen werden, entsteht der Begriff der *Menge*. Jedes einzelne Ding einer Menge wird eine *Einheit* genannt.

Zwei Mengen sind *gleich*, wenn jeder Einheit der einen Menge eine Einheit der anderen zugeordnet werden kann. Indem man jeder Einheit einer gegebenen Menge einen Finger, ein Stäbchen oder schriftlich einen Punkt, einen Strich zuordnete, entstanden die *natürlichen Zahlbilder*. Diese wurden später durch viel kürzere Zeichen ersetzt. Jedes Zahlzeichen erhielt einen Namen, *das Zahlwort*. Name und Zeichen bestimmen die *Zahl*.

Die Wissenschaft von den Zahlen und ihren Verbindungen heißt Arithmetik.

§. 2. Mengen von der Beschaffenheit, dass die erste aus einem einzelnen Dinge besteht, jede folgende aber eine Einheit (ein Ding) mehr enthält als die vorangehende, entsprechen der Reihe nach die Zahlen: *Eins*, *Zwei*, *Drei*,.... Diese Zahlen bilden die *natürliche Zahlenreihe*. Dieselbe beginnt mit 1 und kann ohne Ende fortgesetzt werden.

Man kann die natürliche Zahlenreihe bildlich darstellen, indem man auf einer geraden Linie von einem Punkte aus nach einer bestimmten Richtung gleiche Strecken aufträgt; die Endpunkte dieser Strecken entsprechen den aufeinanderfolgenden Zahlen.



Eine solche Linie soll *Zahlenlinie* heißen.

§. 3. Um eine gegebene Menge zu *zählen*, ordnet man die Einheiten derselben den aufeinanderfolgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zu. Die der letzten Einheit zugeordnete Zahl ist die gesuchte Zahl der Menge.

Wird beim Zählen die Art der Einheit ganz unberücksichtigt gelassen, so heißen die dadurch gebildeten Zahlen *unbenannte Zahlen*; wird aber beim Zählen auch die Art der Einheit ausgedrückt, so entstehen *benannte* Zahlen.

§. 4. Zu gleichen Mengen gehört dieselbe Zahl (§. 1). Zwei Zahlen sind daher *gleich*, wenn jeder Einheit der einen Zahl eine Einheit der anderen Zahl zugeordnet werden kann.

Die Gleichsetzung zweier gleicher Zahlen oder Zahlenverbindungen heißt eine Gleichung. Man schreibt $a = b$ und nennt die verglichenen Größen *Seiten* der Gleichung.

Zwei Zahlen sind *ungleich*, wenn nicht jeder Einheit der einen Zahl eine Einheit der anderen zugeordnet werden kann; und zwar ist jene

Zahl die größere, von welcher nach der Zuordnung noch eine oder mehrere Einheiten übrig bleiben, die andere hingegen die kleinere. Dass a größer als b, somit b kleiner als a ist, drückt man durch die Ungleichung $a > b$ aus (Seiten der Ungleichung).

§. 5. Von gegebenen Zahlen durch vorgeschriebene Verbindung derselben zu einer andern gesuchten Zahl übergehen, heißt rechnen. Die Zahl, zu welcher man gelangt, heißt das Resultat der Rechnung. Jede Rechenvorschrift verlangt eine Operation an der Zahlenreihe.

§. 6. Jedes besondere Zahlzeichen stellt eine bestimmte Zahl der Zahlenreihe dar. Um aber die allgemeine Giltigkeit der Rechengesetze nachweisen zu können, hat man als allgemeine Zahlzeichen die Buchstaben eingeführt. Ein allgemeines Zahlzeichen stellt eine beliebige, aber innerhalb derselben Rechnung immer dieselbe Zahl dar.

Je nachdem die Arithmetik nur besondere oder auch allgemeine Zahlen in Betracht zieht, heißt sie die besondere oder die allgemeine Arithmetik.

Bei Euklid werden allgemeine Zahlen durch Strecken bezeichnet. Diophantus (4. Jahrh. n. Chr.) gebrauchte Buchstaben für die in einer Gleichung vorkommenden unbekannten Zahlen. Deutlichere Anfänge der Buchstabenrechnung zeigen sich bei Regiomontanus (1436—1476) und bei Stifel († 1567). Bei Vieta (1540—1603) tritt dieselbe in größerer Ausdehnung auf.

§. 7. Die Arithmetik stützt ihre Lehren auf Definitionen, Grundsätze und Lehrsätze.

Die Definition gibt an, wie ein neuer Begriff aus anderen vorausgegangenen Begriffen zusammengesetzt wird.

Der Grundsatz ist eine Aussage, die infolge der gemachten Wahrnehmungen als richtig anerkannt wird, aber auch anderseits nicht bewiesen werden kann.

Der Lehrsatz ist eine Aussage, deren Richtigkeit aus anderen bereits als wahr anerkannten Sätzen mittelst des Beweises hergeleitet wird. Der Beweis wird direct geführt, wenn man aus der Voraussetzung durch Schlüsse die Behauptung ableitet; indirect, wenn man aus der Verneinung der Behauptung durch Schlüsse die Verneinung der Voraussetzung oder eines anderen bereits als wahr erkannten Satzes ableitet.

Arithmetische Grundsätze.

§. 8. 1. Jede Zahl ist sich selbst gleich.

Folgesatz. Das Ganze ist größer als ein Theil.

2. Gleiche Zahlen können für einander gesetzt werden, (ohne dass die Richtigkeit einer Aussage gestört wird).

Folgesatz. Sind zwei Zahlen einer dritten gleich, so sind sie auch unter einander gleich.

3. Die Reihenfolge des Zählens ist für das Ergebnis gleichgiltig.

Erster Abschnitt.

Addition und Subtraction.

Die Rechnungsarten der ersten Stufe.

I. Addition mit absoluten ganzen Zahlen.

§. 9. **Erklärung.** Zu einer Zahl a eine Zahl b addieren heißt, eine Zahl c suchen, welche so viele Einheiten enthält, als a und b zusammen. Man schreibt $a + b = c$ (+ gelesen „plus") und nennt die gegebenen Zahlen a und b die Summanden und die gesuchte Zahl $a + b$ die Summe.

Ausführung. Um die Addition $a + b$ auszuführen, schreitet man in der Zahlenreihe von a ausgehend um so viele Einheiten vorwärts, als b enthält; die Zahl, zu der man gelangt, ist die gesuchte Summe.

Zusätze. 1. Die Summe ist größer als ein Summand.

2. Die Summanden und die Summe sind unbenannt oder gleichbenannt.

§. 10. Soll mit der durch eine Zahlenverbindung dargestellten Zahl weiter gerechnet werden, so muss dieselbe im allgemeinen in eine Klammer eingeschlossen werden.

Erklärung. Unter der Summe mehrerer Zahlen versteht man die Summe, welche erhalten wird, indem man zu der Summe der beiden ersten Zahlen die dritte, zu der neuen Summe die vierte Zahl, u. s. w. addiert. Es ist demnach

$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d.$$

Zusatz. Jede Zahl a ist eine Summe von a Einheiten.

$$a = \overbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}^{a}.$$

§. 11. Der Wert einer Summe bleibt unverändert, wenn man die Summanden unter einander vertauscht. (Das Commutationsgesetz der Addition.)

$$a + b = b + a.$$

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = \ldots$$

folgt aus dem 3. Grundsatze (§. 8).

Infolge des Commutationsgesetzes erhielten beide gegebene Zahlen den gemeinschaftlichen Namen Summand.

Rechengesetze.

§. 12. 1. Zu einer Summe kann eine Zahl addiert werden, indem man dieselbe zu einem Summanden und zu der erhaltenen Summe den andern Summanden addiert.

$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c)$$

oder $$a + b + c = a + c + b = a + (b + c).$$

2. Zu einer Zahl kann eine Summe addiert werden, indem man die Summanden in beliebiger Reihenfolge nach einander addiert.

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$$

oder $$a + (b + c) = a + b + c = a + c + b.$$

Die Richtigkeit dieser zwei Sätze, welche die Associationsgesetze der Addition bilden, folgt unmittelbar aus dem Commutationsgesetze in §. 11.

§. 13. Erklärung. Eine Summe, welche entsteht, indem man dieselbe allgemeine Zahl öfters als Summand setzt, wird abgekürzt dadurch bezeichnet, daſs man die allgemeine Zahl, Hauptgröße, nur einmal anschreibt und vor dieselbe die Zahl, Coefficient genannt, setzt, welche anzeigt, wie vielmal die allgemeine Zahl als Summand vorkommt; z. B.

$$a + a + a + a + a = 5a.$$

Der Coefficient 1 wird nicht geschrieben.

Ausdrücke mit derselben Hauptgröße heißen gleichnamig, mit verschiedenen Hauptgrößen ungleichnamig.

Gleichnamige Ausdrücke werden addiert, indem man die Summe ihrer Coefficienten vor die gemeinsame Hauptgröße setzt.

$$ma + na = (m + n)\,a.$$

Beweis. $$ma + na = (a + a + \ldots + \overset{m}{\overbrace{a}}) + (a + a + \ldots + \overset{n}{\overbrace{a}}) = a + a + \ldots + \overset{m}{\overbrace{a}} + \overset{m+1}{\overbrace{a}} + \ldots + \overset{m+n}{\overbrace{a}} = (m + n)\,a.$$

Z. B. $$a + 3a + 4a = (1 + 3 + 4)\,a = 8a.$$

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Addition.

§. 14. 1. Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.

Vor. $a = b$ Beweis. $a + c = a + c$ (1. Grundſ.)

$c = d$ folglich: $a + c = b + d$ (2. Grundſ.)

Beh. $a + c = b + d.$

2. Gleiches zu Größerem addiert gibt Größeres.

3. Größeres zu Größerem addiert gibt Größeres.

4. Größeres zu Kleinerem addiert gibt ein unbestimmtes Resultat.

2. Vor. $\dfrac{a > b \quad c = d}{}$ 3. $\dfrac{a > b \quad c > d}{}$ 4. $\dfrac{a < b \quad c > d}{}$

Beh. $a + c > b + d$ $\quad$ $a + c > b + d$ $\quad$ $a + c \mathop{\gtreqless} b + d$

Beweis zu 2.). Es sei w die Zahl, welche man zu b addieren muss, um a zu erhalten, also $a = b + w$, so ist nach 1. $a + c = b + w + d = (b + d) + w$, folglich $a + c > b + d$ (§. 9).

In gleicher Weise wird der Beweis zu 3. geführt.

Wie lauten die obigen Ungleichungen von rechts nach links gelesen, und wie der 2. Satz bei Vertauschung der Summanden?

II. Subtraction mit absoluten ganzen Zahlen.

§. 15. Die durch Addition gewonnene Gleichung $b + c = a$ führt zu den beiden neuen Aufgaben, 1. aus a und b die unbekannte Zahl c, 2. aus a und c die unbekannte Zahl b zu bestimmen. Diese Aufgaben werden durch die zweite Rechnungsart, die Subtraction, gelöst, welche deshalb die Umkehrung oder inverse Operation der Addition heißt.

Erklärung. Von einer Zahl a eine Zahl b subtrahieren heißt, aus a als der Summe zweier Zahlen und b als dem einen Summanden den andern Summanden suchen. Man nennt die gegebene Summe a den Minuend, den gegebenen Summanden b den Subtrahend und den gesuchten Summanden die Differenz und bezeichnet die letztere mit $a - b$ ($-$ gelesen „minus“).

Die Differenz zweier Zahlen ist also diejenige dritte Zahl, welche zum Subtrahend addiert den Minuend gibt.

Ausführung. 1. $a - b$ ist als erster Summand diejenige Zahl, welche um b vermehrt a gibt. Zu dieser Zahl gelangt man, wenn man in der Zahlenreihe vom Minuend a aus um so viele Einheiten zurückschreitet, wie der Subtrahend b anzeigt.

2. $a - b$ ist als zweiter Summand diejenige Zahl, um welche b vermehrt werden muss, um a zu erhalten. Wenn man daher vom Subtrahend b in der Zahlenreihe um so viele Einheiten vorwärts schreitet, bis man zum Minuend a gelangt, so ist die Zahl der hinzugezählten Einheiten die gesuchte Differenz.

Wegen des Commutationsgesetzes der Addition kommt man in beiden Fällen zu demselben Resultate. Die Addition hat daher nur eine inverse Rechnungsart, die Subtraction.

Zusätze. 1. Die Subtraction ist nur ausführbar, wenn der Minuend als Summe größer ist als der Subtrahend. Dies wird bei den folgenden Sätzen vorläufig vorausgesetzt.

2. Minuend, Subtrahend und Differenz sind unbenannte oder gleichbenannte Zahlen.

§. 16. Aus dem Begriffe der Subtraction ergeben sich nachstehende **Folgesätze.** 1. **(Definitionsformel.)** Addiert man zu der Differenz zweier Zahlen den Subtrahend, so erhält man den Minuend.

$$(a - b) + b = a; \qquad b + (a - b) = a.$$

2. Subtrahiert man von dem Minuend die Differenz, so erhält man den Subtrahend.

$$a - (a - b) = b.$$

3. Subtrahiert man von der Summe zweier Zahlen den einen Summanden, so erhält man den zweiten Summanden.

$$(a + b) - a = b; \qquad (a + b) - b = a.$$

Zusatz. Aus 1. und 3. folgt: Eine Zahl a bleibt unverändert, wenn man in beliebiger Reihenfolge eine Zahl b zu ihr addiert und von dem Resultate dieselbe Zahl subtrahiert.

$$a = a + b - b; \qquad a = a - b + b.$$

Die Addition und Subtraction sind demnach einander entgegengesetzt.

§. 17. Formveränderung einer Differenz. Der Wert einer Differenz bleibt unverändert, wenn man zu dem Minuend und dem Subtrahend dieselbe Zahl addiert oder von beiden dieselbe Zahl subtrahiert.

1. $a - b = (a + m) - (b + m)$; 2. $d - e = (d - m) - (e - m)$.

Beweis. 1) $a - b = c$; folglich $a = b + c$

und $a + m = (b + m) + c$ (§. 12, 1);

somit $c = a - b = (a + m) - (b + m)$.

2. Der zweite Theil folgt als Umkehrung aus dem ersten.

Rechengesetze.

§. 18. Von einer Summe kann eine Zahl subtrahiert werden, indem man dieselbe von einem Summanden subtrahiert und zu der erhaltenen Differenz den andern Summanden addiert.

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

Beweis. a) Soll $(a - c) + b$ die richtige Differenz der Zahlen $a + b$ und c sein, so muss man, wenn man zu ihr den Subtrahend c addiert, den Minuend $a + b$ erhalten (§. 15). Nun ist wirklich

$\{(a - c) + b\} + c = \{(a - c) + c\} + b$ (§. 12, 1) $= a + b$ (§. 16, 1).

b) Ebenso ist

$\{a + (b - c)\} + c = a + \{(b - c) + c\}$ (§. 12, 1) $= a + b$ (§. 16, 1).

§. 19. Zu einer Differenz kann eine Zahl addiert werden, indem man dieselbe zu dem Minuend addiert und den Subtrahend beibehält, oder indem man den Minuend beibehält und die Zahl von dem Subtrahend subtrahiert.

$$(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c).$$

Beweis. Der erste Theil ist die Umkehrung von §. 18, a). Der zweite Theil folgt aus dem ersten, indem man vom Minuend und Subtrahend c subtrahiert.

§. 20. Von einer Differenz kann eine Zahl subtrahiert werden, indem man dieselbe von dem Minuend subtrahiert und den Subtrahend beibehält, oder indem man den Minuend beibehält und die Zahl zu dem Subtrahend addiert.

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c).$$

Beweis.

a) $\{(a - c) - b\} + c = \{(a - c) + c\} - b$ (§. 19) $= a - b$ (§. 16, 1).

b) $\{a - (b + c)\} + c = a - \{(b + c) - c\}$ (§. 19) $= a - b$ (§. 16, 2).

§. 21. 1. Von einer Zahl kann eine Summe subtrahiert werden, indem man die Summanden in beliebiger Reihenfolge nacheinander subtrahiert.

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b.$$

Ergibt sich durch Umkehrung der in §. 20 bewiesenen Gleichungen

2. Zu einer Zahl kann eine Differenz addiert werden, indem man in beliebiger Reihenfolge den Minuend addiert und von dem Resultate den Subtrahend subtrahiert.

$$a + (b - c) = (a + b) - c = (a - c) + b.$$

Folgt durch Umkehrung der Gleichungen in §. 18.

3. Von einer Zahl kann eine Differenz subtrahiert werden, indem man in beliebiger Reihenfolge den Minuend subtrahiert und zu dem Resultate den Subtrahend addiert.

$$a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b.$$

Ergibt sich durch Umkehrung aus §. 19.

§. 22. Gleichnamige Ausdrücke werden subtrahiert, indem man die Differenz ihrer Coefficienten als Coefficienten vor die gemeinsame Hauptgröße setzt.

$$ma - na = (m - n)\,a.$$

Beweis. $ma - na = [na + (m - n)\,a] - na$ (§. 13) $= (m - n)\,a$ (§. 16, 3). Z. B. $5a - 2a = (5 - 2)\,a = 3a$.

§. 23. Sollen in einer durch die Zeichen + und — vorgeschriebenen Verbindung von Zahlen die dadurch angezeigten Operationen in der Reihenfolge, wie diese Zahlen mit ihren Zeichen von links nach rechts vorkommen, vollzogen werden, so kann man die Klammern weglassen.

$$[(a - b) + c] - d = a - b + c - d.$$

Ein Zahlenausdruck, welcher mehrere durch Addition und Subtraction verbundene Bestandtheile enthält, heißt ein **mehrgliedriger Ausdruck** oder ein Polynom. Die einzelnen Bestandtheile heißen Glieder, und zwar die mit dem Zeichen $+$ versehenen die additiven, die mit dem Zeichen $-$ versehenen die subtractiven Glieder des Ausdruckes. Das mit keinem Zeichen versehene erste Glied wird als additiv angesehen.

Ein zweigliedriger Ausdruck wird insbesondere ein Binom, ein dreigliedriger ein Trinom genannt. Ein Ausdruck, welcher nur ein Glied enthält, heißt ein eingliedriger Ausdruck oder ein Monom.

Folgesätze. 1. In einem mehrgliedrigen Ausdrucke ist die Reihenfolge der additiven und subtractiven Glieder ganz willkürlich.

Folgt aus §. 11, §. 18 und §. 20.

2. Jeder mehrgliedrige Ausdruck läßt sich in eine Differenz verwandeln, deren Minuend die Summe aller additiven, und deren Subtrahend die Summe aller subtractiven Glieder ist.

$$a + b - c + d - e = a + b + d - c - e$$
$$= (a + b + d) - (c + e) \text{ (§ 20)}.$$

Zusatz. Der 2. Folgesatz dient zur Reducierung gleichnamiger Ausdrücke. Z. B.

$$6a - 5a - 3a + 8a - 2a = (6a + 8a) - (5a + 3a + 2a)$$
$$= 14a - 10a = 4a.$$

§. 24. Da man jedes Polynom in ein Binom verwandeln kann, so reichen die entwickelten Lehrsätze auch zur Addition und Subtraction von Polynomen hin. Die Anwendung derselben führt zu folgenden Rechenregeln:

1. Nach dem Zeichen $+$ kann man eine Klammer ohneweiters weglassen (auflösen) oder setzen.

2. Nach dem Zeichen $-$ kann man eine Klammer weglassen (auflösen) oder setzen, wenn man jedem Gliede innerhalb der Klammer das entgegengesetzte Zeichen gibt (zu jenem, welches es vor dem Auflösen oder Setzen der Klammer hatte).

Z. B. $a + b - c + d = a + (b - c + d) = a - (c - b - d)$
$a + [b - (c - d)] = a + b - (c - d) = a + b - c + d.$

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Subtraction.

§. 25. 1. Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.

Ist $a = b$ und $c = d$, so ist $a - c = b - d$.

Begründung wie in §. 14, 1.

2. Gleiches von Größerem subtrahiert gibt Größeres.

Vor.	$a > b$	**Beweis.**	$a = b + w$
	$c = d$		$c = d$
Beh.	$a - c > b - d$		$a - c = (b - d) + w$ (§. 18)

folgl. $a - c > b - d$.

3. Größeres von Gleichem subtrahiert gibt Kleineres.

Vor. $a = b$, $c > d$ — Beh. $a - c < b - d$

Beweis. $a = b$, $c = d + w$

$a - c = (b - d) - w$ (§. 21, 1)

folgl. $a - c < b - d$.

4. Kleineres von Größerem subtrahiert gibt Größeres.

Vor. $a > b$, $c < d$ — Beh. $a - c > b - d$

Beweis. $a = b + x$, $c = d - y$

$a - c = (b - d) + (x + y)$ (§. 21, 3)

folgl. $a - c < b - d$.

5. Kleineres von Größerem subtrahiert gibt ein unbestimmtes Resultat.

Ist $a > b$ und $c < d$, so ist $a - c \gtreqless b - d$.

III. Erste Erweiterung des Zahlengebietes.

1. Null und negative Zahlen.

§. 26. Die Differenz $a - b$ hat gemäß der Definition nur eine Bedeutung, wenn der Minuend a als Summe größer ist als der Subtrahend b. Demnach stellt die Differenz $a - b$ für die beiden Fälle, $b = a$ und $b > a$ eine bedeutungslose Vereinigung von Zahlzeichen vor. Nun wären zwei Wege möglich. Man kann derartige Differenzen überhaupt ausschließen, weil sie mit der Definition nicht vereinbar sind. Dies hätte den großen Nachtheil, dass man vor jeder Rechnung mit einer Differenz zuerst untersuchen müsste, ob der Minuend größer ist als der Subtrahend. Deshalb geht man in anderer Weise vor. Man rechnet auch mit Differenzen, deren Subtrahend gleich oder größer ist als der Minuend und trifft zugleich die Festsetzung, dass auch für derartige Differenzen die Definitionsformel $(a - b) + b = a$ Giltigkeit behalte. Infolge dessen gelten für dieselben sämmtliche Gesetze der Subtraction.

Diese Differenzen stellen, da sie in der Reihe der natürlichen Zahlen nicht enthalten sind, neue Zahlformen dar, für welche auch neue Benennungen und Zahlzeichen eingeführt wurden.

Erklärung. $a - a = b - b = 1 - 1 = 0$ (gelesen „null"). Null ist die Differenz zweier gleicher Zahlen.

Folgesätze. 1. **(Definitionsformel.)** $a + 0 = a$ (§. 16, 1).

2. $a - 0 = a$ (§. 16, 2).

Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man zu ihr Null addiert oder von ihr Null subtrahiert.

Erklärung. $a - (a + n) = b - (b + n) = 0 - n = - n$ (gelesen „minus n").

$- n$ wird eine *negative Zahl* genannt. Dieselbe hat das *Vorzeichen* $-$ und den *absoluten Wert* n.

Eine negative Zahl ist also eine Differenz, deren Minuend Null und deren Subtrahend ihr absoluter Wert ist. Jede Differenz, deren Subtrahend um n größer ist als der Minuend, hat den Wert $- n$.

§. 27. *Erweiterte Zahlenreihe.* Durch die Definition der neuen Zahlen ist auch bereits ihre Stellung in der Zahlenreihe gegeben. $0 = 1 - 1$ muss der Zahl 1 vorausgehen; ebenso muss $-1 = 0 - 1$ der Zahl 0, $-2 = 0 - 2$ der Zahl -1 vorausgehen u. s. w. Die so erweiterte Zahlenreihe hat weder einen Anfang noch ein Ende.

$$\ldots\ldots\; -5,\; -4,\; -3,\; -2,\; -1,\; 0,\; 1,\; 2,\; 3,\; 4,\; 5,\; \ldots\ldots$$

In Übereinstimmung mit dieser Bildung der Zahlenreihe erhält man den der Zahl 0 entsprechenden Punkt der *Zahlenlinie*, wenn man von dem der Zahl 1 entsprechenden Punkte um eine Streckeneinheit zurückschreitet. Ebenso erhält man den der Zahl $-n$ entsprechenden Punkt, wenn man von dem Punkte 0 um n Streckeneinheiten zurückschreitet.

Die Zahlenlinie erstreckt sich nunmehr nach beiden Richtungen in das Unendliche.

$-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

§. 28. Erklärung. Im Gegensatze zu der negativen Zahl $- a$, welche durch Subtraction von 0 entsteht ($- a = 0 - a$), wird die natürliche Zahl a, welche durch Addition zu 0 entsteht ($a = 0 + a$), eine *positive Zahl* genannt und in analoger Weise durch Weglassung der Null mit $+ a$ (gelesen „plus a") bezeichnet. (Vorzeichen, absoluter Wert.)

Die mit Vorzeichen versehenen Zahlen werden *relative* oder *algebraische Zahlen* genannt, im Gegensatze zu den Zahlen ohne Vorzeichen, welche *absolute Zahlen* heißen.

Das Vorzeichen $+$ pflegt man als selbstverständlich dort wegzulassen, wo es ohne Störung des Sinnes und des Zusammenhanges einer Rechnung geschehen kann.

Aus der Definition $0 - n = - n$ oder auch $0 - (+ n) = - n$ folgt: $(+ n) + (- n) = 0$.

Eine positive und eine negative Zahl mit gleichen absoluten Werten geben zur Summe Null. Deshalb heißen zwei derartige Zahlen *entgegengesetzt.*

2. Addition und Subtraction mit algebraischen ganzen Zahlen.

§. 29. Durch die Anwendung der Rechengesetze auf die durch die negative Zahl dargestellte Differenz gelangt man zu folgenden Lehrsätzen:

1. Eine negative Zahl wird addiert. indem man ihren absoluten Wert subtrahiert.

Beweis. $a + (-b) = a + (0 - b) = a + 0 - b = a - b$.

2. Eine negative Zahl wird subtrahiert, indem man ihren absoluten Wert addiert.

Beweis. $a - (-b) = a - (0 - b) = a - 0 + b = a + b$.

Zusatz. Da nach 1. $a - (+b) = a + (-b)$ ist, so kann der zweite Satz auch lauten: Eine algebraische Zahl wird subtrahiert, indem man die entgegengesetzte Zahl addiert.

§. 30. Die Anwendung dieser beiden Sätze führt zu folgenden Rechenregeln über die Addition algebraischer Zahlen.

1. Zwei gleich bezeichnete Zahlen werden addiert, indem man der Summe ihrer absoluten Werte das gemeinsame Vorzeichen gibt.

$$(+a) + (+b) = +(a + b) = a + b.$$
$$(-a) + (-b) = 0 - a - b = 0 - (a + b) = -(a + b).$$

2. Zwei ungleich bezeichnete Zahlen werden addiert, indem man der Differenz ihrer absoluten Werte das Vorzeichen des größeren absoluten Wertes gibt.

$$\begin{aligned}(+a) + (-b) &= a - b = +(a - b) \text{ für } a > b,\\ &= -(b - a) \quad ,, \quad b > a.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(-a) + (+b) = (0 - a) + b = 0 + b - a &= +(b - a) \text{ für } b > a,\\ &= -(a - b) \quad ,, \quad a > b.\end{aligned}$$

Zusatz. Die negative Zahl $-a$ ist eine Summe von a negativen Einheiten.

$$-a = (-1) + (-1) + \ldots + (-\overset{a}{\overline{1}}).$$

§. 31. Eine Summe, deren Summanden algebraische Zahlen sind, heißt eine algebraische Summe; z. B.

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) + (-f).$$

Aus den vorausgegangenen Sätzen folgt unmittelbar:

1. Jeder mehrgliedrige Ausdruck kann in eine algebraische Summe verwandelt werden, indem man die Rechnungszeichen als Vorzeichen betrachtet und dann die Zahlen als Summanden annimmt.

$$a - b - c + d = (+a) + (-b) + (-c) + (+d).$$

2. Umgekehrt: Jede algebraische Summe kann in einen mehrgliedrigen Ausdruck verwandelt werden, indem man die

Additionszeichen und die Klammern weglässt und dann die Vorzeichen als Rechnungszeichen ansieht.

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) = a - b - c + d.$$

Infolge dessen ist man übereingekommen, bei algebraischen Summen die Additionszeichen und die Klammern für die einzelnen Summanden wegzulassen, so dass ein Polynom und eine algebraische Summe sich nur in der Auffassung, nicht aber in der Schreibweise und im Werte unterscheiden.

§. 32. Nunmehr erhalten die beiden Sätze über die Addition und Subtraction einer Summe mit Rücksicht auf §. 29 folgenden Wortlaut.

1. Zu einer Zahl wird eine algebraische Summe addiert, indem man ihre einzelnen Summanden mit unveränderten Vorzeichen nacheinander addiert (zu der Zahl hinzufügt).

2. Von einer Zahl wird eine algebraische Summe subtrahiert, indem man ihre einzelnen Summanden mit entgegengesetzten Vorzeichen nacheinander addiert (zu der Zahl hinzufügt).

§. 33. Da bei absoluten Zahlen $a - (b + n) < a - b < (a + c) - b$ ist, so muss, wenn wir $a = b$ setzen, die Ungleichung bestehen:

$$-n < 0 < +c.$$

1. Jede negative Zahl ist kleiner als Null, und Null ist kleiner als jede positive Zahl.

Da für absolute Zahlen $a - (b + m + n) < a - (b + m)$ ist, so folgt, wenn $a = b$ ist:

$$-(m + n) < -m.$$

2. Von zwei negativen Zahlen ist jene die kleinere, welche den größeren absoluten Wert hat.

§. 34. Statt die absoluten Werte entgegengesetzt benannter Zahlen, wie Vermögen — Schulden, Gewinn — Verlust, nach entgegengesetzten Richtungen zurückgelegte Wege, Zeiten vor und nach Christi Geburt, Temperaturen über und unter dem Nullpunkte u. dgl. durch Addition und Subtraction zu verbinden, kann man die eine derselben als positive, die andere als negative Zahl in Rechnung ziehen und beide durch die gleichartige Rechnung verbinden. Daraus erwächst der weitere Vortheil, dass das Vorzeichen des Resultates die Benennung angibt, oder eine der Aufgabe entsprechende Deutung zulässt.

Die Benennungen „positiv" und „negativ" rühren von Vieta her. Die Griechen kannten keine negativen Zahlen. Bei Descartes († 1650) wird zuerst unter einer allgemeinen Zahl a eine positive oder negative Zahl verstanden. Die Zeichen + und — kommen zuerst bei Leonardo da Vinci vor; vor ihm wurden die Anfangsbuchstaben p und m gebraucht. Das Gleichheitszeichen wurde eingeführt von Recorde (1552), die Ungleichheitszeichen von Harriot, die Klammer von Girard (1629).

Zweiter Abschnitt.

Multiplication und Division.

Die Rechnungsarten der zweiten Stufe.

I. Multiplication mit ganzen Zahlen.

§. 35. Erklärung. 1. Eine Zahl a mit einer Zahl b multiplicieren heißt, a so vielmal als Summand setzen, als b Einheiten enthält. Man nennt a den Multiplicand, b den Multiplicator und die gesuchte Zahl das Product. Das Product ist demnach eine Summe gleicher Summanden; der Multiplicand ist einer dieser gleichen Summanden; der Multiplicator hingegen ist die Anzahl der gleichen Summanden.

Der Multiplicand kann eine benannte Zahl sein; der Multiplicator ist immer eine absolute (positive) unbenannte Zahl. Das Product hat eventuell die Benennung des Multiplicands. Im folgenden werden nur Producte unbenannter Zahlen betrachtet.

Das Product aus dem Multiplicand a und dem Multiplicator b bezeichnet man durch $a \times b$, oder $a . b$ (d i. a bmal), oder bei allgemeinen Zahlen auch bloß durch a b.

Das Product zweier ganzer Zahlen wird auch ein Vielfaches des Multiplicands genannt. Z. B. $12 = 4.3$; 12 ist das 3fache von 4.

Folgesätze. a) Ist der Multiplicand 1, so ist das Product dem Multiplicator gleich.

b) Ist der Multiplicand 0, so ist auch das Product 0.

$$\text{a)}\quad 1.a = 1 + 1 + \ldots. + \overset{a}{\overline{1}} = a$$

$$\text{b)}\quad 0.a = 0 + 0 + \ldots + \overset{a}{\overline{0}} = 0.$$

Erklärung. 2. Unter dem Producte mehrerer Zahlen versteht man das Product, welches erhalten wird, indem man das Product der beiden ersten Zahlen mit der dritten, das neue Product mit der vierten Zahl, u. s. w. multipliciert. Hiernach ist

$$a.b.c = (a\,b).c,$$

$$a.b.c.d = [(a\,b).c].d.$$

§. 36. Eine Summe kann mit einer Zahl multipliciert werden, indem man jeden Summanden mit dieser Zahl multipliciert und die Theilproducte addiert.

$$(a + b).m = am + bm.$$

Beweis. $(a+b).m = (a+b)+(a+b)+\ldots+\overset{m}{\overline{(a+b)}}$

$= (a+a+\ldots+\overset{m}{\overline{a)}} + (b+b+\ldots+\overset{m}{\overline{b)}}$ (§. 11) $= a.m + b.m.$

Dieser Satz ist vorläufig Hilfssatz und wird später systematisch eingereiht.

§. 37. 1. Der Wert eines Productes bleibt unverändert, wenn man den Multiplicand und Multiplicator vertauscht. (Das Commutationsgesetz der Multiplication.)

$$a.b = b.a.$$

Beweis. $a.b = (1+1+\ldots+\overset{a}{\overline{1}}).b = b+b+\ldots+\overset{a}{\overline{b}}$ (§. 36 und §. 35) $= b.a.$

Zusätze. 1. Infolge des Commutationsgesetzes erhalten Multiplicand und Multiplicator den gemeinsamen Namen Factor.

2. Aus diesem Gesetze folgt die Berechtigung, den Coefficienten, welcher gemäß der Definition der Multiplicator der Hauptgröße ist, an erster Stelle zu schreiben.

3. Um die bedeutungslosen Producte $a.1$ und $a.0$ beizubehalten, muss denselben der durch das Commutationsgesetz verlangte Wert gegeben werden.

$$a)\ a.1 = 1.a = a; \qquad b)\ a.0 = 0.a = 0.$$

Diese beiden Sätze sowie die beiden Folgesätze in §. 35 erhalten folgenden gemeinsamen Wortlaut:

a) Ist ein Factor 1, so ist das Product gleich dem anderen Factor.

b) Ist ein Factor 0, so ist auch das Product 0.

2. Der Wert eines Productes von drei oder mehr Factoren bleibt ungeändert, wenn man die Reihenfolge der Factoren beliebig ändert.

Aus dem Commutationsgesetze für zwei Factoren folgt nur:

$$(a.b).c = (b.a).c = c.(a.b) = c.(b.a).$$

Es bleibt noch zu beweisen:

$$(a.b).c = (a.c).b = a.(b.c).$$

Beweis. a) $(a.b).c = (a+a+\ldots.+\overset{b}{\overline{a)}}.c$

$= ac+ac+\ldots+\overset{b}{\overline{ac}}$ (§. 36) $= (ac).b,$

b) $(a.b).c = (b.a).c = (bc).a$ (nach a) $= a.(bc).$

Indem man ein Product von vier und mehr Factoren als ein solches von drei Factoren betrachtet ($abcd = (ab).c.d$), kann durch Anwendung der beiden Sätze jeder Factor an eine beliebige Stelle gebracht werden.

Rechengesetze.

§. 38. 1. Ein Product kann mit einer Zahl multipliciert werden, indem man (nur) einen Factor mit der Zahl und das erhaltene Product mit dem andern Factor multipliciert.

$$(a.b).c = (a\,c).b = a.(b\,c).$$

2. Eine Zahl kann mit einem Producte multipliciert werden, indem man dieselbe mit dem einen Factor und das erhaltene Product mit dem andern Factor multipliciert.

$$a.(b\,c) = (a\,b).c = (a\,c).b.$$

Diese zwei Sätze, welche die Associationsgesetze der Multiplication heißen, folgen unmittelbar aus dem Commutationsgesetze.

§. 39. Ein Product, dessen Factoren einander gleich sind, wird abgekürzt dadurch bezeichnet, dass man nur einen Factor anschreibt und ihm rechts oben die Zahl beisetzt, welche anzeigt, wie vielmal derselbe vorkommt; z. B.

$$a.a.a.a.a = a^5.$$

Ein Product gleicher Factoren heißt eine Potenz. Der wiederholt gesetzte Factor heißt die Basis oder Grundzahl, die Anzahl der gleichen Factoren heißt der Potenzexponent, auch bloß Exponent. In der Potenz a^m, welche gelesen wird: „a zur mten" (Potenz erhoben) oder „a mit m potenziert", oder kurz „a hoch m", ist a die Basis, m der Exponent. Die zweite Potenz a^2 nennt man insbesondere auch das Quadrat, die dritte a^3 den Cubus von a.

Wenn in einem mehrgliedrigen Ausdrucke mehrere Potenzen derselben Basis vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Übersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten zu ordnen, indem man entweder mit der höchsten Potenz anfängt und dann immer niedrigere Potenzen folgen läszt, oder indem man von der niedrigsten Potenz der gemeinsamen Basis zu immer höheren Potenzen übergeht. Im ersten Falle heißt der Ausdruck nach fallenden, im zweiten nach steigenden Potenzen der gemeinsamen Basis geordnet. So ist z. B. der Ausdruck

$$x^4 - 4\,x^3\,y + 6\,x^2\,y^2 - 4\,x\,y^3 + y^4$$

nach fallenden Potenzen von x, und zugleich nach steigenden Potenzen von y geordnet.

§. 40. Potenzen derselben Basis kann man multiplicieren, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

$$a^m\,a^n = a^{m+n}.$$

Beweis. $a^m.a^n = (a.a.a \ldots\ldots \overset{m}{a}).(a.a \ldots\ldots \overset{n}{a})$

$= a.a \ldots\ldots\ldots \overset{m}{a}\,.\,\overset{m+1}{a} \ldots\ldots\ldots \overset{m+n}{a}$ (§. 38) $= a^{m+n}$.

Zusatz. Da nach der Definition $a^n.a = a^{n+1}$ ist, so muss, damit der vorstehende Lehrsatz auch für das Product $a^n.a$ Giltigkeit behält, $a = a^1$ sein.

Die erste Potenz einer Zahl ist dieser Zahl selbst gleich.

§. 41. 1. Eine Summe kann mit einer Zahl multipliciert werden, indem man jeden Summanden mit dieser Zahl multipliciert und die Theilproducte addiert.

$$(a + b).m = am + bm.$$

Wiederholung des §. 36.

2. Eine Differenz kann mit einer Zahl multipliciert werden, indem man den Minuend und den Subtrahend mit dieser Zahl multipliciert und das zweite Product vom ersten subtrahiert.

$$(a - b).m = am - bm.$$

Der Beweis wird ähnlich wie zu §. 41, 1, geführt.

§. 42. 1. Eine Zahl kann mit einer Summe multipliciert werden, indem man dieselbe mit jedem Summanden multiplicert und die Theilproducte addiert.

$$a.(m + n) = am + an.$$

Beweis. $a.(m + n) = (m + n).a$ (§. 37) $= ma + na$ (§. 41, 1)
$= am + an$ (§. 37).

2. Eine Zahl kann mit einer Differenz multipliciert werden, indem man dieselbe mit dem Minuend und dem Subtrahend multipliciert und von dem ersten Producte das zweite subtrahiert.

$$a.(m - n) = am - an.$$

Der Beweis ist dem vorigen analog.

Die in den §§. 41—42 angeführten Sätze heißen die Distributionsgesetze der Multiplication. Dieselben erstrecken sich auch auf den Fall, dass der eine Factor eine Zahl, der andere ein Polynom ist.

§. 43. Umkehrungen. 1. Zwei Producte, welche einen gemeinsamen Factor haben, können addiert werden, indem man die Summe der nicht gemeinsamen Factoren mit dem gemeinsamen Factor multipliciert.

$$am + bm = (a + b).m.$$

2. Zwei Producte, welche einen gemeinsamen Factor haben, können subtrahiert werden, indem man die Differenz der nicht gemeinsamen Factoren mit dem gemeinsamen Factor multipliciert.

$$am - bm = (a - b).m.$$

Diese beiden Operationen nennt man das Herausheben des gemeinsamen Factors.

§. 44. Zwei Polynome werden multipliciert, indem man jedes Glied des einen Polynoms mit jedem Gliede des anderen multipliciert und die einzelnen Producte additiv oder subtractiv zusammenstellt, je nachdem die bezüglichen Factoren gleiche oder verschiedene Rechnungszeichen haben.

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$$
$$(a + b)(c - d) = (a + b)c - (a + b)d = ac + bc - (ad + bd) = ac + bc - ad - bd$$
$$(a - b)(c + d) = (a - b)c + (a - b)d = ac - bc + ad - bd$$
$$(a - b)(c - d) = (a - b)c - (a - b)d = ac - bc - (ad - bd) = ac - bc - ad + bd.$$

§. 45. Bei mehrgliedrigen Ausdrücken, welche nach den Potenzen derselben Basis fortschreiten, erhält man, wenn dieselben gleichartig geordnet sind, durch die Multiplication des Multiplicands mit den einzelnen Gliedern des Multiplicators Theilproducte, welche ebenso geordnet sind. Man schreibt diese Theilproducte, um sie leichter zu reducieren, so an, dass ihre gleichnamigen Glieder unter einander zu stehen kommen. Z. B.

$$\begin{array}{rrrrrl}
4a^2 & - \;3a & - \;4 & & & \text{Multiplicand} \\
3a^2 & - \;7a & + \;5 & & & \text{Multiplicator} \\
\hline
12a^4 & - \;9a^3 & - 12a^2 & & & \\
 & - 28a^3 & + 21a^2 & + 28a & & \\
 & & + 20a^2 & - 15a & - 20 & \\
\hline
12a^4 & - 37a^3 & + 29a^2 & + 13a & - 20 & \text{Product.}
\end{array}$$

Zusatz. Insbesondere erhält man:

1. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$, und
2. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$; d. h.

Das Quadrat der Summe oder der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate dieser Zahlen bezüglich vermehrt oder vermindert um das doppelte Product derselben.

3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; d. h.

Das Product aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

4. $(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

5. $(a - b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Multiplication.

§. 46. 1. Gleiches mit Gleichem multipliciert gibt Gleiches.

Ist $a = b$ und $c = d$, so ist $ac = bd$. Beweis wie in §. 14, 1.

2. Gleiches mit Größerem multipliciert gibt Größeres.

Vor. $a = b$, $c > d$

Beh. $ac > bd$.

Beweis.

$$\begin{array}{l} a = b \\ c = d + w \\ \hline ac = bd + bw \end{array}$$

folgl. $ac > bd$.

3. Größeres mit Größerem multipliciert gibt Größeres.

Ist $a > b$ und $c > d$, so ist $ac > bd$.

Der Beweis ist dem vorigen analog.

4. Größeres mit Kleinerem multipliciert gibt ein unbestimmtes Resultat.

Ist $a > b$ und $c < d$, so ist $ac \gtreqless bd$.

Multiplication mit algebraischen ganzen Zahlen.

§. 47. Ist der Multiplicator eine positive Zahl $+ n$, also gleich der absoluten Zahl n, so ergibt sich schon aus der allgemeinen Erklärung der Multiplication in §. 35:

$$(+ a) . (+ n) = + an$$

$$(- a) . (+ n) = (- a) + (- a) + \dots + (\overset{n}{-a})$$

$$= -(a + a + \dots\dots + \overset{n}{a}) = - an.$$

Dagegen hat die Multiplication mit einem negativen Multiplicator $- n$ nach der obigen Erklärung keinen Sinn. Wenn nun eine Rechenoperation erweitert werden soll für Zahlen, auf welche die ursprüngliche Definition sich nicht erstreckt, gewinnt man die neue Definition durch das allgemeine Princip der Fortdauer der Operationsgesetze. Da die negative Zahl eine Differenz ist, so hat man den Lehrsatz §. 42, 2 anzuwenden. Man erhält dann:

$(+ a).(- n) = (+ a).(o - n) = a.o - an = o - an = - an$,
und $(- a).(- n) = (- a).(o - n) = - a.o - (- a.n) = o - (- an) = o + an = + an$.

Erklärung. Mit einer negativen Zahl multiplicieren heißt demnach, das Entgegengesetzte des Multiplicands mit dem absoluten Werte des Multiplicators multiplicieren.

Die voranstehenden Ergebnisse

$$(+ a).(+ n) = + an, \qquad (- a).(+ n) = - an,$$
$$(- a).(- n) = + an, \qquad (+ a).(- n) = - an,$$

kann man in den folgenden Satz zusammenfassen:

Zwei gleich bezeichnete Factoren geben ein positives, zwei ungleich bezeichnete Factoren geben ein negatives Product.

Folgesätze. 1. Das Product zweier algebraischer Zahlen bleibt ungeändert, wenn man dieselben unter einander vertauscht.

2. Eine gerade Anzahl negativer Factoren gibt ein positives Product; eine ungerade Anzahl negativer Factoren gibt ein negatives Product.

3. Eine gerade Potenz mit negativer Basis ist positiv. Eine ungerade Potenz mit negativer Basis ist negativ.

II. Division mit ganzen Zahlen.

§. 48. Die durch die Multiplication gewonnene Gleichung $b.c = a$ führt zu den beiden neuen Aufgaben, 1. aus a und b die unbekannte Zahl c, 2. aus a und c die unbekannte Zahl b zu suchen. Diese Aufgaben werden durch die vierte Rechnungsart, die Divison, gelöst, welche infolge dessen die Umkehrung oder inverse Operation der Multiplication heißt.

Erklärung. Eine Zahl a durch eine Zahl b dividieren heißt, aus a als dem Producte zweier Zahlen und b als dem einen Factor den anderen Factor suchen. Man nennt das gegebene Product a den Dividend, den gegebenen Factor b den Divisor, den gesuchten Factor den Quotienten, und bezeichnet den letzteren mit $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ gelesen: a (dividiert) durch b.

Der Quotient zweier Zahlen ist also diejenige dritte Zahl, welche mit dem Divisor multipliciert den Dividend gibt.

Zu jeder Multiplication lassen sich zwei Umkehrungen bilden. Bei der ersten Umkehrung, dem Messen, ist das Product und der Multiplicand gegeben, während der Multiplicator gesucht wird. Der Quotient gibt demnach an, wie oft der Divisor in dem Dividend enthalten ist. Dividend und Divisor sind unbenannte oder gleichbenannte Zahlen; der Quotient ist unbenannt. Z. B. $15 \text{ K} : 3 \text{ K} = 5$.

Bei der zweiten Umkehrung, dem Theilen, ist das Product und der Multiplicator gegeben, während der Multiplicand gesucht wird. Der Quotient ist jener Theil, welcher so vielmal genommen, wie der Divisor anzeigt, den Dividend hervorbringt; der Divisor ist in diesem Falle eine unbenannte Zahl, der Dividend kann auch eine Benenung haben, welche dann auch der Quotient erhält. Z. B. $15 \text{ fl.} : 3 = 5 \text{ fl.}$

Ausführung. Dem entsprechend läſst sich die Division in doppelter Weise ausführen.

1. Man subtrahiert den Divisor zuerst vom Dividend, dann von dem jedesmal erhaltenen Reste so oft als möglich; die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die Subtraction verrichtet werden kann, ist der Quotient.

2. Man sucht in der Zahlenreihe diejenige Zahl auf, welche so vielmal gesetzt, wie der Divisor anzeigt, den Dividend gibt.

Wegen des Commutationsgesetzes der Multiplication erhält man bei unbenannten Zahlen in beiden Fällen denselben Quotienten. Die Multiplication hat also nur eine inverse Rechnungsart, die Division.

Zusatz. Die Division ist nur dann ausführbar, wenn der Dividend gemäß der Definition ein Vielfaches des Divisors ist. Dies wird bei den folgenden Sätzen vorläufig vorausgesetzt.

§. 49. Folgesätze. 1. (Definitionsformel.) Multipliciert man den Quotienten zweier Zahlen mit dem Divisor, so erhält man den Dividend.

$$(a : b).b = a; \qquad b.(a : b) = a.$$

2. Dividiert man den Dividend durch den Quotienten, so erhält man den Divisor.

$$a : \frac{a}{b} = b$$

3. Dividiert man das Product zweier Zahlen durch den einen Factor, so erhält man den andern Factor.

$$ab : a = b; \qquad ab : b = a.$$

Zusatz. Aus 1. und 3. folgt:

Eine Zahl a bleibt unverändert, wenn man dieselbe in beliebiger Reihenfolge mit einer Zahl b multipliciert und das Resultat durch dieselbe Zahl dividiert.

$$a = (a.b) : b; \qquad a = (a : b).b.$$

Die Multiplication und die Division sind demnach einander entgegengesetzt.

Aus $a. 1 = a$ folgt:

$$1.\ a : a = 1; \qquad 2.\ a : 1 = a.$$

4. Jede Zahl durch sich selbst dividiert gibt 1 zum Quotienten.

5. Jede Zahl durch 1 dividiert gibt sich selbst zum Quotienten.

Aus $a.0 = 0$ folgt:

1. $0 : a = 0$; 2. $0 : 0 = a$, wo a eine beliebige Zahl bedeutet.

6. Ein Quotient, dessen Dividend Null, und dessen Divisor von Null verschieden ist, ist gleich Null.

7. Ein Quotient, dessen Dividend und Divisor Null sind, ist unbestimmt.

Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist daher ein Symbol der Unbestimmtheit

8. Ein Quotient, dessen Dividend von Null verschieden, und dessen Divisor Null ist, ist unmöglich.

$a : 0$ oder $\frac{a}{0}$ ist, wenn a nicht Null ist, unmöglich; denn es gibt keine Zahl, welche mit 0 multipliciert das Product a gibt.

§. 50. Formveränderung eines Quotienten. Der Wert eines Quotienten bleibt unverändert, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multipliciert oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

$$1.\ \frac{a}{b} = \frac{a.m}{b.m}; \qquad 2.\ \frac{d}{e} = \frac{d:m}{e:m}$$

Beweis. 1. $\frac{a}{b} = c$, folglich $a = bc$,
und $am = (bm).c$ (§. 38, 1);
somit $c = \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$.

2. Der zweite Theil folgt als Umkehrung aus dem ersten.

Rechengesetze.

§. 51. Ein Product kann durch eine Zahl dividiert werden, indem man einen Factor durch die Zahl dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Factor multipliciert.

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c}.b = a.\frac{b}{c}.$$

Beweis. a) Ist $\frac{a}{c}.b$ der richtige Quotient der Zahlen ab und c, so muss er, mit dem Divisor c multipliciert, den Dividend a b geben (§. 48). Nun ist wirklich

a) $\left\{\frac{a}{c}.b\right\}.c = \left\{\frac{a}{c}.c\right\}.b$ (§. 38, 1) $= a.b$ (§. 49, 1).

b) $\left\{a.\frac{b}{c}\right\}.c = a.\left\{\frac{b}{c}.c\right\}$ (§. 38, 1) $= a.b$ (§. 49, 1).

§. 52. Ein Quotient kann mit einer Zahl multipliciert werden, indem man den Dividend mit der Zahl multipliciert und den Divisor beibehält, oder indem man den Dividend beibehält und den Divisor durch die Zahl dividiert.

$$\frac{a}{b}.c = \frac{ac}{b} = \frac{a}{b:c}.$$

Beweis. a) ist die Umkehrung des Satzes §. 51, a. b) folgt aus a) indem man Dividend und Divisor durch c dividiert.

§. 53. Ein Quotient kann durch eine Zahl dividiert werden, indem man den Dividend durch die Zahl dividiert und den Divisor beibehält, oder indem man den Dividend beibehält und den Divisor mit der Zahl multipliciert.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b} = \frac{a}{bc}.$$

Beweis. a) $\frac{a:c}{b}.c = \frac{(a:c).c}{b}$ (§. 52) $= \frac{a}{b}$ (§. 49, 1).

b) folgt aus a nach §. 50.

§. 54. 1. Eine Zahl kann durch ein Product dividiert werden, indem man dieselbe durch den einen Factor und den erhaltenen Quotienten durch den andern Factor dividiert.

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$$

Ergibt sich durch Umkehrung der im §. 53 bewiesenen Gleichungen.

2. Eine Zahl kann mit einem Quotienten multipliciert werden, indem man dieselbe in beliebiger Reihenfolge mit dem Dividend multipliciert und das Resultat durch den Divisor dividiert.

$$a.\frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c}.b.$$

Folgt durch Umkehrung der Gleichungen in §. 51.

3. Eine Zahl kann durch einen Quotienten dividiert werden, indem man dieselbe in beliebiger Reihenfolge durch den Dividend dividiert und das Resultat mit dem Divisor multipliciert.

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}.c = \frac{ac}{b}.$$

Ergibt sich durch Umkehrung aus §. 52.

Folgesatz. Wenn mehrere Operationen der zweiten Stufe auf einander folgen, so ist deren Reihenfolge gleichgiltig.

Die voranstehenden Sätze über die Division §§. 50—54 sind ganz analog den Sätzen über die Subtraction §. 17—21.

§. 55. Potenzen derselben Basis kann man dividieren, indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten des Dividends und Divisors potenziert.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Beweis. Damit hier die Division nach §. 47 ausführbar sei, muss vorausgesetzt werden, dass m größer als n sei. Man setze $m = n + w$, oder $m - n = w$, dann ist

$$a^m : a^n = a^{n+w} : a^n = a^n . a^w : a^n \text{ (§. 40)}$$
$$= a^w \text{ (§. 49, 3)} = a^{m-n}.$$

§. 56. 1. Eine Summe kann durch eine Zahl dividiert werden, indem man jeden Summanden durch die Zahl dividiert und die Theilquotienten addiert.

$$\frac{a+b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$$

Beweis. $\left\{\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right\}.m = \frac{a}{m}.m + \frac{b}{m}.m$ (§. 41, 1) $= a + b$ (§. 49, 1),

2. Umgekehrt: Zwei Quotienten mit gleichem Divisor können addiert werden, indem man die Summe ihrer Dividenden durch den gemeinsamen Divisor dividiert.

§. 57. 1. Eine Differenz kann durch eine Zahl dividiert werden, indem man den Minuend und den Subtrahend durch dieselbe dividiert und von dem ersten Quotienten den zweiten subtrahiert.

$$\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$$

Beweis. $\left\{\frac{a}{m} - \frac{b}{m}\right\}.m = \frac{a}{m}.m - \frac{b}{m}.m$ (§. 41, 2) $= a - b$ (§. 49, 1).

2. Umgekehrt: Zwei Quotienten mit gleichem Divisor können subtrahiert werden, indem man die Differenz ihrer Dividenden durch den gemeinsamen Divisor dividiert.

Zusatz. Bei der Division eines Polynoms durch eine Zahl kommen diese Lehrsätze wiederholt zur Anwendung.

§. 58. Division zweier Polynome. Es sei der Quotient $\frac{A}{B}$, wo A und B mehrgliedrige, und zwar gleichartig geordnete Ausdrücke bedeuten, zu entwickeln. Da der Dividend A die Summe der Producte ist, welche durch Multiplication des ganzen Divisors B mit den einzelnen Gliedern des Quotienten entstehen, so ist das erste Glied in A das Product aus dem ersten Gliede in B und dem ersten Gliede im Quotienten. Man findet daher das erste Glied q des Quotienten, indem man das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors dividiert. Nachdem man das Product aus dem ganzen Divisor und dem ersten Gliede des Quotienten von dem Dividend subtrahiert hat, ist das erste Glied des Restes entsprechend der Entstehungsweise von A das Product aus dem ersten Gliede des Divisors und dem zweiten Gliede des Quotienten. Man findet daher dieses zweite Glied, indem man das erste Glied des Restes durch das erste Glied des Divisors dividiert, u. s. f.

Z. B.: $(3a^2 - 4ab - 4b^2) : (3a + 2b) = a - 2b$

$$\begin{array}{rrr}
3a^2 & +\,2ab & \\
- & - & \\
\hline
 & -\,6ab & -\,4b^2 \\
 & -\,6ab & -\,4b^2 \\
 & + & + \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Zusatz. Insbesondere erhält man:

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b, \text{ und}$$
$$(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b; \text{ d. h.}$$

Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen dividiert durch die Summe oder die Differenz dieser Zahlen gibt bezüglich die Differenz oder die Summe derselben Zahlen.

§. 59. Erklärung. Wenn der Dividend a kein Vielfaches des Divisors b ist, somit zwischen zwei auf einander folgenden Vielfachen von b liegt,

$$b.q < a < b\,(q + 1)$$

dann ist $a = bq + r$, wo $r < b$ ist.

In diesem Falle nennt man die Zahl q, welche angibt, wie oft man b von a subtrahieren kann, den unvollständigen Quotienten und die Zahl r den Divisionsrest.

$$1.\quad r = a - bq; \qquad 2.\quad a = bq + r$$

1. Der Divisionsrest wird erhalten, wenn man von dem Dividend das Product aus dem unvollständigen Quotienten und dem Divisor subtrahiert.

2. Der Dividend wird erhalten, wenn man zu dem Producte aus dem unvollständigen Quotienten und dem Divisor den Divisionsrest addiert.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Division.

§. 60. 1. Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches.

Ist $a = b$ und $c = d$, so ist $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Beweis wie §. 14, 1.

2. Größeres durch Gleiches dividiert gibt Größeres.

Vor. $a > b$, $c = d$

Beh. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

Beweis. $a = b + w$, $c = d$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} + \frac{w}{d}$$

folglich $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

3. Gleiches durch Größeres dividiert gibt Kleineres.

Ist $a = b$ und $c > d$, so ist $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Beweis. Wäre $\frac{a}{c} \geqq \frac{b}{d}$, so müsste in beiden Fällen $\frac{a}{c}.c > \frac{b}{d}.d$ (§. 46, 2 und 3), daher $a > b$ (§. 49, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

4. Größeres durch Kleineres dividiert gibt Größeres.

Ist $a > b$ und $c < d$, so ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Beweis. Wäre $\frac{a}{c} \leqq \frac{b}{d}$, so müsste in beiden Fällen $\frac{a}{c}.c < \frac{b}{d}.d$ (§. 46, 2 und 4), daher $a < b$ (§. 49, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

5. Größeres durch Größeres dividiert gibt ein unbestimmtes Resultat.

Ist $a > b$ und $c > d$, so ist $\frac{a}{c} \gtreqless \frac{b}{d}$.

Division mit algebraischen ganzen Zahlen.

§. 61. Zwei gleich bezeichnete Zahlen geben einen positiven, zwei ungleich bezeichnete Zahlen einen negativen Quotienten.

$$(+ a) : (+ b) = + q, \qquad (- a) : (+ b) = - q,$$
$$(+ a) : (- b) = - q, \qquad (- a) : (- b) = + q,$$

wo q den absoluten Wert des Quotienten darstellt.

Beweis. Ist der Dividend (das Product) positiv, so müssen der Divisor und der Quotient (die beiden Factoren) gleich bezeichnet sein; also ist $(+ a) : (+ b) = + q$ und $(+ a) : (- b) = - p$.

Ist der Dividend negativ, so müssen Divisor und Quotient verschiedene Vorzeichen haben; also ist $(- a) : (+ b) = - q$ und $(- a) : (- b) = + q$.

§. 62. Die Sätze über die Multiplication und Division mehrgliedriger Ausdrücke gelten auch für algebraische Summen; nur müssen die additiven und subtractiven Glieder hier als positive und negative Summanden betrachtet werden.

III. Zahlensysteme.

Zahlensysteme überhaupt.

§. 63. Unter einem Zahlensystem versteht man eine solche Darstellung der besonderen Zahlen, mittelst welcher nach einem bestimmten Gesetze durch verhältnismäßig wenig Zahlwörter und Zahlzeichen jede beliebig große Zahl ausgedrückt werden kann.

In dem Zahlensysteme mit der Basis b ist jede Zahl dargestellt als eine Summe von Gliedern, welche nach fallenden Potenzen der Basis b geordnet sind, und deren Coefficienten kleiner als die Basis sind. Somit ist die allgemeine Form für irgend eine ganze Zahl in dem Zahlensysteme mit der Basis b:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0.$$

Darin können die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots$ bis a_{n-1} die Werte $0, 1, 2 \ldots$ bis $b - 1$, a_n die Werte von 1 bis $b - 1$ haben.

Die aufeinander folgenden Potenzen von b heißen entsprechend dem Exponenten Einheiten der ersten, zweiten, dritten, ... Ordnung oder auch des ersten zweiten, dritten, ... Ranges, während die natürliche Einheit auch Einheit der nullten Ordnung (des nullten Ranges) genannt wird.

Um nun in diesem Systeme alle beliebigen ganzen Zahlen zu benennen, müssen einerseits die Zahlen von 0 bis $b - 1$, anderseits die Einheiten der verschiedenen Ordnungen besondere Namen erhalten.

Um diese Zahlen schriftlich darzustellen, wird nach dem indischen Positions-Systeme folgender Grundsatz befolgt. Es werden nur die Coefficienten der einzelnen Glieder inclusive 0 geschrieben, während das Zeichen $+$ sowie die Potenzen der Basis nicht geschrieben werden. Somit bedarf es nur besonderer Zeichen (Ziffern) für die Zahlen, welche kleiner als b sind, und des Zeichens 0.

Infolge dieser Vereinbarung kommt jeder Ziffer außer ihrem Zifferwerte noch ein besonderer Stellenwert zu; und zwar hat die Einheit, wenn sie an der nten Stelle von rechts angefangen steht, den Stellenwert b^{n-1}, oder sie ist eine Einheit der $(n-1)$ten Ordnung.

So bedeutet 5342, im Systeme der Grundzahl 6 geschrieben, was wir durch 5342 [6] ausdrücken wollen,

$$5.6^3 + 3.6^2 + 4.6 + 2.$$

Jede ganze Zahl, die größer als 1 ist, kann als Basis eines Zahlensystems gewählt werden.

Dekadisches Zahlensystem.

§. 64. Das gegenwärtig allgemein gebräuchliche Zahlensystem ist das dekadische, dessen Basis zehn (deka) ist.

In diesem drückt man die ersten neun Zahlen, Einer, mit den bekannten Zahlwörtern eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun aus und nennt die Einheit des ersten, zweiten, dritten, vierten, . . Ranges bezüglich einen Zehner, einen Hunderter, einen Tausender, einen Zehntausender. . . . Verbindet man mit jenen Zahlwörtern die Benennungen der auf einander folgenden dekadischen Einheiten, so kann dadurch jede beliebig große Zahl benannt werden.

Von dieser schwerfälligen indischen Methode weicht die gebräuchliche darin ab, dass jede Zahl in Classen zu je 6 und Ordnungen zu je 3 Stellen eingetheilt wird. In jeder Classe spricht man die höhere Ordnung mit ihrem Namen Tausend, dann die niedrigere ohne Namen und zuletzt den Namen der Classe aus.

Um die dekadischen Zahlen schriftlich darzustellen, genügen die indisch-arabischen Ziffern für die ersten neun Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, zu denen noch die 0 kommt.

Bezeichnet man mit a, b, c, . . . p, q, r irgend eine der Zahlen 0, 1, 2, . . . 8, 9, so ist der Ausdruck

$$r.10^n + q.10^{n-1} + p.10^{n-2} + \ldots + c.10^2 + b.10 + a$$

die allgemeine Form einer dekadischen ganzen Zahl. Dieselbe wird entsprechend den Vorschriften des §. 63 abgekürzt geschrieben. Z. B.

$$35684 = 3.10^4 + 5.10^3 + 6.10^2 + 8.10 + 4, \text{ oder}$$
$$= 30000 + 5000 + 600 + 80 + 4.$$

Folgesätze. 1. Der Rangexponent der höchsten Ziffer ist um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern.

2. Bedeutet N eine dekadische ganze Zahl, deren höchste Ziffer den Rangexponenten n hat, also eine $(n + 1)$ ziffrige ganze Zahl, so ist

$$N \geqq 10^n \text{ und } N < 10^{n+1}.$$

§. 65. Die bekannten Vorschriften für das Rechnen mit dekadischen ganzen Zahlen beruhen auf den Sätzen, welche für das Rechnen mit mehrgliedrigen Ausdrücken, die nach den Potenzen derselben Basis geordnet sind, gelten, wobei jedoch wegen der einfacheren Darstellung der dekadischen Zahlen durch nebeneinander geschriebene Ziffern auf den Stellenwert dieser Ziffern stets Rücksicht genommen werden muss.

Auch die Rechnungsoperationen mit nichtdekadischen Zahlen werden nach den gleichen Gesetzen, wie die mit dekadischen Zahlen ausgeführt.

Transformation der Zahlen aus einem Zahlensysteme in ein anderes.

§. 66. Aufgaben. 1. Eine in einem nichtdekadischen Zahlensysteme geschriebene Zahl in das dekadische Zahlensystem zu übertragen.

Man bilde die auf einander folgenden Einheiten des gegebenen Systems, multipliciere jede derselben mit der Ziffer des betreffenden Ranges und addiere die Producte.

Ist z. B. 32013 [4] in das dekadische Zahlensystem zu übertragen, so hat man

$$\begin{aligned} 32013\ [4] &= 3.4^4 + 2.4^3 + 0.4^2 + 1.4 + 3 \\ &= 3.256 + 2.64 + 1.4 + 3 = 903\ (10). \end{aligned}$$

2. Eine Zahl des dekadischen Zahlensystems in ein nichtdekadisches Zahlensystem, dessen Basis gegeben ist, zu übertragen.

Man bilde die auf einander folgenden Einheiten des neuen Systems. Dann dividiere man die gegebene Zahl durch die höchste dieser Einheiten, welche in ihr enthalten ist, den Rest durch die nächstkleinere Einheit, den neuen Rest durch die weiter folgende Einheit, u. s. f. Die gefundenen Quotienten sind die Ziffern der gegebenen Zahl in dem neuen Systeme.

Ist z. B. die dekadische Zahl 487 in das System der Grundzahl 6 zu übertragen, so hat man,

$$\begin{array}{ll} 6^0 = 1 & 487 : 216 = 2 \\ 6^1 = 6 & 55 : 36 = 1 \\ 6^2 = 36 & 19 : 6 = 3 \\ 6^3 = 216 & 1 : 1 = 1 \end{array}$$

also 487 [10] = 2131 [6].

IV. Theilbarkeit der Zahlen.

§. 67. Eine Zahl a heißt durch eine andere Zahl b theilbar, wenn sie durch dieselbe dividiert eine ganze Zahl zum Quotienten gibt. Der Dividend a heißt in diesem Falle ein Vielfaches (§. 35, 1) von b, und b ein Maß von a.

Eine Zahl, welche nur durch die Einheit und durch sich selbst theilbar ist, wird eine absolute Primzahl, auch bloß Primzahl genannt; jede andere Zahl heißt eine zusammengesetzte Zahl.

Eine Zahl, durch welche zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar sind, wird ein gemeinsames Maß dieser Zahlen genannt. Unter dem größten gemeinsamen Maße mehrerer Zahlen versteht man die größte Zahl, durch welche diese Zahlen theilbar sind. Zahlen, welche außer der Einheit kein gemeinsames Maß haben, heißen relative Primzahlen oder theilerfremde Zahlen.

Eine Zahl, welche durch zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar ist, heißt ein gemeinsames Vielfaches dieser Zahlen. Unter dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen mehrerer Zahlen versteht man die kleinste Zahl, welche durch alle jene Zahlen theilbar ist.

Gemeinsames Maß der Zahlen.

§. 68. 1. Jedes gemeinsame Maß zweier oder mehrerer Zahlen ist auch ein Maß ihrer Summe.

Beweis. Es sei m ein Maß der Zahlen a, b. So ist

$$a = m\alpha$$

$$\underline{b = m\beta,}$$ wo α, β ganze Zahlen bedeuten; folglich

$$a + b = m\alpha + m\beta = m(\alpha + \beta),$$

somit ist m, da $\alpha + \beta$ auch eine ganze Zahl ist, ein Maß von $a + b$.

2. Jedes gemeinsame Maß zweier Zahlen ist auch ein Maß ihrer Differenz.

Der Beweis ist dem vorigen analog.

3. Jedes Maß einer Zahl ist auch ein Maß jedes Vielfachen der Zahl.

Folgt unmittelbar aus Satz 1.

4. Ist eine Zahl durch eine zusammengesetzte Zahl theilbar, so ist sie auch durch deren Maße theilbar.

Beweis. Es sei m ein Maß von a und $m = p.q$. Dann ist $a = m\alpha = p.(q.\alpha) = q\,(p.\alpha)$; somit hat a die Maße p und q.

Folgesätze. 1. Jedes gemeinsame Maß des Dividends a und des Divisors b ist auch ein Maß des Divisionsrestes $r = a - bp$.

2. Jedes gemeinsame Maß des Divisors b und des Divisionsrestes r ist auch ein Maß des Dividends $a = b.q + r$.

§. 69. Aufgabe. Das größte gemeinsame Maß zweier Zahlen zu finden.

Man dividiere die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, sodann den Divisor durch den Divisionsrest, den neuen Divisor durch den neuen Rest, u. s. f., bis endlich eine Division ohne Rest aufgeht; der letzte Divisor ist das größte gemeinsame Maß der zwei gegebenen Zahlen.

Beweis. Sind a und b, wo $a > b$, die zwei gegebenen Zahlen und gibt

$a : b$ den Quotienten q_1 mit dem Reste r_1,
$b : r_1$ „ „ q_2 „ „ „ r_2,
$r_1 : r_2$ „ „ q_3 „ „ „ r_3,
$r_2 : r_3$ „ „ q_4 „ „ „ 0,

so ist r_3 ein Maß von r_2 und r_3, somit (nach §. 68, 2. Folges.) auch ein Maß von r_1 und r_2, daher auch von b und r_1 und schließlich auch von a und b.

Es sei anderseits m irgend ein gemeinsames Maß von a und b, dann ist (nach §. 68, 1. Folges.) m auch ein Maß von b und r_1, somit auch von r_1 und r_2 und weiter von r_2 und r_3. Hieraus folgt, dass m nicht größer als r_3 sein kann, dass mithin r_3 das größte gemeinsame Maß von a und b ist.

Das hier angegebene Verfahren, zu a und b das größte gemeinsame Maß zu finden, pflegt man die Kettendivision für a und b zu nennen.

Beispiel.

Um das gr. g. Maß von 1134 und 3654 zu finden, hat man

$3654 : 1134 = 3$ mit dem Reste 252	oder	1134	3654	3
$1134 : 152 = 4$ „ „ „ 126	„	**126**	252	4
$252 : \mathbf{126} = 2$ „ „ „ 0	„		0	2

gr. g. Maß = 126.

§. 70. 1. Ist bei der Kettendivision für a und b der letzte Divisor gleich 1, so sind a und b relative Primzahlen; und umgekehrt.

2. Wenn ein Product ac durch eine Zahl b theilbar ist, welche zu dem einen Factor a eine relative Primzahl ist, so ist der andere Factor c durch dieselbe theilbar.

Beweis. Es sei gemäß der Voraussetzung in der Kettendivision für a und b in §. 69 $r_3 = 1$. Multipliciert man in jeder Division den Dividend und Divisor mit c, so wird auch bei ungeändertem Quotienten der Divisionsrest mit c multipliciert. Es gibt also

$ac : bc$ den Quotienten q_1 mit dem Reste r_1c
$bc : r_1c$ „ „ q_2 „ „ „ r_2c
$r_1c : r_2c$ „ „ q_3 „ „ „ c

Weil nun gemäß dem zweiten Theile der Voraussetzung ac durch b theilbar ist, so ist nach §. 68, 1. Folges. auch $r_1 c$ dann $r_2 c$ und schließlich c durch b theilbar.

Folgesatz. Sind a und b relative Primzahlen, so ist das größte gemeinsame Maß von ac und b auch das größte gemeinsame Maß von c und b.

Von diesem Satze macht man häufig bei der Aufsuchung des größten gemeinsamen Maßes zweier allgemeiner Ausdrücke Anwendung, indem man, um die Kettendivision ausführen zu können, einen der beiden Ausdrücke mit einer Zahl multipliciert oder durch eine Zahl dividiert, welche zu dem andern Ausdrucke relativ prim ist.

Beispiel: Man suche das gr. g. Maß von

$$10x^2 + 14x - 12 \text{ und } 7x^2 + 22x + 16.$$

Damit die Division der beiden Ausdrücke in ganzen Zahlen ausgeführt werden könne, multipliciere man den ersten mit 7, welche Zahl kein Maß des zweiten Ausdruckes ist; man hat dann

$$\begin{array}{l}
(70x^2 + 98x - 84) : (7x^2 + 22x + 16) = 10 \\
70x^2 + 220x + 160 \\
- \quad\; - \quad\;\; - \\
\hline
 - 122x - 244.
\end{array}$$

Wird der Rest $-122x - 244$ durch die Zahl -122, welche kein Maß des früheren Divisors ist, dividiert, wodurch man $x + 2$ erhält, so ergibt sich als weitere Rechnung:

$$\begin{array}{l}
(7x^2 + 22x + 16) : (x + 2) = 7x + 8 \\
7x^2 + 14x \\
- \quad - \\
\hline
 + 8x + 16 \\
 + 8x + 16 \\
 - \quad\; - \\
\hline
0
\end{array}$$

Das gr. g. Maß ist also $x + 2$.

Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

§. 71. Die allgemeine Form einer dekadischen Zahl N ist:

$$N = a + b.10 + c.100 + d.1000 + e.10000 + \ldots .$$

Darin sind $a, b, c, \ldots$ die aufeinander folgenden Ziffern von rechts angefangen. Durch Herausheben gemeinsamer Factoren erhält dieselbe auch folgende Form:

$$N = a + 10.n_1 = (a + b.10) + 100n_2 = (a + b.10 + c.100) + 1000n_3,$$

wo n_1, n_2, n_3 ganze Zahlen sind. Da nun $10n_1$ durch 2 und 5, $100n_2$ durch 4 und 25, $1000n_3$ durch 8 und 125 theilbar sind, so ergeben sich nach §. 68, 1 folgende Regeln:

1. Eine dekadische Zahl ist durch 2 oder durch 5 theilbar, wenn ihre niedrigste Ziffer bezüglich durch 2 oder 5 theilbar ist.

Zusatz. Zahlen, welche durch 2 theilbar sind, heißen gerade, alle übrigen ungerade Zahlen. Die allgemeine Form für die geraden Zahlen ist $2m$, für die ungeraden $2m+1$ oder $2m-1$, wo m irgend eine ganze Zahl sein kann.

2. Eine dekadische Zahl ist durch 4 oder durch 25 theilbar, wenn ihr zweistelliges Ende bezüglich durch 4 oder 25 theilbar ist.

3. Eine dekadische Zahl ist durch 8 oder durch 125 theilbar, wenn ihr dreistelliges Ende bezüglich durch 8 oder 125 theilbar ist.

Ferner: $N = a + b.9 + b + c.99 + c + d.999 + d + \ldots$
$= (a + b + c + d + \ldots) + 9n$, wo n eine ganze Zahl ist. Da nun $9n$ durch 3 und 9 theilbar ist, so ergibt sich

4. Eine dekadische Zahl ist durch 3 oder durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffernsumme bezüglich durch 3 oder durch 9 theilbar ist.

$$N = a + b.11 - b + c.99 + c + d.1001 - d + e.9999 + e + \\ + f.10001 - f + \ldots \\ = 11n + [(a + c + e \ldots.) - (b + d + f \ldots)]$$

Da $11n$ durch 11 theilbar ist, so folgt:

5. Eine dekadische Zahl ist durch 11 theilbar, wenn die Differenz zwischen den Ziffernsummen der ungeraden und geraden Stellen durch 11 theilbar ist.

Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen.

§. 72. Ist eine Zahl n kleiner als das Quadrat einer andern Zahl a und ist n mit Ausschluss der Einheit durch keine Zahl unter a theilbar, so ist n eine Primzahl.

Beweis. Gesetzt, n sei durch irgend eine Zahl $p \overline{\gtrless} a$ theilbar, also $n = px$, wo x eine ganze Zahl bezeichnet; dann wäre n auch durch x theilbar. Aus $n < a^2$ und $p \overline{\gtrless} a$ folgt aber $n : p < a$, oder $x < a$. Es müsste daher unter der obigen Annahme n durch eine Zahl $x < a$ theilbar sein, was gegen die Voraussetzung ist. n muss also eine Primzahl sein.

§. 73. Untersuchung, ob eine Zahl eine Primzahl ist.

Man dividiere die gegebene Zahl durch die aufeinanderfolgenden Primzahlen eventuell so lang, bis der erhaltene Quotient kleiner ist als der Divisor. Wenn keine dieser Divisionen aufgeht, so ist die Zahl eine Primzahl.

Die Richtigkeit folgt aus §. 72.

z. B. 181 ist nicht theilbar durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, somit eine Primzahl. Letzte Division $131_1 : 13 = 10$; $131 = 13.10 + 1$, folglich $131 < 13^2$.

§. 74. 1. Wenn ein Product ab durch eine Primzahl p theilbar ist, so muss (mindestens) ein Factor durch dieselbe theilbar sein.

Beweis. Eine Primzahl ist entweder in einer anderen Zahl enthalten oder zu ihr relativ prim. Wenn daher p in a nicht enthalten ist, so muss p nach §. 70, 2 in b enthalten sein oder umgekehrt.

2. Die Potenzen zweier relativer Primzahlen sind selbst relative Primzahlen.

Beweis. Angenommen die Potenzen a^r und b^n, deren Basen relative Primzahlen sind, hätten ein Maß m, so müsste jeder Primfactor von m nach Satz 1) sowohl in a als auch in b enthalten sein, was gegen die Voraussetzung ist.

§. 75. Jede zusammengesetzte Zahl lässt sich, und zwar nur auf eine Art, in lauter Primfactoren zerlegen.

Beweis. Jede zusammengesetzte Zahl a muss wenigstens in zwei Factoren zerlegt werden können, wobei der Factor 1 ausgeschlossen bleibt; diese lassen sich, wenn sie zusammengesetzte Zahlen sind, wieder in Factoren zerlegen, die entweder schon Primzahlen oder selbst wieder zusammengesetzte Zahlen sind; wird im letzteren Falle das Zerlegen fortgesetzt, so muss man, da die Factoren immer kleiner werden, endlich lauter Primzahlen als Factoren erhalten. Sind nun m, n, p, q, r die gefundenen Primfactoren, von denen einige auch gleich sein können, so sind dieselben auch die einzigen absoluten Primzahlen, deren Product die Zahl a ist. Denn ließe sich a auch in die Primfactoren s, t, u, v, die von m, n, p, q, r verschieden sind, zerlegen, so müsste $mnpqr = stuv$, und daher $mnpqr$ durch s theilbar sein, was jedoch nach §. 74, 1 nicht möglich ist.

Nunmehr ergibt sich aus §. 74 nachstehender

Folgesatz. Eine Zahl a kann nicht durch eine Zahl b theilbar sein, wenn letztere einen Primfactor enthält, der in a nicht vorkommt, oder eine höhere Potenz eines Primfactors als in a vorkommt.

§. 76. 1. Aufgabe. Eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfactoren zu zerlegen.

Man dividiere die gegebene Zahl durch die kleinste Primzahl, durch die sie theilbar ist, 1 nicht mitgerechnet; den Quotienten dividiere man wieder durch die kleinste Primzahl, durch die er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen, und verfahre so mit jedem folgenden Quotienten, bis man endlich auf einen Quotienten kommt, der selbst eine Primzahl ist. Die nach und nach angewendeten Divisoren und der letzte Quotient sind die Primfactoren, aus denen die vorgelegte Zahl besteht.

Ist z. B. 630 in Primfactoren zu zerlegen, so hat man:

$$\begin{array}{rcrl} 630:2 & = & 315 & \text{oder} \\ 315:3 & = & 105 & \\ 105:3 & = & 35 & \\ 35:5 & = & 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array}$$

also $630 = 2.315 = 2.3.105 = 2.3.3.35 = 2.3.3.5.7.$

2. Aufgabe. Sämmtliche Factoren einer zusammengesetzten Zahl zu finden.

Es sei die gegebene Zahl n in Primfactoren zerlegt also $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$, so muss ein Factor dieses Productes die Form haben $m = a^p b^q c^r$, worin p, q und r alle beliebigen Werte von 0 bis α, bezüglich von 0 bis β und von 0 bis γ annehmen können. Da man diese Werte beliebig mit einander verbinden darf, so ist die Anzahl sämmtlicher Maße von n, wenn die Einheit mitgezählt wird, $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

Man findet die Factoren in geordneter Reihenfolge, entsprechend dem folgenden Beispiele.

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3,\ 6 \\ 45 & 3,\ 9,\ 18 \\ 15 & 3,\ 27,\ 54 \\ 5 & 5,\ 10,\ 15,\ 30,\ 45,\ 90,\ 135,\ 270. \end{array}$$

$270 = 2.3^3.5$; Anzahl der Maße $= 2.4.2 = 16$.

§. 77. Aufgabe. Einen allgemeinen Zahlenausdruck in Factoren zu zerlegen.

Bei eingliedrigen Ausdrücken stellen die einzelnen Buchstaben selbst die Primfactoren vor; demnach ist nur eine Zerlegung des Coefficienten erforderlich. Z. B.

$$24a^2mx^2 = 2^3.3.a^2mx^2.$$

Für die Zerlegung der Polynome in Factoren lassen sich keine allgemeinen Regeln geben; es sollen daher hier nur häufiger vorkommende specielle Fälle betrachtet werden.

1. Ein Polynom, dessen sämmtliche Glieder ein gemeinsames Maß haben, wird nach §. 43 in zwei Factoren zerlegt, indem man das gemeinsame Maß als den einen Factor heraushebt und als den andern Factor den Quotienten setzt, welcher aus der Division des gegebenen Ausdruckes durch jenes gemeinsame Maß hervorgeht. Z. B.:

1) $3ax - 6bx - 3x = 3x(a - 2b - 1)$

2) $x(x^2 - 1) - (x - 1)^3 = (x - 1)(x^2 + x - x^2 + 2x - 1) = (x - 1)(3x - 1)$.

2. Insbesondere folgt aus §. 44, Zusatz:

1) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$,

2) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b)$,

3) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;

ferner allgemein:

4) $a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a + b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + a^{2m-2}b^2 - \ldots + b^{2m})$,

5) $a^{2m+1} - b^{2m+1} = (a - b)(a^{2m} + a^{2m-1}b + a^{2m-2}b^2 + \ldots + b^{2m})$,

6) $a^{2m} - b^{2m} = (a + b)(a^{2m-1} - a^{2m-2}b + a^{2m-3}b^2 - \ldots - b^{2m-1})$,

7) $a^{2m} - b^{2m} = (a - b)(a^{2m-1} + a^{2m-2}b + a^{2m-3}b^2 + \ldots + b^{2m-1})$.

Siehe Übungsstoff!

4) Die Summe zweier Potenzen mit gleichen ungeraden Exponenten ist durch die Summe der Basen theilbar.

5) Die Differenz zweier Potenzen mit gleichen ungeraden Exponenten ist durch die Differenz der Basen theilbar.

6) und 7) Die Differenz zweier Potenzen mit gleichen geraden Exponenten ist sowohl durch die Summe als auch durch die Differenz der Basen theilbar.

3. Ein Trinom von der Form $x^2 \pm mxy \pm ny^2$ kann häufig dadurch in zwei Factoren zerlegt werden, dass man den Coefficienten m des zweiten Gliedes, je nachdem n positiv oder negativ ist, als die Summe oder als die Differenz zweier Zahlen darstellt, die als Product n geben, und hierauf die gemeinsamen Factoren heraushebt. Z. B.:

1) $x^2 + 6x + 8 = x^2 + (4 + 2)x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8 =$
$= x(x + 4) + 2(x + 4) = (x + 4)(x + 2)$.

2) $x^2 - 5xy + 6y^2 = x^2 - (3 + 2)xy + 6y^2 = x^2 - 3xy - 2xy + 6y^2$
$= x(x - 3y) - 2y(x - 3y) = (x - 3y)(x - 2y)$.

3) $a^2 + 3a - 10 = a^2 + (5 - 2)a - 10 = a^2 + 5a - 2a - 10$
$= a(a + 5) - 2(a + 5) = (a + 5)(a - 2)$.

Das größte gemeinsame Maß.

§. 78. Aufgabe. Das größte gemeinsame Maß zweier oder mehrerer Zahlen mittelst Zerlegung in Primfactoren zu finden.

Nachdem man jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren zerlegt hat, bildet man das Product der gemeinsamen Primfactoren, erhoben zu den niedrigsten Potenzen, in welchen dieselben auftreten; dieses Product ist das gesuchte gr. g. Maß.

Beweis. Das so gebildete Product m ist, da alle Factoren desselben in sämmtlichen gegebenen Zahlen enthalten sind, ein gemeinsames Maß derselben; es ist aber auch das größte, weil, sobald man noch einen Factor p hinzufügen würde, mindestens eine der gegebenen Zahlen nach §. 75, Folges. durch das Product mp nicht theilbar sein würde.

Beispiel. Suche das gr. g. Maß von 300 und 2520.

$300 = 2^2.3.5^2,$ gr. g. M. $= 2^2.3.5. = 60.$

$2520 = 2^3.3^2.5.7.$

§. 79. Aufgabe. Das größte gemeinsame Maß mehrerer Zahlen mittelst Kettendivision zu finden.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass man bei 3 Zahlen a, b, c das gr. g. Maß nach der ersten Methode (§. 78) auch findet, indem man zuerst das gr. g. Maß m von a und b, und dann das gr. g. Maß von m und c sucht; demnach ist auch bei Anwendung der Methode der Kettendivision in gleicher Weise vorzugehen.

Beispiele. Man suche das gr. g. Maß von 4725, 11025 und 15015.

4725	11025	2
Ø	**1575**	3

1575	15015	9
735	840	1
0	**105**	1
		7

M (4725, 11025, 15015) = 105.

Erläuterung. $a = 4725 = 3^3.5^2.7$; $b = 11025 = 3^2.5^2.7^2$; $c = 15015 = 3.5.7.11.13$; $M = 3.5.7 = 105$;

oder: $m(a, b) = 3^2.5^2.7$; $M(m, c) = 3.5.7 = 105$.

2) Man suche das gr. g. Maß von

$3x^2 - 2xy - 5y^2$, $2x^2 + 9xy + 7y^2$ und $2x^2 - 2y^2$.

Als das gr. g. Maß von $3x^2 - 2xy - 5y^2$ und $2x^2 + 9xy + 7y^2$ erhält man $x + y$.

Von $x + y$ und $2x^2 - 2y^2$ ist ferner $x + y$ das gr. g. Maß, welches daher zugleich das gr. g. Maß der gegebenen drei Ausdrücke ist.

Das kleinste gemeinsame Vielfache.

§. 80. Aufgabe. Das kleinste gemeinsame Vielfache mehrerer Zahlen mittelst Zerlegung in Primfactoren zu finden.

Nachdem man jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren zerlegt hat, bildet man das Product sämmtlicher Primfactoren, erhoben zu den höchsten Potenzen, in welchen dieselben auftreten; dieses Product ist das gesuchte kl. g. Vielfache.

Beweis. Das so gebildete Product ist, da es alle Factoren einer jeden der gegebenen Zahlen enthält, offenbar ein gemeinsames Vielfaches derselben; es ist aber auch das kleinste g. Vielfache, weil, wenn man irgend einen Factor dieses Productes weglässt, die so erhaltene kleinere Zahl nach §. 75, Folges. mindestens durch eine der gegebenen Zahlen nicht theilbar sein kann.

Beispiel. Man suche das kl. g. Vielfache von 60, 108 und 1050.

$$60 = 2^2.3.5,$$
$$108 = 2^2.3^3,$$
$$1050 = 2.3.5^2.7;$$
$$\text{kl. g. Vielfaches} = 2^2.3^3.5^2.7 = 18900.$$

§. 81. Aufgabe. Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen mittelst ihres größten gemeinschaftlichen Maßes zu finden.

Man dividiere die eine der beiden gegebenen Zahlen durch das gr. g. Maß und multipliciere mit dem Quotienten die andere; das Product ist das gesuchte kleinste gemeinsame Vielfache.

Beweis. Es sei m das gr. g. Maß von a und b; so ist $a = m\alpha$ und $b = m\beta$, wo α und β keinen gemeinsamen Factor mehr enthalten. Das Product $m\alpha\beta = a.\beta = b.\alpha$ ist demnach ein Vielfaches von a und b. Es ist aber auch das das kleinste g. Vielfache; denn lässt man aus m, α oder β einen Factor weg, so kann die erhaltene kleinere Zahl nach §. 75, Folges. mindestens durch eine der beiden Zahlen nicht theilbar sein, weil ein aus m weggelassener Factor nicht zugleich in α und β enthalten sein kann, und ein aus α (β) weggelassener Factor nicht in β (α) enthalten sein kann. Das kl. g. Vielfache von a und b ist also

$$m\alpha\beta = m\alpha.\beta = a(b:m)$$
$$= m\beta.\alpha = b(a:m).$$

Beispiele. 1) Man suche das kl. g. Vielfache von 648 und 972.

$$\begin{array}{r|r|l} 648 & 972 & 1 \\ 0 & \mathbf{324} & 2 \end{array} \qquad 324 \text{ ist das gr. g. Maß.}$$

$$648:324 = 2;\ 972.2 = 1944, \text{ oder}$$
$$972:324 = 3;\ 648.3 = 1944;$$
$$\text{kl. g. Vielfaches} = 1944.$$

2) Es soll das kl. g. Vielfache von $9a^4x^2 - 4b^2x^4$ und $9a^4x^2 - 12a^2 2bxy^2 + 4b^2y^4$ gefunden werden.

Das gr. g. Maß dieser Ausdrücke ist $3a^2x - 2by^2$. Man hat dann

$$(9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4):(3a^2x - 2by^2) = 3a^2x - 2by^2;$$

daher ist $(9a^4x^2 - 4b^2y^4)(3a^2x - 2by^2)$

$$= 27a^6x^3 - 18a^4bx^2y^2 - 12a^2b^2xy^4 + 8b^3y^6$$

das gesuchte kl. g. Vielfache.

§. 82. Aufgabe. Das kleinste gemeinsame Vielfache mehrerer Zahlen mit Anwendung der Kettendivision zu finden.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass man bei drei und mehr Zahlen das kl. g. Vielfache nach der ersten Methode (§. 80) auch findet, indem man zuerst das kl. g. Vielfache zweier Zahlen, dann das kl. g. Vielfache des eben gefundenen Vielfachen und der dritten Zahl sucht und auf diese

Art bis zur letzten gegebenen Zahl fortfährt. Das zuletzt gefundene kl. g. Vielfache ist zugleich das kl. g. Vielfache aller gegebenen Zahlen.

In gleicher Weise ist daher auch bei Anwendung der zweiten Methode vorzugehen.

§. 83. Haben von einer Reihe gegebener Zahlen zwei oder mehrere ein gemeinsames Maß, so kann man, ohne das kl. g. Vielfache zu ändern, anstatt dieser Zahlen ihr gemeinsames Maß nur einmal, und zugleich die Quotienten setzen, welche aus der Division jener Zahlen durch das gemeinsame Maß hervorgehen (Beweis zu §. 76). Ist ferner eine der gegebenen Zahlen ein Maß von einer andern größeren, so kann die kleinere Zahl ohne Änderung des kl. g. Vielfachen ganz unberücksichtigt gelassen werden.

Hierauf beruht folgendes praktische Verfahren, das kl. g. Vielfache mehrerer Zahlen mittelst Zerlegung in Primfactoren zu finden:

Man lasse in der Reihe der gegebenen Zahlen diejenigen weg, welche in andern größeren ohne Rest enthalten sind, dividiere von den übrigen so viele als möglich durch eine absolute Primzahl und schreibe die Quotienten sowie die nicht theilbaren Zahlen unter die früheren Zahlen. Ebenso verfahre man mit der neuen und jeder etwa folgenden Reihe, bis man zuletzt nur relative Primzahlen erhält. Das Product dieser letzteren und der absoluten Primzahlen, durch welche dividiert wurde, ist das gesuchte kl. g. Vielfache.

Beispiel. Man suche das kl. g. Vielfache von 30, 60, 108, 1050.

~~30~~,	60,	108,	1050	
	30,	54,	525	2
	~~15~~,	27,	525	2
		9,	175	3

kl. g. Vielfaches $= 9.175.2.2.3 = 18900$.

V. Zweite Erweiterung des Zahlengebietes.

Gebrochene Zahlen.

§. 84. Der Quotient $\frac{a}{b}$ hat gemäß der Definition nur eine Bedeutung, wenn der Dividend a ein Vielfaches des Divisors b ist. Demnach stellt der Quotient $\frac{a}{b}$ für den Fall, wo a kein Vielfaches von b ist, eine bedeutungslose Vereinigung von Zahlzeichen vor. Man geht nun wiederum in derselben Weise vor wie bei der ersten Erweiterung des Zahlengebietes. Statt derartige Quotienten überhaupt auszuschließen, weil sie mit der Definition nicht vereinbar sind, rechnet man auch mit Quotienten, deren Dividend kein Vielfaches des Divisors ist und trifft zugleich die Festsetzung, dass auch für derartige Quotienten die Definitionsformel $\frac{a}{b} . b = a$ Giltigkeit behalte. Infolge dessen gelten für dieselben sämmtliche Gesetze der Division.

Diese Quotienten stellen, da sie in der Reihe der bisher bekannten Zahlen nicht enthalten sind, neue Zahlformen dar, für welche auch eine neue Benennung eingeführt wurde.

Erklärung. Ein Quotient, dessen Dividend kein Vielfaches des Divisors ist, wird eine gebrochene Zahl oder ein Bruch genannt; der Dividend erhält den Namen Zähler, der Divisor den Namen Nenner. Im Gegensatze zu den Brüchen heißen die bisher betrachteten Zahlen ganze Zahlen.

§. 85. Der specielle Bruch $\frac{1}{b}$, welcher durch die Gleichung $\frac{1}{b} . b = 1$ definiert ist, wird Stammbruch oder gebrochene Einheit genannt.

Durch Anwendung von §. 56, 1 folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{\overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{a}}{b} = \overbrace{\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b}}^{a} = \frac{1}{b} . a.$$

Jeder Bruch ist ein Vielfaches seiner gebrochenen Einheit. Der Zähler zeigt an, wie vielmal der Bruch die durch den Nenner bestimmte gebrochene Einheit enthält.

§. 86. Bei einer gegebenen Division $a : b$ sind nunmehr zwei Fälle möglich:

1. Der Dividend ist ein Vielfaches des Divisors; dann ist der Quotient $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl.

Eine ganze Zahl in Form eines Bruches heißt ein uneigentlicher Bruch.

Zusatz. Jede ganze Zahl kann in der Form eines Bruches mit gegebenem Nenner dargestellt werden, indem man das Product aus der ganzen Zahl und dem gegebenen Nenner als den Zähler des Bruches annimmt.

Es ist $a = \frac{an}{n}$ (§. 49, 3).

2. Der Dividend ist kein Vielfaches des Divisors; dann ist der Quotient $\frac{a}{b}$ ein eigentlicher Bruch. In diesem Falle kann entweder $a < b$ oder $a > b$ sein.

Ein Bruch, dessen Zähler kleiner als der Nenner ist, dessen Wert also kleiner als 1 ist, heißt ein echter Bruch. Ein Bruch, dessen Zähler größer als der Nenner ist, dessen Wert also größer als 1 ist, heißt ein unechter Bruch.

§. 87. Jeder unechte Bruch kann in eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche verwandelt werden.

Ist $a > b$, so ist nach §. 59 $a = bq + r$, wo $r < b$ ist; daher $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$.

Ein Ausdruck von der Form $q + \frac{r}{b}$ heißt eine gemischte Zahl.

Zusatz. Die beiden Sätze in §. 59 finden nun folgende Ergänzung. Der vollständige Quotient ist gleich der Summe aus dem unvollständigen Quotienten und einem Bruche, dessen Zähler der Divisionsrest und dessen Nenner der Divisor ist.

§. 88. Erweiterte Zahlenreihe. Der Bruch $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ muss zwischen den ganzen Zahlen q und $q+1$ und anderseits zwischen den Brüchen $\frac{a-1}{b}$ und $\frac{a+1}{b}$ liegen. Man erweitert daher die Zahlenreihe in der Weise, dass man von 0 angefangen fortschreitend einerseits die gebrochene Einheit addiert, anderseits subtrahiert.

Man erhält dadurch die Zahlenreihe

$$\ldots -\frac{5}{b}, -\frac{4}{b}, -\frac{3}{b}, -\frac{2}{b}, -\frac{1}{b}, 0, +\frac{1}{b}, +\frac{2}{b}, +\frac{3}{b}, +\frac{4}{b}, +\frac{5}{b}, \ldots$$

welche die Zahlenreihe der $b$tel oder die Bruchzahlenreihe für den Nenner b genannt wird. In ihr sind zwischen je zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen $b-1$ Brüche eingeschaltet.

Um diese Zahlenreihe an der Zahlenlinie darzustellen, theilt man die als Einheit gewählte Strecke in b gleiche Theile und trägt auf der Zahlenlinie von dem der Null entsprechenden Punkte aus nach beiden Richtungen diese gleichen Theile auf. Die Endpunkte dieser Strecken entsprechen der Reihe nach den Zahlen der obigen Reihe. So hat man für die Reihe der Drittel:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} -2 & & & -1 & & & 0 & & & +1 & & & +2 & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ -\frac{7}{3} & -\frac{6}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & +\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{3}{3} & +\frac{4}{3} & +\frac{5}{3} & +\frac{6}{3} & +\frac{7}{3} \end{array}$$

§. 89. Anwendung der Bruchlehre auf reale Größen. Jede reale, als Einheit betrachtete Größe, z. B. eine Strecke, eine Kreislinie, eine Kreisfläche kann in beliebig viele (b) gleiche und gleichartige Theile getheilt werden. Jeder Theil hat daher die Eigenschaft, $b$mal genommen wieder die Einheit zu geben. Wird daher die gegebene Größe mit 1 bezeichnet, so ist ein solcher Theil mit $\frac{1}{b}$ zu bezeichnen. Ebenso ist die durch a solcher Theile entstandene Größe durch den Bruch $\frac{a}{b}$ darzustellen, weil diese Größe $b$mal genommen a ursprüngliche Einheiten gibt.

Aus dieser Anwendung der Bruchlehre ist die Bezeichnung „gebrochene Einheit" hervorgegangen.

Allgemeine Sätze.

§. 90. Aus dem Begriffe eines Bruches folgt:

1. **(Definitionsformel.)** Jeder Bruch gibt mit seinem Nenner multipliciert den Zähler zum Producte.

$$\frac{1}{b} . b = 1, \quad \frac{a}{b} . b = a.$$

2. Von zwei Brüchen, die gleiche Nenner haben, ist jener der größere, welcher den größeren Zähler hat.

3. Von zwei Brüchen, die gleiche Zähler haben, ist jener der größere, welcher den kleineren Nenner hat.

§. 91. Formveränderung eines Bruches. Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{a:n}{b:n} \text{ (§. 50).}$$

§. 92. Von diesem Satze werden folgende Anwendungen gemacht.

Aufgaben. 1. Einen gegebenen Bruch auf einen gegebenen neuen Nenner zu bringen, welcher ein Vielfaches des früheren Nenners ist. (Erweitern des Bruches.)

Man dividiere den neuen Nenner durch den früheren Nenner und multipliciere mit dem Quotienten (Erweiterungsfactor) den früheren Zähler; das Product ist der gesuchte neue Zähler.

Z. B. Der Bruch $\frac{a+2}{a-1}$ ist auf den Nenner $a^2 - 1$ zu bringen.

Der Erweiterungsfactor ist: $(a^2 - 1) : (a - 1) = a + 1$; also

$$\frac{a+2}{a-1} = \frac{(a+2)\ (a+1)}{a^2-1} = \frac{a^2+3a+2}{a^2-1}.$$

2. Zwei oder mehrere Brüche auf den kleinsten gemeinsamen Nenner zu bringen.

Man suche das kl. g. Vielfache der Nenner der gegebenen Brüche, welches zugleich der neue kl. g. Nenner ist, und bringe (nach Aufg. 1) die gegebenen Brüche auf diesen neuen Nenner.

Beispiel. Es sollen die Brüche $\frac{a}{2b}$, $\frac{3m}{4bc}$, $\frac{4n}{c^2d}$ auf den kl. g. Nenner gebracht werden.

Das kl. g. Vielfache aller Nenner, somit der kl. g. Nenner, ist $4bc^2d$.

Man erhält dann

$$\frac{a}{2b} = \frac{2ac^2d}{4bc^2d}, \quad \frac{3m}{4bc} = \frac{3cdm}{4bc^2d}, \quad \frac{4n}{c^2d} = \frac{16bn}{4bc^2d}.$$

3. Einen Bruch, dessen Zähler und Nenner ein gemeinsames Maß haben, abzukürzen, d. i. ohne Änderung des Wertes durch kleinere Zahlen auszudrücken.

Man dividiere Zähler und Nenner durch ihr gemeinsames Maß.

Z. B. $\frac{4am}{6bn} = \frac{2am}{3bn}$; $\frac{12a^2bx^2}{15acx^3} = \frac{4ab}{5cx}$.

Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, heißt auf die einfachste Form gebracht oder reduciert.

Zusatz. Durch das Abkürzen allgemeiner Brüche kann häufig die für besondere Substitutionen in denselben auftretende Unbestimmtheit behoben werden. So gibt der Bruch $\frac{x^2 - a^2}{2x - 2a}$ für $x = a$ den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$. Durch das Abkürzen aber erhält man

$$\frac{x^2 - a^2}{2x - 2a} = \frac{(x+a)(x-a)}{2(x-a)} = \frac{x+a}{2},$$

welcher Bruch für $x = a$ den bestimmten Wert $\frac{2a}{2} = a$ annimmt.

Rechnungsoperationen mit gemeinen Brüchen.

§. 93. Brüche mit gleichen Nennern werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und der Summe den gemeinsamen Nenner gibt.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m} \quad (\text{§. } 56).$$

$$a + \frac{m}{n} = \frac{an}{n} + \frac{m}{n} = \frac{an+m}{n}.$$

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an+bm}{mn}.$$

Zusätze. 1. Dieser Satz bildet die Erklärung für die Addition gleichnamiger Brüche.

2. Das Commutationsgesetz der Addition gilt auch für gebrochene Zahlen.

§. 94. Zwei Brüche mit gleichen Nennern werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und der Differenz den gemeinsamen Nenner gibt.

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m} = -\frac{b-a}{m} \quad (\text{§. } 57).$$

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} - \frac{bm}{mn} = \frac{an-bm}{mn}.$$

§. 95. 1. Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliciert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliciert oder den Nenner durch die Zahl dividiert.

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b} = \frac{a}{b:m} \quad (\text{§. } 52).$$

2. Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Zähler durch die Zahl dividiert oder den Nenner mit der Zahl multipliciert.

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b} = \frac{a}{b\,m} \text{ (§. 53).}$$

§. 96. 1. Eine Zahl wird mit einem Bruche multipliciert, indem man dieselbe durch den Nenner dividiert und den Quotienten mit dem Zähler multipliciert.

$$a . \frac{m}{n} = \frac{a}{n} . m = \frac{a\,m}{n} \text{ (§. 54, 2).}$$

Dieser Satz bildet die Erklärung für die Multiplication mit einem Bruche, welche nach der ursprünglichen Definition keinen Sinn hatte.

2. Ein Bruch wird mit einem Bruche multipliciert, indem das Product der Zähler durch das Product der Nenner dividiert.

$$\frac{a}{b} . \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : n\right) . m = \frac{a}{b\,n} . m \text{ (§. 95, 2)} = \frac{a\,m}{b\,n} \text{ (§. 95, 1).}$$

Folgesatz. Das Commutationsgesetz der Multiplication gilt auch für Brüche.

$$\frac{a}{b} . \frac{m}{n} = \frac{a\,m}{bn} = \frac{m\,a}{nb} = \frac{m}{n} . \frac{a}{b} \text{ (nach 2).}$$

§. 97. Erklärung. Wenn zwei Zahlen zum Producte 1 geben, so heißt jede der umgekehrte oder reciproke Wert der andern.

So ist $a . \frac{1}{a} = 1$, $\frac{m}{n} . \frac{n}{m} = 1$, daher $\frac{1}{a}$ der reciproke Wert von a, $\frac{n}{m}$ der umgkehrte Wert von $\frac{m}{n}$.

§. 98. Für die Division durch einen Bruch ergibt sich:

Eine (ganze oder gebrochene) Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man dieselbe mit dem reciproken Werte des Divisors multipliciert.

$$a : \frac{m}{n} = \frac{a}{m} . n \text{ (§. 54, 3)} = a . \frac{n}{m} \text{ (§. 96, 1)} = \frac{a\,n}{m}$$

$$\text{daher auch: } \frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} . \frac{n}{m} = \frac{a\,n}{b\,m} = \frac{a : m}{b : n} \text{ (§. 50).}$$

Wie lautet der letzte Theil in Worten?

Zusatz. Bei der Anwendung der vorausgegangenen Lehrsätze zeige man alle Multiplicationen nur an und kürze eventuell einen Factor des Zählers gegen einen Factor des Nenners. Z. B.

$$\frac{12}{25} : \frac{4}{5} = \frac{12.5}{25.4} = \frac{3}{5}; \quad \frac{9\,a^2}{8\,b^3} : 3\,a\,b = \frac{9\,a^2}{8.3.ab^4} = \frac{3\,a}{8b^4}.$$

§. 99. Ein Bruch, dessen Zähler oder Nenner, oder beide zugleich wieder Brüche sind, heißt ein Doppelbruch. Er ist nichts anderes, als eine angezeigte Division von Brüchen, und kann daher in einen gewöhnlichen

Bruch verwandelt werden, indem man diese Division wirklich ausführt, oder indem man Zähler und Nenner des Doppelbruches mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der einzelnen Nenner multipliciert. Z. B.

$$\frac{\frac{a}{m}}{b} = \frac{a}{m} : b = \frac{a}{bm}; \quad \frac{a}{\frac{m}{n}} = a : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}; \quad \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}} = \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}.$$

$$\frac{\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}}{1 + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}} = \frac{a(a-b) - b(a+b)}{a^2 - b^2 + a^2 + b^2} = \ldots\ldots; \text{ Erweiterungsfactor: } a^2 - b^2.$$

Decimalbrüche.

§. 100. Erklärung. Ein Bruch, dessen Zähler eine dekadische ganze Zahl, und dessen Nenner eine Potenz von 10 ist, wird ein Decimalbruch genannt; jeder andere Bruch heißt ein gemeiner Bruch.

Die allgemeine Form eines Decimalbruches ist also $\frac{A}{10^m}$, wo A und m beliebige dekadische ganze Zahlen bezeichnen.

Wird jedes Glied der Zahl A durch den Nenner 10^m dividiert, so nimmt der Decimalbruch die folgende entwickelte Form an

$$\ldots\ldots c.10^3 + b.10^2 + a.10 + E + \alpha.\frac{1}{10} + \beta.\frac{1}{10^2} + \gamma.\frac{1}{10^3} + \ldots,$$

worin die Coefficienten die Werte von 0, 1... bis 9 annehmen können.

Z. B. $\frac{45732}{10^3} = \frac{4.10^4}{10^3} + \frac{5.10^3}{10^3} + \frac{7.10^2}{10^3} + \frac{3.10}{10^3} + \frac{2}{10^3}$

$$= 4.10 + 5 + 7.\frac{1}{10} + 3.\frac{1}{10^2} + 2.\frac{1}{10^3}.$$

Auch in dieser Summe wird das Bildungsgesetz der dekadischen Zahlen eingehalten, insofern als der Wert einer Einheit an der nächstfolgenden Stelle rechts der zehnte Theil des Wertes ist, welchen die Einheit an der vorausgehenden Stelle links hat. Die Decimalbrüche bilden daher die naturgemäße Erweiterung des dekadischen Zahlensystemes, und der obige Ausdruck stellt die allgemeinste Form einer dekadischen Zahl dar.

Dem entsprechend kann das Positionssystem auch auf Decimalbrüche angewendet werden, nur muss die Stelle der Einer kenntlich gemacht werden, was durch einen hochgestellten Punkt rechts von den Einern, den Decimalpunkt geschieht. Ist der Decimalbruch kleiner als 1, so setzt man vor den Decimalpunkt die Null.

Die Ziffern rechts nach dem Decimalpunkte werden Decimalen genannt.

Es bedeutet also die Zahl, welche links vor dem Decimalpunkte steht, eine ganze Zahl; die erste Decimale bedeutet Zehntel, die zweite Hundertel, die dritte Tausendtel, die vierte Zehntausendtel u. s. w.

Folgesätze. 1. Die Zahl der Decimalstellen des Decimalbruches $\frac{A}{10^m}$ ist gleich dem Potenzexponenten des Nenners.

2. Der Wert eines Decimalbruches wird nicht geändert, wenn man den Decimalen rechts beliebig viele Nullen anhängt.

3. Der Wert jeder Decimalzahl ist kleiner als eine Einheit der ihrer höchsten geltenden Ziffer unmittelbar vorausgehenden höheren Stelle; z. B. $0{\cdot}00783 < \frac{1}{10^2}$.

Die Decimalbrüche wurden eingeführt von Joh. Regiomontanus; die jetzige Schreibweise geht auf Bürgi (1552—1632) zurück. Bürgi schrieb $23_0 4$, Kepler bereits 23,4.

Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch.

§. 101. Um einen gemeinen Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, dividiere man den Zähler a durch den Nenner b und bringe im Quotienten nach den Ganzen, an deren Stelle bei einem echten Bruche eine Null gesetzt wird, den Decimalpunkt an. Dem sich ergebenden sowie jedem etwa weiter folgenden Reste hänge man eine Null an und setze die Division fort, bis diese endlich ohne Rest aufgeht oder, wenn dieses nicht eintritt, bis man die gewünschte Anzahl Decimalen erhalten hat.

Beweis. Es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a.10^m}{b.10^m} = \frac{a.10^m : b}{10^m}.$$

Wenn man nun bei dem oben vorgezeichneten Divisionsverfahren an die betreffenden Reste nach und nach m Nullen anhängt, was dasselbe ist, als wenn man zu dem Zähler a auf einmal m Nullen hinzugefügt hätte, so wird dadurch a mit 10^m multipliciert; und indem man dann die im Quotienten $a.10^m : b$ erhaltenen letzten m Ziffern als Decimalen annimmt, wird dieser Quotient durch 10^m dividiert.

Z. B. $\frac{3}{4} = 3{\cdot}0 : 4 = 0{\cdot}75$ $\qquad$ $\frac{329}{125} = 329 : 125 = 2{\cdot}632$

20	790
0	400
	250
	0

§. 102. 1. Damit sich ein gemeiner Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Decimalbruch genau verwandeln lasse, muss $a.10^m$ bei hinreichend großem m durch b theilbar sein. Dieses ist aber, wenn a und b relative Primzahlen sind, nach §. 70, 2 nur dann möglich, wenn 10^m durch b theilbar ist, d. h. wenn b keinen von 2 und 5 verschiedenen Factor enthält.

2. In allen Fällen, wo der Nenner b entweder die Factoren 2 und 5 gar nicht, oder außer denselben noch andere davon verschiedene Primfactoren enthält, kann bei Anwendung des erwähnten Verfahrens die Division nicht aufgehen; man erhält daher einen unendlichen Decimalbruch. Wird derselbe bei der $m$ten Decimalstelle abgebrochen, so ist der Unterschied zwischen dem gemeinen Bruche $\frac{a}{b}$ und dem angenäherten endlichen Decimalbruche $\frac{p}{10^m}$ kleiner als eine Einheit der letzten Decimalstelle.

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{10^m} < \frac{1}{10^m}.$$

Beweis. Ist $a.10^m$ durch b nicht theilbar, so kann der Quotient als eine gemischte Zahl angesehen werden. Setzt man also

$$\frac{a.10^m}{b} = p + \frac{r}{b}.$$

wo $r < b$ ist, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{10^m} + \frac{r}{b.10^m}, \text{ also } \frac{a}{b} - \frac{p}{10^m} = \frac{r}{b.10^m}.$$

Da nun $r < b$, also $\frac{r}{b} < 1$, so muss $\frac{r}{b.10^m} = \frac{a}{b} - \frac{p}{10^m} < \frac{1}{10^m}$ sein.

Es läſst sich daher, da m beliebig groß, daher $\frac{1}{10^m}$ beliebig klein gemacht werden kann, der Unterschied zwischen dem gemeinen Bruche und dem auf m Stellen entwickelten Decimalbruche mit wachsender Stellenzahl kleiner machen, als jede noch so kleine gegebene Zahl. Diese Bedeutung hat der Satz: Der gemeine Bruch ist gleich dem entwickelten unendlichen Decimalbruche.

Wird ein Bruch, der sich nicht genau durch einen Decimalbruch darstellen läſst, näherungsweise in einen solchen verwandelt, so muss man bei fortgesetzter Division, da der Rest immer kleiner als der Divisor ist, wieder einen von den früheren Resten erhalten, von welchem an sich dann weiter die nämlichen Ziffern im Quotienten und dieselben Reste wie vorher ergeben. Z. B.

$$\frac{18}{37} = 18 : 37 = 0{\cdot}486\,486\ldots \qquad \frac{56}{75} = 56 : 75 = 0{\cdot}74\,666\ldots$$

Decimalbrüche, in denen sich eine bestimmte Anzahl von Ziffern in derselben Ordnung wiederholt, nennt man periodische, und die immer wiederkehrende Ziffernfolge die Periode.

Da für den Nenner b nur $b - 1$ verschiedene Reste möglich sind, so kann die Periode höchstens $b - 1$ Stellen haben.

Bei den periodischen Decimalbrüchen sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder beginnt die Periode unmittelbar nach dem Decimalpunkte, oder es gehen der Periode noch andere Decimalen voraus. Im ersten Falle heißt der Decimalbruch rein periodisch, im zweiten gemicht periodisch.

Die der Periode vorangehende Ziffernfolge pflegt man auch die Vorperiode zu nennen.

Man pflegt die Periode nur einmal anzuschreiben, jedoch die erste und letzte Ziffer derselben mit darüber gesetzten Punkten zu bezeichnen.

Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch.

§. 103. 1. Ein endlicher Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man denselben in der Form eines gemeinen Bruches anschreibt und diesen, wenn es angeht, abkürzt. Z. B.

$$0\cdot75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}, \qquad 31\cdot325 = 31\,\frac{325}{1000} = 31\,\frac{13}{40}.$$

2. Ein rein periodischer Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man als Zähler die Periode und als Nenner eine Zahl setzt, welche mit so vielen 9 geschrieben wird, als die Periode Ziffern hat.

Beweis. Drückt man die Periode durch b und ihre Stellenzahl durch n aus, so ist der gesuchte periodische Decimalbruch

$$x = \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \frac{b}{10^{4n}} + \ldots$$

Multipliciert man diesen Ausdruck mit 10^n, so erhält man

$$x.10^n = b + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \ldots$$

Subtrahiert man nun den früheren Ausdruck von dem letzten, so folgt

$$x.10^n - x = b, \text{ oder } (10^n - 1)\,x = b,$$

und daraus
$$x = \frac{b}{10^n - 1}.$$

Z. B. $\quad 0\cdot\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \qquad 15\cdot\dot{3}5\dot{1} = 15\,\frac{351}{999} = 15\,\frac{13}{37}.$

3. Ein gemischt periodischer Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man die Vorperiode sammt der Periode als ganze Zahl zusammenstellt, davon die Vorperiode subtrahiert und diese Differenz als Zähler, als Nenner aber eine Zahl annimmt, die mit so vielen 9, als die Periode Ziffern enthält, und so vielen rechts folgenden Nullen, als Decimalen der Periode vorangehen, geschrieben ist.

Beweis. Es seien b die Periode, n die Stellenzahl derselben, ferner a die Vorperiode und m ihre Stellenzahl, dann ist der gesuchte Decimalbruch

$$x = \frac{a}{10^m} + \frac{b}{10^{m+n}} + \frac{b}{10^{m+2n}} + \frac{b}{10^{m+3n}} + \ldots$$

Multipliciert man diesen Ausdruck mit 10^m, so erhält man

$$x.10^m = a \quad + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \ldots$$

somit nach 2. $$x.10^m = a + \frac{b}{10^n - 1} = \frac{a.10^n - a + b}{10^n - 1}$$

und daraus $$x = \frac{(a.10^n + b) - a}{(10^n - 1).10^m}.$$

Z. B. $$0\cdot2\dot{1}\dot{5} = \frac{215-2}{990} = \frac{213}{990} = \frac{71}{330}.$$

Abgekürztes Rechnen mit unvollständigen Zahlen.

(Wiederholung aus der Unterstufe.)

§. 104. Soll mit einem unendlichen Decimalbruche gerechnet werden, so muss derselbe bei einer bestimmten Stelle abgebrochen werden. Der so erhaltene endliche Decimalbruch heißt ein *unvollständiger Decimalbruch*; derselbe ist ein Näherungswert des unendlichen Decimalbruches. Die Differenz zwischen beiden wird der *Fehler* des unvollständigen Decimalbruches genannt. Derselbe ist nach §. 103, 2 kleiner als eine Einheit der letzten beibehaltenen Stelle. Man erreicht, dass dieser Fehler *kleiner ist als eine halbe Einheit der letzten beibehaltenen Stelle*, indem man die letzte beibehaltene Ziffer unverändert lässt, wenn die erste weggelassene Ziffer kleiner als 5 ist, hingegen um eine Einheit vergrößert, wenn die erste weggelassene Ziffer größer als 4 ist. Man nennt dieses Verfahren die *Correctur*.

In gleicher Weise können auch *endliche* Decimalbrüche und *ganze Zahlen* auf eine höhere Stelle mit Correctur abgekürzt werden, wobei man vermeidet, dass auf die höchste beibehaltene Stelle 5 mit weiteren Nullen folgt.

Alle durch *Messung* erhaltenen Zahlen sind ihrer Natur nach unvollständige Zahlen. Auch bei ihnen setzt man voraus, dass ihr Fehler kleiner ist als eine halbe Einheit der letzten Stelle. Hiezu berechtigt das bei der Messung angewendete Verfahren. Soll z. B. die Länge einer Schulbank in *cm* gemessen werden, so wird am Meßband die Zahl der ganzen Centimeter abgelesen und diese unverändert gelassen, wenn nach dem Augenmaße der Rest kleiner ist als $\frac{1}{2}$ *cm*, hingegen um 1 erhöht, wenn der Rest größer ist als $\frac{1}{2}$ *cm*.

Dass eine Zahl unvollständig ist, kann bei einem Decimalbruche durch angehängte Punkte, bei einer ganzen Zahl dadurch angedeutet werden, dass die auf die ungenaue Stelle folgenden Nullen klein geschrieben werden.

Z. B. $3\cdot141\ldots$; 735_{000}.

Man pflegt auch die höchste ungenaue Stelle zu unterstreichen und das Zeichen $\sim$ „für angenähert gleich“ zu benützen. Z. B. $3\cdot\dot{1}\dot{6} \sim 3\cdot16\underline{2}$.

Die *Genauigkeit* einer unvollständigen Zahl ist bestimmt durch den Quotienten aus der Zahl dividiert durch eine Einheit der höchsten ungenauen Stelle; somit ist von zwei unvollständigen Zahlen jene die genauere, welche eine größere Anzahl von Einheiten der höchsten ungenauen Stelle enthält.

$$\frac{3\cdot141}{0\cdot001} = 3141; \qquad \frac{735000}{1000} = 735$$

3·141... ist genauer als 735_{000}.

Bei jeder Rechnung mit unvollständigen Zahlen ist das Resultat an jeder Stelle ungenau, an deren Bildung eine ungenaue Ziffer betheiligt ist. Infolge dessen wird man die Rechnung abgekürzt so anlegen, dass überhaupt nur die höchste jener ungenauen Stellen noch erhalten wird, weil die Berechnung der folgenden Stellen ganz zwecklos wäre.

Abgekürzte Addition und Subtraction.

§. 105. Man addiert zunächst die vorhandenen Einheiten rechts von der höchsten ungenauen Stelle und benützt diese Summe zur Correctur der nächst höheren Stelle, von welcher ab die Addition beginnt. In gleicher Weise geht man bei der Subtraction vor.

Ist die gesuchte Summe das Endresultat einer Rechnung, so verkürzt man dieselbe mit Correctur um eine Stelle.

Beispiel 3·872
15·7...
9·5555.. (period.)
8·32...
6·7234

44 2..... ; 16 gibt zur Corr. 2.
Resultat 44·.....

Abgekürzte Multiplication.

§. 106. Multipliciert man die niedrigste Ziffer (Ziffer des niedrigsten Stellenwertes) des einen Factors mit der höchsten Ziffer des anderen Factors, so erhält man zwei Stellen, welche nebst den niedrigeren Stellen im Producte ungenau sind; demnach hat man das Product abgekürzt auf die höhere jener beiden Stellen zu entwickeln. Zu diesem Zwecke schlägt man folgendes Verfahren ein.

1. Man wählt die genauere Zahl als Multiplicator und schreibt die höchste Ziffer des Multiplicators unter die niedrigste Ziffer des Multiplicands und daneben die übrigen Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Reihenfolge.

2. Man multipliciert mit jeder Ziffer des umgekehrt geschriebenen Multiplicators die gerade darüber stehende sowie die weiter folgenden höheren Ziffern des Multiplicands und schreibt die dadurch erhaltenen ab-

gekürzten Theilproducte, weil sie sämmtlich mit dem früher erwähnten Stellenwerte endigen, so an, dass ihre niedrigsten Ziffern unter einander zu stehen kommen.

Jedes dieser Theilproducte wird corrigiert durch das Product aus der betreffenden Ziffer des Multiplicators mit der rechts vorhergehenden Ziffer des Multiplicands.

3. Die abgekürzten Theilproducte werden addiert.

Ist das erhaltene Product das Endresultat einer Rechnung, so wird dasselbe mittelst Correctur um eine Stelle verkürzt.

Zusatz. Soll das Product auf eine höhere vorgeschriebene Stelle abgekürzt entwickelt werden, so schreibt man die Einer des Multiplicators unter jene Stelle des Multiplicands, welche im Producte als niedrigste angestrebt wird, und verfährt im übrigen in gleicher Weise wie früher.

Beispiele. 1. 2·916.. × 4·378..
8 734
11 664
875
204
23
12·766..
Resultat: 12·77..

2. 386 × 25·74..
= 25·74.. × 386
683
77 22
20 59
1 54
99 45.. Res. 995o.

Abgekürzte Division.

§. 107. Die abgekürzte Division basiert auf der Erwägung, dass man an eine unvollständige Zahl (Dividend, Divisor, Rest) keine Null anhängen darf. Dieselbe besteht in folgendem Verfahren:

1. Man kürze a) den Dividend, wenn derselbe genauer ist als der Divisor, mit Anwendung der Correctur, oder b) den Divisor, wenn derselbe genauer ist als der Dividend, durch Abschneiden rechts stehender Stellen soweit ab, dass in beiden Fällen nach dem Kürzen der Dividend zugleich auch der erste Theildividend ist, welcher zu dem Divisor gehört. Hierauf bestimme man den Stellenwert der ersten Ziffer des Quotienten und führe die erste Division aus.

2. Bei jeder folgenden Division lässt man, anstatt zu dem Rest eine neue Ziffer oder eine Null dazu zu setzen, im Divisor rechts eine Ziffer weg, multipliciert jedoch mit jeder neuen Ziffer des Quotienten zunächst die erste im Divisor weggelassene Ziffer und nimmt aus dem Ergebnisse die Correctur für das Product aus dem abgekürzten Divisor und der entsprechenden Ziffer des Quotienten.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis mit der Division durch die erste Ziffer des Divisors die Rechnung abschließt.

Ist der letzte Rest größer als die Hälfte des letzten Divisors, so erhöht man die letzte Ziffer des Quotienten um eine Einheit.

Zusatz. Soll der Quotient auf eine höhere vorgeschriebene Stelle abgekürzt entwickelt werden, so bestimmt man die Anzahl der bedeutsamen Ziffern des Quotienten und verkürzt den Divisor auf eben soviele Stellen und dem entsprechend auch den Dividend.

Beispiele. 1. $0{\cdot}287 : 5{\cdot}342\ldots$ 2. $0{\cdot}287536.. : 5{\cdot}342\ldots$

$0{\cdot}28700 : 5{\cdot}\underline{342}.. = 0{\cdot}5372$ $0{\cdot}28754\ldots : 5{\cdot}342..$

1990 u. s. w.

387

13

2

3. $27{\cdot}85.. : 3{\cdot}\underline{14}|159.. = 8{\cdot}86$

$2\ 72$ (corrig.) $8{\cdot}87$.

21

2

VI. Unendlich große und unendlich kleine Größen und Grenzwerte der Veränderlichen.

§. 108. Allgemeine Zahlen, denen man während einer Rechnung oder Entwicklung einen bestimmten unveränderlichen Wert beilegt, heißen constant, im Gegensatze zu den veränderlichen oder variablen Zahlen, welche jeden beliebigen, ihrer Natur angemessenen Wert annehmen können.

Eine veränderliche Zahl, deren absoluter Wert so im Wachsen begriffen ist, dass er größer wird, als jede beliebige absolute Constante, heißt unendlich groß. Man bezeichnet sie durch ∞.

Eine veränderliche Zahl, deren absoluter Wert so im Abnehmen begriffen ist, dass er kleiner wird als jede beliebige absolute Constante, heißt unendlich klein.

Lehrsätze. 1. Die Summe einer endlichen Anzahl von unendlich kleinen Summanden ist unendlich klein.

Sind ξ, υ, $\zeta\ldots$ unendlich kleine Zahlen, und ist ihre Anzahl m eine endliche Zahl, so ist auch $\xi + \upsilon + \zeta + ..$ unendlich klein, d. i. kleiner als jede beliebige Constante c. Denn theilt man c in m beliebige constante Theile α, β, γ, ..., so wird

$$\xi < \alpha,\ \upsilon < \beta,\ \zeta < \gamma,\ \ldots, \text{ also } \xi + \upsilon + \zeta + .. < c.$$

2. Ein Product, dessen Multiplicand unendlich klein, und dessen Multipicator eine constante, von Null verschiedene Zahl ist, ist unendlich klein.

Folgt aus 1.

3. Ein Product, dessen Multiplicand constant und von Null verschieden, und dessen Multiplicator unendlich klein ist, ist unendlich klein.

Um zu beweisen, dass für ein unendlich kleines n das Product An kleiner als eine beliebige Constante C wird, braucht man nur $n < \frac{C}{A}$ zu wählen; dann wird $An < C$.

4. Ein Quotient, dessen Dividend constant und von Null verschieden, und dessen Divisor unendlich groß ist, ist unendlich klein.

Um zu beweisen, dass $\frac{A}{n}$ für ein unendlich großes n kleiner als irgend eine Constante C wird, wähle man $n > \frac{A}{C}$; dann wird $\frac{A}{n} < C$.

5. Ein Quotient, dessen Dividend constant und von Null verschieden, und dessen Divisor unendlich klein ist, ist unendlich groß.

Der Beweis ist analog dem Beweise zu 4.

§. 109. Wenn eine veränderliche Zahl X bei fortwährendem Zu- oder Abnehmen sich einer constanten Zahl A, ohne dieselbe zu erreichen, so nähert, dass die Differenz zwischen ihnen unendlich klein wird, so heißt A der Grenzwert (limes) von X. Diese Bezeichnung wird ausgedrückt durch

$$\lim X = A.$$

Der Grenzwert einer unendlich kleinen Zahl ist Null. Jedoch ist Null selbst nicht unendlich klein, da Null nicht veränderlich, sondern constant ist.

Zusatz. Aus dem Satze 4. in §. 111, ergibt sich, wenn a eine constante endliche Zahl ist,

$$\lim \frac{a}{n} = 0 \text{ für } n = \infty.$$

Wird diese Beziehung, wie es häufig geschieht, kürzer durch die Gleichung

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

ausgedrückt, so ist hier unter dem Zeichen 0 nicht die absolute Null, sondern eine unendlich kleine Zahl zu verstehen.

In demselben Sinne gebraucht man auch den reciproken Ausdruck

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

welcher in dieser Auffassung mit dem in §. 49, 8 angeführten Satze nicht im Widerspruche steht.

§. 110. Wenn zwei constante Zahlen zwischen denselben veränderlichen Grenzen liegen, deren Differenz unendlich klein gemacht werden kann, so sind dieselben gleich.

Vor. $x < A < y$	**Beweis.** $y > A$
$x < B < y$	$x < B$
$\lim (y - x) = o$	folgl. $y - x > A - B$
Beh. $A = B$	

Wäre nun $A - B = \alpha$, wo α eine beliebige Constante ist, so wäre $y - x > \alpha$, was gegen die Voraussetzung ist; folglich ist $A = B = \lim x = \lim y$.

Folgesatz. Eine constante Zahl ist als Grenzwert einer veränderlichen Zahl vollständig bestimmt.

In diesem Abschnitte können unter Zahlen auch insbesondere die Maßzahlen von realen Größen verstanden werden. In diesem Sinne kann in allen Sätzen „Zahl" durch „Größe" ersetzt werden.

§. 111. Jeder Ausdruck z. B. $4x^2 - 1$, welcher eine oder mehrere Veränderliche enthält, wird (nach Leibnitz) eine Function dieser Veränderlichen genannt. Wird der Zahlenwert des Ausdruckes mit y bezeichnet, dann hat die Aussage „y ist eine Function von x, geschrieben $y = f(x)$" die Bedeutung, dass für jeden speciellen Wert, welcher dem x beigelegt wird, auch y einen oder eine beschränkte Anzahl durch die Gleichung $y = f(x)$ bestimmter Werte annimmt. Ist z. B. $y = 4x^2 - 1$, und wählt man für x willkürlich die Werte $0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2 ..$ so erhält man für y der Reihe nach die zugehörigen Werte $-1, 0, 3, 8, 15 ..$

Durch die willkürliche Wahl eines Wertes für x ist der Wert von y ein- oder mehrdeutig bestimmt; demnach ist x die unabhängige, y hingegen die abhängige Veränderliche. Indem man aber die Gleichung nach x auflöst, d. h. durch Anwendung der Sätze über die Verbindung gleicher Größen so umformt, dass x auf einer Seite allein erscheint, kann man umgekehrt auch x als eine Function von y darstellen.

Beispiele. Das Product ist eine Function eines jeden Factors; die Zinsen sind eine Function des Capitales, der Procente und der Zeit; der Preis einer Ware ist eine Function ihres Gewichtes; die Arbeitszeit ist eine Function der Zahl der Arbeiter; die Spannkraft eines Gases ist eine Function seiner Dichte und seiner Temperatur u. s. w.

VII. Verhältnisse und Proportionen.

1. Verhältnisse.

§. 112. Erklärung. Unter dem Verhältnisse zweier Zahlen a und b versteht man den Quotienten derselben im Sinne der messenden

Division (§. 48), d. i. die Angabe, wie vielmal b in a enthalten ist. Der Quotient $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ wird als Verhältnis gelesen: a verhält sich zu b, oder kürzer: a zu b. Den Dividend a nennt man das Vorderglied, den Divisor b das Hinterglied des Verhältnisses.

Zwei Verhältnisse, welche denselben Zahlenwert haben, sind einander gleich.

Das durch Vertauschung der Glieder eines Verhältnisses $a:b$ entstehende Verhältnis $b:a$ heißt das umgekehrte oder reciproke Verhältnis der Zahlen a und b; im Gegensatze zu demselben wird dann $a:b$ das gerade Verhältnis dieser Zahlen genannt.

Aus dem Begriffe eines Verhältnisses folgt:

1. Das Vorderglied eines Verhältnisses ist gleich dem Hintergliede multipliciert mit dem Quotienten (§. 49, 1).
2. Das Hinterglied eines Verhältnisses ist gleich dem Vordergliede dividiert durch den Quotienten (§. 49, 2).
3. Der Wert eines Verhältnisses bleibt unverändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multipliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividiert (§. 50).

Durch Anwendung des 3. Satzes kann man a) jedes Verhältnis, dessen Glieder Brüche enthalten, in ganzen Zahlen darstellen; b) jedes Verhältnis, dessen Glieder ein gemeinsames Maß haben, durch dieses abkürzen.

§. 113. Multipliciert man in zwei oder mehreren Verhältnissen alle Vorderglieder und ebenso alle Hinterglieder mit einander, so bilden die Producte ein neues Verhältnis, welches im Gegensatze zu den gegebenen einfachen Verhältnissen ein zusammengesetztes Verhältnis genannt wird.

Sind z. B. $a:b$
$c:d$
$e:f$ einfache Verhältnisse,

so ist $ace:bdf$ ein zusammengesetztes Verhältnis.

§. 114. Das Verhältnis zweier gleichbenannter Zahlen (Größenverhältnis) ist gleich dem Verhältnisse der entsprechenden unbenannten Zahlen, weil beide messende Divisionen denselben Quotienten haben.

2. Proportionen.

§. 115. Erklärung. Eine Gleichung zwischen zwei gleichen Verhältnissen wird eine Proportion genannt.

Ist $a:b = q$ und $c:d = q$, so ist auch $a:b = c:d$; dieser Ausdruck ist eine Proportion und wird gelesen: a verhält sich zu b, wie sich c zu d verhält, oder kürzer: a zu b, wie c zu d. Das erste Glied a und das vierte d nennt man die äußeren, das zweite b und das dritte c die inneren Glieder; auch heißen a und c die Vorderglieder, b und d die Hinterglieder der Proportion. Das vierte Glied insbesondere wird die vierte Proportionale zu den ersten drei Gliedern genannt.

Sind in einer Proportion die inneren Glieder gleich, so heißt dieselbe eine stetige Proportion, z. B. $a:b = b:c$. Das innere Glied b wird die mittlere (geometrische) Proportionale oder das geometrische Mittel zu a und c, und c die dritte stetige Proportionale zu a und b genannt.

Sind die Glieder einer Proportion lauter unbenannte Zahlen, so heißt dieselbe eine Zahlenproportion, sind dagegen die Glieder eines jeden Verhältnisses gleichbenannte Zahlen, so heißt sie eine Größenproportion. Jede Größenproportion kann durch Weglassung der Benennung nach §. 114 in eine Zahlenproportion verwandelt werden.

Beziehungen unter den Gliedern einer Proportion.

§. 116. 1. In jeder Proportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

Es sei $a:b = c:d$. Multipliciert man die Quotientengleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mit bd, so erhält man $\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{b}$, und folglich $ad = bc$.

Folgesatz. In einer stetigen Proportion ist das Quadrat der mittleren Proportionale gleich dem Producte der beiden anderen Glieder.

Ist $a:b = b:c$, so ist $b^2 = ac$.

Umkehrung. 2. Aus zwei gleichen Producten läßt sich eine Proportion bilden, indem man die Factoren des einen Productes zu äußeren, die Factoren des andern Productes zu inneren Gliedern macht.

Es sei $ad = bc$, daher auch $bc = ad$. Dividiert man diese gleichen Ausdrücke folgeweise durch bd, cd, ab und ac, so ergeben sich folgende Proportionen:

$$
\begin{array}{ll}
a:b = c:d, & c:d = a:b, \\
a:c = b:d, & b:d = a:c, \\
d:b = c:a, & c:a = d:b, \\
d:c = b:a, & b:a = d:c.
\end{array}
$$

§. 117. Aus §. 116, 1 folgt ferner:

Jedes äußere Glied einer Zahlenproportion ist gleich dem Producte der beiden inneren Glieder dividiert durch das andere äußere Glied; und jedes innere Glied ist gleich dem Producte der beiden äußeren Glieder dividiert durch das andere innere Glied.

Ist $a:b = c:d$, daher $ad = bc$, so ist

$$a = \frac{bc}{d},\ d = \frac{bc}{a},\ \text{und}\ b = \frac{ad}{c},\ c = \frac{ad}{b}.$$

Dieser Satz ermöglicht eine Proportion aufzulösen, das heißt, aus drei gegebenen Gliedern das noch unbekannte Glied finden.

Umformung von Proportionen.

§. 118. 1. Jede Proportion bleibt richtig, wenn man a) die inneren Glieder unter sich, b) die äußeren Glieder unter sich, c) die inneren Glieder mit den äußeren vertauscht.

Folgt unmittelbar aus §. 116, 2.

2. Eine Proportion bleibt richtig, wenn man ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multipliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

Folgt aus §. 112, 3 und §. 118, 1.

Durch Anwendung dieses Satzes kann man a) jede Proportion, in welcher Brüche vorkommen, in ganzen Zahlen darstellen; b) jede Proportion, in welcher ein äußeres und ein inneres Glied ein gemeinsames Maß haben, durch dieses abkürzen.

§. 119. 1. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der ersten zwei Glieder zum ersten oder zweiten, wie die Summe oder Differenz der letzten zwei Glieder zum dritten oder vierten.

Ist $a:b = c:d$, $a = bq$, $c = dq$, so hat man

$$(a \pm b):a = (bq \pm b):bq = (q \pm 1):q,$$
$$(c \pm d):c = (dq \pm d):dq = (q \pm 1):q;\ \text{daher}$$
$$(a \pm b):a = (c \pm d):c.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$(a \pm b):b = (c \pm d):d.$$

2. In jeder Proportion verhält sich die Summe der ersten zwei Glieder zu deren Differenz, wie die Summe der letzten zwei Glieder zu deren Differenz.

Es ist

$$(a+b):(a-b) = (bq+b):(bq-b) = (q+1):(q-1),$$
$$(c+d):(c-d) = (dq+d):(dq-d) = (q+1):(q-1);$$

daher

$$(a+b):(a-b) = (c+d):(c-d).$$

3. In jeder Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Vertauscht man in der Proportion $a:b = c:d$ die inneren Glieder, so erhält man $a:c = b:d$. Nach 1. ist dann

$$(a \pm c):a = (b \pm d):b,$$

und nach Vertauschung der inneren Glieder

$$(a \pm c):(b \pm d) = a:b; \text{ folglich auch}$$

$$(a \pm c):(b \pm d) = c:d,$$

und allgemein: $(ma \pm nc):(mb \pm nd) = a:b = c:d$.

Verbindung mehrerer Proportionen.

§. 120. Werden mehr als zwei Verhältnisse einander gleichgesetzt, so entsteht eine fortlaufende Proportion; z. B.

$$a:a_1 = b:b_1 = c:c_1 = \ldots.$$

Diese fortlaufende Proportion schreibt man auch so an:

$$a:b:c\ldots = a_1:b_1:c_1\ldots,$$

wobei alle Vorderglieder auf einer, alle Hinterglieder auf der andern Seite des Gleichheitszeichens stehen.

In jeder fortlaufenden Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen verhält sich die algebraische Summe von Vielfachen der Vorderglieder zur correspondierenden Summe der Hinterglieder wie irgend ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Hat man die fortlaufende Proportion

$$a:a_1 = b:b_1 = c:c_1$$

so folgt aus §. 119, 3

$$\begin{aligned}(ma \pm nb \pm pc):(ma_1 \pm nb_1 \pm pc_1) &= a:a_1\\ &= b:b_1\\ &= c:c_1.\end{aligned}$$

§. 121. 1. Wenn man in zwei oder mehreren Proportionen die gleichstelligen Glieder mit einander multipliciert, so bilden die Producte wieder eine Proportion.

Sind die Proportionen

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{h}{k}$$

gegeben, so erhält man durch Multiplication beider Gleichungen

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{f}{g} = \frac{c}{d} \cdot \frac{h}{k} \text{ oder}$$

$$af:bg = ch:dk.$$

Man sagt, die letzte Proportion ist aus den gegebenen zusammengesetzt.

2. Wenn man die gleichstelligen Glieder zweier Proportionen durcheinander dividiert, so bilden die Quotienten wieder eine Proportion.

Ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ und}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{h}{k}$$

gegeben, so erhält man durch Division beider Gleichungen

$$\frac{a}{b} : \frac{f}{g} = \frac{c}{d} : \frac{h}{k} \text{ oder}$$

$$\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{k}.$$

Harmonische Proportionen.

§. 122. Drei Zahlen a, b, c bilden eine harmonische Proportion, wenn $(a - b) : (b - c) = a : c$ ist; b heißt dann die mittlere harmonische Proportionale oder das harmonische Mittel zwischen a und c.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen die dritte harmonisch proportionierte zu finden.

Aus $(a - b) : (b - c) = a : c$ folgt $ac - bc = ab - ac$, daher

$$1)\ a = \frac{bc}{2c - b},$$

$$2)\ c = \frac{ab}{2a - b}, \text{ und}$$

$$3)\ b = \frac{2ac}{a + c}.$$

Zusatz. Früher nannte man eine Gleichung zwischen zwei gleichen Differenzen eine arithmetische Proportion, während die im Vorausgehenden behandelten Proportionen geometrische Proportionen genannt wurden. In Übereinstimmung mit §. 115 heißt das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion das arithmetische Mittel der beiden anderen Glieder.

Aus

$$a - x = x - b \text{ folgt}$$

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

Nimmt man in der dritten Gleichung beide Seiten reciprok, so erhält man

$$\frac{1}{b} = \frac{a + c}{2ac} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2}.$$

Der reciproke Wert des harmonischen Mittels zweier Zahlen ist das arithmetische Mittel der reciproken Werte beider Zahlen.

Proportionen wurden bei den Griechen in der Geometrie vielfach verwendet. Die Unterscheidung der drei Mittel findet sich bei Nikomachus (100 n. Chr.).

Anwendung der Proportionen.

Angewandte Aufgaben mit einfachen Verhältnissen.

§. 123. **Erklärung.** a) Eine Function y heißt direct proportional (gerade proportioniert) der Veränderlichen x, wenn zum mfachen Werte der Veränderlichen auch der mfache Wert der Function gehört; somit ist der Quotient beider eine constante Zahl.

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{oder} \quad y = k.x.$$

Der constante Factor k wird der Proportionalitätsfactor genannt.

b) Eine Function y heißt indirect proportional (verkehrt proportioniert) der Veränderlichen x, wenn zum mfachen Werte der Veränderlichen der mte Theil der Function gehört; somit ist das Product beider constant.

$$y.x = k \quad \text{oder} \quad y = k.\frac{1}{x}.$$

Aus diesen Erklärungen folgt:

a) Sind zwei Arten von Zahlen gerade proportioniert, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art.

b) Sind zwei Arten von Zahlen verkehrt proportioniert, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem umgekehrten Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art.

Beweis. a)
$$\begin{aligned} y_1 &= k x_1 \\ y_2 &= k x_2 \\ \hline y_1 : y_2 &= x_1 : x_2 \end{aligned}$$
somit

b)
$$\begin{aligned} y_1 &= k.\frac{1}{x_1} \\ y_2 &= k.\frac{1}{x_2} \\ \hline y_1 : y_2 &= \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} = x_2 : x_1. \end{aligned}$$

Auf diesem Satze beruht die Lösung von Proportionsaufgaben, deren Größen in einfachen Verhältnissen stehen — die sogenannte einfache Regeldetri.

Bemerkung. Hiebei ist zu beachten, dass der Ausdruck „p Procent" dem Satze entspricht: zu 100 Einheiten der einen Art gehören p Einheiten der anderen Art.

Angewandte Aufgaben mit zusammengesetzten Verhältnissen.

§. 124. Die Lösung von Aufgaben, deren Größen in zusammengesetzten Verhältnissen stehen — die sogenannte zusammengesetzte Regeldetri — beruht auf folgendem Satze:

Hängt eine Art von Zahlen von mehreren anderen Arten so ab, dass sie mit denselben einzeln genommen theils gerade, theils verkehrt proportioniert ist, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der ersten Art gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus den einfachen bezüglich gerade oder umgekehrt genommenen Verhältnissen zwischen den zugehörigen Zahlen jeder andern Art.

Beweis. Die Function z sei den Veränderlichen x und y gerade, der Veränderlichen u verkehrt proportioniert, dann ist nach §. 123

$$z = k . x . y . \frac{1}{u},$$

worin k der Proportionalitätsfactor ist; denn dann gehört bei constantem y und u zum mfachen Werte von x auch der mfache Wert von z u. s. w. folglich, wenn zusammengehörige Werte durch gleiche Indices bezeichnet werden,

$$z_1 = k . x_1 . y_1 . \frac{1}{u_1}$$

$$z_2 = k . x_2 . y_2 . \frac{1}{u_2};$$

somit $$z_1 : z_2 = \frac{x_1 y_1}{u_1} : \frac{x_2 y_2}{u_2},$$

oder $$z_1 : z_2 = x_1 y_1 u_2 : x_2 y_2 u_1 .$$

Z. B. Wenn 20 Arbeiter, welche täglich 12 Stunden arbeiten, in 5 Wochen einen Damm von 375 Meter Länge zustande bringen, in wie viel Wochen werden 12 Arbeiter, welche täglich 10 Stunden arbeiten, einen eben solchen Damm von 600 Meter vollenden?

20 Arb.	12 St.	täglich	5 Woch.	375 Meter	Länge
12 „	10 „	„	x „	600 „	„

$$\begin{aligned} x : 5 &= 20 : 12 \\ & 12 : 10 \\ & 600 : 375 \\ \hline x : 1 &= 16 : 1; \text{ daher } x = 16 \text{ Wochen.} \end{aligned}$$

§. 125. Bezeichnet Z die einfachen Zinsen, welche ein Capital C in J Jahren zu P Procent gibt, so hat man zur gegenseitigen Bestimmung dieser Größen folgende zusammengesetzte Regeldetri:

100 fl. Cap. in 1 Jahre P fl. Zins		$Z : P = C : 100$
C „ „ „ J „ Z „ „		$\ J : 1$
	also	$Z : P = CJ : 100$ und
		$100\ Z = CPJ,$

aus welcher Formel sich die bekannten Sätze für die Lösung der Aufgaben über die einfache Zinsrechnung herleiten lassen.

Die Theilregel.

§. 126. Soll eine gegebene Zahl in mehrere Theile, welche sich wie andere gegebene Zahlen verhalten, getheilt werden, so geschieht dieses durch die Theilregel oder Gesellschaftsrechnung. Die Zahlen, durch welche das Verhältnis der Theile ausgedrückt wird, heißen Verhältniszahlen.

Ist nur eine Reihe von Verhältniszahlen gegeben, so wird die einfache, sind mehrere Reihen von Verhältniszahlen gegeben, so wird die zusammengesetzte Theilregel angewendet.

Es seien bei der einfachen Theilregel s die zu theilende Zahl, a, b, c und d die Verhältniszahlen. Werden die gesuchten Theile durch u, x, y und z bezeichnet, so hat man die fortlaufende Proportion:

$$u : x : y : z = a : b : c : d, \text{ oder}$$
$$u : a = x : b = y : c = z : d,$$

daher nach §. 120

$$\begin{aligned}(u + x + y + z) : (a + b + c + d) &= u : a\\ &= x : b\\ &= y : c\\ &= z : d.\end{aligned}$$

Da nun $u + x + y + z = s$ sein muss, so erhält man

$$u = \frac{s}{a+b+c+d} . a; \qquad x = \frac{s}{a+b+c+d} . b;$$
$$y = \frac{s}{a+b+c+d} . c; \qquad z = \frac{s}{a+b+c+d} . d.$$

§. 127. Die zusammengesetzte Theilregel läßt sich auf die einfache zurückführen.

Soll eine Zahl s mit Bezugnahme auf mehrere Umstände in drei Theile x, y, z getheilt werden, die sich in einer Beziehung wie $a : b : c$, in einer zweiten Beziehung wie $d : e : f$, und in einer dritten Beziehung wie $g : h : k$ verhalten, so besteht nach §. 124 die Bedingung

$$x : y : z = adg : beh : cfk.$$

Diese Aufgabe löst die einfache Theilregel.

Z. B. Zu einer Unternehmung vereinigen sich drei Personen: A gibt 8000 fl. auf 5 Monate, B 4000 fl. auf 6 Monate, C 2000 fl. auf 8 Monate her. Die Unternehmung wirft einen reinen Gewinn von 460 fl. ab; wie viel davon wird jede der drei Personen erhalten?

A 8000 fl. durch 5 Mon.	40000	5	46.5 = 230 fl.
B 4000 „ „ 6 „	24000	3	46.3 = 138 „
C 2000 „ „ 8 „	16000	2	46.2 = 92 „
	460 : 10 = 46		460 fl.

Dritter Abschnitt.

Gleichungen des ersten Grades.

§. 128. Die Gleichstellung zweier Zahlenausdrücke, welche gleichen Wert haben, wird eine Gleichung genannt. Z. B.

$$a = a, \ (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4, \ 5x - 8 = 3x.$$

Die Größen, welche einander gleichgestellt werden, heißen Theile oder Seiten der Gleichung und können einzeln wieder aus mehreren Glieder bestehen. In der Gleichung $5x - 8 = 3x$ ist $5x - 8$ der erste, $3x$ der zweite Theil (linke, rechte Seite); der erste Theil besteht aus zwei Gliedern $5x$ und $- 8$.

Man unterscheidet identische und Bestimmungsgleichungen.

Eine Gleichung, in welcher ein Zahlenausdruck sich selbst oder einer bloßen Umformung dieses Ausdruckes gleichgesetzt wird, heißt eine identische Gleichung; z. B. $a = a$, $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Eine identische Gleichung bleibt für jeden beliebigen Wert der darin vorkommenden allgemeinen Zahlen richtig. Jede Formel für eine arithmetische Operation bildet eine identische Gleichung.

Eine Gleichung, welche nur für bestimmte Werte einer oder mehrerer allgemeiner Zahlen, die in ihr auftreten, richtig ist, heißt eine Bestimmungsgleichung, auch bloß Gleichung im engeren Sinne. Z. B. die Gleichung $5x - 8 = 3x$ ist nur richtig, wenn man für x den Wert 4 setzt.

Diese allgemeinen Zahlen, für welche die eben erwähnten Werte bestimmt werden sollen, heißen Unbekannte und werden gewöhnlich durch die letzten Buchstaben x, y, z... des Alphabets bezeichnet. Enthält eine Gleichung mehrere allgemeine Zahlen, so kann man jede derselben als unbekannt und die übrigen als bekannt betrachten.

Die Werte der Unbekannten, welche in die Gleichung substituiert dieselbe zu einer identischen machen oder ihr genügen, heißen die Wurzeln der Gleichung; diese Werte bestimmen, heißt die Gleichung auflösen.

In einer Bestimmungsgleichung bedeutet demnach das Gleichheitszeichen nicht „ist gleich" sondern „soll gleich sein".

§. 129. Nach der Anzahl der Unbekannten, welche in einer Gleichung vorkommen, unterscheidet man Gleichungen mit einer, mit zwei und mit mehreren Unbekannten. Z. B. $5x - 8 = 3x$ ist eine Gleichung mit einer, $5x - 3y = 8$ eine Gleichung mit zwei, $7x = 3y - 5z + 5$ eine Gleichung mit 3 Unbekannten.

Tritt die Unbekannte nur als Basis einer Potenz auf, so heißt die Gleichung algebraisch; alle anderen Gleichungen heißen transcendent. Die Lehre von den algebraischen Gleichungen heißt Algebra im engeren Sinne. Im weiteren Sinne wird das Wort Algebra für allgemeine Arithmetik gebraucht.

Das Wort Algebra stammt von dem arabischen Worte aljebra (Herstellung), womit die Zurückführung einer Gleichung auf eine bestimmte Grundform bezeichnet wurde.

Eine algebraische Gleichung heißt geordnet, wenn die linke Seite ein nach Potenzen der Unbekannten geordnetes Polynom ist, wobei das erste Glied den Coefficienten $+1$ hat, die rechte Seite hingegen gleich 0 ist z. B.

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Der Potenzexponent der Unbekannten oder, wenn mehrere Unbekannte in einem Gliede vorkommen, die Summe ihrer Exponenten ist der Ordnungsexponent des betreffenden Gliedes. Ist der höchste Ordnungsexponent einer geordneten Gleichung 1, 2, 3, 4 oder allgemein n, so heißt die Gleichung bezüglich vom ersten Grade oder linear, vom zweiten Grade oder quadratisch, vom dritten Grade oder cubisch, vom vierten Grade oder biquadratisch, allgemein vom nten Grade.

Eine Gleichung, welche außer der Unbekannten nur besondere Zahlen enthält, heißt eine numerische oder Ziffergleichung; z. B. $4x - 3 = 5$. Eine Gleichung, welche außer den Unbekannten auch allgemeine Zahlen enthält, heißt eine Buchstabengleichung; z. B. $ax - b = cx + d$.

I. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. 130. Das Auflösen der Gleichungen des ersten Grades beruht auf den vier Sätzen über die Verbindung gleicher Zahlen durch dieselbe Rechenoperation. Dieselben erhalten zweckmäßig folgenden Wortlaut:

1. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man zu beiden Seiten derselben eine und dieselbe Zahl addiert oder von beiden Seiten dieselbe Zahl subtrahiert.

Nach diesem Satze kann man jedes Glied von der einen Seite mit dem entgegengesetzten Vorzeichen auf die andere Seite bringen (transponieren), wie auch gleiche Glieder auf beiden Seiten weglassen.

Z. B. aus $x + a = b$ folgt $x = b - a$,
„ $3x + m = a + m$ „ $3x = a$.

2. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten derselben mit derselben Zahl multipliciert

Mit Hilfe dieses Satzes kann man jede Gleichung von den Nennern befreien, insbesondere auch den Coefficienten der Unbekannten, wenn er negativ ist, durch die Multiplication beider Seiten mit -1, d. i. durch Veränderung aller Vorzeichen, positiv darstellen.

Z. B. aus $\frac{x}{a} - b = c$ folgt $x - ab = ac$,

„ $-x = -5$ „ $x = 5$.

3. *Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Seiten derselben durch dieselbe Zahl dividiert.*

Hiernach kann man eine Gleichung, deren beide Seiten einen gemeinsamen *Factor* haben, durch diesen abkürzen, insbesondere auch den Coefficienten der Unbekannten, wenn er von 1 verschieden ist, wegschaffen

Z. B. aus $6x = 4$ folgt $3x = 2$,

„ $3x = 2$ „ $x = \frac{2}{3}$.

Zusatz. Wenn die linke Seite einer auf Null reducierten Gleichung in mehrere Factoren zerlegt werden kann, welche die Unbekannte enthalten, so wird der Gleichung nach §. 37, Zusatz 3 genügt, wenn man jeden einzelnen Factor gleich Null setzt. Dadurch zerfällt die vorgelegte Gleichung in mehrere Gleichungen von einem niedrigeren Grade, deren Wurzeln auch der gegebenen Gleichung genügen. Z. B.

$x^2 - 4 = 0$ oder $(x + 2)(x - 2) = 0$ zerfällt in

$x + 2 = 0$ und $x - 2 = 0$.

Wenn daher beide Seiten einer Gleichung einen gemeinsamen Factor enthalten, in welchem die Unbekannte vorkommt, so darf man durch denselben nur dividieren, wenn man gleichzeitig diesen Factor gleich Null setzt. Dadurch erhält man zwei Gleichungen, deren Wurzeln der gegebenen Gleichung genügen. Z. B.

$(x - 1)(x - 2) = 3(x - 1)$ zerfällt in

$x - 1 = 0$ und $x - 2 = 3$ mit den Wurzeln

$x = 1$ und $x = 5$.

§. 131. Aus den in §. 130 angeführten Sätzen ergibt sich für die *Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten* folgendes *Verfahren*:

1. Enthält die Gleichung Brüche, so werden die Nenner weggeschafft, indem man beide Seiten der Gleichung mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller Nenner multipliciert. (Wegschaffung der Brüche.)

2. Kommen in der Gleichung durch Klammern verbundene Ausdrücke vor, so werden die Klammern durch wirkliche Ausführung der angezeigten Operationen aufgelöst. (Auflösung der Klammern.)

3. Alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, werden auf die eine Seite der Gleichung gebracht und zusammengezogen; die übrigen Glieder

werden auf die andere Seite übertragen und ebenfalls reduciert. (Transponieren und Reducieren.)

4. Man befreit die Unbekannte von ihrem Coefficienten, indem man beide Seiten der Gleichung durch denselben dividiert. (Division durch den Coefficienten der Unbekannten.)

Durch diese Transformation erhält man schließlich als Auflösung $x = a$, wo x die Unbekannte und a ein nur aus bekannten Zahlen bestehender Ausdruck ist.

§. 132. Eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten hat nur eine Wurzel.

Die allgemeine Form einer linearen Gleichung ist

$$ax + b = 0.$$

Dieselbe hat die Wurzel: $x = -\frac{b}{a}$.

Zusatz. Ist $a = 0$, b endlich und von 0 verschieden, so genügt nach §. 49, 8 der Gleichung keine endliche Zahl.

Ist $a = 0$ und $b = 0$, so ist $x = -\frac{0}{0}$ (unbestimmt).

D. h. die gegebene Gleichung ist keine Bestimmungsgleichung, sondern eine identische Gleichung.

Probe. Um sich von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, substituiert man den gefundenen Wert für die Unbekannte in die gegebene Gleichung und bringt die Ausdrücke auf beiden Seiten auf die einfachste Gestalt. Erhält man beiderseits dasselbe Resultat, d. i. wird die Gleichung zu einer identischen gemacht, so ist die Auflösung richtig.

Beispiele.

1) $\frac{7}{x+1} - \frac{11}{2x+2} = \frac{5}{2}$

$$14 - 11 = 5x + 5$$
$$5x = -2$$
$$x = -\frac{2}{5}.$$

Probe: $\frac{7}{-\frac{2}{5}+1} - \frac{11}{-\frac{4}{5}+2} = \frac{5}{2}$

$$\frac{35}{3} - \frac{55}{6} = \frac{5}{2}$$
$$\frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$
$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

2) $\frac{a}{x} - a + \frac{b}{2} = \frac{b}{2x}$

$$2a - 2ax + bx = b$$
$$bx - 2ax = b - 2a$$
$$(b - 2a)\,x = b - 2a$$
$$x = 1.$$

oder $\frac{a}{x} - \frac{b}{2x} = a - \frac{b}{2}$

$$\frac{2a-b}{2x} = \frac{2a-b}{2}$$
$$\frac{1}{x} = 1$$
$$x = 1.$$

Das zweite Beispiel zeigt, dass man zuweilen mit Vortheil von dem in §. 131 vorgeschriebenen Verfahren abweichen kann.

II. Gleichungen des ersten Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten.

§. 133. Eine Gleichung heißt bestimmt, wenn dieselbe für jede Unbekannte nur eine oder eine beschränkte Anzahl von Wurzeln gibt, hingegen unbestimmt, wenn dieselbe für jede Unbekannte unendlich viele Wurzeln gibt.

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten ist unbestimmt; man kann für die eine Unbekannte jeden beliebigen Wert annehmen und nach Einsetzung desselben durch Auflösung der entstehenden Gleichung einen zugehörigen Wert für die andere Unbekannte finden; die eine Unbekannte ist also eine Function der anderen. Diese Unbestimmtheit hört auf, wenn noch eine zweite Gleichung mit denselben Unbekannten gegeben ist. Dann entsteht die Aufgabe, für die beiden Unbekannten jene Werte zu finden, welche beiden Gleichungen gleichzeitig genügen. Dies geschieht, indem man die eine Unbekannte eliminiert, das heißt, aus den beiden gegebenen Gleichungen eine dritte Gleichung, die Eliminationsgleichung, herleitet, welche diese Unbekannte nicht mehr enthält. Durch Auflösen der Eliminationsgleichung erhält man den Wert für die andere Unbekannte, und durch Substitution dieses Wertes in eine der beiden gegebenen Gleichungen oder nochmalige Anwendung des Eliminationsverfahrens kann man die erste Unbekannte bestimmen.

§. 134. Eliminations-Methoden.

1. Die Comparations-Methode. Man bestimmt den Wert derselben Unbekannten aus beiden Gleichungen, setzt diese Werte einander gleich und löst die dadurch erhaltene Gleichung, welche nur die andere Unbekannte enthält, auf.

Beispiel. $3x + 5y = 94$ daraus $y = \frac{94 - 3x}{5}$

$2x - y = 15$ „ $y = 2x - 15$;

somit: $\frac{94 - 3x}{5} = 2x - 15$

$$94 - 3x = 10x - 75$$
$$13x = 169$$
$$x = 13$$
$$y = 2.13 - 15 = 26 - 15 = 11.$$

2. Die Substitutions-Methode. Man sucht den Wert einer Unbekannten aus einer Gleichung und substituiert denselben in die andere Gleichung; dadurch erhält man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, welche dann aufgelöst wird.

Beispiel.
$$6x - 13y = 48,$$
$$2x + 3y = 16.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = \frac{48 + 13y}{6}$; wird dieser Wert in die zweite Gleichung substituiert, so hat man

$$2.\frac{48 + 13y}{6} + 3y = 16, \text{ woraus } y = 0 \text{ folgt.}$$

Substituiert man diesen Wert von y in den Ausdruck

$$x = \frac{48 + 13y}{6}, \text{ so findet man } x = \frac{48 + 13.0}{6} = 8.$$

3. Die Methode der gleichen Coefficienten. Man bringt beide Gleichungen auf die Form $ax + by = c$ und verschafft in beiden Gleichungen der zu eliminierenden Unbekannten durch Multiplication aller Glieder mit einem geeigneten möglichst kleinen Factor gleiche Coefficienten und addiert oder subtrahiert die neuen Gleichungen, je nachdem diese Coefficienten ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben; die dadurch erhaltene Gleichung mit einer Unbekannten wird dann aufgelöst.

Beispiele.

1.
$$\begin{array}{rcl|r} 4x + 19y &=& 11 & 3 \\ 6x - 5y &=& -17 & -2 \\ \hline 57y + 10y &=& 33 + 34 & \\ 67y &=& 67 & \\ y &=& 1; & \\ 4x + 19.1 &=& 11 & \\ 4x &=& -8 & \\ x &=& -2. & \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcl|r|r} ax + by &=& c & b' & -a' \\ a'x + b'y &=& c' & -b & a \\ \hline ab'x - a'bx &=& b'c - bc' & & \\ x &=& \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}; & & \\ -a'by + ab'y &=& -a'c + ac' & & \\ y &=& \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}. & & \end{array}$$

4. Die Methode der unbestimmten Coefficienten (Bézout'sche Methode). Nachdem man beide Gleichungen auf die Form $ax + by = c$ gebracht hat, multipliciert man die eine Gleichung mit einer unbestimmten Zahl m und addiert sie in dieser Gestalt zu der anderen Gleichung. Wählt man nun m so, dass der Coefficient der zu eliminierenden Unbekannten $= 0$ wird, so kann dann aus der neuen Gleichung die andere Unbekannte gefunden werden.

Beispiel.
$$3x + 4y = 24,$$
$$5x - 3y = 11.$$

Multipliciert man die erste Gleichung mit m und addiert sie dann zu der zweiten, so ergibt sich

$$(3m + 5)\,x + (4m - 3)\,y = 24m + 11.$$

Um y zu eliminieren, setzt man $4m - 3 = 0$, also $m = \frac{3}{4}$; dann hat man

$$(3.\tfrac{3}{4} + 5)\,x = 24.\tfrac{3}{4} + 11,$$

woraus $x = 4$ folgt. Wird x eliminiert, indem man $3m + 5 = 0$, also $m = -\frac{5}{3}$ setzt, so erhält man $y = 3$.

Zusätze. a) Welche von den vier Eliminations-Methoden in jedem besonderen Falle am vortheilhaftesten anzuwenden sei, muss aus der Beschaffenheit der Coefficienten der Unbekannten beurtheilt werden.

b) Kommen in den gegebenen Gleichungen überall dieselben Verbindungen der Unbekannten z. B. ihre reciproken Werte vor, so ist es am einfachsten, diese Verbindungen selbst als die eigentlichen Unbekannten anzusehen und aus ihnen nachträglich die ursprünglichen Unbekannten zu berechnen. Z. B.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y-1} = 13 \text{ und } \frac{5}{x} - \frac{2}{y-1} = 4.$$

Setzt man $\frac{1}{x} = x'$ und $\frac{1}{y-1} = y'$, so hat man

$$2x' + 3y' = 13 \text{ und } 5x' - 2y' = 4,$$

und findet $x' = 2$, $y' = 3$, woraus dann $x = \frac{1}{2}$, $y - 1 = \frac{1}{3}$ und $y = 1\frac{1}{3}$ folgt.

§. 135. Die in §. 134, 3 aus den allgemeinen Gleichungen

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'$$

erhaltenen Werte

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b};\ y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

lassen ersehen, dass es Fälle gibt, in denen die gegebenen zwei Gleichungen zur Bestimmung der in denselben vorkommenden zwei Unbekannten nicht geeignet sind.

1. Die Werte von x und y sind unbestimmt, wenn $ab' = a'b$ und $b'c = bc'$ und daher auch $ac' = a'c$ ist, weil dann $x = \frac{0}{0}$ und $y = \frac{0}{0}$ wird. Dieser Fall tritt immer ein, wenn die eine Gleichung von der andern *abhängig* ist. Denn setzt man $a = a'm$, wo dann auch $b = b'm$ und $c = c'm$ wird, so nehmen die gegebenen Gleichungen folgende Form an:

$$a'm\,x + b'my = c'm,$$
$$a'x + b'y = c',$$

woraus hervorgeht, dass die erste Gleichung durch bloße Umformung, nämlich durch Multiplication mit m, aus der zweiten hervorgegangen, folglich von dieser abhängig ist.

2. Die zwei Gleichungen lassen ferner keine *endliche* Auflösung zu, wenn in den obigen Ausdrücken für x und y der Nenner $= 0$, die Zähler aber von 0 verschieden sind, wenn also $ab' = a'b$, dagegen etwa $bc' \lessgtr b'c$ ist, weil man dann für x einen Wert von der Form $\frac{A}{0}$ erhält, die keinen Sinn hat (§. 49, 8). Dieser Fall tritt immer ein, wenn die zwei

gegebenen Gleichungen einander widerstreiten. Denn setzt man $a = a'm$, also auch $b = b'm$, so nehmen die gegebenen Gleichungen folgende Form an:

$$a'mx + b'my = c,$$
$$a'x + b'y \quad = c',$$

woraus $c'm = c$ folgen würde, was jedoch einen Widerspruch enthält, da nach der Voraussetzung $bc' \lesseqgtr b'c$, also $\frac{bc'}{b'} \lesseqgtr c$, oder $c'm \lesseqgtr c$ sein muss.

Aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten können demnach die Werte dieser Unbekannten nur dann bestimmt werden, wenn die beiden Gleichungen von einander unabhängig sind und einander nicht widerstreiten.

§. 136. Zur Bestimmung von drei oder mehreren Unbekannten müssen eben so viele von einander unabhängige und sich nicht widerstreitende Gleichungen gegeben sein.

Um ein System von n Gleichungen mit n Unbekannten aufzulösen, eliminiert man aus je zwei der gegebenen Gleichungen dieselbe Unbekannte; dadurch erhält man $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten. Dieses Verfahren setzt man fort, bis man zuletzt nur eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, aus welcher sich der Wert dieser Unbekannten ergibt. Der gefundene Wert wird in eine der zunächst vorhergehenden zwei Gleichungen substituiert und dadurch eine zweite Unbekannte bestimmt. Die beiden gefundenen Werte substituiert man dann in eine der vorhergehenden Gleichungen, u. s. w., und bestimmt auf diese Art nach und nach die Werte aller Unbekannten.

Man kann aber auch die Methode der unbestimmten Coefficienten anwenden, indem man die Gleichungen, mit Ausnahme einer einzigen, folgeweise mit den unbestimmten Zahlen $m, n, ..$ multipliciert und sie in dieser Gestalt zu der unverändert gebliebenen Gleichung addiert. Man erhält dadurch eine neue Gleichung, aus welcher eine jede der Unbekannten bestimmt werden kann, wenn man die Coefficienten der übrigen Unbekannten $= 0$ setzt, wodurch man zu ihrer Bestimmung so viele Gleichungen erhält, als unbestimmte Coefficienten vorhanden sind.

Beispiel.

$$8x + 5y + 2z = 24,$$
$$6x - 3y + z = 3.$$
$$4x + 9y - 6z = 4.$$

Sollen diese Gleichungen nach der Methode der unbestimmten Coefficienten aufgelöst werden, so multipliciere man die erste mit m, die zweite mit n und addiere zu denselben die dritte. Man erhält dadurch

$$(8m + 6n + 4)x + (5m - 3n + 9)y + (2m + n - 6)z = 24m + 3n + 4.$$

Um aus dieser Gleichung x zu bestimmen, setze man

$$5m - 3n + 9 = 0 \quad \text{und} \quad 2m + n - 6 = 0,$$

woraus sich $m = \frac{9}{11}$ und $n = \frac{48}{11}$ ergibt. Durch Substitution dieser Werte in der obigen Gleichung folgt dann

$$(8.\tfrac{9}{11} + 6.\tfrac{48}{11} + 4)\,x = 24.\tfrac{9}{11} + 3.\tfrac{48}{11} + 4,$$

und daher $x = 1$.

Auf analoge Weise erhält man $y = 2$ und $z = 3$.

III. Anwendung der Gleichungen des ersten Grades.

§. 137. In jeder Aufgabe, mag sie nur einen einzelnen besonderen Fall betreffen oder ganz allgemein gestellt sein, werden gewisse Bedingungen angegeben, denen die zu suchenden Zahlen genügen sollen. Das Geschäft der Algebra bei der Auflösung von Aufgaben ist ein dreifaches.

1. Der Ansatz einer oder mehrerer zusammengehöriger Gleichungen, d. i. die Übertragung der Bedingungen der Aufgabe aus der gewöhnlichen Wortsprache in die algebraische Zeichensprache;

2. die Auflösung der gebildeten Gleichungen;

3. die Discussion oder Deutung des erhaltenen Resultates, welche die verschiedenen möglicherweise eintretenden Fälle und die Bedingungen der Lösbarkeit der Aufgabe zu erörtern hat.

Für das Ansetzen der Gleichungen können keine allgemeinen Regeln gegeben werden; es ist das Werk des Scharfsinnes und kann nur durch vielfältige Übung geläufig gemacht werden. Anfängern kann folgende Regel als einigermaßen leitende Vorschrift dienen: Man betrachte die gegebene Aufgabe vorläufig als aufgelöst und behandle die Unbekannte so, wie es die Bedingungen der Aufgabe erfordern; dadurch erhält man für eine und dieselbe Größe zwei verschieden geformte Ausdrücke, welche einander gleichgestellt die verlangte Gleichung geben. Die Discussion ist besonders dann von Wichtigkeit, wenn das Resultat ein allgemeines ist oder eine negative Auflösung enthält.

§. 138. Beispiele.

1. A ist a Jahre, B b Jahre alt; nach wie vielen Jahren wird A doppelt so alt sein als B?

Nach x Jahren wird A $a + x$, B $b + x$ Jahre alt; man hat daher

$$a + x = 2\,(b + x), \text{ und}$$
$$x = a - 2b.$$

Discussion. Ist hier $a < 2b$, so ist $x = -(2b - a)$, also negativ. Da eine negative Zahl Jahre keinen Sinn hat, so ist in diesem Falle die

Auflösung der vorgelegten Aufgabe unmöglich. Würde man aber in der obigen Gleichung $-x$ statt x setzen, so erhielte man

$$a - x = 2\,(b - x), \text{ und}$$
$$x = 2b - a.$$

Wenn man daher fragen würde: Vor wie viel Jahren war A doppelt so alt als B? so gibt die letztere Gleichung dafür die Lösung $x = 2b - a$, d. h. vor $2b - a$ Jahren.

Der absolute Wert einer negativen Wurzel einer Gleichung des ersten Grades genügt einer anderen Gleichung, welche aus der ersten durch Änderung des Vorzeichens der Unbekannten gebildet wird, und kann die Auflösung einer Aufgabe enthalten, in welcher die Fragezahl der vorgelegten Aufgabe im entgegengesetzten Sinne genommen wird.

2. Zwei Körper K' und K'' sind auf einer geraden Linie in derselben Richtung mit den Geschwindigkeiten c' und c'' in gleichförmiger Bewegung und gehen gleichzeitig bezüglich durch die Punkte A' und A'', von denen A' um d Längeneinheiten rückwärts von A'' liegt. Nach wie viel (x) Zeiteinheiten werden beide Körper zusammentreffen?

K' legt in x Zeiteinheiten $c'x$ Längeneinheiten zurück,
K'' „ „ x „ $c''x$ „ „

In dem Momente, da beide Körper in einem Punkte M zusammentreffen, haben beide von A' (oder von A'') die gleiche Entfernung; somit,

$$A'M = A''M + A'A'' \quad \text{oder} \quad A''M = A'M - A'A''$$
$$c'x = c''x + d \qquad\qquad c''x = c'x - d$$
$$\text{daher } x = \frac{d}{c' - c''}.$$

Discussion. a) So lange $c' > c''$, ist x positiv, und es gibt eine bestimmte Zeit, nach welcher die Körper zusammentreffen. Wenn $c' = c''$, also $c' - c'' = 0$, so wird $x = \frac{d}{0}$; die Auflösung ist unmöglich. Die beiden Körper behalten unverändert die Entfernung d bei. Ist $c' < c''$, so wird $x = -\frac{d}{c'' - c'}$, woraus folgt, dass in diesem Falle die Auflösung der Aufgabe, so wie sie gestellt wurde, unmöglich ist, was auch schon an sich einleuchtet, indem sich der hintere Körper K' langsamer als der vordere K'' bewegt, beide also nicht nur nie zusammentreffen, sondern sich von einander immer mehr entfernen. Um übrigens auch dem negativen Werte von x eine Deutung zu geben, braucht man nur in der gegebenen Aufgabe die Frage im entgegengesetzten Sinne zu stellen, nämlich: Vor wie viel Zeiteinheiten waren beide Körper zusammengetroffen? Dann gibt der absolute Wert von x die Auflösung der so geänderten Aufgabe und drückt aus, dass die zwei Körper vor $\frac{d}{c'' - c'}$ Zeiteinheiten zusammengetroffen waren.

3. Zwei Körper bewegen sich gleichzeitig von 2 Punkten, welche die Entfernung d haben, gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c' und c'' *gegeneinander*. Wann treffen sie zusammen?

Die Zeit vom Beginn der Bewegung bis zum Zusammentreffen werde mit x bezeichnet. In dieser Zeit legt der erste Körper den Weg $c'x$, der zweite Körper den Weg $c''x$ zurück. Beide Körper treffen in einem Punkte zusammen, wenn die Summe ihrer Wege gleich der Entfernung der Ausgangsorte ist; somit $c'x + c''x = d$, daher

$$x = \frac{d}{c' - c''}.$$

Dieses Resultat wird unmittelbar aus dem früheren (Beispiel 2) erhalten, wenn man die Geschwindigkeit des zweiten Körpers, da er die entgegengesetzte Bewegungsrichtung hat als der erste, *negativ* nimmt.

Die unter 2. und 3. aufgestellten Gleichungen können auch zur Bestimmung einer anderen Größe dienen. Die algebraische Auflösung einer allgemeinen Aufgabe beantwortet daher nicht bloß die unmittelbar gestellte Aufgabe, sie liefert zugleich die Auflösung für eine ganze Gruppe von verwandten Aufgaben und zeigt den inneren Zusammenhang, in welchem dieselben unter einander stehen; insbesondere dienen die negativen Werte dazu, um die Beschränkungen aufzuheben, welche in eine Aufgabe gelegt wurden, und um dadurch diese in ihrer Allgemeinheit vollständig zu lösen.

4. Man hat zwei gleichartige Stoffe; von dem ersten ist der Wert einer Einheit $= a$, von dem zweiten $= b$. Man soll aus beiden eine Mischung machen, die m Einheiten enthält und von welcher jede Einheit den Wert c hat. Wie viele Einheiten muss man von jedem Stoffe zu dieser Mischung nehmen?

Es wird *vorausgesetzt*, dass der Wert der Mischung gleich ist den Werten der dazu verwendeten Stoffe.

Bezeichnet x die Anzahl der Einheiten, welche man von dem ersten Stoffe nehmen muss, und y die Anzahl der Einheiten, welche man von dem zweiten Stoffe nehmen muss, so ist

$$x + y = m \text{ und } ax + by = cm, \text{ daher}$$

$$x = \frac{c - b}{a - b} . m, \qquad y = \frac{a - c}{a - b} . m.$$

Die Aufsuchung des Mischungsverhältnisses der beiden Quantitäten $x : y = (c - b) : (a - c)$ bildet die sogenannte *Alligationsrechnung*.

Vierter Abschnitt.

Potenzieren, Radicieren und Logarithmieren.

Die Rechnungsarten der dritten Stufe.

I. Von den Potenzen.

§. 139. Erklärung. Eine Zahl a zur nten Potenz erheben oder mit n potenzieren heißt, a nmal als Factor setzen (§. 40). Man nennt a die Grundzahl oder Basis, n den Exponenten und die gesuchte Zahl die nte Potenz von a. Man schreibt $a^n = p$. Eine Potenz ist demnach ein Product gleicher Factoren. Der wiederkehrende Factor heißt Basis, die Anzahl der Factoren heißt Exponent.

Folgesätze.

a) $1^n = 1$. b) $0^n = 0$.

Zusatz. Die vorstehende Erklärung hat zunächst nur dann einen Sinn, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl und > 1 ist.

Rechengesetze.

§. 140. 1. Potenzen derselben Basis kann man multiplicieren, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

$a^m . a^n = a^{m+n}$. Beweis in §. 40.

Aus der Fortdauer dieses Lehrsatzes und der Definition folgt

$a^1 = a$. (§. 40.)

2. Umgekehrt: Eine Zahl kann mit einer Summe potenziert werden, indem man dieselbe mit jedem Summanden potenziert und die erhaltenen Potenzen multipliciert.

§. 141. 1. Potenzen derselben Basis kann man dividieren, indem man die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten des Dividends und Divisors potenziert.

$a^m : a^n = a^{m-n}$.

Die Richtigkeit dieser Gleichung für $m > n$ wurde in §. 55 bewiesen.

2. Umgekehrt: Eine Zahl kann mit einer Differenz potenziert werden, indem man dieselbe mit dem Minuend und mit dem Subtrahend potenziert, und die erste Potenz durch die zweite dividiert.

Dieser Satz ist also nur giltig, wenn die Differenz eine von Null verschiedene positive ganze Zahl ist.

§. 142. 1. Ein Product kann mit einer Zahl potenziert werden, indem man jeden Factor mit der Zahl potenziert und die erhaltenen Producte multipliciert.

$$(ab)^m = a^m . b^m.$$

Beweis. $(ab)^m = (ab).(ab) \ldots\ldots \overset{m}{\smile}{(ab)}$

$= (\underbrace{a.a \ldots . a}_{m}).(\underbrace{b.b \ldots b}_{m})$ (§. 38.)

$= a^m . b^m.$

2. Umgekehrt: Potenzen desselben Exponenten kann man multiplicieren, indem man das Product der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

§. 143. 1. Ein Quotient (Bruch) kann mit einer Zahl potenziert werden, indem man Dividend und Divisor mit der Zahl potenziert und die erste Potenz durch die zweite dividiert.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Der Beweis ist demjenigen zu §. 142, 1 analog.

2. Umgekehrt: Potenzen desselben Exponenten kann man dividieren, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

Folgesatz. Die Potenz eines auf die einfachste Form gebrachten echten oder unechten Bruches kann nie eine ganze Zahl sein.

Folgt aus 1. unter Beiziehung von §. 74, 2.

§. 144. 1. Eine Potenz kann mit einer Zahl potenziert werden, indem man die Basis mit dem Producte beider Exponenten potenziert.

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Beweis. $(a^m)^n = a^m . a^m \ldots\ldots \overset{n}{\smile}{a^m}$

$= a^{m + m + \ldots\ldots \overset{n}{\smile}{+m}}$

$= a^{mn}.$

2. Umgekehrt. Eine Zahl kann mit einem Producte potenziert werden, indem man dieselbe mit dem einen Factor und die erhaltene Potenz mit dem andern Factor potenziert.

Folgesatz. Die Potenz einer Potenz bleibt unverändert, wenn man die Exponenten unter einander vertauscht.

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

Das commutative Princip findet bei den Potenzen nicht statt, da a^m von m^a im allgemeinen verschieden ist.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Potenzierung.

§. 145. 1. Gleiche Zahlen mit gleichen Zahlen potenziert geben Gleiches.

Ist $a = b$, so ist $a^m = b^m$ (§. 46, 1).

Folgesatz. Wenn man alle Glieder einer Proportion mit derselben Zahl potenziert, so erhält man wieder eine Proportion.

Ist $a : b = c : d$, so muss auch $(a : b)^m = (c : d)^m$, folglich $a^m : b^m = c^m : d^m$ (§. 143, 1) sein.

2. Größeres mit Gleichem potenziert gibt Größeres.

Ist $a > b$, so ist $a^m > b^m$ (§. 46, 3).

Folgesatz. Wenn $a \gtrless 1$, so ist bezüglich $a^m \gtrless 1$.

3. Gleiches mit Größerem potenziert gibt Größeres oder Kleineres, je nachdem die Basis größer oder kleiner als 1 ist.

Vor. $m > n$ und $a > 1$; Beh. $a^m > a^n$

" $a < 1$ " $a^m < a^n$.

Beweis a)
$$\begin{array}{r} a^n = a^n \\ a^{m-n} > 1 \\ \hline a^m > a^n \end{array} \quad (\text{§. 46, 2})$$

b)
$$\begin{array}{r} a^n = a^n \\ a^{m-n} < 1 \\ \hline a^m < a^n. \end{array}$$

Potenzen mit algebraischer Basis.

§. 146. 1. Eine Potenz mit positiver Basis ist positiv.

$$(+ a)^m = + a^m.$$

2. Eine gerade Potenz mit negativer Basis ist positiv. Eine ungerade Potenz mit negativer Basis ist negativ.

$$(- a)^{2n} = + a^{2n}$$
$$(- a)^{2n+1} = - a^{2n+1}$$

Potenzen, deren Exponent Null, negativ oder unendlich ist.

§. 147. Nach der ursprünglichen Definition des Potenzierens muss der Exponent eine positive ganze Zahl sein; demnach sind a^0 und a^{-m} bedeutungslose Symbole. Will man auch diese Potenzformen beibehalten, so muss man denselben, da 0 und $-m$ Differenzen sind, jene Bedeutung beielegen, welche durch Anwendung des Lehrsatzes über das Potenzieren mit einer Differenz (§. 144, 2) erhalten wird, also wiederum das Princip der Fortdauer der Operationsgesetze befolgen.

Erklärungen. 1. $a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1$.

Eine Potenz mit dem Exponenten 0 ist für jede endliche Basis gleich 1.

2. $$a^{-m} = a^{p-(p+m)} = a^p : a^{p+m} = a^p : (a^p . a^m) = \frac{1}{a^m}$$

oder $$a^{-m} = a^{0-m} = a^0 : a^m = \frac{1}{a^m}.$$

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem reciproken Werte derselben Potenz mit dem entsprechenden positiven Exponenten.

Folgesätze. a) Da $\frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$ ist, so ist auch $a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$. Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem reciproken Werte der Basis potenziert mit dem entsprechenden positiven Exponenten.

Die Anwendung dieses letzteren Satzes empfiehlt sich, wenn die Basis ein Bruch ist.

b) Aus $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ folgt $a^p \,.\, a^{-p} = 1$, folglich ist auch $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$. Man kann daher jede Potenz, die im Zähler eines Bruches als Factor vorkommt, als Factor in den Nenner, und umgekehrt, übertragen, wenn man das Vorzeichen des Exponenten in das entgegengesetzte verwandelt.

§. 148. Mit Rücksicht auf §. 147 läſst sich die in §. 100 aufgestellte allgemeine Form eines Decimalbruches

$$\ldots c.10^3 + b.10^2 + a.10 + E + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \ldots$$

auch so darstellen:

$$\ldots c.10^3 + b.10^2 + a.10 + E.10^0 + \alpha.10^{-1} + \beta.10^{-2} + \gamma.10^{-3} + \ldots,$$

und sind daher $0, -1, -2, -3, \ldots$ bezüglich die Rangexponenten der Einer, sowie der ersten, zweiten, dritten, ... Decimalziffer. Hieraus folgt:

1. Der Rangsexponent einer an der $n$ten Decimalstelle stehenden Ziffer ist $-n$. Z. B. in dem Decimalbruche 0·000783 hat die höchste Ziffer 7 den Rangexponenten -4.

2. Bedeutet N einen Decimalbruch, dessen höchste Ziffer an der $n$ten Decimalstelle steht, so ist

$$N \geqq 10^{-n} \text{ und } N < 10^{-(n-1)}.$$

$$\text{Z. B. } 0{\cdot}00935 > \frac{1}{10^3} \text{ und } 0{\cdot}00935 < \frac{1}{10^2}.$$

§. 149. Alle bisher erwiesenen Lehrsätze von den Potenzen mit positiven Exponenten gelten auch für Potenzen, deren Exponent Null oder negativ ist.

Aus der Fortdauer des Lehrsatzes §. 144, 2 folgt, daſs auch die Umkehrung §. 144, 1 und infolge dessen auch alle übrigen Lehrsätze ihre Giltigkeit behalten. Man kann dies auch unmittelbar beweisen, indem man von der Definition Gebrauch macht, dann die Rechnung durchführt und zum Schlusse eventuell wieder zu Potenzen, deren Exponent Null oder negativ ist, zurückkehrt. Z. B.

$$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m . a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n};$$

$$(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = (a^m)^n = a^{mn}.$$

§. 150. Entwickelt man durch regelrechtes Multiplicieren die beiden ersten Glieder der auf einander folgenden Potenzen von $1 + x$, so erkennt man unmittelbar, dass der Coefficent des zweiten Gliedes stets um 1 wächst, weil das zweite Glied der nächst höheren Potenz die Summe ist aus x und dem zweiten Gliede der vorhergehenden Potenz.

$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + \ldots$$
$$(1 + x)^4 = (1 + 3x + \ldots)(1 + x) = 1 + 4x + \ldots$$
$$(1 + x)^n = 1 + nx + \ldots$$

somit für $n = \infty$ und $x > 0$ ist $(1 + x)^\infty = 1 + \infty . x + \ldots = \infty$.

1. Für $a > 1$ ist $a^\infty = \infty$.

2. Für $a = 1$ ist $a^\infty = 1^\infty = 1$. (§. 139.)

Wenn a kleiner als 1 ist, so kann es auf die Form $\frac{1}{1+x}$ gebracht werden, wo $x > 0$ ist, z. B. $\frac{2}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$. Somit

3. für $a < 1$ ist $a^\infty = \left(\frac{1}{1+x}\right)^\infty = \frac{1}{(1+x)^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Folgerungen. Für $a > 1$ ist $a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Für $a < 1$ ist $a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = \frac{1}{0} = \infty$.

Mit „potentia" übersetzte Bombelli (1572) das griech. δύναμις (Vermögen), welches Diophant für das Quadrat der Unbekannten gebrauchte. Erst später wurde dieses Wort in dem jetzigen allgemeinen Sinne gebraucht. „Exponent" wurde von Stifel, die jetzige Schreibweise von Herigogne (1634) und Descartes (1637) eingeführt.

II. Von den Wurzeln.

§. 151. Die durch die directe Rechnungsart des Potenzierens gewonnene Gleichung $b^n = a$ führt zu den beiden neuen Aufgaben, 1) aus a und n die unbekannte Zahl b, 2) aus a und b die unbekannte Zahl n zu suchen. Die erste Aufgabe wird durch die sechste Rechnungsart, das Radicieren, gelöst, die zweite Aufgabe durch die siebente Rechnungsart, das Logarithmieren. Diese beiden Rechnungsarten sind also die Umkehrungen oder inversen Operationen des Potenzierens.

Erklärung. Aus einer Zahl a die nte Wurzel ausziehen, oder die Zahl a durch n radicieren heißt, aus der Potenz a und dem Exponenten n die Basis suchen. Die gegebene Potenz a heißt der Radicand, oder geradehin die Zahl, der gegebene Exponent n der Wurzelexponent und die gesuchte Basis die nte Wurzel aus a. Man schreibt $\sqrt[n]{a} = b$.

$\sqrt[n]{a}$ ist also diejenige Zahl, welche mit dem Wurzelexponenten potenziert den Radicand gibt.

Die zweite und die dritte Wurzel einer Zahl nennt man bezüglich Quadratwurzel und Cubikwurzel.

Folgesätze. 1. (Definitionsformel.) Potenziert man eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten, so erhält man den Radicand.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

2. Radiciert man eine Potenz durch den Potenzexponenten, so erhält man die Basis.

$$\sqrt[n]{(a^n)} = a.$$

Zusatz. Aus 1) und 2) folgt:

Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie in beliebiger Reihenfolge mit einer Zahl potenziert und das Resultat durch dieselbe Zahl radiciert.

$$a = \sqrt[n]{(a)^n}; \qquad a = (\sqrt[n]{a})^n.$$

Hiernach kann jede Zahl in Form einer Wurzel dargestellt werden; z. B. $b = \sqrt[5]{b^5}$.

Das Potenzieren und das Radicieren sind demnach einander entgegengesetzt.

3. Die erste Wurzel aus einer Zahl ist die Zahl selbst.

Da $a^1 = a$, so ist $\sqrt[1]{a} = a$.

Für die erste Wurzel wird daher weder der Exponent 1, noch das Wurzelzeichen angeschrieben. Bei der zweiten oder Quadratwurzel wird das Wurzelzeichen, aber nicht der Exponent 2 angeschrieben, so dass $\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt[2]{a}$ bedeutet.

4. $\sqrt[n]{1} = 1$. 5. $\sqrt[n]{0} = 0$.

Dritte Erweiterung des Zahlengebietes.

Irrationale Zahlen.

§. 152. Die nte Wurzel aus einer positiven ganzen Zahl a hat gemäß der Definition nur eine Bedeutung, wenn a die nte Potenz einer Zahl des bis jetzt bekannten Zahlengebietes ist.

Man bilde die nten Potenzen der aufeinander folgenden ganzen Zahlen, mit Hinzufügung der Null, nämlich

$$0^n, 1^n, 2^n, 3^n, \ldots p^n, (p+1)^n, \ldots$$

Es sind nun zwei Fälle möglich.

a) Entweder ist a gleich einer dieser Potenzen, z. B. $a = p^n$; dann ist $\sqrt[n]{a} = p$ eine ganze Zahl.

b) Oder a liegt zwischen zwei aufeinander folgenden solchen Potenzen, somit kann $\sqrt[n]{a}$ nach der Definition keine ganze Zahl sein. Dann lässt sich aber $\sqrt[n]{a}$ auch durch keinen Bruch darstellen; denn wäre $\sqrt[n]{a} = \frac{q}{r}$, wo q und r relative Primzahlen sind, so müsste $\left(\frac{q}{r}\right)^n = a =$ einer ganzen Zahl sein, was nach §. 143, Folges. unmöglich ist.

Somit stellt $\sqrt[n]{a}$ für diesen Fall eine bedeutungslose Vereinigung von Zahlzeichen dar. Statt derartige Wurzelgrößen auszuschließen, weil sie mit der Definition nicht vereinbar sind, rechnet man auch mit ihnen und trifft zugleich die Festsetzung, dass auch für derartige Wurzelgrößen die Definitionsformel $(\sqrt[n]{a})^n = a$ Giltigkeit behalte. Infolge dessen gelten für dieselben sämmtliche Lehrsätze, welche später aus der Definition abgeleitet werden, insbesondere auch der Satz: Größeres mit Gleichem radiciert gibt Größeres.

Diese Wurzeln stellen, da sie in der Reihe der bisher bekannten Zahlen nicht enthalten sind, neue Zahlformen dar.

Diese neuen Zahlen lassen sich, obwohl sie selbst keine Brüche sind, doch zwischen zwei Brüche als Grenzen einschließen, deren Differenz beliebig klein gemacht werden kann.

Beweis. Gemäß Voraussetzung ist $p^n < a < (p+1)^n$, wo p eine ganze Zahl ist, somit $p < \sqrt[n]{a} < p + 1$.

Man vermehre nun p nach und nach um $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots$, wo m eine ganze Zahl bezeichnet, und bilde

$$p^n, \left(p+\frac{1}{m}\right)^n, \left(p+\frac{2}{m}\right), \ldots \left(p+\frac{c}{m}\right)^n, \left(p+\frac{c+1}{m}\right)^n, \ldots$$

Weil nun a keiner dieser Potenzen gleich sein kann, so muss es nothwendig zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgende solche Potenzen fallen, etwa zwischen $\left(p+\frac{c}{m}\right)^n$ und $\left(p+\frac{c+1}{m}\right)^n$, wo $c < m$ ist. Dann ist

$$p+\frac{c}{m} < \sqrt[n]{a} < p + \frac{c+1}{m}.$$

$\sqrt[n]{a}$ liegt also zwischen zwei Brüchen $p+\frac{c}{m}$ und $p+\frac{c+1}{m}$, deren Differenz $\frac{1}{m}$ ist. Da nun m beliebig groß gewählt werden kann, so kann die Differenz beider Grenzen $\frac{1}{m}$ beliebig klein gemacht werden.

§. 153. Erklärung. Eine Zahl, welche nicht gleich einem Bruche ist, sich aber zwischen zwei Brüche als Grenzen einschließen lässt, deren Differenz beliebig klein gemacht werden kann, heißt irrational.

Die nte Wurzel aus einer ganzen Zahl a ist also entweder eine ganze Zahl, oder sie ist irrational.

Im Gegensatze heißen die ganzen Zahlen und Brüche rationale Zahlen.

Es gibt außer den Wurzeln auch noch andere irrationale Zahlformen, z. B. die Zahl π.

Die irrationale Zahl ist gleich dem gemeinsamen Grenzwerte, welchem sich ihre beiden Grenzen $p + \frac{c}{m}$ und $p + \frac{c+1}{m}$ nähern, wenn m unendlich wächst.

$$\sqrt[n]{a} = \lim \left(p + \frac{c}{m}\right) \text{ für } m = \infty.$$

Liegen daher zwei irrationale Zahlen zwischen denselben veränderlichen Grenzen, deren Differenz beliebig klein gemacht werden kann, so sind dieselben gleich, wie dies in §. 100 bewiesen wurde.

Für jedes endliche m stellt jeder der beiden Brüche einen Näherungswert der irrationalen Zahl dar. Der Unterschied zwischen der irrationalen Zahl und dem Näherungswerte derselben wird der Fehler des letzteren genannt. Derselbe ist kleiner als $\frac{1}{m}$.

$$\sqrt[n]{a} \backsim p + \frac{c}{m} \qquad \text{Fehler} < \frac{1}{m}$$

$$\sqrt[n]{a} \backsim p + \frac{c+1}{m} \qquad \text{"} < \frac{1}{m}.$$

Setzt man $m = 10^r$, so erhellt unmittelbar, dass die irrationale Zahl sich als ein unendlicher Decimalbruch darstellen lässt. Bricht man denselben bei der rten Decimalstelle ab, so ist dieser endliche Decimalbruch ein Näherungswert der irrationalen Zahl mit einem Fehler, welcher kleiner ist als eine Einheit der letzten Decimalstelle.

Zusatz. Mit irrationalen Zahlen rechnen heißt, mit ihren Näherungswerten rechnen und den Grenzwert suchen, von welchem das Resultat unendlich wenig differiert, wenn die Näherungswerte der irrationalen Zahlen von ihren Grenzwerten selbst unendlich wenig differieren.

Da nach dieser Erklärung die Resultate der Rechnungen mit irrationalen Zahlen durch die bezüglichen Rechnungsresultate ihrer Näherungswerte bestimmt werden, diese aber rationale Zahlen sind, so gelten alle für rationale Zahlen erwiesenen allgemeinen Operationsgesetze auch für die irrationalen Zahlen.

§. 154. Erweiterte Zahlenreihe. Je nachdem beide Grenzen positiv oder negativ sind, ist auch die irrationale Zahl positiv oder negativ. Ihre Stellung in der Zahlenreihe ist durch die beiden rationalen Grenzen vollständig bestimmt. $\sqrt[n]{a}$ folgt auf $p + \frac{c}{m}$ und geht der Zahl $p + \frac{c+1}{m}$ voraus.

Darstellung der irrationalen Zahl an der Zahlenlinie. 1. Jedem Punkte der Zahlenlinie entspricht eine rationale oder irrationale Zahl. Es entspreche der Null der Punkt O, der Zahl $+1$ der Punkt A; dann entspricht dem willkürlich gewählten Punkte M die Maßzahl des Streckenverhältnisses $\frac{OM}{OA}$. Es sind nun zwei Fälle möglich:

a) OM und OA haben ein gemeinschaftliches Maß L (sind commensurabel), welches in OM qmal, in OA rmal enthalten ist. Somit

$OM = q.L$, $OA = r.L$ und

$$\frac{OM}{OA} = \frac{qL}{rL} = \frac{q}{r}.$$

Es entspricht demnach dem Punkte M die rationale Zahl $\frac{q}{r}$.

b) Die beiden Strecken OM und OA haben kein gemeinschaftliches Maß (sind incommensurabel). Theilt man nun OA in m gleiche Theile und trägt einen solchen Theil auf OM so oft als möglich, nämlich pmal auf, so bleibt ein Rest, welcher kleiner ist als $\frac{OA}{m}$. Somit:

$$p.\frac{OA}{m} < OM < p.\frac{OA}{m} + \frac{OA}{m}$$

oder

$$\frac{p}{m} < \frac{OM}{OA} < \frac{p+1}{m}.$$

Da die Differenz dieser beiden Grenzen beliebig klein gemacht werden kann, so ist demnach die dem Punkte M entsprechende Zahl irrational.

2. Umgekehrt: Jeder rationalen oder irrationalen Zahl entspricht ein Punkt der Zahlenlinie.

Da die den rationalen Grenzen entsprechenden Punkte einander unendlich nahe gebracht werden können, so ist die Lage jenes Punktes, welcher der irrationalen Zahl entspricht, eindeutig bestimmt.

Irrational (λόγος, ratio, Verhältnis) ist die Übersetzung des griech. ἄλογος. Hiemit bezeichnete Euklid eine Strecke, deren Quadrat zu dem Quadrate, welches über der als Längeneinheit gewählten Strecke construiert wird, incommensurabel ist.

Rechengesetze.

§. 155. 1. Ein Product kann durch eine Zahl radiciert werden, indem man jeden Factor durch die Zahl radiciert und die erhaltenen Wurzeln multipliciert.

$$\sqrt[n]{(ab)} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.$$

Beweis. Soll die rechte Seite gleich der linksseitigen Wurzel sein, so muss sie mit dem Wurzelexponenten n potenziert den Radicand geben.

$$(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n.(\sqrt[n]{b})^n \text{ (§. 151, 1)} = a.b \text{ (§. 152, 1)}.$$

2. Umgekehrt: Wurzeln desselben Wurzelexponenten kann man multiplicieren, indem man das Product der Radicanden durch den gemeinsamen Wurzelexponenten radiciert.

Zusätze. a) Mit Hilfe des ersten Satzes kann man, wenn der Radicand einen Factor enthält, aus dem sich die verlangte Wurzel ausziehen lässt, diesen Factor vom Wurzelzeichen befreien. Z. B.

$$\sqrt[n]{(a^n . b)} = \sqrt[n]{(a^n)} . \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}.$$

b) Nach dem zweiten Satze kann man mit Beiziehung von §. 152, 2 umgekehrt jeden Factor einer Wurzel unter das Wurzelzeichen bringen, indem man ihn mit dem Wurzelexponenten potenziert und diese Potenz mit dem Radicand multipliciert. Z. B.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n)} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n b)}.$$

§. 156. 1. Ein Quotient (Bruch) kann durch eine Zahl radiciert werden, indem man Dividend und Divisor durch die Zahl radiciert und die erste Wurzel durch die zweite dividiert.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Beweis. $\left\{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right\}^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}$ (§. 143, 1) $= \frac{a}{b}$ (§. 152, 1).

2. Umgekehrt: Wurzeln desselben Wurzelexponenten kann man dividieren, indem man den Quotienten der Radicanden durch den gemeinsamen Wurzelexponenten radiciert.

§. 157. Formveränderung einer Wurzel. Die Wurzel aus einer Potenz verändert ihren Wert nicht, wenn man den Wurzel- und den Potenzexponenten mit derselben Zahl multipliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

a) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$; b) $\sqrt[q]{a^r} = \sqrt[q:p]{a^{r:p}}$.

Beweis. a) $\sqrt[n]{a^m} = x$; somit $x^n = a^m$ und $x^{np} = a^{mp}$;

daher $x = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

b) Der zweite Theil folgt als Umkehrung aus dem ersten.

Zusätze. 1. Nach diesem Satze kann man a) jede Wurzel in eine andere umformen, deren Wurzelexponent ein Vielfaches des gegebenen Wurzelexponenten ist, folglich auch zwei oder mehrere Wurzeln mit einem gemeinsamen Wurzelexponenten darstellen; b) jede Wurzel, in welcher der Wurzel- und der Potenzexponent ein gemeinsames Maß haben, dadurch abkürzen.

Sind z. B. die Wurzeln $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[10]{c^7}$ gegeben, so ist 30 ihr kleinster gemeinsamer Wurzelexponent und man hat

$$\sqrt{a} = \sqrt[30]{a^{15}},\ \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[30]{b^{20}},\ \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[30]{c^{21}}.$$

Sind Wurzeln, welche ungleiche Exponenten haben, zu multiplicieren, oder zu dividieren, so müssen sie zunächst mit einem gemeinsamen Wurzelexponenten dargestellt werden.

2. Eine Wurzel mit negativem Wurzelexponenten ist gleich dem reciproken Werte derselben Wurzel mit positivem Wurzelexponenten.

Es ist $$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[-n \cdot -1]{a^{1 \cdot -1}} = \sqrt[n]{a^{-1}}, \text{ also}$$

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Negative Wurzelexponenten pflegt man zu vermeiden, indem man das Negative in den Potenzexponenten verlegt.

§. 158. 1. Eine Potenz kann radiciert werden, indem man die Basis mit dem Quotienten aus dem Potenz- und Wurzelexponenten potenziert.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Beweis. $$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

2. Umkehrung: Eine Zahl kann mit einem Quotienten (Bruche) potenziert werden, indem man in beliebiger Reihenfolge die Zahl mit dem Dividend potenziert und das Resultat durch den Divisor radiciert.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Zusatz. Beide Sätze gelten nur für Quotienten, welche ganze Zahlen sind.

§. 159. 1. Eine Potenz kann durch eine Zahl radiciert werden, indem man die Basis durch die Zahl radiciert und die erhaltene Wurzel potenziert.

$$\sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Beweis. $\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m$ (§. 144) $= a^m$ (§. 151, 1. Folges.).

2. **Umkehrung.** Eine Wurzel kann mit einer Zahl potenziert werden, indem man den Radicand mit ihr potenziert und die erhaltene Potenz radiciert.

Folgesatz. Soll eine Zahl potenziert und das Resultat radiciert werden, so ist es gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man diese Rechnungsoperationen vornimmt.

§. 160. 1. Eine Wurzel kann durch eine Zahl radiciert werden, indem man den Radicand durch das Product der Wurzelexponenten radiciert.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Beweis. $(\sqrt[mn]{a})^m = \sqrt[mn]{a^m}$ (§. 159, 2) $= \sqrt[n]{a}$.

2. **Umkehrung.** Eine Zahl kann durch ein Product radiciert werden, indem man dieselbe durch den einen Factor und die erhaltene Wurzel durch den andern Factor radiciert.

Folgesatz. Soll eine Wurzel radiciert werden, so ist die Reihenfolge dieser Rechnungsoperationen gleichgiltig.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Radicierung.

§. 161. 1. Gleiches durch Gleiches radiciert gibt Gleiches.

Ist $a = b$, so ist $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$ (wie §. 14, 1).

Folgesätze. a) Wenn man alle Glieder einer Proportion durch dieselbe Zahl radiciert, so erhält man wieder eine Proportion.

Ist $a:b = c:d$, so ist auch $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{c:d}$, oder

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} \text{ (§. 156, 1).}$$

b) Die mittlere geometrische Proportionale zwischen zwei Zahlen ist gleich der Quadratwurzel aus dem Producte dieser Zahlen.

Ist $a:b = b:c$, so ist $b^2 = ac$, daher

$$b = \sqrt{ac}.$$

2. Größeres durch Gleiches radiciert gibt Größeres.

Ist $a > b$, so ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$.

Beweis. Wäre $\sqrt[m]{a} \overline{\gtrless} \sqrt[m]{b}$, so müsste bezüglich nach §. 145, 1. oder 2. $(\sqrt[m]{a})^m \overline{\gtrless} (\sqrt[m]{b})^m$, also $a \overline{\gtrless} b$ sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Folgesatz. Ist $a \gtrless 1$, so ist bezüglich auch $\sqrt[m]{a} \gtrless 1$.

3. Gleiches durch Größeres radiciert gibt Kleineres oder Größeres, je nachdem der Radicand größer oder kleiner als 1 ist.

Ist $m > n$, so ist für $a > 1$, $\quad \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$;

für $a < 1$, $\quad \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$.

Beweis. Wäre für $a > 1$, $\sqrt[m]{a} \leqq \sqrt[n]{a}$, so wäre bezüglich nach §. 145, 1. oder 2. $(\sqrt[m]{a})^{mn} \leqq (\sqrt[n]{a})^{mn}$, oder $a^n \leqq a^m$, während wegen $m > n$ nach §. 145, 3. $a^m > a^n$ sein muss.

Ebenso wird der Beweis für $a < 1$ geführt.

Umformung von irrationalen Wurzelausdrücken.

§. 162. Ausdrücke, in denen irrationale Wurzeln vorkommen, lassen sich manchmal durch entsprechende Umgestaltung auf eine Form bringen, die für die Rechnung mehr Bequemlichkeit bietet.

Aufgabe. Einen Bruch, dessen Nenner ein irrationales Monom oder Binom ist, ohne Änderung seines Wertes mit einem rationalen Nenner darzustellen. (Rationalmachen des Nenners.)

Der vorgelegte Bruch kann eine der folgenden Formen haben:

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}},\qquad \frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}},\qquad \frac{Z}{\sqrt[m]{a^p} \pm \sqrt[m]{a^q}}.$$

1. Um einen Bruch von der Form $\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}}$, wobei $m > n$ ist, mit einem rationalen Nenner darzustellen, multipliciere man Zähler und Nenner mit $\sqrt[m]{a^{m-n}}$.

Es ist

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n}\,.\,\sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}.$$

2. Um einen Bruch von der Form $\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}}$ oder $\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ mit einem rationalen Nenner darzustellen, multipliciere man Zähler und Nenner mit $a \mp \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$. Es ist

$$\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{Z(a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})\,(a \mp \sqrt{b})} = \frac{Z(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

$$\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{Z(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})\,(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{Z(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

3. Um einen Bruch von der Form

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^p} \pm \sqrt[n]{b^q}} = \frac{Z}{\sqrt[mn]{a^{np}} \pm \sqrt[mn]{b^{mq}}} = \frac{Z}{\sqrt[r]{A} \pm \sqrt[r]{B}},$$

wo der Kürze halber $mn = r$, $a^{np} = A$ und $b^{mq} = B$ gesetzt wird, mit einem rationalen Nenner darzustellen, multipliciere man Zähler und Nenner des letzten Bruches mit dem Polynom

$$\sqrt[r]{A^{r-1}} \mp \sqrt[r]{A^{r-2}\,.\,B} + \sqrt[r]{A^{r-3}\,.\,B^2} \mp \ldots (\mp 1)^{r-2}\,\sqrt[r]{A\,.\,B^{r-2}} + (\mp 1)^{r-1}\,\sqrt[r]{B^{r-1}}.$$

Man erhält dadurch $A \pm B$ als den neuen Nenner. Z. B.

$$\frac{Z}{\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b}} = \frac{Z(\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}+\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4})}{a-b}.$$

§. 163. **Aufgabe.** Die Summe oder die Differenz der Quadratwurzeln aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen, von welchen die eine irrational ist, in eine einzige Quadratwurzel zu verwandeln.

Ist $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}$ die gegebene Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln, wobei a als positiv und größer als $\sqrt{b}$ vorausgesetzt wird, so hat man

$$(\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}})^2 = 2a \pm 2\sqrt{a^2-b},$$

daher, wenn man beiderseits die Quadratwurzel auszieht,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2-b}}.$$

Diese Umformung läßt sich besonders dann mit Vortheil anwenden, wenn a^2-b eine vollständige Quadratzahl ist. Z. B.

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{8+2\sqrt{16-7}} = \sqrt{8+2\sqrt{9}} = \sqrt{14};$$

$$\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}} = \sqrt{12-2\sqrt{36-11}} = \sqrt{12-2\sqrt{25}} = \sqrt{2}.$$

§. 164. **Aufgabe.** Die Quadratwurzel aus einem irrationalen Binom in die Summe oder die Differenz zweier Quadratwurzeln zu verwandeln.

Ist $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ die gegebene Quadratwurzel, so hat man, wenn a positiv und $a > \sqrt{b}$ ist, nach §. 163

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}},$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}};$$

daher durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Die Umformung ist nur dann vortheilhaft, wenn a^2-b eine vollständige Quadratzahl ist. Z. B.

$$\sqrt{11 \pm 6\sqrt{2}} = \sqrt{11 \pm \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+\sqrt{49}}{2}} \pm \sqrt{\frac{11-\sqrt{49}}{2}} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Zusatz. Haben die beiden Glieder des Binoms $a \pm \sqrt{b}$ einen gemeinsamen irrationalen Factor, so wird derselbe vor der Transformation herausgehoben. Z. B.

$$\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{10}} = \sqrt[4]{2}.\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt[4]{2}.\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}(\sqrt{5}-1).$$

§. 165. Aufgabe. Eine Gleichung, in welcher die Unbekannte im Radicand vorkommt, von der Wurzel zu befreien. (Rationalmachen der Gleichung.)

Man transformiere die Gleichung so, dass in einem Theile die Wurzel allein steht, und potenziere dann beide Theile mit dem Wurzelexponenten

Um eine Gleichung, in welcher die Unbekannte im Radicand vorkommt aufzulösen, muss dieselbe immer zunächst rational gemacht werden.

Beispiele.

1) $\sqrt{2x+3} = 5$
$(\sqrt{2x+3})^2 = 5^2$
$2x+3 = 25$
$2x = 25-3$
$2x = 22$
$x = 11$

2) $1+\sqrt{4x^2-5x+4} = 2x$
$\sqrt{4x^2-5x+4} = 2x-1$
$(\sqrt{4x^2-5x+4})^2 = (2x-1)^2$
$4x^2-5x+4 = 4x^2-4x+1$
$-5x+4x = 1-4$
$-x = -3$
$x = 3.$

Wurzeln mit algebraischem Radicand.

§. 166. Bisher wurde unter $\sqrt[n]{a}$, wo a eine absolute Zahl ist, nur der absolute Zahlenwert der Wurzel verstanden. Bezeichnet man aber mit $\sqrt[n]{a}$, wo a eine algebraische Zahl ist, sowohl die positiven als auch die negativen Zahlen, welche mit n potenziert a geben, so gelangt man zu folgenden Sätzen:

1. Jede gerade Wurzel aus einem positiven Radicand hat zwei gleiche und entgegengesetzte Werte.
2. Jede ungerade Wurzel aus einem positiven Radicand hat einen positiven Wert.
3. Jede ungerade Wurzel aus einem negativen Radicand hat einen negativen Wert.

Beweis. Nach §. 146 ist

$$(\pm p)^{2n} = +a, \quad (+q)^{2n+1} = +b, \quad (-q)^{2n+1} = -b,$$

wo a und b die durch Potenzierung sich ergebenden absoluten Zahlenwerte bedeuten. Daraus aber folgt nach §. 158

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm p, \qquad \sqrt[2n+1]{+b} = +q, \qquad \sqrt[2n+1]{-b} = -q.$$

Zusatz. Die Zahlenform $\sqrt[2n]{-a}$ wird später einer besonderen Betrachtung unterzogen werden.

Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten.

§. 167. Eine Potenz, deren Exponent ein eigentlicher Bruch ist, hat gemäß der Definition keine Bedeutung. Will man auch diese Potenzformen beibehalten, so muss man denselben gemäß dem Principe der Fortdauer der

Operationsgesetze jene Bedeutung beilegen, welche der Lehrsatz über das Potenzieren mit einem uneigentlichen Bruche (§. 158, 2) verlangt.

Erklärung. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

Eine Zahl mit einem Bruche potenzieren bedeutet, die Basis in beliebiger Reihenfolge mit dem Zähler potenzieren und das Resultat durch den Nenner radicieren.

Zusatz. Aus $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ folgt, dass sich jede Wurzel mit gebrochenem Exponenten als eine Potenz mit gebrochenem Exponenten darstellen lässt. Da man deshalb Wurzeln mit Bruchexponenten in die Rechnung gar nicht einzuführen pflegt, so beschränken wir uns hier auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

§. 168. Alle bisher erwiesenen allgemeinen Sätze von den Potenzen gelten auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Vermöge der Definition für $a^{\frac{m}{n}}$ behält der Lehrsatz $(a^m)^p = a^{mp}$ (siehe §. 158, Beweis) und mit ihm auch alle übrigen Sätze der Lehre von den Potenzen ihre Giltigkeit.

Um dieses an den einzelnen Sätzen direct nachzuweisen, braucht man nur die Potenzen mit gebrochenen Exponenten in Wurzeln zu verwandeln, dann die angedeuteten Rechnungen auszuführen und in den Resultaten die Wurzeln wieder in Potenzen mit Bruchexponenten umzuformen. Z. B.

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} . \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Zusatz. Da sich alle Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten darstellen lassen, so ist die Lehre von den Wurzeln schon in den Sätzen von den Potenzen enthalten.

Schließt man die Zahlenform $\sqrt[2n]{-a} = (-a)^{\frac{1}{2n}}$ aus, so kann also sowohl die Basis als der Exponent eine positive oder negative rationale oder irrationale Zahl sein; denn im letzteren Falle ist die irrationale Zahl gemäß §. 153, Zusatz, durch ihren rationalen Näherungswert zu ersetzen, z. B.

$$3^{\sqrt{2}} = 3^{1\cdot4142\ldots} = 3.\sqrt[10]{3^4}.\sqrt[100]{3}.\sqrt[1000]{3^4}.\sqrt[10000]{3^2}\ldots\ldots$$

Vierte Erweiterung des Zahlengebietes.

Imaginäre Zahlen.

§. 169. In §. 166 blieb noch der Ausdruck $\sqrt[2n]{-a}$ zu untersuchen übrig. Da weder eine positive, noch eine negative ganze, gebrochene oder irrationale Zahl, noch auch Null, mit einer geraden Zahl potenziert eine negative Zahl hervorbringen kann, so ist $\sqrt[2n]{-a}$ mit der Definition nicht vereinbar. Man geht nun wieder wie bei den vorausgegangenen Erweiterungen des Zahlengebietes vor. Man behält auch diese Wurzelgrößen bei und trifft zugleich die Festsetzung, dass die Definitionsformel $(\sqrt[2n]{-a})^{2n} = -a$ Giltigkeit behalte. Infolge dessen gelten für dieselben sämmtliche Lehrsätze von den Wurzeln (mit Beachtung der obigen Definition).

Da $\sqrt[2n]{-a}$ in der stetigen Folge der bisher betrachteten Zahlen nicht zu finden ist, so stellt es eine neue Zahlenform dar. Dieselbe erhält den Namen imaginäre Zahl; im Gegensatze zu ihr bezeichnet man die ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen mit dem gemeinsamen Namen reelle Zahlen.

Erklärung. Eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl ist imaginär. Da sich dieselbe auf eine Quadratwurzel aus demselben Radicand zurückführen läßt, so wird die Definition in folgender Weise eingeschränkt.

Eine imaginäre Zahl ist diejenige, deren Quadrat eine negative reelle Zahl ist.

Definitionsformel. $(\sqrt{-a})^2 = -a.$

Aus $\sqrt{-a} = \sqrt{a.(-1)} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}$ und

$-\sqrt{-a} = -\sqrt{a.(-1)} = (-\sqrt{a}).\sqrt{-1}$ folgt:

Jede imaginäre Zahl ist gleich dem Producte aus einer reellen Zahl und der imaginären Zahl $\sqrt{-1}$.

$\sqrt{-1}$ heißt die imaginäre Einheit; sie wird nach Gauß fast allgemein mit dem Buchstaben i bezeichnet. Ihre Definition ist durch die Gleichung $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ gegeben.

Jede (rein) imaginäre Zahl hat also die Form bi. Man rechnet mit derselben der Form nach so, als wenn das Zahlzeichen i eine reelle Zahl vorstellen würde; nur tritt noch die Bestimmung hinzu, dass überall i^2 durch -1 zu ersetzen ist.

Rechnungsoperationen mit rein imaginären Zahlen.

§. 170. Ist eine imaginäre Zahl von der Form $\sqrt{-a}$ der Rechnung zu unterziehen, so muss sie früher auf die Form $\sqrt{a}\,.\sqrt{-1} = b\sqrt{-1} = bi$, wo $b = \sqrt{a}$ ist, gebracht werden.

1. Addition und Subtraction.

$$ai + bi = (a + b)i;$$
$$ai - bi = (a - b)i.$$

Die Summe zweier imaginärer Zahlen ist demnach auch imaginär; ebenso die Differenz zweier ungleicher imaginärer Zahlen.

2. Multiplication.

$$ai.b = abi, \text{ ebenso } a.bi = abi;$$
$$ai.bi = ab.i^2 = ab. -1 = -ab.$$

Das Product aus einer imaginären und einer reellen Zahl ist imaginär, das Product zweier imaginärer Zahlen reell.

3. Division.

$$\frac{ai}{b} = \frac{a}{b}i, \qquad \frac{a}{bi} = \frac{ai}{bi^2} = -\frac{a}{b}i, \qquad \frac{ai}{bi} = \frac{a}{b}.$$

Eine imaginäre und eine reelle Zahl geben also einen imaginären, zwei imaginäre Zahlen einen reellen Quotienten.

4. Potenzieren.

Man hat $i^2 = -1,$

$$i^3 = i^2.i = -i,$$
$$i^4 = i^3.i = -i^2 = +1,$$
$$i^5 = i^4.i = +i, \text{ u. s. w.}$$

allgemein

$$i^{4n} = +1, \qquad i^{4n+1} = +i, \qquad i^{4n+2} = -1, \qquad i^{4n+3} = -i.$$

Ferner ist $(ai)^n = a^n.i^n.$

Die Potenz einer rein imaginären Zahl ist demnach reell oder imaginär, je nachdem die bezügliche Potenz von i reell oder imaginär ist.

Zusatz. Die Gleichung $a = bi$, (wo a und b reell sind), kann nur bestehen, wenn $a = b = 0$ ist.

Durch Quadrieren erhält man:

$$a^2 = -b^2.$$

Da die linke Seite eine positive reelle Zahl und die rechte Seite eine negative reelle Zahl ist, so kann die Gleichung nur für $a = o$ und $b = o$ bestehen.

Das reelle und das imaginäre Zahlengebiet haben nur die Null gemeinsam.

Complexe Zahlen.

§. 171. Verbindet man eine reelle und eine imaginäre Zahl, welche beide von Null verschieden sind, durch die Addition, so muss man diese Zahlenverbindung als eine neue Zahlenform betrachten, weil dieselbe weder reell noch rein imaginär ist.

Erklärung. Die Summe aus einer reellen und imaginären Zahl heißt eine complexe Zahl.

Die allgemeine Form einer complexen Zahl ist $a + bi$, worin a und b positive oder negative reelle Zahlen sind; a ist ihr reeller, bi ihr imaginärer Bestandtheil. Zwei complexe Zahlen von der Form $a + bi$ und $a - bi$ heißen conjugiert.

Der Ausdruck $a + bi$ ist die allgemeine Form für alle möglichen Zahlen; er enthält für $a = o$ und $b = o$ die Null, für $b = o$ alle reellen Zahlen, für $a = 0$ alle rein imaginären Zahlen, und, wenn a und b von Null verschieden sind, alle complexen Zahlen.

§. 172. Da die complexe Zahl eine neue Zahlform ist, so erübrigt noch für dieselbe die Definition der Addition aufzustellen.

Erklärung. Zwei complexe Zahlen werden addiert, indem man ihre reellen und imaginären Bestandtheile addiert.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Die Summe ist im allgemeinen auch eine complexe Zahl. Reell ist immer die Summe zweier conjugierter Zahlen; denn

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

Zusatz. Infolge dieser Erklärung hat das Commutationsgesetz und mit demselben alle übrigen Operationsgesetze für complexe Zahlen Giltigkeit. Man rechnet daher formal mit denselben wie mit Binomen unter Beachtung der Sätze des §. 170.

§. 173. Wenn zwei complexe Zahlen gleich sind, so sind ihre reellen und imaginären Bestandtheile einander gleich.

Beweis. Vor. $a + bi = c + di;$

somit $a - c = (d - b)i,$

daher nach §. 170 $a - c = 0$ und $d - b = 0$

$a = c$ $b = d.$

Zusatz. Jede Gleichung zwischen zwei complexen Zahlen zerfällt in zwei Gleichungen zwischen reellen Zahlen.

§. 174. 1. Die Subtraction zweier complexer Zahlen $a + bi$ und $c + di$ wird bestimmt durch die Gleichung

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Zwei complexe Zahlen geben im allgemeinen eine complexe Zahl zur Differenz.

2. Wird die Multiplication zweier complexer Zahlen $a + bi$ und $c + di$ formal ausgeführt und dann i^2 durch -1 ersetzt, so hat man

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i.\end{aligned}$$

Das Product zweier complexer Zahlen ist im allgemeinen auch eine complexe Zahl. Reell ist immer das Product zweier conjugierter Zahlen; denn

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

3. Um zwei complexe Zahlen $a + bi$ und $c + di$ durch einander zu dividieren, braucht man nur Dividend und Divisor mit der zu dem Divisor conjugierten Zahl zu multiplicieren, wodurch man auf eine Division durch einen reellen Divisor geführt wird.

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i.\end{aligned}$$

Der Quotient zweier complexer Zahlen ist im allgemeinen auch eine complexe Zahl.

Ist $bc = ad$, dann ist $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a}{c}$.

Durch das eben angeführte Verfahren kann auch jeder Bruch, dessen Nenner eine complexe Zahl ist, mit einem reellen Nenner dargestellt und sonach in eine complexe Zahl verwandelt werden. Z. B.

$$\frac{3+i}{2+5i} = \frac{(3+i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{11-13i}{29} = \frac{11}{29} - \frac{13}{29}i.$$

4. Die **Potenz** einer complexen Zahl ist im allgemeinen wieder eine complexe Zahl.

$(a+bi)^2 = (a+bi)(a+bi) = (a^2-b^2)+2abi;$

$(a+bi)^3 = (a+bi)^2(a+bi) = (a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i;$

u. s. w.

5. Die in §§. 163 und 164 für die Quadratwurzeln aus irrationalen Binomen abgeleiteten Formeln gelten, wie aus der Ableitung selbst hervorgeht, auch für die **Quadratwurzeln aus complexen Zahlen**, und zwar ist hier ihre Anwendung von der dort aufgestellten Bedingung, dass a positiv und größer als $\sqrt{b}$ sein muss, ganz unabhängig. Z. B.

$$\sqrt{1+i}+\sqrt{1-i} = \sqrt{2+2\sqrt{1-i^2}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}}.$$

$$\sqrt{4+3\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16+9}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{16+9}}{2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{-2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(3+\sqrt{-1}).$$

$$\sqrt{\pm\sqrt{-1}} = \sqrt{0\pm\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{+\sqrt{0+1}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-\sqrt{0+1}}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm\sqrt{-1}).$$

Historisches. Das Wort Wurzel wurde ursprünglich für den Wert der Unbekannten, welcher der Gleichung genügt (§. 128), gebraucht. Erst später bezeichnete man damit auch die unbekannte Basis einer Potenz, weil $\sqrt[n]{a}$ die Lösung der Gleichung $x^n = a$ ist. Das Wurzelzeichen, ein deformiertes R, wurde zuerst von Rudolff (1525) gebraucht. Die jetzige Stellung des Wurzelexponenten rührt von Girard (1600) her. Gebrochene Exponenten kommen zuerst bei Oresme (14. Jahrh.), Null und negative Zahlen als Exponenten bei Chuquet (1484) vor. Quadratwurzeln aus negativen Zahlen wurden zuerst von Cardano (1545) beachtet. Die Bezeichnung „reell imaginär“ stammt von Descartes, „conjugiert“ von Cauchy (1821), „complex“ sowie das Zeichen i von Gauß (1831), welcher der complexen Zahl durch seine graphische Darstellung (Anhang IV.) die Gleichberechtigung erwarb.

Quadrieren und Cubieren, Ausziehen der Quadrat- und der Cubikwurzel.

1. Quadrat und Quadratwurzel.

§. 175. Aufgabe. Eine algebraische Summe zum Quadrat zu erheben.

Man entwickle eine Summe nach folgendem Bildungsgesetze:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes gibt sein eigenes Quadrat.

2. Jedes folgende Glied gibt zwei Bestandtheile: das doppelte Product aus der Summe aller vorangehenden Glieder mit diesem Gliede, und das eigene Quadrat.

Beweis. $(a \pm b)^2 = (a \pm b)\,(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Indem man ein Polynom in ein Binom verwandelt und nun wiederholt das voranstehende Bildungsgesetz anwendet, ergibt sich die allgemeine Giltigkeit der Regel.

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$$
$$(a - b - c)^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 2(a - b)c + c^2.$$

Zusatz. Die zwei Bestandtheile, welche ein Glied der gegebenen Zahl im Quadrat gibt, können auch in einen einzigen zusammengefasst werden, wenn man dieses Glied zu der doppelten Summe der vorhergehenden Glieder addiert und die erhaltene Summe mit diesem Gliede multipliciert; denn

$$2a.b + b^2 = (2a + b).b;$$
$$2(a + b).c + c^2 = [2(a + b) + c].c; \text{ u. s. w.}$$

§. 176. Aufgabe. Eine dekadische Zahl zum Quadrat zu erheben.

Da sich jede dekadische Zahl als ein nach den Potenzen von 10 geordnetes Polynom darstellen läſst, so folgt das Verfahren aus §. 175.

Um z. B. 3417 zum Quadrat zu erheben, hat man

$$3417^2 = (3000 + 400 + 10 + 7)^2 = 3000^2 + 2.3000.400 + 400^2$$
$$+ 2.3400.10 + 10^2 + 2.3410.7 + 7^2;$$

oder, wenn man die Bestandtheile unter einander setzt und entwickelt, sowie mit Berücksichtigung des Stellenwertes die Nullen wegläſst,

3417^2	
3^2	9
2. 3.4	24
4^2	16
2. 34.1	68
1^2	1
2.341.7	4774
7^2	49
	11675889

oder abgekürzt nach §. 175, Zusatz

3417^2				
3^2 ...	9			
64.4 ...	2	56		
681.1 ...		6	81	
6827.7 ...		4	77	89
	11	67	58	89

2. Das Quadrat einer dekadischen ganzen Zahl hat entweder doppelt so viele Ziffern als diese Zahl oder um eine Ziffer weniger.

Beweis. N sei $n$ziffrig also $10^{n-1} < N < 10^n$

somit $10^{2n-2} < N^2 < 10^{2n}$.

N^2 hat also mindestens $2n - 1$ Ziffern und höchstens $2n$ Ziffern.

3. Da $\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 = \frac{a^2}{10^{2n}}$ ist, so erhellt, dass bei einem Decimalbruche das Quadrat auf gleiche Weise wie bei einer dekadischen ganzen Zahl gebildet wird; nur muss man im Quadrate des Zählers doppelt so viele Decimalen abschneiden, als deren der gegebene Decimalbruch enthält.

4. Ein unvollständiger Decimalbruch wird durch abgekürzte Multiplication quadriert.

§. 177. Aufgabe. Aus einer algebraischen Summe die Quadratwurzel auszuziehen.

Aus dem Gesetze (§. 175), nach welchem die Bestandtheile einer mehrgliedrigen Zahl in ihrem Quadrate zusammengestellt erscheinen, lässt sich für das Ausziehen der Quadratwurzel aus einem geordneten Polynom folgendes Verfahren ableiten:

1. Das erste Glied des geordneten Polynoms ist das Quadrat des ersten Wurzelgliedes. Man findet daher das erste Glied der Wurzel, wenn man aus dem ersten Gliede des Radicands die Quadratwurzel auszieht. Das Quadrat des ersten Wurzelgliedes wird von dem Radicand subtrahiert.

2. Die ersten zwei Glieder des Restes enthalten die Bestandtheile, welche aus dem folgenden Gliede der Wurzel hervorgehen, und zwar ist das erste Glied des Restes das Product aus der doppelten bereits gefundenen Wurzel und aus dem folgenden Gliede der Wurzel. Dividiert man daher das erste Glied des Restes durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel, so erhält man das folgende Glied der Wurzel. Man bildet nun die Bestandtheile, welche dieses neue Glied der Wurzel im Quadrate gibt, indem man zu dem Doppelten der früheren Wurzel das neue Glied addiert und die Summe mit diesem Gliede multipliciert, und subtrahiert das Product von dem Reste des Polynoms.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt zuletzt kein Rest, so ist das gegebene Polynom ein vollständiges Quadrat und die erhaltene Quadratwurzel rational; bleibt aber ein Rest übrig, so ist die Wurzel irrational

$$
\begin{array}{lll}
\text{Z. B. } \sqrt{x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 25} = x^2 + 3x - 5 & & \\
\quad -x^4 & & \\
\hline
\quad\quad +6x^3 - x^2 & & :(2x^2 + 3x).3x \\
\quad\quad \pm 6x^3 \pm 9x^2 & & \\
\hline
\quad\quad\quad -10x^2 - 30x + 25 & :(2x^2 + 6x - 5).-5 & \\
\quad\quad\quad \mp 10x^2 \mp 30x \pm 25 & & \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0 & &
\end{array}
$$

§. 178. Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche ein vollständiges Quadrat ist, die Quadratwurzel auszuziehen.

1. Man theile die Zahl von den Einern angefangen in Abtheilungen von je zwei Ziffern, wobei die höchste Abtheilung auch nur eine Ziffer enthalten kann, suche die größte Zahl, deren Quadrat in der höchsten Abtheilung enthalten ist, und schreibe sie als erste Ziffer der Wurzel an. Das Quadrat der ersten Wurzelziffer wird von der höchsten Abtheilung des Radicands subtrahiert.

2. Zu dem Reste setze man die folgende Abtheilung des Radicands herab, dividiere die dadurch gebildete Zahl nach Weglassung ihrer letzten Ziffer durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel und schreibe den Quotienten als neue Ziffer in die Wurzel und zugleich als Ergänzung zu dem Divisor. Den so ergänzten Divisor multipliciere man mit der neuen Wurzelziffer und subtrahiere das Product sogleich während des Multiplicierens von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer.

3. Dieses Verfahren setze man fort, bis alle Abtheilungen des gegebenen Radicands in Rechnung gezogen worden sind.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus §. 176.

Z. B.

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{5|94|38|44} & = & 2438 \\
1\,94 \qquad\quad & : & 44 \\
18\,38 \qquad & : & 483 \\
3\,89\,44 & : & 4868 \\
0 & &
\end{array}
$$

Zusätze. 1. Da $\sqrt{\frac{A}{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{A}}{10^n}$ ist, so folgt, dass man aus einem Decimalbruche die Quadratwurzel nach demselben Verfahren auszieht, wie aus einer ganzen Zahl; nur muss man den Decimalbruch vom Decimalpunkte aus nach rechts und links in Abtheilungen von je zwei Stellen theilen und in der Wurzel den Decimalpunkt setzen, bevor die erste Abtheilung von Decimalen in Rechnung gezogen wird.

Z. B.

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{1|52\cdot27|56} & = & 12\cdot34 \\
52 \qquad\quad & : & 22 \\
8\,27 \qquad & : & 243 \\
98\,56 & : & 2464 \\
0 & &
\end{array}
$$

2. Um aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, zieht man dieselbe aus Zähler und Nenner.

Z. B. $\sqrt{\frac{144}{529}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{529}} = \frac{12}{23}.$

§. 179. Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche kein vollständiges Quadrat ist, die Quadratwurzel zu ziehen.

Ist die ganze Zahl a kein vollständiges Quadrat, so ist $\sqrt{a}$ nach §. 152 irrational und läßt sich nur näherungsweise bestimmen. Man ziehe dabei aus a auf die in §. 178 angegebene Weise die Quadratwurzel, bis die letzte Abtheilung in Rechnung gezogen ist, setze dann nach der zuletzt erhaltenen Wurzelziffer den Decimalpunkt und rechne auf dieselbe Art weiter, indem man jedem Reste für die folgende Abtheilung zwei Nullen anhängt. Die Rechnung wird so lange fortgesetzt, bis man die gewünschte Anzahl von Decimalstellen erhalten hat.

Beweis. Multipliciert man die ganze Zahl a mit 10^{2m}, d. h. hängt man derselben m mal zwei Nullen an, und ist b die größte ganze Zahl, welche in $\sqrt{a \cdot 10^{2m}}$ enthalten ist, also

$$b < \sqrt{a \cdot 10^{2m}} < b + 1, \text{ oder } b < 10^m \cdot \sqrt{a} < b + 1, \text{ so ist}$$

$$\frac{b}{10^m} < \sqrt{a} < \frac{b+1}{10^m}.$$

$\sqrt{a}$ liegt demnach zwischen den Brüchen $\frac{b}{10^m}$ und $\frac{b+1}{10^m}$, deren Differenz $\frac{1}{10^m}$ ist; folglich ist der Fehler, den man begeht, wenn $\sqrt{a} = \frac{b}{10^m}$ gesetzt wird, kleiner als $\frac{1}{10^m}$, somit kleiner als eine Einheit der letzten berechneten Decimalstelle.

Z. B.

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3|50} & = & 18 \cdot 708.. \\ 250 & : & 28 \\ 2600 & : & 367 \\ 310000 & : & 37408 \\ 10736 & & \end{array}$$

Zusätze. 1. Auf gleiche Weise wird auch beim Quadratwurzel-Ausziehen aus einem Decimalbruche, welcher kein vollständiges Quadrat ist, die Rechnung beliebig weit fortgesetzt, indem man zunächst in der letzten Abtheilung rechts, wenn sie nur eine Ziffer enthalten sollte, die fehlende durch eine Null ergänzt und dann dem übrig gebliebenen, sowie jedem folgenden Reste zwei Nullen anhängt.

Bei periodischen Decimalbrüchen treten selbstverständlich die entsprechenden Ziffern der Periode an die Stelle der anzuhängenden Nullen.

2. Um aus einem gemeinen Bruche, dessen Zähler und Nenner nicht Quadratzahlen sind, die Quadratwurzel auszuziehen, verwandelt man ihn entweder in einen solchen Bruch, dessen Nenner eine Quadratzahl ist, und zieht dann die Wurzel aus Zähler und Nenner; oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch und zieht dann aus diesem die Quadratwurzel.

§. 180. Abgekürztes Verfahren beim Ausziehen der Quadratwurzel.

Hat man von der Quadratwurzel einer Zahl nach dem gewöhnlichen Verfahren die ersten m Ziffern gefunden, so braucht man, um noch $m-1$ weitere richtige Wurzelziffern zu erhalten, nur den letzten Rest durch die doppelte bereits gefundene Wurzel zu dividieren.

In der Ausführung wird dabei die abgekürzte Division angewendet und im Divisor sogleich die letzte Ziffer weggelassen.

Beweis. Bezeichnet a den Radicand und b die bereits gefundenen ersten m Ziffern der Quadratwurzel, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit die ersten m Abtheilungen in a, und daher auch die mziffrige Zahl b als Ganze annehmen, weil es für die Ziffernfolge der Wurzel gleichgiltig ist, nach welcher Abtheilung des Radicands man den Decimalpunkt setzt; dann werden die weiter folgenden Wurzelziffern Decimalen vorstellen.

Setzt man nun $\sqrt{a} = b + x$, wo x den noch fehlenden Theil der Wurzel ausdrückt, so muss

$$(b+x)^2 = a, \text{ oder } b^2 + 2bx + x^2 = a, \text{ daher}$$

$$2bx = a - b^2 - x^2 \text{ und } x = \frac{a-b^2}{2b} - \frac{x^2}{2b}$$

sein. Wenn nun für x der Quotient $\frac{a-b^2}{2b}$, wo $a - b^2$ den letzten bei der Wurzelausziehung gebliebenen Rest und $2b$ die doppelte bereits gefundene Wurzel bedeutet, gesetzt wird, so ist der Fehler, den man begeht, gleich $\frac{x^2}{2b}$. Aber $x < 1$ und $b \geqq 10^{m-1}$, daher $\frac{x^2}{2b}$ jedenfalls kleiner als $\frac{1}{10^{m-1}}$; woraus folgt, dass der Quotient $\frac{a-b^2}{2b}$ mindestens $m-1$ weitere richtige Wurzelziffern gibt.

Zusätze. 1. Wenn aus einer ganzen Zahl oder einem vollständigen Decimalbruche die Quadratwurzel mit $2m-1$ geltenden Ziffern zu bestimmen ist, so sucht man bezüglich nur die ersten m Ziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren der Quadratwurzel-Ausziehung die folgenden $m-1$ aber nach der obigen Vorschrift durch die abgekürzte Division.

Hat man z. B. $\sqrt{138}$ auf 5 Decimalstellen genau, also im ganzen mit 7 geltenden Ziffern zu bestimmen, so sucht man die ersten 4 Ziffern durch das Radicieren, die letzten 3 durch die abgekürzte Division. Die Rechnung steht:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{1|38} & = & 11\cdot74734\ldots \\
38 & : & 21 \\
1700 & : & 227 \\
11100 & : & 2344 \\
1724 & : & 2_{,}3_{,}4_{,}8 \\
80 & & \\
10 & & \\
1 & &
\end{array}$$

2. Dasselbe abgekürzte Verfahren findet insbesondere auch beim Ausziehen der Quadratwurzel aus einem unvollständigen Decimalbruche statt. Man findet durch dieses Verfahren, wenn der Radicand m geltende Abtheilungen hat, in der Wurzel im ungünstigsten Falle $2m - 1$ verlässliche geltende Ziffern.

2. Cubus und Cubikwurzel.

§. 181. Aufgabe. Eine algebraische Summe zum Cubus zu erheben.

Man entwickle eine Summe nach folgendem Gesetze:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes gibt seinen eigenen Cubus.

2. Jedes folgende Glied liefert drei Bestandtheile: das dreifache Quadrat der Summe aller vorangehenden Glieder multipliciert mit diesem Gliede, die dreifache Summe aller vorangehenden Glieder multipliciert mit seinem Quadrate, und seinem eigenen Cubus.

Beweis. $(a \pm b)^3 = (a \pm b)^2 (a \pm b) = (a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b)$
$= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$

Die weitere Begründung ist ähnlich wie im §. 175.

§. 182. Aufgabe. Eine dekadische Zahl zum Cubus zu rheben.

Das Verfahren folgt aus §. 181.

Um z. B. den Cubus von $4213 = 4000 + 200 + 10 + 3$ zu bestimmen, hat man, wenn die Nullen mit Beachtung des Stellenwertes weggelassen werden, folgende Rechnung:

4213^3

4^3....	64			
$3.\ 4^2.2$	9	6		
$3.\ 4\ .2^2$....		48		
2^3....		8		
$3.\ 42^2.1$		529	2	
$3.\ 42\ .1^2$....		1	26	
1^3....			1	
$3.421^2.3$		159	516	9
$3.421\ .3^2$....			113	67
3^3....				27
	74	778	091	597

Zusätze. 1. Der Cubus einer dekadischen ganzen Zahl hat entweder dreimal so viele Ziffern als diese Zahl oder um zwei Ziffern oder um eine weniger.

Beweis analog wie zu §. 176, Zusatz 2.

2. Da $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$ ist, so folgt, dass man bei Decimalbrüchen vom Cubus des Zählers 3mal so viele Decimalen abschneiden müsse, als deren der gegebene Decimalbruch hat.

3. Den Cubus eines unvollständigen Decimalbruches bildet man durch abgekürzte Multiplication.

§. 183. Aufgabe. Aus einer algebraischen Summe die Cubikwurzel zu ziehen.

1. Man ziehe die Cubikwurzel aus dem ersten Gliede des geordneten Radicands; diese ist das erste Glied der Wurzel. Der Cubus des ersten Wurzelgliedes wird von dem Radicand subtrahiert.

2. Man dividiere das erste Glied des Restes durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel; der Quotient ist das folgende Glied der Wurzel. Man bilde dann die Bestandtheile, welche dieses neue Glied der Wurzel im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat des bereits gefundenen Wurzeltheiles multipliciert mit dem neuen Gliede, das Dreifache des vorhergehenden Wurzeltheiles multipliciert mit dem Quadrate des neuen Gliedes und den Cubus dieses Gliedes, und subtrahiere die Summe dieser drei Bestandtheile von dem früheren Reste des Radicands.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt zuletzt kein Rest übrig, so ist die Cubikwurzel rational; bleibt ein Rest, so ist sie irrational.

Die Ableitung dieses Verfahrens aus §. 181 geschieht auf ähnliche Weise, wie im §. 177 das Verfahren der Quadratwurzel-Ausziehung aus Polynomen aus §. 175 hergeleitet wurde

Beispiel.

$$\sqrt[3]{[y^6 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 + 63y^2 - 54y + 27]} = y^2 - 2y + 3$$

$$\begin{array}{l}
y^6 \\
\hline
-6y^5 + 21y^4 - 44y^3 \quad : \quad 3y^4 \\
-6y^5 + 12y^4 - 8y^3 \\
\hline
+ 9y^4 - 36y^3 + 63y^2 - 54y + 27 : 3y^4 - 12y^3 + 12y^2 \\
+ 9y^4 - 36y^3 + 36y^2 \\
\qquad + 27y^2 - 54y + 27 \\
\hline
0
\end{array}$$

§. 184. Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche ein vollständiger Cubus ist, die Cubikwurzel auszuziehen.

1. Man theile die Zahl von den Einern angefangen gegen die Linke in Abtheilungen von je drei Ziffern, wobei die höchste Abtheilung auch nur zwei oder eine Ziffer haben kann, suche die größte Zahl, deren Cubus in der höchsten Abtheilung vorkommt, und schreibe sie als erste Ziffer in die

Cubikwurzel. Den Cubus der ersten Wurzelziffer subtrahiere man von der ersten Abtheilung des Radicands.

2. Zu dem Reste setze man die nachfolgende Abtheilung herab, dividiere dann die dadurch entstandene Zahl mit Weglassung der letzten zwei Ziffern durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel und schreibe den Quotienten als neue Ziffer in die Wurzel. Dann bilde man die Bestandtheile, welche diese neue Wurzelziffer im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit der neuen Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multipliciert mit dem Quadrate dieser neuen Ziffer, und ihrem Cubus; schreibe den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter gegen die Rechte und subtrahiere die Summe der so angesetzten Bestandtheile von dem Dividend mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man alle Abtheilungen des Radicands in Rechnung gezogen hat.

Die Richtigkeit des Verfahrens beruht auf §. 182.

Z. B.	$\sqrt[3]{78\vert 953\vert 589} = 429$	
	64	
	149,53	: 48 . . . 3 . 4^2
$3 \cdot 4^2 \cdot 2$ . . .	96 . .	
$3 \cdot 4 \cdot 2^2$ . . .	48 .	
2^3 . . .	8	
	48655,89	: 5292 . . . $3 \cdot 42^2$
$3 \cdot 42^2 \cdot 9$ . . .	47628 . .	
$3 \cdot 42 \cdot 9^2$ . . .	10206 .	
9^3 . . .	729	
	0	

Zusatz. Wie man beim Ausziehen der Cubikwurzel aus einem Decimal- oder einem gemeinen Bruche zu verfahren habe, ersieht man leicht aus dem für das Quadratwurzel-Ausziehen in §. 178, Zusatz 1 und 2, angegebenen Verfahren.

§. 185. Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche kein vollständiger Cubus ist, die Cubikwurzel zu ziehen.

Ist der Radicand keine dritte Potenz einer ganzen Zahl, so ist die Cubikwurzel irrational und kann nur näherungsweise berechnet werden. Das dabei anzuwendende Verfahren entspricht demjenigen, das wir in §. 179 für die Quadratwurzel-Ausziehung aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche kein Quadrat ist, angegeben haben; nur müssen hier den einzelnen Resten für jede Abtheilung drei Nullen angehängt werden.

Zusatz. Auch bezüglich der Vorschrift für das Ausziehen der Cubikwurzel aus Decimal- oder gemeinen Brüchen, welche nicht vollständige Cubikzahlen sind, verweisen wir auf die analogen Bemerkungen in Zus. 1 und 2 zu §. 179.

§. 186. Abgekürztes Verfahren beim Ausziehen der Cubikwurzel.

Wenn man von der Cubikwurzel einer Zahl nach dem gewöhnlichen Verfahren die ersten m Ziffern berechnet hat, so erhält man noch $m - 1$ weitere verlässliche Ziffern, indem man den letzten Rest durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel dividiert.

Beweis. Es sei a der Radicand und b bezeichne die bereits berechneten ersten m Ziffern der Cubikwurzel, wobei b ohne Änderung der noch fehlenden Wurzelziffern als eine ganze Zahl vorausgesetzt werden darf.

Setzt man $\sqrt[3]{a} = b + x$, wo x die weiter folgenden Ziffern der Wurzel bedeutet, so ist

$$(b + x)^3 = a, \text{ oder } b^3 + 3b^2x + 3bx^2 + x^3 = a, \text{ daher}$$

$$3b^2x = a - b^3 - 3bx^2 - x^3, \text{ und } x = \frac{a - b^3}{3b^2} - \frac{x^2}{b} - \frac{x^3}{3b^2},$$

wobei $a - b^3$ der letzte bei der Wurzelausziehung gebliebene Rest, und $3b^2$ das dreifache Quadrat der bisher gefundenen Wurzel ist.

Der Fehler, welcher begangen wird, wenn man für x den Quotienten $\frac{a - b^3}{3b^2}$ setzt, ist demnach $\frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{3b^2}$ wo $x < 1$ und $b \geqq 10^{m-1}$ ist, so dass bei der Beurtheilung des Fehlers das Glied $\frac{x^3}{3b^2}$ als gegen $\frac{x^2}{b}$ verschwindend gar nicht in Betracht kommt; $\frac{x^2}{b}$ ist aber kleiner als $\frac{1}{10^{m-1}}$, also wird x durch den Quotienten $\frac{a - b^3}{3b^2}$ auf $m - 1$ Ziffern genau bestimmt.

Ist z. B. $\sqrt[3]{0{\cdot}083066534}$ auf 5 Decimalen genau zu bestimmen, so sucht man die ersten drei Ziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren der Cubikwurzel-Ausziehung, die zwei folgenden durch die abgekürzte Division.

Zusatz. Durch das voranstehende Verfahren erhält man in der Cubikwurzel eines unvollständigen Decimalbruches $2m - 1$ verlässliche Ziffern, wenn der Radicand m geltende Abtheilungen zu drei Ziffern hat.

III. Logarithmen.

1. Von den Logarithmen überhaupt.

§. 187. Dem Potenzieren entsprechen zwei inverse Operationen, das Radicieren und das Logarithmieren, je nachdem die Basis oder der Exponent gesucht wird, da diese beiden nicht commutiert werden können.

Erklärung. Eine Zahl a in Bezug auf eine andere Zahl b logarithmieren heißt, den Potenzexponenten suchen, mit welchem b als Basis potenziert werden muss, um a als Potenz zu geben. Die Zahl b ist die Grundzahl oder Basis, die als Potenz gegebene Zahl a heißt der Logarithmand oder geradezu die Zahl (Numerus), und der gesuchte Potenzexponent der Logarithmus. Ist $a = b^n$, so ist n der Logarithmus der Zahl a für die Basis b; man hat dafür die Bezeichnung $^b\log a = n$ (gelesen „Logarithmus von a zur Basis b', oder „b — Logarithmus von a").

Werden die Logarithmen durchgängig auf eine bestimmte Basis, z. B. 10, bezogen, so schreibt man statt des letzten Ausdruckes kürzer $\log a = n$, wobei die Basis 10 als bekannt vorausgesetzt wird.

Der b — Logarithmus einer Zahl a ist also diejenige Zahl n, mit welcher b potenziert werden muss, um a zu erhalten.

§. 188. Folgesätze. 1. (**Definitionsformel.**) Potenziert man die Basis mit dem Logarithmus, so erhält man den Numerus.

$$b^{^b\log a} = a.$$

2. Der Logarithmus einer Potenz der Basis ist gleich dem Potenzexponenten.

$$^b\log (b^n) = n.$$

speciell: a) Der Logarithmus der Basis ist gleich 1.

$$^b\log b = 1; \text{ denn } b^1 = b.$$

b) Der Logarithmus von 1 ist für jede Basis gleich 0.

$$^b\log 1 = 0; \text{ denn } b^0 = 1.$$

3. Für eine positive Basis hat eine negative Zahl keinen reellen Logarithmus.

Denn sowohl b^{+n} als $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ gibt ein positives Resultat.

§. 189. Die geordnete Zusammenstellung der Logarithmen der in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Zahlen für eine bestimmte Basis bildet ein logarithmisches System.

Da durch das Potenzieren einer reellen negativen Zahl nicht alle möglichen positiven Zahlen erzeugt werden können, jede Potenz von 1 aber wieder 1 ist, so kann nur eine reelle positive und von 1 verschiedene Zahl als Basis eines Logarithmensystems angenommen werden.

Im Gebrauche sind nur zwei logarithmische Systeme, nämlich das gemeine, Briggs'sche oder dekadische für die Basis 10, und das natürliche oder Neper'sche für die irrationale Basis 2·718281828..., welche man aus der Summierung der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots$$

erhält und gewöhnlich mit dem Buchstaben e bezeichnet.

Allgemeine Sätze über die Logarithmen.

§. 190. Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Factoren.

Es sei für die Basis b

$$\log M = m,\ \log N = n,\ \log P = p, \text{ also}$$
$$M = b^m,\ N = b^n,\ P = b^p; \text{ dann ist}$$
$$MNP = b^{m+n+p}; \text{ d. i.}$$
$$\log MNP = m + n + p, \text{ oder}$$
$$\log MNP = \log M + \log N + \log P.$$

Z. B. $\log 6 = \log 2 + \log 3.$

$\log 30 = \log 2 + \log 3 + \log 5.$

Sind für eine Basis die Logarithmen aller Primzahlen bekannt, so lassen sich aus denselben durch bloße Addition auch die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen ableiten.

2. Der Logarithmus eines Bruches (Quotienten) ist gleich dem Logarithmus des Zählers weniger dem Logarithmus des Nenners.

Es sei für die Basis b

$$\log M = m,\ \log N = n; \text{ also } M = b^m,\ N = b^n;$$

dann ist

$$\frac{M}{N} = b^{m-n}, \text{ folglich } \log \frac{M}{N} = m - n = \log M - \log N.$$

Z. B. $\log \frac{29}{31} = \log 29 - \log 31.$

$\log 35{\cdot}29 = \log \frac{3529}{100} = \log 3529 - \log 100.$

3. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Basis multipliciert mit dem Potenzexponenten.

Es sei für die Basis b, $\log M = m$, also $M = b^m$; dann ist $M^p = b^{mp}$, und daher

$$\log M^p = mp = p \log M.$$

Z. B. $\log 8^3 = 3 \log 8.$

$\log (2a)^3 = 3 \log 2a = 3 (\log 2 + \log a).$

$\log \frac{x^2 y}{(mn)^4} = 2 \log x + \log y - 4 (\log m + \log n).$

4. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radicands dividiert durch den Wurzelexponenten.

Es sei für die Basis b, $\log M = m$, also $M = b^m$; dann ist $\sqrt[p]{M} = \sqrt[p]{b^m} = b^{\frac{m}{p}}$, daher

$$\log \sqrt[p]{M} = \frac{m}{p} = \frac{\log M}{p}.$$

z. B. $\log \sqrt[3]{75} = \frac{\log 75}{3}$

$$\log \sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\log \frac{a}{b}}{5} = \frac{\log a - \log b}{5}$$

$$\log \frac{a\sqrt[3]{x^2}}{y} = \log a + \tfrac{2}{3} \log x - \log y.$$

§. 191. Wenn in der Gleichung $b^n = a$ b eine reelle, von Null verschiedene, positive Zahl ist, dann gehört nach der Lehre von den Potenzen zu jedem reellen Werte von n ein einziger positiver Wert von a. Somit ist das Logarithmieren eben so wie das Potenzieren eine eindeutige Rechenoperation. Ist b auch noch größer als 1, was bei den gebräuchlichen Systemen der Fall ist, dann sind somit nach §. 145, 3 die Zahlen und ihre Logarithmen einander eindeutig wachsend zugeordnet; d. h. für diese Basis gehört

a) zu jeder Zahl ein bestimmter Logarithmus,

b) zu gleichen Zahlen gleiche Logarithmen,

c) zur größeren Zahl der größere Logarithmus.

Ebenso gelten die Umkehrungen.

Zusatz. Aus dieser Darstellung folgt unmittelbar, dass dieselbe Zahl für verschiedene Basen auch verschiedene Logarithmen hat.

§. 192. Der Quotient der Logarithmen derselben Zahl für zwei verschiedene Basen ist constant.

Beweis. Ist ${}^a\log N = x$, also $a^x = N$, so erhält man, wenn man in der zweiten Gleichung beiderseits die Logarithmen in Bezug auf eine andere Basis b nimmt,

$$x \,.\, {}^b\log a = {}^b\log N \text{ oder}$$

$${}^a\log N \,.\, {}^b\log a = {}^b\log N \text{ folglich:}$$

$$\frac{{}^a\log N}{{}^b\log N} = \frac{1}{{}^b\log a}$$

oder $${}^a\log N = {}^b\log N \,.\, \frac{1}{{}^b\log a}.$$

Sind die Logarithmen der Zahlen für die Basis b bekannt, so kann man aus denselben auch die Logarithmen für jede andere Basis a bestimmen, wenn man die ersteren mit dem beständigen Factor $\frac{1}{{}^b\log a}$, d. i. mit dem reciproken Werte des Logarithmus der neuen Basis in Bezug auf die frühere Basis multipliciert. Die Zahl, mit welcher die Logarithmen eines Systems multipliciert werden müssen, um die Logarithmen eines andern Systems zu erhalten, heißt der Modulus des neuen Systems in Bezug auf das ursprüngliche. Der Modulus des Briggs'schen Systems in Bezug auf das natürliche ist $\frac{1}{{}^e\log 10} = 0 \cdot 4342945\ldots$

2. Von den Briggs'schen Logarithmen.

§. 193. Der Briggs'sche Logarithmus wird statt mit ${}^{10}\log$ einfach mit log bezeichnet.

1. Die Briggs'schen Logarithmen aller Zahlen, welche größer als 1 sind, sind positiv; die Briggs'schen Logarithmen aller positiven Zahlen, welche kleiner als 1 sind, sind negativ.

Beweis. $\log 1 = o$ und $\log a = n$.

Aus $a > 1$ folgt nach §. 191 $n > o$.

" $a < 1$ " " " $n < o$.

2. Der Briggs'sche Logarithmus einer ganzen oder gebrochenen Zahl, welche eine dekadische Einheit ist, ist eine ganze Zahl.

Folgt aus §. 188, 2.

3. Der Briggs'sche Logarithmus einer ganzen oder gebrochenen Zahl, welche keine dekadische Einheit ist, ist eine irrationale Zahl.

Beweis. a) Ist N keine dekadische Einheit, sondern zwischen zwei auf einander folgenden dekadischen Einheiten 10^n und 10^{n+1} enthalten, wo n eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null bedeutet, so liegt der Logarithmus von N zwischen n und $n + 1$, und ist somit keine ganze Zahl. Er kann aber auch kein Bruch sein. Denn wäre $\log N = \frac{\pm p}{q}$, wo p und q relative Primzahlen seien, so müsste $10^{\frac{\pm p}{q}} = N$, oder $10^{\pm p} = N^q$ sein. Damit jedoch diese Gleichung möglich sei, müssten $10^{\pm p}$ und N^q aus denselben Primfactoren bestehen; es dürfte also N keine anderen Factoren als 2 und 5, bezüglich $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$, und müsste auch beide in gleicher Anzahl enthalten; dann aber wäre N selbst eine dekadische Einheit, was der Voraussetzung widerspricht. Es kann demnach log N, wenn N keine dekadische Einheit ist, weder durch eine ganze Zahl noch durch einen Bruch genau dargestellt werden.

b) Der Logarithmus von N läßt sich zwischen zwei Brüche als Grenzen einschließen, deren Differenz beliebig klein gemacht werden kann, er ist also irrational.

Bildet man N^q, so muss diese Zahl zwischen zwei auf einander folgenden Potenzen von 10 liegen.

Es sei also $10^p < N^q < 10^{p+1}$,

somit $10^{\frac{p}{q}} < N < 10^{\frac{p+1}{q}}$

$$\frac{p}{q} < \log N < \frac{p+1}{q}.$$

Da q beliebig groß gewählt werden kann, so läßt sich die Differenz beider Grenzen $\frac{1}{q}$ beliebig klein machen. Zugleich stellt jede Grenze einen Näherungswert dar, welcher einen Fehler besitzt, der kleiner ist als $\frac{1}{q}$.

Beispiel. Man findet: $2^{20} = 1043576$ und weiter durch abgekürzte Multiplication $2^{40} = 2^{20} \times 2^{20} = 109951\underline{1}6 \times 10^{5}$,

$$2^{80} = 2^{40} \times 2^{40} = 120892\underline{6} \times 10^{18} \text{ und}$$

$$2^{100} = 2^{80} \times 2^{20} = 12676\underline{5} \times 10^{25} \text{ somit, da}$$

$$10^{5} < 126765 < 10^{6},$$

$$10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$$

$$10^{0 \cdot 30} < 2 < 10^{0 \cdot 31}$$

$$0 \cdot 30 < \log 2 < 0 \cdot 31.$$

§. 194. Aufgabe. Von einer gegebenen Zahl den Briggs'schen Logarithmus zu berechnen. (Methode von Abel Bürja. 1786.)

Durch wiederholtes Ausziehen der Quadratwurzel berechnet man die Zahlen der folgenden Tabelle.

$10^{0 \cdot 5} = 3 \cdot 162278$	$10^{0 \cdot 000488} = 1 \cdot 001125$
$10^{0 \cdot 25} = 1 \cdot 778279$	$10^{0 \cdot 000244} = 1 \cdot 000562$
$10^{0 \cdot 125} = 1 \cdot 333521$	$10^{0 \cdot 000122} = 1 \cdot 000281$
$10^{0 \cdot 0625} = 1 \cdot 154782$	$10^{0 \cdot 000061} = 1 \cdot 000141$
$10^{0 \cdot 03125} = 1 \cdot 074608$	$10^{0 \cdot 000031} = 1 \cdot 000070$
$10^{0 \cdot 015625} = 1 \cdot 036633$	$10^{0 \cdot 000015} = 1 \cdot 000035$
$10^{0 \cdot 007813} = 1 \cdot 018152$	$10^{0 \cdot 000008} = 1 \cdot 000018$
$10^{0 \cdot 003906} = 1 \cdot 009035$	$10^{0 \cdot 000004} = 1 \cdot 000009$
$10^{0 \cdot 001953} = 1 \cdot 004507$	$10^{0 \cdot 000002} = 1 \cdot 000004$
$10^{0 \cdot 000976} = 1 \cdot 002251$	$10^{0 \cdot 000001} = 1 \cdot 000002$

Mit Hilfe dieser Tabelle wird der Logarithmus einer zwischen 1 und 10 liegenden Zahl z. B. von 1·3 in folgender Weise berechnet. Man dividiert 1·3 durch die nächst kleinere Zahl der obigen Tabelle, den Quotienten wiederum durch die nächst kleinere Zahl u. s. w. Daher ist 1·3 gleich dem Producte der auf einander folgenden Divisoren und des letzten zu vernachlässigenden Quotienten.

$$1 \cdot 3 = 1 \cdot 154782 \,.\, 1 \cdot 074608 \,.\, 1 \cdot 036633 \,.\, 1 \cdot 009035 \,.\, 1 \cdot 001125 \,.\, 1 \cdot 000281$$
$$.\, 1 \cdot 000070 \,.\, 1 \cdot 000009 \,.\, 1 \cdot 000004 \,.\, (1 \cdot 000001) \text{ somit}$$

$$\log 1 \cdot 3 = 0 \cdot 0625 + 0 \cdot 03125 + 0 \cdot 015625 + 0 \cdot 003906 + 0 \cdot 000488$$
$$+ 0 \cdot 000122 + 0 \cdot 000031 + 0 \cdot 000015 + 0 \cdot 000004 +$$
$$0 \cdot 000002 = 0 \cdot 11394 \ldots \text{ (auf 5 Decimalen genau).}$$

Zusatz. Jede Zahl, welche nicht zwischen 1 und 10 liegt, verwandelt man in ein Product aus einer derartigen Zahl und einer Potenz von 10. Z. B. $13 = 10 \,.\, 1 \cdot 3$ somit $\log 13 = 1 + \log 1 \cdot 3 = 1 \cdot 11394$.

§. 195. Da im Briggs'schen Systeme mit Ausnahme der dekadischen Einheiten alle übrigen positiven Zahlen positive oder negative, irrationale

Logarithmen haben, so kann jeder Logarithmus als die algebraische Summe aus einer positiven oder negativen ganzen Zahl und einem positiven Decimalbruche, welcher kleiner als 1 ist, dargestellt werden. Man nennt die positive oder negative ganze Zahl die Charakteristik oder Kennziffer, den positiven echten Decimalbruch die Mantisse.

Um einen negativen Logarithmus auf die erwähnte Form zu bringen, subtrahiert man seinen absoluten Wert von der nächst größeren ganzen Zahl und fügt diese als negative Kennziffer hinzu, entsprechend der Gleichung $-b = (a - b) - a$.

Z. B. $\quad -2{\cdot}34467 = 3 - 2{\cdot}34467 - 3.$

$$= \quad 0{\cdot}65533 - 3.$$

§. 196. Die Charakteristik des Briggs'schen Logarithmus einer dekadischen Zahl ist gleich dem Rangexponenten der höchsten Ziffer dieser Zahl.

Es sei n der Rangexponent der höchsten Ziffer der Zahl a, wobei n eine ganze positive oder negative Zahl oder auch die Null bezeichnen kann; dann ist

$$10^n \overline{\gtrless} a < 10^{n+1}$$

$$n \overline{\gtrless} \log a < n + 1.$$

Es ist also $\log a = n + \alpha$, wo α positiv und < 1 oder auch Null ist; folglich ist n die Charakteristik des Logarithmus von a.

Folgesätze. a) Die Charakteristik des Logarithmus einer Zahl, welche Ganze enthält, ist positiv und um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen, welche die Ganzen einnehmen (§. 64, Folges. 1).

b) Die Charakteristik des Logarithmus eines echten Decimalbruches ist negativ und absolut genommen gleich der Anzahl aller Nullen, welche den geltenden Decimalziffern vorangehen, die Null vor dem Decimalpunkte mitgezählt (§. 148, 1).

§. 197. Wenn man irgend eine Zahl mit einer Potenz von 10 multipliciert oder durch eine Potenz von 10 dividiert, so wird dadurch in ihrem Briggs'schen Logarithmus nur die Charakteristik geändert, während die Mantisse dieselbe bleibt.

Es ist $\quad \log (a \,.\, 10^m) = \log a + \log 10^m = \log a + m,$

$$\log \frac{a}{10^m} = \log a - \log 10^m = \log a - m.$$

Es wird also der Logarithmus von a um die ganze Zahl m im ersten Falle vermehrt, im zweiten vermindert, d. h. er erhält eine andere Charakteristik, während die Mantisse ungeändert bleibt.

So ist z. B. $\quad \log 7124 = 3{\cdot}85272$; daher

$$\log 712400 = \log 7124 + \log 100 = 3{\cdot}85272 + 2 = 5{\cdot}85272;$$
$$\log 71{\cdot}24 = \log 7124 - \log 100 = 3{\cdot}85272 - 2 = 1{\cdot}85272.$$

Folgesatz. Die Mantisse eines Logarithmus hängt bloß von der Ziffernfolge der Zahl ohne Rücksicht auf deren Rang ab.

Logarithmentafeln.

§. 198. Die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000 oder von 1 bis 100000, und zwar erstere auf 5 oder 6, letztere auf 7 Decimalen berechnet, hat man in besonderen Tafeln, welche Logarithmentafeln heißen, zusammengestellt. Diese enthalten nur die Mantissen der Logarithmen, da die Charakteristik in jedem Falle nach §. 196 bestimmt werden kann.

Mit Hilfe solcher Tafeln findet man zu jeder Zahl den entsprechenden Logarithmus, und umgekehrt zu jedem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl.

Mit Benützung einer Tafel, welche die Logarithmen aller vierziffrigen Zahlen enthält, kann man auch den Logarithmus einer fünfziffrigen Zahl ermitteln. Dazu dient folgender Satz, für welchen an dieser Stelle ein Beweis nicht gegeben werden kann, von dessen Richtigkeit man sich aber mittelst der Logarithmentafel überzeugen kann.

Für große Zahlen ist der Zuwachs des Logarithmus proportional dem Zuwachs des Numerus.

Es seien b und c verhältnismäßig klein gegen a; dann ist

$$\frac{\log (a+c) - \log a}{\log (a+b) - \log a} = \frac{c}{b},$$

somit: $\log (a+c) = \log a + d \cdot \frac{c}{b}$, wenn $d = \log (a+b) - \log a$ ist.

Beispiel. Es ist log 3021·2 zu bestimmen. Man entnimmt der Tafel log 3021 = 3·48015, subtrahiert diesen Logarithmus von dem nächst höheren und erhält d = 14 Einheiten der letzten Stelle.

Wächst der Numerus um			1	so wächst der Logarithmus um			14	Einh. d. 5. St.			
„	„	„	0·1	„	„	„	1·4	„	„	„	„
„	„	„	0·2	„	„	„	1·4×2	„	„	„	„

Der aufgeschlagene Logarithmus ist also um 2·8 = 3 (corr.) zu vermehren. log 3021·2 = 3·48018.

§. 199. Rechnungsoperationen mit den Briggs'schen Logarithmen.

In Beziehung auf die Rechnungsoperationen mit Logarithmen sind im allgemeinen dieselben Regeln zu beobachten, wie für dekadische Zahlen überhaupt; nur hat man dabei noch Folgendes zu berücksichtigen:

1. Erhält man beim Addieren der Logarithmen zwei Charakteristiken, eine positive und eine negative, so werden diese in eine einzige zusammengezogen. Z. B.

$$\begin{array}{l} 3\cdot 10589 \\ 2\cdot 56814 \\ 0\cdot 21340 - 2 \\ \underline{0\cdot 08105 - 4} \\ 5\cdot 96848 - 6 = 0\cdot 96848 - 1. \end{array}$$

2. Ist beim Subtrahieren der Minuend kleiner als der Subtrahend, so addiere man, um im Reste eine negative Mantisse zu vermeiden, zu dem Minuend so viele positive Einheiten, dass er größer wird als der Subtrahend, und setze dann auch als Charakteristik des Restes so viele negative Einheiten. Auch beachte man, dass eine negative Kennziffer des Subtrahends infolge der Subtraction positiv wird.

Z. B. 1.
$$\begin{array}{rl} +4 & -3 \\ \cancel{1}\cdot45025 & \\ 3\cdot57892 & \\ \hline 0\cdot87133 & -3. \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rl} +1 & \\ 0\cdot23020 & -\cancel{1} \\ 0\cdot83410 & \mp \cancel{2} \\ \hline 0\cdot39617. & \end{array}$$

3. Wird ein Logarithmus mit negativer Charakteristik mit einer Zahl multipliciert, so muss im Producte die neue negative Charakteristik mit der etwa erhaltenen positiven zusammengezogen werden. Z. B.

$$\begin{aligned}(0\cdot53115 - 2) \times 5 &= 2\cdot65575 - 10 \\ &= 0\cdot65575 - 8.\end{aligned}$$

4. Ist ein Logarithmus mit negativer Charakteristik durch eine Zahl zu dividieren, so muss die negative Charakteristik, wenn sie durch diese Zahl nicht theilbar ist, um so viele Einheiten vergrößert werden, dass sie dadurch theilbar wird; eben so viele Einheiten müssen aber dann auch als Ganze zu der positiven Mantisse gesetzt werden. Z. B.

$$\begin{aligned}(0\cdot41509 - 7):5 &= (3\cdot41509 - 10):5 \\ &= 0\cdot68302 - 2.\end{aligned}$$

§. 200. Anwendung der Briggs'schen Logarithmen.

Durch die allgemeinen Sätze, die in §. 190 entwickelt wurden, ist man imstande, die Multiplication in eine Addition, die Division in eine Subtraction, das Potenzieren in eine Multiplication und das Radicieren in eine Division zu verwandeln.

Kommen unter den gegebenen Zahlen negative vor, so betrachtet man sie einstweilen als absolute Zahlen, führt damit die Rechnung durch und bestimmt das Vorzeichen nachträglich in dem gefundenen Resultate.

1. Multiplication der Zahlen mit Hilfe der Logarithmen. Bestimme das Product $x = 1\cdot0954 \,.\, 0\cdot91567 \,.\, (-\,3\cdot1571) \,.\, 1\cdot00782$

Es ist
$$\begin{array}{ll} \log 1\cdot0954 & = 0\cdot03957 \\ \log 0\cdot91567 & = 0\cdot96174 - 1 \\ \log 3\cdot1571 & = 0\cdot49928 \\ \log 1\cdot00782 & = 0\cdot00338 \\ \hline & = 0\cdot50397 \end{array}$$

Numerus $= 3\cdot1913$; $\qquad x = -\,3\cdot1913$.

2. Division der Zahlen mit Hilfe der Logarithmen.

Bestimme den Wert der Bruches $x = \frac{3 \cdot 4156 \times 0 \cdot 4023}{1 \cdot 2378 \times 5 \cdot 8709}$.

$$\log 3 \cdot 4156 = 0 \cdot 53347$$
$$\log 0 \cdot 4023 = 0 \cdot 60455 - 1$$
$$= 1 \cdot 13802 - 1$$
$$\log 1 \cdot 2378 = 0 \cdot 09265$$
$$\log 5 \cdot 8709 = 0 \cdot 76870$$
$$\log x = 0 \cdot 27667 - 1$$
$$x = 0 \cdot 18909.$$

3. Potenzierung einer Zahl mit Hilfe der Logarithmen.

Bestimme $x = \left(\frac{329}{67}\right)^{1 \cdot 065}$.

$$\log 329 = 2 \cdot 51720$$
$$\log 67 = 1 \cdot 82607$$
$$0 \cdot 69113 \times 1 \cdot 065$$
$$5601$$
$$69113$$
$$4147$$
$$346$$
$$\log x = 0 \cdot 73606$$
$$x = 5 \cdot 4457.$$

oder

$$\log 0 \cdot 69113 = 0 \cdot 83956 - 1$$
$$\log 1 \cdot 065 = 0 \cdot 02735$$
$$\log (\log x) = 0 \cdot 86691 - 1.$$
$$\log x = 0 \cdot 73605$$
$$x = 5 \cdot 4456.$$

4. Radicierung einer Zahl mit Hilfe der Logarithmen.

1) Es sei die 5te Wurzel aus 10 zu bestimmen.

$$\log 10 = 1 \cdot 00000$$
$$\log \sqrt[5]{10} = 0 \cdot 20000$$
$$\sqrt[5]{10} = 1 \cdot 5849.$$

2) Berechne $x = \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c^2}}$; $a = 0 \cdot 21537$, $b = 7 \cdot 7856$, $c = 0 \cdot 93572$.

$$\log a = 0 \cdot 33319 - 1$$
$$\log a^2 = 0 \cdot 66638 - 2$$
$$\log b = 0 \cdot 89129$$
$$1 \cdot 55767 - 2$$
$$(\log c = 0 \cdot 97115 - 1)$$
$$\log c^2 = 0 \cdot 94230 \mp 1$$
$$0 \cdot 61537 - 1$$
$$2 \cdot 61537 - 3$$
$$\log x = 0 \cdot 87179 - 1$$
$$x = 0 \cdot 74437.$$

Wenn in dem zu berechnenden Ausdrucke z. B. $\sqrt[5]{a^4 + b^4}$ algebraische Summen auftreten, so müssen zunächst die einzelnen Summanden und hierauf deren Summe berechnet werden; die logarithmische Rechnung ist also mehrfach unterbrochen.

Historisches. Die Logarithmen sind erfunden und benannt von Neper (Lord John Napier), welcher 1614 eine Tafel natürlicher Logarithmen mittheilte. Der von ihm gewählte Name Logarithmus (λόγον ἀριθμός) bedeutet „Zähler des Verhältnisses", insofern als derselbe angibt, wie vielmal ein gegebenes Verhältnis mit sich selbst multipliciert werden muss, um ein anderes Verhältnis zu geben. $\left(\frac{b}{b_1}\right)^n = \frac{a}{a_1}$. Setzt man $b_1 = 1$ und $a_1 = 1$ so geht die ältere Definition in die neuere über.

Angeregt durch Neper veröffentlichte Briggs 1618 die gemeinen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000. Unabhängig von beiden hatte bereits der Schweizer Uhrmacher Jost Bürgi logarithmische Rechnungen angewandt, doch erfolgte die Veröffentlichung seiner Logarithmentafel (mit der Basis 1·0001) erst 1620.

§. 201. Auflösung von Exponentialgleichungen, welche sich auf lineare Gleichungen zurückführen lassen.

Eine Gleichung, in welcher die Unbekannte im Exponenten auftritt, heißt eine Exponentialgleichung. Dieselbe hat die allgemeine Form $a^x = b$ oder $\sqrt[x]{a} = b$.

Die Auflösung der Exponentialgleichungen beruht auf der Anwendung des Satzes: Sind zwei Zahlen einander gleich, so sind auch ihre in Bezug auf dieselbe Basis genommenen Logarithmen einander gleich. Dadurch erhält man Gleichungen die x entweder als Factor oder als Divisor enthalten.

Manche Gleichungen kann man ohne Benützung von Logarithmen mittelst des Satzes auflösen: Sind zwei Potenzen von gleicher Basis einander gleich, so sind ihre Exponenten gleich.

Beispiele. 1) $\sqrt{2^{x-1}} = \sqrt[7]{0\cdot 5^{\,6-4x}}$

$$2^{\frac{x-1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6-4x}{7}} = 2^{\frac{4x-6}{7}}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{4x-5}{7}$$

$$x = 5.$$

2) $\sqrt[x]{2^{5+3x}} = 5$

$$\frac{5+3x}{x}\log 2 = \log 5$$

$$5\log 2 + 3\log 2\,.\,x = \log 5\,.\,x$$

$$x\,(3\log 2 - \log 5) = -5\log 2$$

$$x = -\frac{5\log 2}{3\log 2 - \log 5} = -\frac{1\cdot 50515}{0\cdot 90309 - 0\cdot 69897}$$

$$x = -(1\cdot 50515 : 0\cdot 20412) = -7\cdot 373\underline{8}.$$

Bemerkung. Ist die Lösung ein Quotient zweier Logarithmen, von denen der eine oder beide eine negative Kennziffer haben, so muss man diese Differenzen durch ihre negativen Werte ersetzen.

Z. B. $x = \frac{0\cdot 56864 - 2}{0\cdot 47712} = -\frac{1\cdot 43136}{0\cdot 47712} = -3.$

Fünfter Abschnitt.

Gleichungen des zweiten Grades.

I. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

§. 202. Die allgemeine Form einer Gleichung des zweiten Grades ist

$$Ax^2 + Bx + C = o, \text{ wo } A \gtrless 0,$$

oder, wenn man beide Seiten durch A dividiert,

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0.$$

Setzt man $\frac{B}{A} = a$ und $\frac{C}{A} = b$, so erhält man die geordnete Form

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Es sind nun 3 Fälle möglich.

a) Wird das von x freie Glied $b = 0$, so hat man

$$x^2 + ax = 0, \text{ oder } x(x + a) = 0,$$

somit nach §. 131 $x = 0$ und $x + a = 0$, d. i. $x = -a$. Der Gleichung genügen also zwei Werte.

b) Ist $a = 0$, so wird

$$x^2 + b = 0 \text{ oder } x^2 = -b.$$

Eine solche Gleichung, in welcher die Unbekannte nur in der zweiten Potenz vorkommt, heißt eine reine oder binomische quadratische Gleichung.

c) Sind a und b von 0 verschieden, so heißt die Gleichung eine gemischte oder vollständige Gleichung des zweiten Grades.

Reine quadratische Gleichungen.

§. 203. Um eine reine quadratische Gleichung

$$x^2 = b$$

aufzulösen, zieht man aus beiden Theilen die Quadratwurzel; man erhält

$$x = \pm \sqrt{b}.$$

Eine reine quadratische Gleichung hat also zwei entgegengesetzte Wurzeln; ist b positiv, so sind diese reell; ist b negativ, so sind sie imaginär.

Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man die gegebene Gleichung auf die Form

$$x^2 - b = 0, \text{ oder } x^2 - (\sqrt{b})^2 = 0, \text{ oder } (x - \sqrt{b})(x + \sqrt{b}) = 0$$

bringt. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man

$$\text{entweder } x - \sqrt{b} = 0, \text{ d. i. } x_1 = \sqrt{b},$$
$$\text{oder } x + \sqrt{b} = 0, \text{ d. i. } x_2 = -\sqrt{b} \text{ setzt.}$$

Beispiele.

$x^2 = 9$ $\qquad$ $x^2 = 15,$ $\qquad$ $x^2 = -7,$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$ $\qquad$ $x = \pm\sqrt{15}.$ $\qquad$ $x = \pm\sqrt{-7}.$

Gemischte quadratische Gleichungen.

§. 204. Um eine in der geordneten Form gegebene quadratische Gleichung aufzulösen, transponiert man zuerst das absolute Glied und ergänzt dann die linke Seite zu einem vollständigen Quadrate eines Binoms, indem man zu beiden Seiten das Quadrat des halben Coefficienten des in Bezug auf x linearen Gliedes addiert.

$$x^2 + ax = -b$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b.$$

Man erhält also eine reine quadratische Gleichung in Bezug auf die Unbekannte $x + \frac{a}{2}$, somit nach §. 203

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

folglich
$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Hiernach hat auch jede gemischte quadratische Gleichung zwei Wurzeln. Dieselben sind

a) reell und ungleich, wenn $b < \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist; und zwar

sind beide positiv, wenn $a < 0$ und $b > 0$,

„ „ negativ, „ $a > 0$ „ $b > 0$,

ist die eine positiv, die andere negativ, wenn $b < 0$ ist.

b) Dieselben sind reell und gleich, wenn $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2$;

c) complex und conjugiert, wenn $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist.

Beispiele.

1)
$$\begin{aligned} x^2 - 6x &= 7 \\ 3^2 &= 9 \\ \hline x^2 - 6x + 3^2 &= 7 + 9 \\ (x-3)^2 &= 16 \\ x - 3 &= \pm\sqrt{16} \\ x - 3 &= \pm 4 \\ x &= 3 \pm 4 \\ x_1 = 7,\ x_2 &= -1. \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x^2 + 7x &= -12 \\ \left(\frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{49}{4} \\ x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 &= -12 + \frac{49}{4} \\ \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} \\ x + \frac{7}{2} &= \pm\frac{1}{2} \\ x &= -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_1 = -3,\ x_2 &= -4. \end{aligned}$$

§. 205. Anstatt zur Auflösung einer gemischten quadratischen Gleichung in jedem besonderen Falle die in §. 204 durchgeführte vollständige Entwicklung zu wiederholen, kann man die Wurzeln einer auf die geordnete Form gebrachten Gleichung auch sogleich aus der allgemeinen Formel

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

ableiten.

Wenn die allgemeine Form

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \text{ vorliegt,}$$

dann ergibt die Substitution der Werte a und b

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

§. 206. Wenn aus einer irrationalen Gleichung die Quadratwurzel durch Erhebung zum Quadrate weggeschafft wird, so enthält häufig die neue Gleichung Wurzeln, die der gegebenen nicht angehören. Man hat daher in diesem Falle nachträglich noch zu untersuchen, welche der für die Unbekannte gefundenen Werte die ursprünglich gegebene Gleichung erfüllen. Jene Wurzel, welche der gegebenen Gleichung nicht genügt, kommt einer Gleichung zu, welche aus der gegebenen durch Veränderung der Vorzeichen der Quadratwurzel erhalten wird.

Beispiel.

$$2x - \sqrt{3x} = 3$$
$$\sqrt{3x} = 2x - 3$$
$$3x = 4x^2 - 12x + 9 \text{ gibt}$$
$$x_1 = 3,\ x_2 = \frac{3}{4}.$$

Probe für x_1: $6 - \sqrt{9} \overset{?}{=} 3$

$$6 - 3 = 3$$
$$3 = 3$$

x_1 genügt;

für x_2: $\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} \overset{?}{=} 3$

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \overset{?}{=} 3$$
$$0 \overset{?}{=} 3$$

x_2 genügt nicht.

$x_2 = \frac{3}{4}$ genügt hingegen der Gleichung

$$2x + \sqrt{3x} = 3.$$

Beziehungen zwischen den bekannten Zahlen einer quadratischen Gleichung und ihren Wurzeln.

§. 207. Die linke Seite einer auf die geordnete Form gebrachten quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b$ wird ihr Gleichungstrinom genannt.

Ist m eine Wurzel der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$, so heißt $x - m$ ein Wurzelfactor derselben.

1. Das Gleichungstrinom einer jeden quadratischen Gleichung ist durch ihren Wurzelfactor theilbar.

Beweis. Gemäß der Voraussetzung besteht die identische Gleichung
$$m^2 + am + b = 0,$$
somit $x^2 + ax + b = x^2 + ax + b - (m^2 + am + b)$
$$= x^2 - m^2 + a(x - m) = (x - m)(x + m + a).$$

2. Jede quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln.

Beweis. $x^2 + ax + b = (x - m)(x + m + a) = 0$ zerfällt in
$$x - m = 0 \text{ und } x + m + a = 0$$
mit den Wurzeln $x_1 = m$ und $x_2 = -(m + a) = n$.

Somit ist $n = -(m + a)$ die zweite Wurzel und $x - n = x + m + a$ der zweite Wurzelfactor.

3. Die Gleichung $x^2 + ax + b = (x - m)(x - n)$ liefert ferner den Satz:

Das Gleichungstrinom einer jeden quadratischen Gleichung ist gleich dem Producte ihrer Wurzelfactoren.

4. Aus derselben Gleichung ergibt sich die Identität
$$x^2 + ax + b = x^2 - (m + n)x + mn,$$
folglich $a = -(m + n)$ und $b = mn$.

a) Der Coefficient des linearen Gliedes ist gleich der negativen Summe beider Wurzeln.

b) Das absolute Glied ist gleich dem Producte beider Wurzeln.

Zusätze. 1. Beide Sätze ergeben sich auch unmittelbar aus den allgemeinen Lösungen (§. 204).

2. Aus $x^2 + ax + b = (x - m)(x - n)$ ergibt sich: Sind die Wurzeln m und n der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ reell, so wird der Ausdruck $x^2 + ax + b$ für jeden Wert von x, welcher zwischen m und n liegt, negativ, dagegen für jeden Wert von x, welcher größer als die größere, oder kleiner als die kleinere beider Wurzeln ist, positiv. Sind aber die Wurzeln der obigen Gleichung imaginär, etwa $p + qi$ und $p - qi$, so wird $x^2 + ax + b$ für jeden reellen Wert von x positiv; denn es ist
$$x^2 + ax + b = (x - p - qi)(x - p + qi) = (x - p)^2 + q^2,$$
somit immer positiv.

3. Mit Beachtung des Satzes 4 läßt sich aus den Vorzeichen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung auch auf die Vorzeichen ihrer Glieder und umgekehrt aus den Vorzeichen der letzteren auf jene der ersteren schließen.

§. 208. Aufgaben. 1. Eine quadratische Gleichung zu bilden, welche zwei gegebene Zahlen m und n zu Wurzeln hat.

Lösung.
$$(x - m)(x - n) = 0$$
oder
$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

2. Einen Ausdruck von der Form $x^2 + ax + b$ in Factoren zu zerlegen.

Man setze $x^2 + ax + b = 0$, welche Gleichung x_1 und x_2 zu Wurzeln hat; dann ist

$$x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2).$$

Zusatz. Soll der Ausdruck $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ in Factoren zerlegt werden, so bringt man ihn auf die Form $\alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$, verwandelt den Ausdruck in der Klammer mittelst der Wurzeln der Gleichung $x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ in ein Product zweier Factoren und multipliciert dieses noch mit α. Z. B.:

$$9x^2 - 3x - 2 = 9(x^2 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9}) = 9(x + \tfrac{1}{3})(x - \tfrac{2}{3}).$$

Goniometrische Lösung der quadratischen Gleichungen s. Anhang §. 285.

Berechnung größter und kleinster Werte einer Function durch Auflösung einer quadratischen Gleichung s. Anhang §. 286.

Quadratische Gleichungen wurden in geometrischer Form schon von Euklid, in Zahlen von Hero von Alexandrien und insbesondere Diophant, sowie von den Indern (Brahmagupta geb. 598 n. Chr., Mohamed ben Musa 9. Jahrh. n. Chr.) gelöst.

II. Algebraische Gleichungen höheren Grades und Exponentialgleichungen mit einer Unbekannten, welche sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen.

Binomische Gleichungen.

§. 209. Eine Gleichung heißt binomisch, wenn sie nur eine Potenz der Unbekannten und ein absolutes Glied enthält. Die allgemeine binomische Gleichung des $m$ten Grades lautet: $x^m = a$.

Dieselbe hat wie jede Gleichung $m$ten Grades m Wurzeln, welche, wie im Anhange gezeigt wird, von einander verschieden sind. Demnach hat $x = \sqrt[m]{a}$ m verschiedene Werte oder $\sqrt[m]{a}$ ist $m$deutig, wenn der Zusammenhang lehrt, dass $\sqrt[m]{a}$ sämmtliche Wurzeln der Gleichung $x^m = a$ bezeichnet. In allen übrigen Fällen versteht man unter $\sqrt[m]{a}$, wenn a eine positive, reelle Zahl ist, nur die eine positive, reelle Wurzel der Gleichung $x^m = a$.

Die Sätze des §. 166 über das Vorzeichen der Wurzeln beziehen sich also nur auf die reellen Werte der Wurzeln.

Manche binomische Gleichungen, so die vom 3., 4., 5., 6., 8., 9., 10., 12. Grade, lassen sich durch Zurückführung auf quadratische Gleichungen auflösen.

Zu diesem Zwecke stellt man das absolute Glied als eine $m$te Potenz dar, reduciert die Gleichung auf 0 und zerlegt die linke Seite in Factoren, wodurch dieselbe auf zwei oder mehrere Gleichungen niedrigeren Grades zurückgeführt wird.

a) $x^3 = a$ oder $x^3 - (\sqrt[3]{a})^3 = 0$

$$(x - \sqrt[3]{a})(x^2 + \sqrt[3]{a}.x + \sqrt[3]{a^2}) = 0,$$

somit $\quad x - \sqrt[3]{a} = 0 \quad$ und $\quad x^2 + \sqrt[3]{a}.x + \sqrt[3]{a^2} = 0$

$$x_1 = \sqrt[3]{a}; \qquad x_{\substack{2\\3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{2}(-1 \pm \sqrt{-3}).$$

b) $x^4 = a \quad$ oder $\quad x^4 - (\sqrt[4]{a})^4 = 0$

$$(x^2 - \sqrt{a})(x^2 + \sqrt{a}) = 0,$$

somit $\quad x^2 - \sqrt{a} = 0 \quad$ und $\quad x^2 + \sqrt{a} = 0$

$$x_{\substack{1\\2}} = \pm\sqrt[4]{a}; \qquad x_{\substack{3\\4}} = \pm\sqrt{-\sqrt{a}} = \pm\sqrt[4]{a}.i.$$

Z. B. Die Gleichung $x^4 + 1 = 0$ oder $x^4 - (\sqrt{-1})^2 = (x^2 - \sqrt{-1})(x^2 + \sqrt{-1}) = 0$ hat folgende vier Wurzeln:

$$x = \pm\sqrt{\sqrt{-1}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{-1})$$

$$\text{und } x = \pm\sqrt{-\sqrt{-1}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{-1}).$$

c) Die Lösung der binomischen Gleichung fünften Grades folgt unter §. 211, b.

Gleichungen von der Form $x^{2m} + ax^m = b$.

§. 210. Höhere Gleichungen, welche nur zwei Potenzen der Unbekannten von solcher Beschaffenheit enthalten, dass der eine Potenzexponent das Doppelte des andern ist, lassen sich immer auf quadratische zurückführen; man braucht nur die niedrigere Potenz durch eine neue Unbekannte auszudrücken.

a) Um die Gleichung $x^{2m} + ax^m = b$ aufzulösen, setze man $x^m = y$, folglich $x^{2m} = y^2$; dann hat man

$$y^2 + ay = b, \text{ und daher}$$

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Wird nun statt y wieder der Wert x^m restituiert, so ist

$$x^m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

somit hat man eine binomische Gleichung erhalten.

Z. B. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Setzt man $x^2 = y$, so hat man $y^2 - 13y + 36 = 0$, welche Gleichung

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2},$$

also $y = 9$ oder $y = 4$ gibt. Man hat daher

$$x^2 = 9 \quad \text{oder} \quad x^2 = 4$$

$$x_{\substack{1\\2}} = \pm 3 \qquad x_{\substack{3\\4}} = \pm 2.$$

b) In analoger Weise behandelt man die Gleichung

$$(x^{2n} + px^n + q)^{2m} + a(x^{2n} + px^n + q)^m = b.$$

Z. B. $(x^2-6x+11)^2-4(x^2-6x+11)+3=0$.

Setzt man $x^2-6x+11=y$, so wird $y^2-4y+3=0$, woraus sich $y=3$ oder $y=1$ ergibt.

Für $y=3$ erhält man dann $x^2-6x+11=3$, und aus dieser Gleichung $x_1=4$, $x_2=2$.

Für $y=1$ hat man $x^2-6x+11=1$, und daher $x_3=3+\sqrt{-1}$, $x_4=3-\sqrt{-1}$.

c) Hat eine Gleichung die Form $\sqrt[m]{x}+a\sqrt[2m]{x}=b$, so setze man $\sqrt[2m]{x}=y$, daher $\sqrt[m]{x}=y^2$; dann ergibt sich

$$y^2+ay=b, \text{ und daraus}$$

$$y=\sqrt[2m]{x}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b},$$

daher, wenn man beide Theile zur 2mten Potenz erhebt,

$$x=\left(-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)^{2m}.$$

Z. B. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}=2$.

Setzt man $\sqrt[6]{x}=y$, so hat man $y^2-y=2$, daher $y_1=2$, $y_2=-1$, und somit, da $x=y^6$ ist, $x_1=64$, $x_2=1$.

Reciproke Gleichungen.

§. 211. Eine auf Null reducierte Gleichung heißt reciprok, wenn die Coefficienten ihrer vom Anfange und vom Ende gleich weit abstehenden Glieder entweder sowohl dem absoluten Werte als auch dem Vorzeichen nach gleich sind, oder bei gleichem absoluten Werte entgegengesetzte Vorzeichen haben. Im letzteren Falle muss, wenn die Gleichung von geradem Grade ist, das mittlere Glied fehlen.

Die allgemeine Form der reciproken Gleichungen ist

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots\pm a_2x^2\pm a_1x\pm 1=0.$$

Eine reciproke Gleichung hat die Eigenschaft, dass der reciproke Wert jeder ihrer Wurzeln ebenfalls Wurzel der Gleichung ist.

Hat z. B. die reciproke Gleichung $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ die Wurzel w, ist also $w^4+aw^3+bw^2+aw+1=0$, so ist auch $\frac{1}{w}$ eine Wurzel der Gleichung. Denn durch die Substitution $x=\frac{1}{w}$ erhält der erste Theil der gegebenen Gleichung den Wert

$$\frac{1}{w_4}+a.\frac{1}{w_3}+b.\frac{1}{w_2}+a.\frac{1}{w}+1=\frac{1}{w^4}(1+aw+bw^2+aw^3+w^4),$$

welcher Wert ebenfalls $=0$ ist.

Jede reciproke Gleichung, welche nicht den fünften Grad übersteigt, läſst sich auf quadratische Gleichungen zurückführen.

a) Das Polynom einer reciproken Gleichung des dritten Grades

$$x^3 + ax^2 \pm ax \pm 1 = 0$$

läſst sich in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine bezüglich $x \pm 1$ und der andere das Trinom einer quadratischen Gleichung ist.

Vereinigt man z. B. in der Gleichung

$$x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$$

die Glieder, welche dieselben Coefficienten haben, so erhält man

$$(x^3 + 1) + ax(x + 1) = 0,$$

oder, da $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ ist,

$$(x + 1)(x^2 - x + 1 + ax) = 0.$$

Dieser Gleichung wird genüge geleistet, wenn man entweder $x + 1 = 0$ oder $x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$ setzt, wodurch man drei Wurzelwerte erhält.

Auf gleiche Weise geschieht die Auflösung der Gleichung

$$x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0.$$

Nach derselben Methode lassen sich auch die Gleichungen behandeln

$$x^3 + ax^2 \pm abx \pm b^3 = 0,$$

$$x^3 - ax^2 + abx - b^3 = 0.$$

b) Es sei die reciproke Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

in welcher dieselben Coefficienten gleiche Vorzeichen haben.

Dividiert man durch x^2, was gestattet ist, weil die linke Seite den Factor x nicht enthält, und vereinigt dann die Glieder mit denselben Coefficienten, so erhält man

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0.$$

Setzt man nun $x + \frac{1}{x} = y$, so ist $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$, also $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, folglich durch Substitution in der obigen Gleichung

$$y^2 - 2 + ay + b = 0, \text{ und}$$

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + 2}.$$

Wird jeder dieser Werte in die Gleichung $x + \frac{1}{x} = y$ eingesetzt, so erhält man, da diese Gleichung in Beziehung auf x vom zweiten Grade ist, für jeden Wert von y zwei Werte für x, also im ganzen vier Wurzeln für die vorgelegte Gleichung.

Nach derselben Methode läſst sich auch die Gleichung behandeln

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + amx + m^2 = 0.$$

Zusatz. Die binomische Gleichung des fünften Grades kann in eine lineare und in eine Gleichung vierten Grades der eben erwähnten Form zerlegt werden.

$$x^5 = a \quad \text{oder} \quad x^5 - (\sqrt[5]{a})^5 = 0$$

$$(x - \sqrt[5]{a})\,(x^4 + \sqrt[5]{a}\,x^3 + \sqrt[5]{a^2}.x^2 + \sqrt[5]{a^3}.x + \sqrt[5]{a^4}) = 0,$$

somit $x - \sqrt[5]{a} = 0$ und $x^4 + \sqrt[5]{a}.x^3 + \sqrt[5]{a^2}.x^2 + \sqrt[5]{a^3}.x + \sqrt[5]{a^4} = 0$.

c) Das Polynom der reciproken Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + a x^3 - a x - 1 = 0,$$

in welchem dieselben Coefficienten entgegengesetzte Vorzeichen haben, läſst sich in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine $x^2 - 1$, der andere das Trinom einer quadratischen Gleichung ist.

Die obige Gleichung läſst sich zunächst so darstellen:

$$(x^4 - 1) + a x (x^2 - 1) = 0.$$

Nun ist $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$; man hat also

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1 + a x) = 0.$$

Setzt man $x^2 - 1 = 0$, so erhält man $x_1 = \pm 1$; setzt man $x^2 + 1 + a x = 0$, so ergibt sich $x_{\frac{3}{4}} = \frac{-a \pm \sqrt[2]{a^2 - 4}}{2}$.

Die Gleichung hat also vier Wurzeln.

d) Jede reciproke Gleichung des fünften Grades

$$x^5 + a x^4 + b x^3 \pm b x^2 \pm a x \pm 1 = 0$$

kann durch Vereinigung der Glieder mit gleichen oder entgegengesetzten Coefficienten und Herausheben des gemeinsamen Factors auf zwei Gleichungen zurückgeführt werden, von denen die eine $x \pm 1 = 0$ und die andere eine reciproke Gleichung des vierten Grades ist, in welcher dieselben Coefficienten gleiche Vorzeichen haben. Die erste gibt bezüglich $x = -1$ oder $x = +1$, die zweite wird nach b) aufgelöst und gibt vier Wurzeln.

Exponentialgleichungen.

§. 212. Diese werden mit Hilfe der Logarithmen aufgelöst.

a) Gleichungen von der Form $a^{2x} + p a^x = q$.

Setzt man $a^x = y$, so erhält man $y^2 + p y = q$, also

$$y = a^x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \text{ und daher}$$

$$x = \frac{\log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}{\log a}.$$

Z. B. $4^{2x} + 5.4^x = 36$ gibt für $4^x = y$, $y^2 + 5y = 36$, woraus $y = 4^x = 4$ und $y = 4^x = -9$ folgt; somit $x = 1$.

Der andere Wert von x ist nicht reell.

b) Gleichungen von der Form $\sqrt[x]{a} + p\sqrt[2x]{a} = q$.

Für $\sqrt[2x]{a} = y$ wird $y^2 + py = q$, folglich

$$y = \sqrt[2x]{a} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \text{ und daher}$$

$$x = \frac{\log a}{2 \log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}.$$

Z. B. Aus $5\sqrt[x]{64} - 6\sqrt[2x]{64} = 8$ erhält man für $\sqrt[2x]{64} = y$, $5y^2 - 6y = 8$, daher $y = 2$ oder $= -\frac{4}{5}$, und $x = \frac{\log 64}{2 \log 2} = \frac{6 \log 2}{2 \log 2} = 3$, oder $2^{\frac{6}{2x}} = 2$, $\frac{6}{2x} = 1$, $x = 3$.

Der zweite Wert von x ist nicht reell.

III. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 213. Enthält eine quadratische Gleichung mehrere Unbekannte, so lassen sich diese, wie bei den Gleichungen des ersten Grades, nur dann bestimmt angeben, wenn so viele von einander unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen vorhanden sind, als Unbekannte bestimmt werden sollen. Die Auflösung geschieht auch hier nach den in §. 134 angegebenen Eliminationsmethoden, durch welche man schließlich auf eine einzige Gleichung mit *einer* Unbekannten kommt.

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten ist

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Ist die *zweite* Gleichung *linear*, so gibt die Substitutionsmethode eine quadratische Eliminationsgleichung. Dieselbe liefert für die eine Unbekannte zwei Wurzeln. Setzt man dieselben in die lineare Gleichung ein (*nicht* in die quadratische), so erhält man die *zugehörigen* Werte für die andere Wurzel, also zwei Wurzelpaare.

Beispiel. $x - y = 7$
$x^2 + 2y^2 = 118$.

Wird der Ausdruck $x = y + 7$, welcher aus der ersten Gleichung folgt, in die zweite substituiert, so hat man

$$(y + 7)^2 + 2y^2 = 118, \text{ oder geordnet } y^2 + \frac{14y}{3} = 23,$$

welcher Gleichung die Wurzeln $y_1 = 3$ und $y_2 = -\frac{23}{3}$ entsprechen.

Werden diese Werte von y in den Ausdruck $x = y + 7$ substituiert, so erhält man $x_1 = 10$ und $x_2 = -\frac{2}{3}$.

§. 214. Sind beide Gleichungen quadratisch, so ist die Eliminationsgleichung vom vierten Grade, daher im allgemeinen nach den bisher vorgetragenen Lehren nicht lösbar. In einzelnen Fällen gelingt die Lösung dieser sowie einiger Gleichungen höheren Grades durch Anwendung specieller Methoden.

1. Durch Verbindung der beiden gegebenen Gleichungen nach der Methode der gleichen Coefficienten erhält man eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Beispiel.

$$\begin{array}{l|l|l}
5x^2 - 2y^2 = 30 & & -2 \\
2x^2 + y^2 = 57 & 2 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

$$5x^2 + 4x^2 = 30 + 114; \quad 4y^2 + 5y^2 = -60 + 286$$

$$9x^2 = 144 \qquad\qquad 9y^2 = 225$$

$$x = \pm 4 \qquad\qquad y = \pm 5$$

$$x_1 = 4,\ y_1 = 5;\ x_2 = 4,\ y_2 = -5;\ x_3 = -4,\ y_3 = 5;$$
$$x_4 = -4,\ y_4 = -5.$$

Besondere Aufmerksamkeit verlangt die Zusammengehörigkeit der Wurzeln. Sind die Lösungen wie hier aus zwei von einander unabhängigen Gleichungen gewonnen worden, so sind alle Combinationen in den Zeichen möglich; es existieren also vier Wurzelpaare.

2. Durch passende Verbindung beider Gleichungen erhält man eine lineare Gleichung, welche mit einer der gegebenen Gleichungen zu verbinden ist.

Beispiel.

$$\begin{array}{c}
x^2 + y^2 + x + y = a \\
x^2 + y^2 - x - y = b \\
\hline
2x + 2y = a - b
\end{array}$$

somit $\quad x + y = \frac{a-b}{2}$ und $x^2 + y^2 = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Auf diese neuen Gleichungen wendet man die Substitutionsmethode oder das später unter 4) Beisp. 2 erwähnte Verfahren an.

3. Man erhält eine Gleichung mit einer Unbekannten, indem man in einer der beiden gegebenen Gleichungen eine Verbindung beider Unbekannten als neue Unbekannte einführt.

1. **Beispiel.** Die eine Gleichung ist homogen, d. h. sie enthält nur die quadratischen Glieder; dann gibt die Division durch y^2 eine quadratische Gleichung in Bezug auf $\frac{x}{y}$.

$$\begin{array}{ll} \text{I. } 3x^2 + 2xy - y^2 = 0; & 3\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{x}{y} - 1 = 0 \\ \text{II. } \underline{x + xy + y = 7} & \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{x}{y} - \frac{1}{3} = 0 \\ x + 3x^2 + 3x = 7 & \frac{x}{y} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3} \\ x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{7}{3} & \frac{x}{y} = \frac{1}{3}; \quad \frac{x}{y} = -1 \\ x = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{7}{3}} & y = 3x \quad y = -x \\ x = -\frac{2}{3} \pm \frac{5}{3} & \end{array}$$

(substituiert in II.).

$x_1 = -1; \; x_2 = -\frac{7}{3}; \; y = 3x$ gibt

$y_1 = -3; \; y_2 = -7.$

Die Substitution $y = -x$ gibt

$$x - x^2 - x = 7$$

$$x_{\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{7}.i \qquad y_{\frac{3}{4}} = \mp\sqrt{7}.i.$$

2. **Beispiel.** Enthalten beide Gleichungen außer den quadratischen Gliedern noch ein absolutes Glied, so erhält man durch Eliminieren der absoluten Glieder nach der Methode der gleichen Coefficienten eine homogene Gleichung, welche mit einer der gegebenen Gleichungen zu verbinden ist.

$$\begin{array}{r|r} x^2 + 3xy = 7 & -3 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 & 7 \\ \hline 4x^2 - 16xy + 7y^2 = 0 & \end{array} \text{ u. s. w.}$$

3. **Beispiel.** $x + y + \sqrt{x+y} = 6$

$$x^2 + y^2 = 10.$$

Die 1. Gleichung ist quadratisch in Bezug auf $\sqrt{x+y}$.

$$\sqrt{x+y} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{ll} \sqrt{x+y} = 2 & \sqrt{x+y} = -3 \\ x + y = 4 & x + y = 9 \\ x^2 + y^2 = 10 & x^2 + y^2 = 10 \text{ u. s. w.} \end{array}$$

4. Man leitet aus den gegebenen Gleichungen eine neue Gleichung ab, welche nach $x + y$, $x - y$, xy oder $\frac{x}{y}$ aufzulösen ist.

Beispiele.

1) $x^2 + y^2 = a.$

$$xy = b.$$

Multipliciert man die zweite Gleichung mit 2, und verbindet die neue Gleichung mit der ersten durch Addition und Subtraction, so erhält man

$(x+y)^2 = a+2b$, daher $x+y = \pm\sqrt{a+2b}$,
$(x-y)^2 = a-2b$; $\quad x-y = \pm\sqrt{a-2b}$;

folglich $x = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b})$,

$y = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b})$.

Man erhält vier Wurzelpaare.

2) $x+y = a$ $\quad$ analog $\quad x-y = a$
$x^2+y^2 = b^2$ $\quad\quad x^2+y^2 = b^2$

$(x+y)^2-(x^2+y^2) = 2xy = a^2-b^2$; $\quad 2xy = b^2-a^2$
$x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 =$ $\quad x+y = \pm\sqrt{2b^2-a^2}$
$= b^2-a^2+b^2 = 2b^2-a^2$; $\quad x-y = a$
$x-y = \pm\sqrt{2b^2-a^2}$ $\quad$ u. s. w.
$x+y = a$

$x_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a\pm\sqrt{2b^2-a^2})$

$y_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a\mp\sqrt{2b^2-a^2})$

3) $x+y = a$ $\quad\quad x-y = a$
$xy = b^2$ $\quad\quad xy = b^2$

$(x+y)^2-4xy = (x-y)^2 = a^2-4b^2$ $\quad (x-y)^2+4xy =$
$x-y = \pm\sqrt{a^2-4b^2}$ u. s. w. $\quad = (x+y)^2 = a^2+4b^2$
$x+y = \pm\sqrt{a^2+4b^2}$
u. s. w.

4) $x^3+y^3 = a^3$
$x+y = b$

durch Division $x^2-xy+y^2 = \frac{a^3}{b}$ oder $x^3+3xy(x+y)+y^3 = b^3$
$x^2+2xy+y^2 = b^2$ $\quad a^3+3xyb = b^3$
$3xy = b^2-\frac{a^3}{b}$ $\quad xy = \frac{b^3-a^3}{3b}$
$xy = \frac{b^3-a^3}{3b}$
$x+y = b$ u. s. w.

5) $x+y = a$ $\quad$ somit $\quad x^2+y^2 = a^2-2xy$
$x^4+y^4 = b^4$
$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = x^4+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2+y^4 = a^4$
$b^4+4xy(a^2-2xy)+6x^2y^2 = a^4$
$(xy)^2-2a^2(xy) = \frac{b^4-a^4}{2}$ u. s. w.

Drei Unbekannte.

Beispiele. 1) $xy = a$, $xz = b$, $yz = c$.

Multipliciert man die ersten zwei Gleichungen mit einander und dividiert das Product durch die dritte, so erhält man

$$x^2 = \frac{ab}{c}, \text{ daher } x_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Auf ähnliche Art findet man

$$y_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{ac}{b}}, \qquad z_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

2) $xy + xz = a$, $xy + yz = b$, $xz + yz = c$.

Setzt man $xy = x'$, $xz = y'$, $yz = z'$, so hat man

$$x' + y' = a, \; x' + z' = b, \; y' + z' = c.$$

Daraus folgt

$$x' = xy = \frac{a+b-c}{2}; \; y' = xz = \frac{a+c-b}{2}; \; z' = yz = \frac{b+c-a}{2};$$

dann erhält man, wie in 3),

$$x_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2(b+c-a)}},$$

$$y_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{2(a+c-b)}},$$

$$z_{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{(a+c-b)(b+c-a)}{2(a+b-c)}}.$$

Die Zeichen sind bei y und z entsprechend den Vorzeichen der Producte xy und xz zu wählen.

Sechster Abschnitt.

Unbestimmte Gleichungen.

I. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

§. 215. Führt eine Aufgabe auf weniger Gleichungen, als Unbekannte zu bestimmen sind, so kann man durch wiederholtes Eliminieren der Unbekannten immer zuletzt eine einzige Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten erhalten. Eine solche Gleichung ist unbestimmt (§. 133).

Häufig wird bei derlei Aufgaben die Zahl der Auflösungen durch die Forderung beschränkt, dass die Werte der Unbekannten ganze, oder ganze und zugleich positive Zahlen sein sollen. In diesem Falle heißt die Aufgabe eine Diophantische.

Auflösung in ganzen Zahlen.

§. 216. Eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades läßt keine Auflösung in ganzen Zahlen zu, wenn die Coefficienten der Unbekannten einen gemeinsamen Factor haben, durch welchen das bekannte Glied nicht theilbar ist.

Beweis. Es sei die auf die einfachste Form gebrachte Gleichung
$$ax + by = c,$$
wo a, b, c beliebige ganze Zahlen darstellen. Haben a und b das gemeinsame Maß m, durch welches c nicht theilbar ist, so hat man
$$\frac{a}{m}.x + \frac{b}{m}.y = \frac{c}{m}.$$
Da nun $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ ganze Zahlen sind, so können nicht zugleich x und y ganze Zahlen sein, weil sonst auch $\frac{a}{m}.x + \frac{b}{m}.y$, folglich auch $\frac{c}{m}$ eine ganze Zahl wäre, was gegen die Voraussetzung ist.

§. 217. Eine Gleichung des ersten Grades mit zwei Unbekannten, deren Coefficienten relative Primzahlen sind, hat unendlich viele Auflösungen in ganzen Zahlen.

Beweis. Die Gleichung $ax + by = c$, wo a und b relativ prim sind und a als positiv vorausgesetzt werden kann, läſst immer eine Auflösung in ganzen Zahlen zu. Dies ergibt sich unmittelbar aus der nachfolgenden Auflösung derselben durch Reduction.

Es seien $x = \alpha$, $y = \beta$ eine Auflösung in ganzen Zahlen, so hat man
$$a\alpha + b\beta = c.$$
Dann ist auch
$$a\alpha - abu + b\beta + abu = c. \text{ oder}$$
$$a(\alpha - bu) + b(\beta + au) = c.$$
Der gegebenen Gleichung genügen somit allgemein die Werte
$$x = \alpha - bu, \; y = \beta + au,$$
wo u eine willkürliche positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

§. 218. **Aufgabe.** Eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades in ganzen Zahlen aufzulösen.

I. Auflösung durch Substitution.

Man bestimmt aus der Gleichung den Wert derjenigen Unbekannten, deren Coefficient den kleineren Zahlenwert hat, scheidet aus dem gefundenen Quotienten die darin enthaltenen Ganzen aus und substituiert in dem restierenden Bruche für die andere Unbekannte nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 . . , bis für eine dieser Substitutionen auch der Wert der ersten Unbekannten eine ganze Zahl wird.

Beispiel. Es sei die Gleichung $4x - 7y = 75$. Man erhält daraus
$$x = \frac{75 + 7y}{4} = 18 + y + \frac{3 + 3y}{4} = 18 + y + 3.\frac{1 + y}{4}.$$

Man findet für $y = 3$

$$x = 18 + 3 + 3 = 24.$$

Die vorgelegte Gleichung läßt also die Auflösung $x = 24$, $y = 3$ zu, und alle übrigen Auflösungen in ganzen Zahlen sind gegeben durch die Formeln
$$x = 24 + 7u, \quad y = 3 + 4u,$$
wo u eine willkürliche ganze Zahl bedeutet.

Man findet daher folgende Auflösungen:

für $u = \ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
ist $x = \ldots$	10	17	24	31	38	$\ldots$
$y = \ldots$	-5	-1	3	7	11	$\ldots$

Das hier angegebene Verfahren kann sehr weitläufig werden, wenn die Coefficienten beider Unbekannten große Zahlen sind.

II. Auflösung durch Reduction. (Euler'sche Methode.)

Ganz einfach gestaltet sich die Auflösung, wenn die eine Unbekannte den Coefficienten 1 hat. Z. B. aus der Gleichung $x + by = c$ folgt $x = c - by$; man kann hier für y jede beliebige ganze Zahl setzen und erhält dann auch für x eine ganze Zahl.

Auf diesen Fall läßt sich durch folgendes Verfahren auch jede andere Gleichung
$$ax \pm by = c$$
zurückführen. Man sucht den Wert für diejenige Unbekannte, welche den kleineren Coefficienten hat, scheidet aus dem gefundenen Quotienten die darin enthaltenen Ganzen aus und setzt den in Bruchform erscheinenden Rest einer neuen Unbekannten gleich. Die so gebildete Hilfsgleichung löst man in Bezug auf die zweite der ursprünglichen Unbekannten auf, behandelt den erhaltenen Quotienten wie den früheren und setzt dieses Verfahren fort, bis man endlich auf eine Gleichung kommt, in welcher die eine Unbekannte den Coefficienten 1 hat; denn die Coefficienten der Unbekannten in den Hilfsgleichungen sind der Reihe nach jene Zahlen, welche bei der Kettendivision zwischen a und b als Dividend und Divisor auftreten. Da aber a und b relative Primzahlen sind, so ist der letzte Divisor, also auch der Coefficient der einen Unbekannten in der letzten Hilfsgleichung, gleich 1. Wird sodann der Wert für diese Unbekannte nach und nach in die vorhergehenden Gleichungen substituiert, so erhält man zuletzt die Formeln für alle ganzen Werte von x und y.

Beispiele.

1) Es sei die Gleichung $19x - 8y = 52$ gegeben.

Löst man dieselbe nach der Unbekannten y, welche den kleineren Coefficienten hat, auf, so erhält man
$$y = \frac{19x - 52}{8}.$$
oder, wenn man aus diesem Quotienten die darin enthaltenen Ganzen absondert,
$$y = 2x - 6 + \frac{3x - 4}{8}.$$

Da x und y ganze Zahlen sein sollen, so muss auch der in Bruchform erscheinende Ausdruck $\frac{3x-4}{8}$ eine ganze Zahl sein. Setzt man $\frac{3x-4}{8} = u_1$, so hat man

$$y = 2x - 6 + u_1 \ldots 1).$$

Löst man die Hilfsgleichung $\frac{3x-4}{8} = u_1$ nach x auf, so erhält man

$$x = \frac{8u_1 + 4}{3},$$

oder, wenn man aus diesem Quotienten die Ganzen ausscheidet,

$$x = 2u_1 + 1 + \frac{2u_1 + 1}{3}.$$

Da x und u_1 ganze Zahlen sein sollen, so muss auch $\frac{2u_1+1}{3}$ eine solche sein. Bezeichnet man sie durch u_2, so ist

$$x = 2u_1 + 1 + u_2 \ldots 2).$$

Die Gleichung $\frac{2u_1+1}{3} = u_2$ gibt nach u_1 aufgelöst

$$u_1 = \frac{3u_2 - 1}{2} = u_2 + \frac{u_2 - 1}{2},$$

und wenn $\frac{u_2-1}{2} = u_3$ gesetzt wird,

$$u_1 = u_2 + u_3 \ldots 3).$$

Aus $\frac{u_2-1}{2} = u_3$ folgt endlich die Gleichung

$$u_2 = 2u_3 + 1 \ldots 4),$$

in welcher die Unbekannte u_2 den Coefficienten 1 hat und für jeden beliebigen ganzen Wert von u_3 eine ganze Zahl wird.

Setzt man nun den Wert von u_2 nach und nach in die früheren Gleichungen 3), 2) und 1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} u_1 &= 2u_3 + 1 + u_3 = 3u_3 + 1, \\ x &= 6u_3 + 2 + 1 + 2u_3 + 1 = 8u_3 + 4, \\ y &= 16u_3 + 8 - 6 + 3u_3 + 1 = 19u_3 + 3. \end{aligned}$$

Die allgemeine Auflösung in ganzen Zahlen ist also gegeben durch die Formeln

$$x = 8u + 4, \qquad y = 19u + 3,$$

wo für u jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann.

Für u =	... − 10	− 1	0	1	10	...
ist x =	... − 76	− 4	4	12	84	...
y =	... − 187	− 16	3	22	193	...

2. Es sei die Gleichung $11x + 28y = 106$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

$$11x + 28y = 106 \text{ gibt } x = \frac{106 - 28y}{11} = 9 - 2y + \frac{7 - 6y}{11}$$
$$= 9 - 2y + u_1,$$
$$\frac{7 - 6y}{11} = u_1 \qquad \text{„} \ y = \frac{7 - 11u_1}{6} = 1 - u_1 + \frac{1 - 5u_1}{6}$$
$$= 1 - u_1 + u_2,$$
$$\frac{1 - 5u_1}{6} = u_2 \qquad \text{„} \ u_1 = \frac{1 - 6u_2}{5} = -u_2 + \frac{1 - u_2}{5}$$
$$= -u_2 + u_3;$$
$$\frac{1 - u_2}{5} = u_3 \qquad \text{„} \ u_2 = 1 - 5u_3.$$

Hieraus ergibt sich durch allmähliche Substitution

$$u_1 = -1 + 5u_3 + u_3 = -1 + 6u_3,$$
$$y = 1 + 1 - 6u_3 + 1 - 5u_3 = 3 - 11u_3,$$
$$x = 9 - 6 + 22u_3 - 1 + 6u_3 = 2 + 28u_3,$$

wo u_3 jede beliebige ganze Zahl sein kann.

Zusatz. Die Methode von Lagrange, eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades mit Hilfe der Kettenbrüche in ganzen Zahlen aufzulösen, wird weiter unten (§. 236) angeführt werden.

§. 219. 1. Um ein System von zwei Gleichungen mit drei Unbekannten x, y, z in ganzen Zahlen aufzulösen, leitet man aus demselben durch Elimination z. B. von z eine Gleichung mit zwei Unbekannten x, y ab und löst dieselbe nach einer der in §. 218 angeführten Methoden auf. Substituiert man dann die für x und y gefundenen allgemeinen Werte, welche eine willkürliche ganze Zahl n enthalten, in eine der Gleichungen, welche auch die dritte Unbekannte z enthalten, so erhält man eine diophantische Gleichung zwischen dieser und n. Die Lösungen für die Unbekannten z und n enthalten eine willkürliche ganze Zahl u. Setzt man den für n erhaltenen Wert in die früher für x und y gefundenen Werte ein, so erhält man die allgemeinen Lösungen für letztere. (Siehe § 221, Beispiel 3.)

Um eine unbestimmte Gleichung mit mehr als zwei Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen, wendet man die in §. 218 unter II, entwickelte Reductionsmethode an. Man kommt auch hier zuletzt immer auf eine Gleichung, in welcher die eine Unbekannte 1 zum Coefficienten hat, und erhält dann durch gehörige Substitution die allgemeinen Ausdrücke für die Unbekannten der gegebenen Gleichung, in denen jedoch meist mehrere Hilfs-Unbekannte erscheinen. (Siehe §. 221, Beispiel 4.)

Auflösung in ganzen und positiven Zahlen.

§. 220. Die Gleichung $ax + by = c$ hat eine begrenzte, die Gleichung $ax - by = c$ eine unbegrenzte Anzahl von Auflösungen in ganzen und positiven Zahlen.

Beweis. 1. Zur Auflösung der Gleichung $ax + by = c$ in ganzen Zahlen hat man die Formeln

$$x = \alpha - bu,\ y = \beta + au.$$

Sollen nun x und y positiv sein, so muss

$$\alpha - bu > 0 \text{ und } \beta + au > 0, \text{ also}$$

$$u < \frac{\alpha}{b} \text{ und } u > -\frac{\beta}{a}$$

sein. Man erhält daher nur für solche ganze Werte von u, welche zwischen den Grenzen $\frac{\alpha}{b}$ und $-\frac{\beta}{a}$ liegen, ganze und positive Werte von x und y.

2. Der Gleichung $ax - by = c$ genügen die ganzen Werte

$$x = \alpha + bu,\ y = \beta + au.$$

Damit x und y positiv seien, muss

$$\alpha + bu > 0 \text{ und } \beta + au > 0, \text{ also}$$

$$u > -\frac{\alpha}{b} \text{ und } u > -\frac{\beta}{a}$$

sein. Da es unendlich viele ganze Werte von u gibt, welche $> -\frac{\alpha}{b}$ und zugleich $> -\frac{\beta}{a}$ sind, so können auch x und y unendlich viele ganze und positive Werte haben.

§. 221. Aufgabe. Eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

Man stellt zuerst die allgemeine Lösung in ganzen Zahlen auf und beschränkt dann die noch willkürlichen Werte für die Hilfs-Unbekannte so, dass die Ausdrücke für die Unbekannten der gegebenen Gleichung positiv werden.

Beispiele. 1) Der Bruch $\frac{230}{77}$ soll als Summe zweier Brüche dargestellt werden, deren Nenner 7 und 11 sind.

Heißen x und y die Zähler der gesuchten Brüche, so hat man

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = \frac{230}{77}, \text{ oder } 11x + 7y = 230.$$

Diese Gleichung in ganzen Zahlen aufgelöst gibt

$$x = 5 - 7u,\ y = 25 + 11u.$$

Damit $5 - 7u > 0$ und $25 + 11u > 0$ werde, muss $u < \frac{5}{7}$ und $u > -\frac{25}{11}$ gesetzt werden. Diesen Bedingungen entsprechen für u nur die drei Werte $0, -1, -2$. Man hat daher

für $u = 0 \ \ldots x = 5,\ y = 25;$
„ $u = -1 \ldots x = 12,\ y = 14;$
„ $u = -2 \ldots x = 19,\ y = 3.$

Die gesuchten Brüche sind demnach

$$\frac{5}{7} \text{ und } \frac{25}{11}, \text{ oder } \frac{12}{7} \text{ und } \frac{14}{11}, \text{ oder } \frac{19}{7} \text{ und } \frac{3}{11}.$$

2) Die Gleichung $7x - 17y = 50$ in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

Die ganzen Werte von x und y enthalten die Formeln

$$x = 17u + 12 \text{ und } y = 7u + 2,$$

aus denen man sogleich erkennt, dass für u keine negativen Werte, dagegen 0 und alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden dürfen. Die Aufgabe hat unendlich viele Auflösungen;

für u =	0	1	2	3	...
erhält man x =	12	29	46	63	...
y =	2	9	16	23	...

3) Man löse in ganzen positiven Zahlen auf:

$$\begin{array}{l|r} 3x + 4y - 2z = 15, & 2 \\ 4x + 3y - 4z = 4. & -1 \\ \hline 2x + 5y = 26; & \end{array}$$

$$\text{daraus } y = 2n \text{ und } x = 13 - 5n.$$

Die Substitution in die erste Gleichung gibt

$$2z + 7n = 24; \text{ daraus } z = 12 - 7u \text{ und } n = 2u.$$

Die Substitution von $n = 2u$ in die Werte von x und y gibt

$$x = 13 - 10u, \quad y = 4u, \quad z = 12 - 7u.$$

Bedingung: $\qquad 0 < u < \frac{13}{10} \left(\frac{12}{7}\right);$

folglich $\qquad u = 1, \quad x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5.$

4) Man löse in ganzen positiven Zahlen auf:

$$3x + 4y + 5z = 26.$$

$$x = 8 - y - z + \frac{2 - y - 2z}{3} = 8 - y - z + u,$$

$$\frac{2 - y - 2z}{3} = u \text{ gibt } y = 2 - 2z - 3u \text{ und}$$

$$x = 8 - 2 + 2z + 3u - z + u = 6 + z + 4u.$$

Da x, y und z nicht kleiner als 1 sein dürfen, so ist 3 der kleinste Wert für $y + 2z$ und ebenso für $y + 2x$.

$$y + 2z = 2 - 3u > 2 \text{ gibt } u < 0,$$
$$y + 2x = 14 + 5u > 2 \quad \text{„} \quad u > -2\tfrac{2}{5},$$
$x - z$ liefert keine Bedingung.

Aus der Bedingung folgt $u = -1$ und $u = -2$.

Die Substitution gibt

$$\begin{array}{lcl} x = 2 + z & \text{und} & x = -2 + z, \\ y = 5 - 2z & \text{„} & y = 8 - 2z; \\ \text{daraus } 0 < z < 2\tfrac{1}{2}, & & 2 < z < 4. \end{array}$$

somit $z = 1, \quad 2, \quad 3;$
$x = 3, \quad 4, \quad 1;$
$y = 3, \quad 1, \quad 2.$

II. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

§. 222. Die Schwierigkeiten bei der Lösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades sind ungleich größer als bei den unbestimmten Gleichungen des ersten Grades. Hier soll nur ein specieller Fall, welcher ziemlich häufig auftritt, untersucht werden.

Aufgabe. Eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten, welche sich auf die Form einer Proportion bringen läſst, deren Glieder in Bezug auf die Unbekannten linear sind, in rationalen Zahlen aufzulösen.

Gemäß der Annahme läſst sich die quadratische Gleichung auf die Form bringen

$$(ax + by + c)(dx + ey + f) = (a_1 x + b_1 y + c_1)(d_1 x + e_1 y + f_1),$$

oder $$\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1} = \frac{d_1 x + e_1 y + f_1}{dx + ey + f}.$$

Setzt man die beiden Quotienten gleich einer Zahl p, so erhält man zwei lineare Gleichungen in Bezug auf x und y. Löst man dieselben nach x und y auf, so erhält man diese als rationale Functionen von p; demnach sind für beliebig gewählte rationale Werte von p auch x und y rationale Zahlen.

Die erhaltenen Zahlen können (siehe Beispiel 1) weiter benützt werden, um die ganzzahligen positiven Lösungen zu ermitteln.

Bei der Anwendung dieser Methode muſs man versuchen, durch zweckmäßiges Transponieren einzelner Glieder beide Seiten in Factoren zu zerlegen.

Beispiele. 1) $5xy - 3y = 168,$

$$y(5x - 3) = 168,$$

$$5x - 3 = \frac{168}{y} = p;$$

$$x = \frac{p + 3}{5}, \quad y = \frac{168}{p}.$$

Um die Lösungen in positiven ganzen Zahlen zu erhalten, zerlegt man 168 in Factoren und wählt für p jene, welche um 3 vermehrt ein Vielfaches von 5 ergeben.

Die Factoren von 168 sind: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 7, 14, 28, 56, 21, 42, 84, 168.

somit $p = 2, \quad 12, \quad 7, \quad 42;$
$x = 1, \quad 3, \quad 2, \quad 9;$
$y = 84, \quad 14, \quad 24, \quad 4.$

2)
$$y = \sqrt{9x^2 + 5x + 3},$$
$$y^2 - 9x^2 = 5x + 3,$$
$$(y + 3x)(y - 3x) = 5x + 3,$$
$$y - 3x = \frac{5x+3}{y+3x} = p;$$
$$y = 3x + p \text{ und } 5x + 3 = py + 3px = 6px + p^2;$$
$$x = \frac{p^2 - 3}{5 - 6p}; \quad y = \frac{3p^2 - 9}{5 - 6p} + p = \frac{5p - 3p^2 - 9}{5 - 6p},$$

wo man für p jede beliebige rationale Zahl, $p = \frac{5}{6}$ ausgenommen, setzen kann. Für $p = 1$ wird $x = 2$ und $y = 7$.

Die Lösung der Pythagoreischen Gleichungen $z^2 = x^2 + y^2$ und $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist im Übungsstoffe behandelt.

Die Diophantischen Gleichungen führen diesen Namen insofern mit Unrecht, als Diophantus nur rationale (nicht ganzzahlige) Lösungen von unbestimmten Gleichungen ersten und zweiten Grades suchte. Er begnügte sich daher bei linearen Gleichungen damit, die eine Unbekannte durch die andere auszudrücken. Sein Übersetzer Bachet (1612) fügte selbstständig die Lösung in ganzen Zahlen hinzu nach einer Methode, die im wesentlichen mit der Euler'schen übereinstimmt. Viel früher war dieselbe Aufgabe schon von indischen Mathematikern gelöst worden.

Siebenter Abschnitt.

Kettenbrüche.

§. 223. Ein Bruch, dessen Nenner die Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruche ist, von welchem der Nenner wieder dieselbe Zusammensetzung haben kann, heißt ein Kettenbruch. Hier soll nur von solchen Kettenbrüchen die Rede sein, deren Zähler 1 sind; ihre allgemeine Form ist

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \dots}}}$$

Die Brüche $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \dots$ heißen Glieder des Kettenbruches. Hat der Kettenbruch eine endliche Zahl von Gliedern, so heißt er selbst ein endlicher, sonst ein unendlicher Kettenbruch.

Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Kettenbruch und umgekehrt.

§. 224. **Aufgabe.** Einen gemeinen echten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Man dividiere den Nenner durch den Zähler, dann den früheren Divisor durch den Rest, den neuen Divisor durch den neuen Rest, u. s. w.

bis eine dieser Divisionen ohne Rest aufgeht; die einzelnen Quotienten sind die Nenner der auf einander folgenden Glieder des Kettenbruches.

Beweis. Ist $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, also $a < b$, so hat man

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b:a} = \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{a}}$$

$$= \frac{1}{q_1 + \frac{1}{a:r_1}} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}}$$

$$= \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{r_1:r_2}}} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{r_3}{r_2}}}}, \text{ u. s. w.,}$$

wenn $b:a$ den Quotienten q_1 mit dem Reste r_1,
$a:r_1$ „ „ q_2 „ „ „ r_2,
$r_1:r_2$ „ „ q_3 „ „ „ r_3,
u. s. w. gibt.

Der hier begründete Rechnungsgang ist übereinstimmend mit der in §. 69 zur Auffindung des größten gemeinsamen Maßes von b und a angegebenen Kettendivision, woraus folgt, dass man auch hier, wie dort, endlich auf einen Rest = 0 kommen müsse. Wäre in der obigen allgemeinen Entwicklung, z. B. $r_3 = 0$, so hätte man den endlichen Kettenbruch

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}}.$$

Der gemeine Bruch $\frac{a}{b}$ wird in Bezug auf den erhaltenen Kettenbruch der Erzeugungsbruch genannt.

Ist z. B. $\frac{69}{151}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so hat man folgende Rechnung:

$151:69 = 2$ mit dem Reste 13 oder	69	151	$2 = q_1$
$69:13 = 5$ „ „ „ 4	4	13	$5 = q_2$
$13:4 = 3$ „ „ „ 1		1	$3 = q_3$
$4:1 = 4$			$4 = q_4$

daher $\frac{69}{151} = \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}.$

Zusatz. Um einen unechten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, stelle man denselben als eine gemischte Zahl dar, verwandle dann den angehängten echten Bruch in einen Kettenbruch und setze diesem noch die erhaltene ganze Zahl voraus. Der Kettenbruch hat in diesem Falle die Form

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}}$$

§. 225. **Aufgabe.** Einen endlichen Kettenbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Man vereinige das letzte Glied des Kettenbruches mit dem Nenner des vorletzten zu einem unechten Bruche und dividiere dadurch den Zähler 1 dieses vorletzten Gliedes; den erhaltenen Bruch vereinige man wieder mit dem Nenner des vorhergehenden Gliedes und dividiere dadurch den Zähler 1 desselben, und setze dieses Verfahren bis zum ersten Gliede fort.

Z. B. $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{5}}}} = \frac{128}{553}$. Man rechnet:

$$8+\frac{1}{5}=\frac{41}{5};\quad \frac{1}{\frac{41}{5}}=\frac{5}{41};\quad 3+\frac{5}{41}=\frac{128}{41};\quad \frac{1}{\frac{128}{41}}=\frac{41}{128};$$

$$4+\frac{41}{128}=\frac{553}{128};\quad \frac{5}{\frac{553}{128}}=\frac{128}{553}$$

Ein anderes Verfahren, einen Kettenbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, wird weiter unten (§. 227) angegeben werden.

Näherungsbrüche und ihre Eigenschaften.

§. 226. Bricht man einen Kettenbruch bei irgend einem Gliede ab und verwandelt den bis dahin reichenden Kettenbruch mit Vernachlässigung der folgenden Glieder in einen gemeinen Bruch, so heißt dieser ein Näherungsbruch des ganzen Kettenbruches, und zwar der erste, zweite, dritte..., je nachdem man nur das erste, oder die ersten zwei, drei, ... Glieder in Anspruch nimmt. Bezeichnet man für den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{q_4+\cdots}}}}$$

die auf einander folgenden Näherungsbrüche durch $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \ldots\ldots$, so ist $\frac{Z_1}{N_1}=\frac{1}{q_1}$, $\frac{Z_2}{N_2}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}}$, $\frac{Z_3}{N_3}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3}}}$, u. s. w.

Bei einem endlichen Kettenbruche stellt der letzte Näherungsbruch zugleich den Erzeugungsbruch selbst dar.

§. 227. Der Zähler eines Näherungsbruches (vom dritten an) ist gleich dem Producte aus dem Zähler des vorhergehenden Näherungsbruches und dem Nenner des neu hinzukommenden Gliedes, vermehrt um den Zähler des zweitvorhergehenden Näherungsbruches; ebenso ist der Nenner eines Näherungsbruches gleich dem Producte aus dem Nenner des vorhergehenden Näherungsbruches und dem Nenner des neu zugezogenen Gliedes, vermehrt um den Nenner des zweitvorhergehenden Näherungsbruches.

Beweis. Für die ersten Näherungsbrüche erhält man:

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1}, \text{ daher } Z_1 = 1,\ N_1 = q_1.$$

$$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{\frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}} = \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1}, \text{ daher}$$

$$Z_2 = q_2, \qquad N_2 = q_1 q_2 + 1.$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{\frac{q_2 q_3 + 1}{q_3}} = \frac{1}{q_1} + \frac{q_3}{q_2 q_3 + 1}$$

$$\frac{1}{\frac{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3}{q_2 q_3 + 1}} = \frac{q_2 q_3 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3} = \frac{q_2 q_3 + 1}{(q_1 q_2 + 1)\, q_3 + q_1}$$

oder $\frac{Z_3}{N_3} = \frac{Z_2 q_3 + Z_1}{N_2 q_3 + N_1}$, daher $Z_3 = Z_2 q_3 + Z_1$, $N_3 = N_2 q_3 + N_1$; woraus hervorgeht, dass das obige Gesetz für den dritten Näherungsbruch richtig ist.

Gesetzt nun, dasselbe Gesetz gelte für den n ten Näherungsbruch, so dass

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} q_n + Z_{n-2}}{N_{n-1} q_n + N_{n-2}}$$

sei. Um aus dem n ten Näherungsbruche den $(n+1)$ ten zu erhalten, braucht man mit Rücksicht auf die Glieder des Kettenbruches, welche zu $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ gehören, nur in dem ersteren $q_n + \frac{1}{q_{n+1}}$ statt q_n zu setzen. Man erhält dann

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{Z_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + Z_{n-2}}{N_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + N_{n-2}} = \frac{Z_{n-1}\,(q_n q_{n+1} + 1) + Z_{n-2}\, q_{n+1}}{N_{n-1}\,(q_n q_{n+1} + 1) + N_{n-2}\, q_{n+1}}$$

$$= \frac{(Z_{n-1} q_n + Z_{n-2})\, q_{n+1} + Z_{n-1}}{(N_{n-1} q_n + N_{n-2})\, q_{n+1} + N_{n-1}}, \text{ somit}$$

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{Z_n q_{n+1} + Z_{n-1}}{N_n q_{n+1} + N_{n-1}}.$$

Gilt daher das obige Bildungsgesetz für den n ten Näherungsbruch, so ist es auch für den $(n+1)$ ten richtig. Nun gilt dieses Gesetz, wie gezeigt wurde, für den dritten Näherungsbruch, also gilt es auch für den vierten, folglich auch für den fünften, u. s. w.; folglich gilt dasselbe allgemein.

Mit Rücksicht auf die hier nachgewiesene Eigenschaft lassen sich aus den ersten zwei Näherungsbrüchen ohne Schwierigkeit alle nacheinander folgenden Näherungsbrüche und daher bei einem endlichen Kettenbruche auch der Erzeugungsbruch bestimmen.

Z. B. Für den Kettenbruch $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

hat man $$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{Z_2}{N_2} = \frac{3}{7};$$

daher

$$Z_3 = 3.4 + 1 = 13,\ N_3 = 7.4 + 2 = 30;\ \frac{Z_3}{N_3} = \frac{13}{30};$$

$$Z_4 = 13.5 + 3 = 68,\ N_4 = 30.5 + 7 = 157;\ \frac{Z_4}{N_4} = \frac{68}{157};$$

$$Z_5 = 68.6 + 13 = 421,\ N_5 = 157.6 + 30 = 972;\ \frac{Z_5}{N_5} = \frac{421}{972};$$

oder Nenner 2, 3, 4, 5, 6,

Näherungsbrüche $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{13}{30}, \frac{68}{157}, \frac{421}{972}$.

Der letzte Näherungsbruch stellt zugleich den Erzeugungsbruch des gegebenen Kettenbruches dar.

§. 228. Die Differenz zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen ist gleich einem Bruche, dessen Zähler $+1$ oder -1 ist, je nachdem der Zeiger des Subtrahends eine gerade oder ungerade Zahl ist, und dessen Nenner das Product der Nenner der beiden Näherungsbrüche ist.

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{(-1)^n}{N_{n-1} N_n}.$$

Beweis. Es ist

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1}}{N_{n-1} N_n}, \text{ und}$$

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_n q_{n+1} + Z_{n-1}}{N_n q_{n+1} + N_{n-1}}$$

$$= \frac{Z_n N_{n-1} - Z_{n-1} N_n}{N_n (N_n q_{n+1} + N_{n-1})} = \frac{-(Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1})}{N_n N_{n+1}}.$$

Hiernach ist allgemein der Zähler des Bruches, welcher die Differenz $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ ausdrückt, das Entgegengesetzte des Zählers von dem Bruche für die Differenz $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n}$, also für die nächstvorhergehende Differenz. Nun ist dieser Zähler für die erste Differenz, d. i. für

$$\frac{Z_1}{N_1} - \frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1} = \frac{+1}{q_1 (q_1 q_2 + 1)} = \frac{+1}{N_1 N_2} = \frac{(-1)^2}{N_1 N_2}$$

gleich $+1$, demnach für die zweite Differenz -1, und so fort für die auf einander folgenden Differenzen abwechselnd $+1$ und -1.

Folgesätze. 1. Wegen $N_{n-1} < N_n < N_{n+1}$ ist $\frac{1}{N_{n-1} N_n} > \frac{1}{N_n N_{n+1}}$. Der absolute Wert der Differenz zweier auf einander folgender Näherungsbrüche wird mit wachsendem Zeiger kleiner.

2. Aus dem Vorzeichen folgt: Jeder gerade Näherungsbruch ist kleiner und jeder ungerade Näherungsbruch größer als die beiden ihm benachbarten Näherungsbrüche.

3. Aus $\frac{Z_1}{N_1} - \frac{Z_2}{N_2} > \frac{Z_3}{N_3} - \frac{Z_2}{N_2} > \ldots$ folgt $\frac{Z_1}{N_1} > \frac{Z_3}{N_3} > \frac{Z_5}{N_5} \ldots$

" $\frac{Z_3}{N_3} - \frac{Z_2}{N_2} > \frac{Z_3}{N_3} - \frac{Z_4}{N_4} > \ldots$ " $\frac{Z_2}{N_2} < \frac{Z_4}{N_4} < \frac{Z_6}{N_6} \ldots$

Mit wachsendem Zeiger nimmt der Wert der ungeraden Näherungsbrüche ab, hingegen nimmt der Wert der geraden Näherungsbrüche zu.

4. Der vollständige Wert des Kettenbruches ist als letzter Näherungsbruch kleiner als die ungeraden und größer als die geraden Näherungsbrüche.

Der vollständige Wert eines Kettenbruches liegt also immer zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen.

§. 229. Die Differenz zwischen einem Näherungsbruche und dem vollständigen Werte eines Kettenbruches ist absolut genommen kleiner als ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Quadrat des Nenners des Näherungsbruches ist.

Da der vollständige Wert $\frac{a}{b}$ des Kettenbruches immer zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen liegt, so ist der Unterschied $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b}$ absolut genommen kleiner als der Unterschied $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$, somit

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n N_{n+1}}.$$

Wegen $N_{n+1} > N_n$ ist nun $N_n N_{n+1} > N_n^2$, und $\frac{1}{N_n N_{n+1}} < \frac{1}{N_n^2}$, daher auch

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n^2}.$$

Zusatz. Da $N_1^2 < N_2^2 < N_3^2 < N_4^2 < \ldots$, daher

$$\frac{1}{N_1^2} > \frac{1}{N_2^2} > \frac{1}{N_3^2} > \frac{1}{N_4^2} > \ldots \text{ ist,}$$

so folgt, dass jeder folgende Näherungsbruch von dem vollständigen Werte des Kettenbruches um weniger verschieden ist, als der vorhergehende, dass sich also die auf einander folgenden Näherungsbrüche diesem Werte immer mehr nähern, bis der letzte, wenn es einen gibt, mit ihm zusammenfällt.

§. 230. Zähler und Nenner eines jeden Näherungsbruches sind relative Primzahlen.

Für die Näherungsbrüche $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ und $\frac{Z_n}{N_n}$ ist (§. 228, 1), absolut genommen

$$Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1} = 1.$$

Wären nun Z_n und N_n nicht relative Primzahlen, sondern hätten sie ein gemeinsames Maß m, so wäre m auch ein Maß von $Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1}$ (§. 68) und folglich ein Maß von 1, was nicht möglich ist.

§. 231. Wenn ein Bruch $\frac{p}{q}$ dem vollständigen Werte eines Kettenbruches $\frac{a}{b}$ näher kommt als ein Näherungsbruch, so ist sowohl der Zähler als der Nenner des Bruches größer als der Zähler beziehungsweise Nenner des Näherungsbruches.

Vor. $\frac{a}{b} - \frac{p}{q} < \frac{a}{b} - \frac{Z_n}{N_n}$, wo n, um das Zeichen zu berücksichtigen, als gerade Zahl vorausgesetzt wird;

somit $$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} > \frac{a}{b} > \frac{p}{q} > \frac{Z_n}{N_n}.$$

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{p}{q} < \frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n} \text{ oder } \frac{Z_{n-1}\,q - N_{n-1}\,p}{N_{n-1}\,q} < \frac{1}{N_{n-1}\,N_n},$$

daher $$\frac{Z_{n-1}\,q - N_{n-1}\,p}{q} < \frac{1}{N_n}.$$

Da nun $Z_{n-1}\,q - N_{n-1}\,p \geqq 1$ ist, so folgt

$$q > N_n.$$

Aus $\frac{p}{q} > \frac{Z_n}{N_n}$ und $q > N_n$ folgt auch $p > Z_n$.

Ist n eine ungerade Zahl, so folgt aus dem Beweise, dass p und q größer sind als Z_{n+1} bezüglich N_{n+1}, daher umsomehr größer sind als Z_n und N_n.

Folgesatz. Die Näherungsbrüche drücken den vollständigen Wert des Kettenbruches in den kleinsten Zahlen mit der größten Annäherung aus.

Die Theorie der Kettenbrüche wurde von Euler (1737) gegeben. Früher hatte Brouncker (1655) bereits $\frac{\pi}{4}$ durch einen Kettenbruch dargestellt, und Huyghens (1682) zur Lösung der in § 232 folgenden Aufgabe Kettenbrüche benützt

Anwendungen der Kettenbrüche.

§. 232. Aufgabe. Das Verhältnis zweier großer Zahlen durch kleinere möglichst genau darzustellen.

Man verwandelt den Verhältnisquotienten in einen Kettenbruch und bestimmt dessen Näherungsbrüche entsprechend §. 231, Folgesatz.

Z. B. Man soll die Verhältniszahl der Peripherie eines Kreises zu dessen Durchmesser, d. i. 3·1415926 durch kleinere Zahlen möglichst genau ausdrücken.

$$3{\cdot}1415926 = \frac{31415926}{10000000} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{243} + \ldots$$

Näherungsbrüche:

$$3,\quad 7,\quad 15,\quad 1,\quad 243, \ldots$$
$$\frac{3}{1},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\quad \frac{86598}{27565},$$

*** §. 233. Aufgabe.** Den Wert eines unendlichen periodischen Kettenbruches zu bestimmen.

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots$$ Periode ($q_1, q_2, \ldots q_n$).

somit $x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_n + x}$, $\quad x = \frac{Z_{n-1}(q_n + x) + Z_{n-2}}{N_{n-1}(q_n + x) + N_{n-2}}$.

Die positive Wurzel dieser quadratischen Gleichung ist der gesuchte Wert.

* §. 234. **Aufgabe.** Eine irrationale Quadratwurzel durch die Näherungswerte eines Kettenbruches zu bestimmen.

Es sei $\sqrt{a}$ zu bestimmen. Man suche die größte darin enthaltene Zahl q und setze $\sqrt{a} = q + \frac{1}{x_1}$, wo $\frac{1}{x_1} = \sqrt{a} - q < 1$, daher $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a} - q} > 1$ sein muss. Nun suche man wieder die größte in $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a} - q}$ enthaltene ganze Zahl q_1 und setze $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$, wo $\frac{1}{x_2} < 1$ und $x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1} > 1$ sein muss.

Setzt man dieses Verfahren fort, und sind die größten in $x_2, x_3, \ldots$ enthaltenen ganzen Zahlen $q_2, q_3, \ldots$, so hat man

$$\sqrt{a} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{x_2} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{x_3} = \ldots$$

Durch die aus dem erhaltenen Kettenbruche hervorgehenden Näherungswerte kann $\sqrt{a}$ mit jeder beliebigen Schärfe berechnet werden.

Ist z. B. $\sqrt{14}$ zu bestimmen, so hat man folgende Rechnung:

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{x_1},$$

$$\text{wo } x_1 = \frac{1}{\sqrt{14} - 3} = \frac{\sqrt{14} + 3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14} - 2}{5} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

$$\text{,,} \quad x_2 = \frac{5}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{14} - 2}{2} = 2 + \frac{1}{x_3},$$

$$\text{,,} \quad x_3 = \frac{2}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14} - 3}{5} = 1 + \frac{1}{x_4},$$

$$\text{,,} \quad x_4 = \frac{5}{\sqrt{14} - 3} = \frac{\sqrt{14} + 3}{1} = 6 + \frac{\sqrt{14} - 3}{1} = 6 + \frac{1}{x_5},$$

$$\text{,,} \quad x_5 = \frac{1}{\sqrt{14} - 3}, \text{ welches wieder } = x_1 = 1 + \frac{1}{x_2},$$

so dass die Nenner 1, 2, 1, 6 immer wiederkehren. Man hat also

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \ldots$$

Die Näherungswerte sind:

$$3,\ 4,\ \frac{11}{3},\ \frac{15}{4},\ \frac{101}{27},\ \frac{116}{31},\ \frac{333}{89},\ \frac{449}{120},\ \frac{3027}{809},\ \ldots$$

Setzt man $\sqrt{14} = \frac{3027}{809} = 3{\cdot}741656\ldots$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{809^2} = \frac{1}{654481} = 0{\cdot}0000015\ldots$; es ist also $\sqrt{14}$ auf 5 Decimalen genau bestimmt.

* **§. 235. Aufgabe.** Den irrationalen Briggs'schen Logarithmus einer Zahl durch die Näherungswerte eines Kettenbruches zu bestimmen.

Ist z. B. $x = \log 2$ zu ermitteln, so ist

$$10^x = 2 \quad \text{demnach} \quad x = 0 + \frac{1}{x_1};$$

$10^{\frac{1}{x_1}} = 2$ und $10 = 2^{x_1}$. Da $2^3 < 10 < 2^4$, setzt man $x_1 = 3 + \frac{1}{x_2}$;

$$\text{daher } 10 = 2^{3+\frac{1}{x_2}} = 8.2^{\frac{1}{x_2}} \text{ und}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{x_2} = 2. \text{ Da } \left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4,$$

setzt man $x_2 = 3 + \frac{1}{x_3}$;

$$\text{daher } 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{x_3}} = \frac{125}{64}.\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x_3}},$$

$$\frac{5}{4} = \left(\frac{128}{125}\right)^{x_3} \text{ oder } 1{\cdot}25 = 1{\cdot}024^{x_3}.$$

$$\text{Da } 1{\cdot}024^9 < 1{\cdot}25 < 1{\cdot}024^{10},$$

setzt man $x_3 = 9 + \frac{1}{x_4}$;

$$\text{darnach ist } \log 2 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \ldots}}}$$

Die ersten drei Näherungswerte sind $\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{28}{93}$, deren letzter einen Fehler hat, welcher kleiner ist als $\frac{1}{93^2} = \frac{1}{8649} = 0{\cdot}00011\ldots$

Somit stimmt $\frac{28}{93} = 0{\cdot}30107\ldots$ auf 3 Decimalen mit dem gesuchten Logarithmus überein; $\log 2 = 0{\cdot}301\ldots$

§. 236. Aufgabe. Eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades mit Hilfe eines Kettenbruches in ganzen Zahlen aufzulösen. (Lagrange'sche Methode. 1767.)

Um für die Gleichung $ax \pm by = \pm c$, wo a, b und c positive Zahlen sind, eine Auflösung in ganzen Zahlen zu erhalten, verwandelt man $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und berechnet den vorletzten Näherungswert desselben $= \frac{p}{q}$. Da $\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{\pm 1}{bq}$, also $aq - bp = \pm 1$ (§. 228), daher auch

$acq - bcp = \pm c$ ist, so haben x und y die absoluten Werte cq und cp, und zwar mit denjenigen Vorzeichen, welche mit Rücksicht auf die Vorzeichen der vorgelegten Gleichung der identischen Gleichung $acq - bcp = \pm c$ genügen.

Beispiel. Es soll $9x + 29y = 15$ in ganzen Zahlen aufgelöst werden.

Man verwandle $\frac{9}{29}$ in einen Kettenbruch und bestimme den vorletzten Näherungsbruch $\frac{4}{13}$. Da $\frac{9}{29} - \frac{4}{13} = \frac{+1}{29.13}$, also $9.13 - 29.4 = +1$ und $9.13.15 - 29.4.15 = 15$ ist, so bilden $x = 13.15 = 195$, $y = -4.15 = -60$ eine Auflösung der Gleichung in ganzen Zahlen, und man erhält dann (§. 217) als allgemeine Lösung

$$x = 195 - 29u,\quad y = -60 + 9u,$$

wo die Hilfs-Unbekannte u eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet.

Achter Abschnitt.

Progressionen.

§. 237. Eine Folge von Zahlen, welche nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, heißt eine Reihe, auch Progression. Jede dieser Zahlen wird ein Glied der Reihe genannt. Die Zahl, welche anzeigt, die wievielte Stelle in der Reihe ein Glied einnimmt, heißt der Zeiger dieses Gliedes.

Eine Reihe heißt steigend oder fallend, je nachdem die auf einander folgenden Glieder immer größer oder immer kleiner werden.

Eine Reihe interpolieren heißt, zwischen je zwei auf einander folgende Glieder eine bestimmte Zahl von Gliedern einschalten, welche mit den Gliedern der gegebenen Reihe wieder eine Reihe derselben Art bilden.

I. Arithmetische Progressionen.

§. 238. Eine arithmetische Progression ist eine Reihe, in welcher die Differenz je zweier auf einander folgenden Glieder (das vorhergehende als Subtrahend genommen) dieselbe Zahl ist. Diese constante Differenz heißt die Differenz der Progression. So sind

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22, \ldots$$

und $50, 47, 44, 41, 38, 35, 32, 29, \ldots$

arithmetische Progressionen; in der ersten ist 3, in der zweiten -3 die Differenz.

Die Reihe ist steigend, wenn die Differenz **positiv** ist, fallend, wenn dieselbe **negativ** ist.

1. **In einer arithmetischen Progression ist jedes Glied gleich der Summe aus dem ersten Gliede und dem Producte der Differenz mit dem um 1 verminderten Zeiger des Gliedes.**

Ist a_1 das Anfangsglied, d die Differenz und a_n das nte Glied, so ist

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d,$$

also allgemein $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Die Formel $a_n = a_1 + (n-1)d$ heißt das **allgemeine Glied** der Progression, weil daraus, wenn man für n nach und nach 1, 2, 3, 4,... setzt, alle Glieder der Progression abgeleitet werden können.

Zusatz. $a_n = \frac{(a_n - d) + (a_n + d)}{2}$.

Jedes Glied einer arithmetischen Reihe ist das arithmetische Mittel der benachbarten Glieder.

2. **In einer arithmetischen Progression ist die Summe irgend einer Anzahl von Gliedern gleich dem Producte aus der halben Anzahl dieser Glieder und der Summe des ersten und letzten Gliedes.**

Beweis. Ist a_n das nte Glied der Reihe, so ist $a_n - d$ das nächstvoranstehende, $a_n - 2d$ das diesem vorangehende Glied, u. s. f.

Drückt man nun die Summe der ersten n Glieder durch s_n aus, so ist
$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$.

Schreibt man die Glieder in umgekehrter Ordnung, so ist auch
$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1.$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke erhält man, da je zwei unter einander stehende Glieder $a_1 + a_n$ zur Summe geben,
$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + \ldots + (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + (a_1+a_n)$.

Hier kommt $a_1 + a_n$ so oft als Summand vor, als Glieder angenommen werden, also n mal; daher $2s_n = n\,(a_1 + a_n)$, und

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Diese Formel heißt das **Summenglied** der arithmetischen Progression.

Beispiel. Man suche das allgemeine und das Summenglied der Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11..

Da $a_1 = 1$, $d = 2$ ist, so hat man

$$a_n = 1 + (n-1).2 = 2n - 1,$$
$$s_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2.$$

So ist z. B. $a_{15} = 2.15 - 1 = 29$, und $s_{15} = 15^2 = 225$

§. 239. Die beiden von einander unabhängigen Gleichungen

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ und } s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

enthalten fünf Größen a_1, d, n, a_n, s_n; es müssen also je drei derselben gegeben sein, um die beiden anderen zu bestimmen. Dadurch erhält man 10 verschiedene Aufgaben.

Sind z. B. d, n, a_n, gegeben, so findet man aus der ersten Gleichung

$$a_1 = a_n - (n-1)d,$$

und dann aus der zweiten

$$s_n = \frac{n}{2}\{a_n - (n-1)d + a_n\} = \frac{n}{2}\{2a_n - (n-1)d\}.$$

§. 240. Eine arithmetische Progression zu interpolieren.

Sind zwischen die Glieder a_k und a_{k+1} einer arithmetischen Progression, deren Differenz d ist, r Glieder einzuschalten, die mit a_k und a_{k+1} wieder eine arithmetische Progression bilden, so ist a_k das erste und a_{k+1} das $(r+2)$te Glied der neuen Progression, daher, wenn die Differenz derselben mit d_1 bezeichnet wird, $a_{k+1} = a_k + (r+1)d_1$; es ist aber auch $a_{k+1} = a_k + d$, folglich $(r+1)d_1 = d$, und

$$d_1 = \frac{d}{r+1}.$$

Die interpolierte Reihe ist also

$$a_k,\ a_k + \frac{d}{r+1},\ a_k + \frac{2d}{r+1},\ \ldots\ a_k + \frac{rd}{r+1},\ a_{k+1}.$$

Z. B. Man schalte in der Reihe 1, 2, 3, 4...... zwischen die Glieder 2 und 3 nach dem Gesetze der arithmetischen Progressionen 7 Glieder ein.

Hier ist $d = 1$, $r = 7$, daher $d_1 = \frac{1}{8}$; die interpolierte Progression ist also

$$2,\ 2\frac{1}{8},\ 2\frac{2}{8},\ 2\frac{3}{8},\ 2\frac{4}{8},\ 2\frac{5}{8},\ 2\frac{6}{8},\ 2\frac{7}{8},\ 3.$$

II. Geometrische Progressionen.

§. 241. Eine geometrische Progression ist eine Reihe, in welcher der Quotient je zweier aufeinander folgender Glieder (das vorhergehende als Divisor genommen) dieselbe Zahl ist. Dieser constante Quotient heißt der Quotient der Progression. So sind

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729, \ldots$$

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \frac{1}{243},\ \frac{1}{729},\ \ldots$$

geometrische Progressionen; in der ersten ist 3, in der zweiten $\frac{1}{3}$ der Quotient.

Die Reihe ist steigend, wenn der Quotient größer als 1 ist, fallend, wenn derselbe kleiner als 1 ist.

1. In einer geometrischen Progression ist jedes Glied gleich dem Producte aus dem ersten Gliede und der sovielten Potenz des Quotienten, als der um 1 verminderte Zeiger des Gliedes anzeigt.

Bezeichnet a_1 das erste Glied, q den Quotienten und a_n das nte Glied, so ist

$$a_2 = a_1 q,$$
$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2,$$
$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3,$$

allgemein $a_n = a_1 q^{n-1}$ (das allgemeine Glied).

Zusatz. $a_n = \sqrt{\left(\frac{a_n}{q}\right) \cdot (a_n q)}$.

Jedes Glied einer geometrischen Reihe ist das geometrische Mittel der beiden benachbarten Glieder.

2. In einer geometrischen Progression ist die Summe von n Gliedern gleich dem Producte aus dem ersten Gliede und der um 1 verminderten nten Potenz des Quotienten dividiert durch den um 1 verminderten Quotienten.

Beweis. Bezeichnet s_n die Summe der ersten n Glieder, so ist

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1},$$

und, wenn man beide Theile dieser Gleichung mit q multipliciert,

$$q s_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Wird dann die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert, so erhält man

$$q s_n - s_n = a_1 q^n - a_1 \text{ und folglich}$$

$$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

als das Summenglied für die geometrische Progression.

Dasselbe läſst sich, da $a_1 q^{n-1} = a_n$, also $a_1 q^n = a_n q$ ist, auch so darstellen:

$$s_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}.$$

Beispiel. Man bestimme das allgemeine und das Summenglied der Progression 1, 3, 9, 27, 81, 243, ...

Hier ist $a_1 = 1$ und $q = 3$, daher

$$a_n = 1.3^{n-1} = 3^{n-1},\ s_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

So ist z. B. $a_{10} = 3^9 = 19683$, und $s_{10} = \frac{3^{10} - 1}{2} = 29524$.

§. 242. Eine ohne Ende fortschreitende Reihe heiſst convergent, wenn sich die Summe der ersten n Glieder umsomehr einem bestimmten endlichen Grenzwerte nähert, je gröſser n wird, und dieser Grenzwert heiſst die Summe der unendlichen Reihe. Eine Reihe, in welcher die Summe von n Anfangsgliedern beim unendlichen Wachsen von n über jeden constanten Wert hinaus zunimmt, heiſst divergent.

Für die geometrische Progression $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots$ ist

$$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 q^n}{q - 1} - \frac{a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q}$$

$$\lim . s_n = \frac{a_1}{q - 1} . \lim . (q^n) - \frac{a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} . \lim . (q^n).$$

Ist nun $q > 1$, so wird mit dem wachsenden n auch q^n und daher auch s_n über jeden angebbaren Wert hinaus zunehmen. Eine steigende geometrische Progression ist demnach stets divergent.

Ist $q = 1$, so ist $s_n = a_1 . n$, somit $\lim. s_n = \infty$ für $n = \infty$; daher ist auch in diesem Falle die Reihe divergent.

Ist dagegen $q < 1$, so nähert sich beim unendlichen Wachsen von n q^n ohne Ende der Null und s_n dem endlichen Grenzwerte $\frac{a_1}{1 - q}$, welcher daher die Summe der unendlichen Reihe ist. Eine fallende geometrische Progression ist demnach stets convergent.

Z. B. Für die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, in welcher $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ ist, hat man $s = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$; d. h. je mehr Glieder der Reihe man addiert, desto mehr nähert sich die Summe der Zahl 2, ohne jedoch je dieselbe wirklich zu erreichen.

Eine arithmetische Progression ist, wie man aus der Summenformel $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ sogleich ersieht, immer divergent.

Jeder periodische Decimalbruch kann als eine fallende geometrische Progression dargestellt und als solche summiert, d. i. in einen gemeinen Bruch verwandelt werden. Nach §. 103, 2 ist

$$x = \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \ldots = \frac{\frac{b}{10^n}}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{b}{10^n - 1}.$$

§. 243. Mittelst der beiden von einander unabhängigen Gleichungen

$$a_n = a_1 q^{n-1} \text{ und } s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

von denen die zweite auch durch $s_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$ ersetzt werden kann, lassen sich aus je dreien der fünf Größen a_1, q, n, a_n und s_n die beiden anderen bestimmen. Von diesen 10 Aufgaben führen zwei auf Gleichungen des $n$ten Grades.

Sind z. B. q, n, s_n gegeben, so erhält man aus der zweiten Gleichung

$$a_1 = \frac{(q - 1) s_n}{q^n - 1},$$

und dann aus der ersten Gleichung

$$a_n = \frac{q^{n-1}(q - 1) s_n}{q^n - 1}.$$

§. 244. **Aufgabe.** Eine geometrische Progression zu interpolieren.

Schaltet man zwischen die Glieder a_k und a_{k+1} einer geometrischen Progression, deren Quotient q ist, r Glieder ein, die mit a_k und a_{k+1} wieder eine geometrische Progression bilden, so ist in dieser a_k das erste und a_{k+1} das $(r+2)$te Glied; man hat daher, wenn der Quotient der neuen Progression mit q_1 bezeichnet wird, $a_{k+1} = a_k . q_1^{r+1}$; es ist aber auch $a_{k+1} = a_k . q$, daher $q_1^{r+1} = q$, und

$$q_1 = \sqrt[r+1]{q}.$$

Die interpolierte Progression ist also

$$a_k,\ a_k\sqrt[r+1]{q},\ a_k\sqrt[r+1]{q^2}, \ldots a_k\sqrt[r+1]{q^r},\ a_{k+1}.$$

Um z. B. in der Reihe 1, 16, 256, 4096, ... zwischen je zwei Glieder 3 neue Glieder zu interpolieren, setze man, da $q = 16$ und $r = 3$ ist, $q_1 = \sqrt[4]{16}$, somit $q_1 = \pm 2$ oder $q_1 = \pm 2i$, wodurch man erhält

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \mathbf{16},\ 32,\ 64,\ 128,\ \mathbf{256},\ 512,\ 1024,\ 2048,\ \mathbf{4096}, \ldots$$
$$1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \mathbf{16},\ -32,\ 64,\ -128,\ \mathbf{256}, \ldots$$
$$1,\ 2i,\ -4,\ -8i,\ \mathbf{16},\ 32i,\ -64,\ -128i,\ \mathbf{256}, \ldots$$
$$1,\ -2i,\ -4,\ 8i,\ \mathbf{16},\ -32i,\ -64,\ 128i,\ \mathbf{256}, \ldots$$

Einige besondere Reihen.

§. 245. Die zusammengesetzte arithmetisch-geometrische Reihe.

Multipliciert man die Glieder der arithmetischen Progression

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \ldots$$

mit den gleichstelligen Gliedern der geometrischen Progression

$$b, \quad bq, \quad bq^2, \quad bq^3, \ldots,$$

so entsteht die zusammengesetzte Reihe

$$ab,\ (a+d)bq,\ (a+2d)bq^2,\ (a+3d)bq^3, \ldots$$

Es sei das Summenglied derselben

$$S_n = ab + (a+d)bq + (a+2d)bq^2 + \ldots + \{a+(n-1)d\}bq^{n-1}$$

zu bestimmen.

Multipliciert man beide Theile dieser Gleichung mit q, so ist

$$qS_n = abq + (a+d)bq^2 + (a+2d)bq^3 + \ldots + \{a+(n-1)d\}bq^n.$$

Wird dann die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert, so erhält man

$$S_n(q-1) = \{a+(n-1)d\}bq^n - ab - (bdq + bdq^2 + \ldots + bdq^{n-1})$$
$$= ab(q^n-1) + (n-1)bdq^n - \frac{bdq(q^{n-1}-1)}{q-1},$$

und folglich

$$S_n = \frac{ab(q^n-1)}{q-1} + \frac{(n-1)bdq^n}{q-1} - \frac{bdq(q^{n-1}-1)}{(q-1)^2}, \text{ oder}$$

$$S_n = \frac{ab(q^n-1)}{q-1} + \frac{bdq}{(q-1)^2}\{nq^{n-1}(q-1) - (q^n-1)\}.$$

Ist $q < 1$ und wird $n = \infty$, so nähert sich q^n und auch $n q^n$, (wie aus dem später folgenden binomischen Lehrsatze sich ergibt), ohne Ende der Null, und die Summe der unendlichen Reihe dem Grenzwerte

$$S = \frac{ab(1-q) + bdq}{(1-q)^2}.$$

§. 246. Die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen.

Zur Bestimmung der Summe $s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2$ bilde man

$$\begin{aligned} 1^3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots 1, \\ 2^3 &= (1+1)^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1, \\ 3^3 &= (2+1)^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1, \\ 4^3 &= (3+1)^3 = 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+1)^3 &= \ldots\ldots n^3 + 3.n^2 + 3.n + 1. \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man, da sich $1^3 + 2^3 + + 3^3 + .. + n^3$ in beiden Theilen aufhebt,

$$(n+1)^3 = 3.(1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2) + 3.(1 + 2 + 3 .. + n) + n + 1,$$

oder $$(n+1)^3 = 3.s_n + 3.\frac{n}{2}(n+1) + (n+1),$$

woraus sich ergibt $$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

§. 247. Die Reihe der Cuben der natürlichen Zahlen.

Um die Summe $s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + .. + n^3$ zu bestimmen, verfährt man in gleicher Weise wie in §. 246, indem man zuerst 1^4, 2^4, 3^4, 4^4, .., $(n+1)^4$ nach der Formel $(n+1)^4 = n^4 + 4.n^3 + 6.n^2 + 4.n + 1$ entwickelt und dann die Gleichungen addiert. Man erhält

$$s_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

III. Zinseszins- und Rentenrechnung.

§. 248. Werden die am Ende einer Zeiteinheit fälligen Zinsen eines Capitals zu diesem hinzugefügt und mit ihm wieder verzinst, so sagt man: das Capital ist auf Zinseszinsen angelegt.

Bei den Zinseszinsrechnungen kommt, wie bei der einfachen Zinsrechnung (§. 125), das Capital, die Zeit, das Procent (Zinsfuß) und der Zins in Betracht. Als Zeiteinheit ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ein Jahr zu verstehen. Ist ein Capital zu $p\,\%$ angelegt, so wachsen 100 Einheiten des Capitals (Gulden, Kronen) in einem Jahre sammt den Zinsen auf $100 + p$ an; somit hat eine Capitalseinheit nach 1 Jahre mit Hinzufügung der Zinsen den Wert $\frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$. Den Wert $1 + \frac{p}{100}$, zu welchem die Einheit des Capitals mit Zinsen in 1 Jahre anwächst, nennt man den Verzinsungsfactor; wir wollen denselben in den nachfolgenden Rechnungen der Kürze halber mit q bezeichnen.

§. 249. Erste Fundamental-Aufgabe. Ein Capital a ist zu p% auf Zinseszinsen angelegt; zu welchem Werte wächst es nach n Jahren an?

Da die Capitalseinheit mit den Zinsen nach 1 Jahre den Wert q erhält, so hat das Capital a nach 1 Jahre den Wert

$$a_1 = a.q$$

d. h. man findet den Wert eines Capitals nach 1 Jahre, indem man den Anfangswert mit dem Verzinsungsfactor multipliciert.

Wird das neue Capital a_1 wieder ein Jahr verzinst, so ist sein Wert am Ende desselben $a_2 = a_1.q = a.q^2$.

Nach 3, 4 ... Jahren wird das Capital angewachsen sein auf

$$a_3 = a_2.q = a.q^3,\ a_4 = a_3.q = a.q^4, \text{ u. s. w.}$$

Hiernach ist der Wert des Capitals am Ende des nten Jahres

$$a_n = a\,q^n \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{I})$$

Löst man diese Gleichung nach a auf, so ergibt sich als der gegenwärtige oder Barwert eines nach n Jahren zahlbaren Capitals

$$a = \frac{a_n}{q^n}.$$

Ebenso erhält man aus I) für p und n die Werte

$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{a_n}{a}} - 1\right).100,\quad n = \frac{\log a_n - \log a}{\log q}.$$

Zusätze. 1. Hier wurde n als eine ganze Zahl von Jahren vorausgesetzt. Ist nun n eine gemischte Zahl, etwa $m + \frac{r}{s}$, so sind nur für die vollen m Jahre die Zinseszinsen von a, dagegen für den Bruchtheil des noch folgenden Jahres die einfachen Zinsen von a_m zu berechnen. Man erhält also in diesem Falle

$$e = a q^m + \frac{a\,q^m.p.r}{100.s},\ \text{oder da } \frac{p}{100} = q - 1 \text{ ist,}$$

$$c = a q^m\left(1 + \frac{p.r}{100.s}\right) = a\,q^m\left\{1 + (q-1)\frac{r}{s}\right\}.$$

2. Werden die Zinsen nicht jährlich, sondern nach dem m ten Theile eines Jahres (halbjährlich, monatlich) capitalisiert, so ist in der Gleichung I) und in den daraus abgeleiteten Formeln $q = 1 + \frac{p}{100\,m}$ und für n die Zahl nm zu setzen.

3. Die obigen Gleichungen können auch auf andere Größen, wenn dieselben in einem constanten Verhältnisse wachsen, z. B. auf die Zunahme der Bevölkerung eines Landes, des Holzstandes eines Waldes u. dgl., angewendet werden.

Beispiele.

1) Wie hoch wächst ein Capital von 2518 K in 12 Jahren zu 5 % Zinseszinsen an?

$$a_{12} = 2518 . 1{\cdot}05^{12}$$

$$\log 1{\cdot}05 = 0{\cdot}021\ 189$$

$$12 \log 1{\cdot}05 = 0{\cdot}25\ 427$$

$$\log 2518 = 3{\cdot}40\ 106$$

$$\log a_{12} = 3{\cdot}65\ 533,$$

$$\text{also } a_{12} = 4522 \text{ K}.$$

2) Ein Capital von 2000 K ist bei 4 % Zinseszinsen auf 4469 K 84 h angewachsen; wie lange war dasselbe angelegt?

$$4469{\cdot}84 = 2000 . 1{\cdot}04^n, \text{ also}$$

$$n = \frac{\log 4469{\cdot}84 - \log 2000}{\log 1{\cdot}04} = \frac{0{\cdot}34927}{0{\cdot}017033} = 20{\cdot}505 . .$$

Setzt man $n = (20 + t)$ Jahre, so ergibt sich, da 2000 K nach 20 Jahren auf $2000 . 1{\cdot}04^{20} = 4382{\cdot}2$ K anwachsen und daher die Differenz $4469{\cdot}84 - 4382{\cdot}2 = 87{\cdot}64$ K der einfache Zins des Capitals $4382{\cdot}2$ K für die Zeit t ist, nach §. 125

$$t = \frac{100 . 87{\cdot}64}{4382{\cdot}2 . 4} = \frac{1}{2} \text{ Jahr, und somit } n = 20\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

§. 250. Zweite Fundamental-Aufgabe. Durch n Jahre wird am Anfange oder am Ende eines jeden Jahres ein Betrag r gezahlt; zu welchem Werte wachsen alle diese Beträge zur Zeit der letzten Zahlung an, wenn man p % Zinseszinsen rechnet?

Die Zeit von der ersten bis zu der letzten Zahlung beträgt $n - 1$ Jahre; setzt man daher $1 + \frac{p}{100} = q$, so ist zur Zeit der letzten Zahlung

der Wert der	1. Zahlung	=	rq^{n-1},
„ „ „	2. „	=	rq^{n-2},
. . . .	. . . .	. .	. . .
„ „ „	(n-2)ten „	=	rq^2,
„ „ „	(n-1)ten „	=	rq,
„ „ „	nten „	=	r;

daher die Summe aller dieser Werte

$$s_n = r + rq + rq^2 + \ldots + rq^{n-2} + rq^{n-1}, \text{ oder}$$

$$s_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} \quad . \ . \ . \ \text{II}).$$

§. 251. Auf die voranstehenden zwei Hauptaufgaben lassen sich alle mehr oder weniger zusammengesetzten Aufgaben über die Zinseszinsrechnung zurückführen.

Aufgabe.

Ein zu p% auf Zinseszinsen angelegtes Capital a wird durch n Jahre am Ende eines jeden Jahres um den Betrag r vermehrt oder vermindert; welchen Wert hat es am Ende dieser Zeit?

Am Ende des nten Jahres ist der Wert des Capitals a (nach §. 249) aq^n, und der Wert aller n Beträge r, um welche das Capital am Ende eines jeden Jahres vermehrt oder vermindert wird (nach §. 250) $\frac{(q^n-1)}{q-1}$; der Endwert des so vermehrten oder verminderten Capitals ist also

$$E = aq^n \pm \frac{r(q^n-1)}{q-1}$$
$$= q^n\left(a \pm \frac{100r}{p}\right) \mp \frac{100r}{p}.$$

Diese Gleichung löst, da sie 5 Größen enthält, 5 verschiedene Aufgaben. Die Bestimmung von q übersteigt, da man dabei auf eine Gleichung des (n — 1)ten Grades kommt, die Grenzen dieser Anleitung.

Ist im Falle der Verminderung $a - \frac{100r}{p} < 0$ oder $r > \frac{ap}{100}$, also r größer als der jährliche Zins des Capitals a, so wird der Endwert dieses Capitals von Jahr zu Jahr kleiner, bis endlich das Capital erschöpft ist.

Zusatz. Sollen zu verschiedenen Zeiten fällige Capitalsbeträge mit einander verglichen werden, so muss man sie immer auf denselben Zeitpunkt reducieren. Da aber das Verhältnis ihrer Werte für jeden Zeitpunkt dasselbe ist, so lange ihr Zinsfuß ungeändert bleibt, so ist es an sich ganz gleichgiltig, welcher gemeinsame Zeitpunkt für die Vergleichung gewählt wird. Gewöhnlich werden entweder die Barwerte oder die Werte nach Ablauf des gegebenen Zeitraumes berechnet und mit einander in Vergleichung gesetzt.

§. 252. Beispiele.

1) Jemand legt durch 10 Jahre zu Anfang eines jeden Jahres 230 Kronen zu 5% Zinseszins an; welchen Wert haben diese Anlagen am Anfange des 10ten Jahres?

$$s_{10} = \frac{230.(1{\cdot}05^{10}-1)}{0{\cdot}05} = \frac{230.0{\cdot}62889}{0{\cdot}05} = 2892{\cdot}89 \text{ Kronen.}$$

2) Jemand legt durch 15 Jahre am Ende eines jeden halben Jahres eine sich gleichbleibende Summe in eine Sparcasse, welche bei dem jährlichen Zinse à 5% halbjährig capitalisiert, und erwirbt sich dadurch zur Zeit der letzten Zahlung ein Guthaben von 3292·71 K; wie groß ist die jedesmalige Einlage?

Hier muss man 30 Zeitperioden rechnen und als Verzinsungsfactor 1·025 annehmen; man hat daher $3292{\cdot}71 = \frac{r(1{\cdot}025^{30}-1)}{0{\cdot}025}$; mithin

$$r = \frac{3292{\cdot}71.0{\cdot}025}{1{\cdot}025^{30}-1} = 75\ K.$$

3) Ein Anlehen a soll durch eine am Ende eines jeden Jahres zu zahlende Rate r in n Jahren getilgt (amortisiert) werden; wie viel muss die Jahresrate r betragen, wenn der Berechnung p % zugrunde gelegt werden?

Der Endwert des Capitales a muss gleich sein dem Endwerte der n Raten, beide bezogen auf die Zeit der letzten Zahlung, d. i. am Ende des n ten Jahres.

$$a q^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} \text{ daher } r = \frac{a q^n (q - 1)}{q^n - 1}.$$

4) Nach wie viel Jahren sind von einem auf Zinseszins zu 5 % ausgeliehenen Capital von 1060 fl. noch 167·22 fl. übrig, wenn am Ende eines jeden Jahres 80 fl. zurückgezahlt werden?

Nach § 251 ist $167 \cdot 22 = \frac{100.80}{5} - 1 \cdot 05^n \left(\frac{100.80}{5} - 1060\right)$

$$1 \cdot 05^n . 540 = 1432 \cdot 78$$

$$n = \frac{\log 1432 \cdot 78 - \log 540}{\log 1 \cdot 05} = 20 \text{ Jahre.}$$

Rentenrechnung.

§. 253. Die Berechnung von Zinseszinsen kommt insbesondere bei der Rentenrechnung vor.

Unter einer Rente versteht man einen in festgesetzten gleichen Zeitterminen (meistens am Ende jedes Jahres) zahlbaren Geldbetrag, dessen Bezugsrecht durch eine vorher gezahlte Geldsumme, die Einlage, erworben wird. Die Einlage wird entweder auf einmal oder jährlich entrichtet und heißt dann bezüglich Mise oder Prämie. Die Rente ist gewöhnlich constant; sie kann aber auch nach einem bestimmten Gesetze veränderlich sein. Eine Rente heißt Zeitrente, wenn die Zahl der Termine, in denen sie gezahlt wird, genau bestimmt ist; Leibrente dagegen, wenn sie bis zum Tode des Empfängers fortdauert. Hier soll nur von Zeitrenten die Rede sein.

Die Rentenrechnung beruht auf folgendem Grundgedanken. Der Barwert der Rente muss auf Zinseszinsen angelegt zur Zeit des letzten Rentenbezuges denselben Endwert haben, wie sämmtliche Renten, wenn dieselben sofort nach ihrer Fälligkeit auf Zinseszinsen angelegt werden.

Es sei r die Rente, welche durch n Jahre am Ende eines jeden Jahres fällig ist, b der Barwert, welcher ein Jahr vor dem ersten Rentenbezuge fällig ist, und p der Procentsatz.

Somit $b q^n = r q^{n-1} + r q^{n-2} + \ldots + r q + r = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$.

der Barwert $\quad b = \frac{r(q^n - 1)}{q^n (q - 1)}$,

die Rente $\quad r = \frac{b q^n (q - 1)}{q^n - 1}$,

Zahl der Termine $\quad n = \frac{\log r - \log [r - b(q - 1)]}{\log q}$.

Aufgaben.

1) Jemand will an eine Versicherungsbank durch m Jahre am Anfange eines jeden Jahres einen bestimmten Betrag a einzahlen, um sich durch die nachfolgenden n Jahre den Bezug einer am Ende eines jeden Jahres zahlbaren Rente r zu sichern; wie viel wird die jährliche Einzahlung betragen, wenn p % gerechnet werden?

(Zwischen der letzten Prämienzahlung und dem ersten Rentenbezuge liegen zwei Jahre.)

m jährliche Prämien, jede $= a$, haben zur Zeit der letzten Zahlung, d. i. am Anfange des mten Jahres, den Wert $\frac{a(q^m - 1)}{q - 1}$, somit ist ihr Wert 1 Jahr später $\frac{a(q^m - 1)}{q - 1} . q$. Dies ist der Barwert der nachfolgenden Rente; daher besteht die Gleichung $\frac{a(q^m - 1)q}{q - 1} . q^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$, $a = \frac{r(q^n - 1)}{q^{n+1}(q^m - 1)}$.

Aus der letzten Gleichung kann auch r, m oder n bestimmt werden, wenn die übrigen Größen gegeben sind.

2) Eine Jahresrente r steige jährlich, und zwar n Jahre hindurch in einer arithmetischen Progression mit der Differenz d; wie groß ist deren Barwert zu p %?

Die am Ende der einzelnen Jahre zu beziehenden Renten sind

$$r,\ r + d,\ r + 2d, \ldots,\ r + (n - 1)d,$$

und die Summe der Barwerte

$$b = \frac{r}{q} + \frac{r + d}{q^2} + \frac{r + 2d}{q^3} + \ldots + \frac{r + (n - 1)d}{q^n},$$

oder nach §. 245

$$b = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)} + \frac{d}{q^n(q - 1)^2}[(q^n - 1) - n(q - 1)].$$

Arithmetische und geometrische Reihen wurden schon bei den Griechen betrachtet und summiert. Die Römer kannten bereits den Zinseszins; doch erfolgte die richtige Berechnung der Zinseszins- und Rentenaufgaben erst im 16. und 17. Jahrhunderte.

Neunter Abschnitt.

Combinationslehre.

I. Permutationen, Combinationen und Variationen.

§. 254. Gegebene Dinge nach einem bestimmten Gesetze in Gruppen zusammenstellen, heißt combinieren im weiteren Sinne des Wortes. Die einzelnen Dinge werden Elemente, und die aus denselben gebildeten Gruppen Complexionen genannt.

Zur schriftlichen Darstellung der Combinationen ist es am zweckmäßigsten, die Elemente durch die in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen, welche Zeiger oder Indices heißen, oder durch die Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge zu bezeichnen. Von zwei Elementen ist dann jenes das höhere, welches einen größeren Zeiger hat oder im Alphabete später vorkommt.

Von zwei Complexionen heißt jene die höhere, in welcher von der Linken aus zuerst ein höheres Element vorkommt; z. B. die Complexion 1342 ist höher als jene 1324. Die niedrigste Complexion ist diejenige, in welcher kein höheres Element vor einem niedrigeren steht, in welcher also die Elemente in natürlicher Ordnung auf einander folgen; und jene die höchste, in welcher kein niedrigeres Element vor einem höheren steht, somit alle Elemente in umgekehrter Ordnung vorkommen.

Alle Combinationen scheiden sich ihrer Natur nach in Versetzungen und Verbindungen. Bei den Versetzungen fasst man die verschiedene Anordnung der gegebenen Elemente, bei den Verbindungen ihre Auswahl in bestimmter Anzahl ins Auge. Wird nicht nur auf die Anzahl und Auswahl der Elemente, sondern gleichzeitig auch auf die Anordnung derselben Rücksicht genommen, so kommen Verbindungen und Versetzungen vereint vor.

Hiernach unterscheidet man drei Arten des Combinierens: das Permutieren, das Combinieren im engeren Sinne und das Variieren.

Bei jeder dieser drei Combinationsarten kommt die wirkliche Bildung der Complexionen und die Zahl derselben in Betracht.

1. Permutieren.

§. 255. Permutieren heißt, gegebene Elemente auf jede mögliche Weise versetzen, so jedoch, dass in jeder Complexion alle Elemente vorkommen.

Die Anzahl aller möglichen Permutationen von n Elementen bezeichnet man durch P_n (Permutationszahl von n), die Anzahl der Permutationen von genannten Elementen, z. B. von a, b, b, c durch P (abbc).

Bildung der Permutationen.

§. 256. Um von mehreren gegebenen Elementen alle möglichen Permutationen zu bilden, schreibe man zuerst die niedrigste Complexion der gegebenen Elemente an, leite aus dieser die nächst höhere, aus dieser wieder die nächst höhere, u. s. w. ab, bis man zur höchsten kommt. Man erhält aber aus jeder schon aufgestellten Complexion die nächst höhere, indem man, in dieser Complexion von rechts nach links fortschreitend, das erste Element aufsucht, an dessen Stelle aus den rechts folgenden ein höheres gesetzt werden kann, sodann dieses höhere Element an jene Stelle schreibt und die links vorangehenden Elemente ungeändert stehen, die übrigen aber ihm in natürlicher Ordnung folgen läßt. Z. B.

123	abbbc	babbc	bbabc	bcabb	cabbb
132	abbcb	babcb	bbacb	bcbab	cbabb
213	abcbb	bacbb	bbbac	bcbba	cbbab
231	acbbb		bbbca		cbbba
312			bbcab		
321			bbcba		

Anzahl der Permutationen.

§. 257. 1. Sind alle möglichen Permutationen von n verschiedenen Elementen gebildet und tritt zu diesen Elementen noch ein neues dazu, so kann dasselbe in jeder der früheren Permutationen den ersten, oder den zweiten,..., oder den $(n+1)$ten Platz, also $n+1$ verschiedene Stellungen einnehmen, so dass aus $n+1$ Elementen $(n+1)$mal so viel Permutationen entstehen, als aus n Elementen. Es ist also

$$P_{n+1} = P_n . (n+1).$$

Da nun ein Element nur eine einzige Stellung zuläßt, so ist

$$P_1 = 1, \text{ daher}$$
$$P_2 = 1.2,$$
$$P_3 = 1.2.3, \text{ u. s. w.; allgemein}$$
$$P_n = 1.2.3....(n-1)\, n;$$

d. h. die Permutationszahl von mehreren verschiedenen Elementen ist gleich dem Producte der natürlichen Zahlen von 1 bis zu der Zahl, welche die Anzahl der Elemente ausdrückt.

Das Product $1.2.3.4....\ (n-1).n$ wird durch das Symbol $n!$, zu lesen: „Facultät von n" oder „Factoriellen", bezeichnet. Es ist daher

$$P_2 = 2!,\quad P_3 = 3!, ... P_n = n!$$

2. Wenn unter den gegebenen n Elementen p gleiche vorkommen, so betrachte man diese einstweilen als verschieden; dann ist die Anzahl aller möglichen Permutationen $n!$. Denkt man sich diese Permutationen so in Abtheilungen gebracht, dass sich die Permutationen einer Abtheilung bloß durch die gegenseitige Stellung der als verschieden betrachteten p Elemente von einander unterscheiden, während die übrigen Elemente dieselbe Stelle einnehmen, so enthält jede dieser Abtheilungen, so viele Permutationen, als man aus p Elementen bilden kann, also $p!$ Permutationen. Demnach ist die Anzahl der Abtheilungen $\frac{n!}{p!}$. Wenn man nun die als verschieden betrachteten Elemente wieder als einander gleich annimmt, so liefert jede Abtheilung nur eine Permutation; somit ist $\frac{n!}{p!}$ die Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter welchen p gleiche vorkommen.

Befinden sich unter den gegebenen n Elementen außer den p gleichen Elementen noch q andere gleiche Elemente, so wiederholen sich die Schlüsse in gleicher Weise, und ist daher $\frac{n!}{p!\,q!}$ die Anzahl aller verschiedenen Permutationen.

3. Sind unter den gegebenen n Elementen $n-k$ einander gleich, und die übrigen k Elemente ebenfalls einander gleich, wie z. B. in dem Producte $a^{n-k}b^k$, so ist die Permutationszahl derselben

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{1.2.3\ldots(n-k)\,(n-k+1)\ldots(n-2)\,(n-1)\,n}{1.2.3\ldots(n-k).1.2.3\quad\ldots\ldots\quad k}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner dieses Bruches durch $1.2.3\ldots(n-k)$ und schreibt die dann übrig bleibenden Factoren des Zählers in umgekehrter Ordnung, so hat man

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.\;2.\quad 3\quad\ldots k}.$$

Der letzte Bruch, dessen Zähler ein Product von k Factoren, die von n beginnend um 1 abnehmen, und dessen Nenner das Product von k Factoren ist, die von 1 beginnend um je 1 wachsen, wird durch das Symbol $\binom{n}{k}$, zu lesen: „n über k", ausgedrückt. Es ist also

$$P\,(a^{n-k}b^k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

Zusatz. Aus $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.\;2\;\ldots.\;k}$ folgt für $k = n,\; n+1,\; n+2, \ldots$

$$\binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{n+1} = \binom{n}{n+2} = .\,. = 0.$$

2. Combinieren.

§. 258. Combinieren im engeren Sinne heißt, gegebene Elemente so mit einander verbinden, dass jede Complexion dieselbe bestimmte Anzahl aus den gegebenen Elementen enthält, wobei jedoch nur solche Complexionen, in welchen nicht dieselben Elemente vorkommen, als verschieden gelten.

Je nachdem die Verbindungen je zwei, drei, vier,... Elemente enthalten, nennt man sie Combinationen der zweiten, dritten, vierten, ... Classe, oder auch Amben, Ternen, Quaternen, u. s. w. Die Elemente selbst können als Combinationen der ersten Classe angesehen werden und heißen als solche Unionen.

Man unterscheidet ferner Combinationen ohne und mit Wiederholungen; bei jenen darf in einer Complexion ein Element nur einmal, bei diesen auch öfter vorkommen.

Die Anzahl aller möglichen Combinationen der rten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen wird durch C^r_n, die Anzahl derselben mit Wiederholungen durch $C^{w,r}_n$ bezeichnet.

Bildung der Combinationen.

§. 259. 1. Um aus gegebenen Elementen die Combinationen der r ten Classe ohne Wiederholung zu bilden, schreibt man die ersten r Elemente in natürlicher Reihenfolge nieder und ersetzt in dieser sowie in jeder neu gebildeten Complexion von rechts nach links gehend so bald als möglich ein Element durch das nächst höhere noch nicht verwendete Element und läßt darauf in der erforderlichen Anzahl die höheren Elemente in natürlicher Ordnung folgen.

Beispiel. Es sollen die Quaternen ohne Wiederholung aus den Elementen a, b, c, d, e, f gebildet werden.

abcd	abdf	acef	bcef
abce	abef	adef	bdef
abcf	acde	bcde	cdef
abde	acdf	bcdf	

2. Um aus gegebenen Elementen die Combination der r ten Classe mit Wiederholung zu bilden, schreibt man das niedrigste Element r mal an und ersetzt in dieser sowie in jeder neu erhaltenen Complexion von rechts nach links gehend so bald als möglich ein Element durch das nächst höhere und läßt eben dieses Element in der erforderlichen Anzahl folgen.

Beispiel. Es sollen die Ternen mit Wiederholung aus den Elementen a, b, c, d gebildet werden.

aaa	abb	acd	bbd	ccc
aab	abc	add	bcc	ccd
aac	abd	bbb	bcd	cdd
aad	acc	bbc	bdd	ddd

Zahl der Combinationen ohne Wiederholungen.

§. 260. Verbindet man jedes von n gegebenen Elementen mit jedem der übrigen n — 1 Elemente, so erhält man alle Amben, und zwar jede 2mal, z. B. die Ambe ab, indem man a mit b, und indem man b mit a verbindet. Da sich sonach n (n — 1) paarweise gleiche Amben ergeben, so ist die Anzahl aller verschiedenen Amben von n Elementen

$$C_n^2 = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Hat man überhaupt alle Combinationen der r ten Classe ohne Wiederholungen von n Elementen und verbindet jede dieser C_n^r Combinationen mit jedem der darin nicht vorkommenden n — r Elemente, so enthalten die sich ergebenden $C_n^r.(n-r)$ Verbindungen alle Combinationen der (r + 1) ten Classe, und zwar eine jede derselben (r + 1) mal, da sie aus jeder der r + 1 Combinationen der vorigen Classe, in denen eines der jetzt in ihr vorkommenden Elemente fehlte, entstanden ist. Die Zahl aller verschiedenen Combinationen der $(r+1)$ten Classe von n Elementen ist daher

$$C_n^{r+1} = C_n^r \cdot \frac{n-r}{r+1}.$$

Da nun $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ ist, so hat man

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ folglich}$$

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ u. s. w.};$$

allgemein

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \ldots \quad (r-1) \cdot r};$$

oder mit Rücksicht auf die im §. 257, 3 eingeführte Bezeichnung

$$C_n^2 = \binom{n}{2}, \quad C_n^3 = \binom{n}{3}, \quad \ldots \quad C_n^r = \binom{n}{r}.$$

Zusatz. Schreibt man neben jede Combination der rten Classe ohne Wiederholung die in ihr nicht auftretenden Elemente, so bilden diese eine Combination der $(n-r)$ten Classe. Dabei kann keine Combination der einen Classe ohne eine entsprechende Combination der anderen Classe auftreten. Somit ist die Anzahl der Combinationen für beide Classen gleich.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Zahl der Combinationen mit Wiederholungen.

§. 261. Sind n Elemente gegeben und verbindet man jedes Element mit sich selbst und noch mit allen n Elementen, auch sich selbst nicht ausgenommen, so geben die erhaltenen $n(n+1)$ Verbindungen alle Amben mit Wiederholungen, und zwar jede 2mal. Die Anzahl aller verschiedenen Amben von n Elementen mit Wiederholungen ist also $\frac{n(n+1)}{2}$.

Sind überhaupt alle Combinationen der rten Classe mit Wiederholungen von n Elementen gebildet und verbindet man jede dieser $C_n^{w,r}$ Combinationen zuerst mit jedem der r Elemente, welche darin vorkommen, und dann noch mit allen n Elementen, so enthalten die sich ergebenden $C_n^{w,r} \cdot (n+r)$ Verbindungen alle Combinationen der $(r+1)$ Classe mi Wiederholungen, und zwar jede $(r+1)$mal. Denn enthält eine bestimmt Combination der $(r+1)$ten Classe ein Element a nur einmal, so ist sie aus derjenigen Combination rter Classe, welche mit ihr sämmtliche Elemente bis auf a gemeinsam hat, einmal entstanden, und zwar eben durch Verbindung mit a. Enthält ferner dieselbe Combination der $(r+1)$ten Classe ein anderes Element b kmal, dann ist sie auch aus derjenigen Combination rter Classe hervorgegangen, welche ihre sämmtlichen Elemente, jedoch b nur $(k-1)$mal enthält, und zwar ist sie aus dieser Combination gerade kmal entstanden, $(k-1)$mal nämlich, indem man sie mit jedem in ihr vorkommenden b, und einmal, indem man sie mit b als einem der n Elemente verbunden hat. Hieraus geht hervor, dass jede Combination der $(r+1)$ten Classe so oft entstanden ist, als die Zahl ihrer Elemente beträgt, also $(r+1)$mal. Es ist daher

$$C_n^{w,r+1} = C_n^{w,r} \cdot \frac{n+r}{n+1}.$$

Da nun $C_n^{w,2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ ist, so hat man

$$C_n^{w,3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ folglich}$$

$$C_n^{w,4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ u. s. w.; allgemein}$$

$$C_n^{w,r} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-2)(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1) \cdot r}.$$

Schreibt man in dem letzten Bruche die Factoren des Zählers in umgekehrter Ordnung, wodurch der Bruch die Form

$$\frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots(n+2)(n+1).n}{1 \cdot 2 \ldots (r-2)(r-1).r}$$

annimmt, so kann man denselben nach der im §. 257, 3 eingeführten Bezeichnungsweise durch $\binom{n+r-1}{r}$ ausdrücken. Es ist daher

$$C_n^{w,2} = \binom{n+1}{2}, \quad C_n^{w,3} = \binom{n+2}{3}, \ldots \quad C_n^{w,r} = \binom{n+r-1}{r}.$$

3. Variieren.

§. 262. Variieren heißt, gegebene Elemente so miteinander verbinden, dass jede Complexion dieselbe *bestimmte Anzahl* aus den gegebenen Elementen enthält, wobei jedoch auch solche Complexionen, in welchen dieselben Elemente in verschiedener *Anordnung* vorkommen, als verschieden gelten. Variationen sind demnach permutierte Combinationen.

Wie die Combinationen, unterscheidet man auch die Variationen in die der *ersten*, *zweiten*, *dritten*, ... Classe, ferner in Variationen *ohne* und *mit Wiederholungen*.

Die Anzahl aller möglichen Variationen der $r$ten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen wird durch V_n^r, und die Zahl derselben mit Wiederholungen durch $V_n^{w,r}$ bezeichnet.

Bildung der Variationen.

§. 263. Die Variationen einer bestimmten Classe erhält man, indem man aus den gegebenen Elementen alle Combinationen derselben Classe bildet und dann von jeder Combination die Permutationen aufstellt. Die Variationen können aber auch *unmittelbar* gebildet werden.

1. Um aus gegebenen Elementen die Variationen der $r$ten Classe *ohne Wiederholungen* zu bilden, schreibt man die ersten r Elemente in natürlicher Ordnung nieder und ersetzt in dieser und in jeder neu ge-

bildeten Complexion von rechts nach links gehend so bald als möglich ein Element durch das nächst höhere und läßt darauf in erforderlicher Anzahl die übrigen (in der Complexion noch nicht vorhandenen) Elemente in natürlicher Ordnung folgen.

So geben die Elemente 1, 2, 3, 4 folgende Variationen der dritten Classe ohne Wiederholungen.

123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432.

2. Um aus gegebenen Elementen die Variationen der r ten Classe mit Wiederholungen zu bilden, schreibt man das niedrigste Element r mal an und ersetzt in dieser und in jeder neu gebildeten Complexion von rechts nach links gehend so bald als möglich ein Element durch das nächst höhere und läßt darauf das niedrigste Element in der erforderlichen Anzahl folgen.

Hat man bereits die Variationen irgend einer Classe mit Wiederholungen dargestellt, so bildet man aus denselben die Variationen der nächst höheren Classe, indem man jedes Element vor jede frühere Variation setzt.

Aus den beiden Elementen a und b erhält man folgende Variationen mit Wiederholungen

der 2. Classe:	der 3. Classe:
aa, ab;	aaa, aab, aba, abb;
ba, bb;	baa, bab, bba, bbb; u. s. w.

Zahl der Variationen ohne Wiederholungen.

§. 264. Die Anzahl der Combinationen der r ten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen ist $\binom{n}{r}$; aus jeder solchen Combination lassen sich durch Permutation der r Elemente r! Variationen der r ten Classe ohne Wiederholungen bilden; folglich ist

$$V_n^r = \binom{n}{r} . r! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1).$$

Zahl der Variationen mit Wiederholungen.

§. 265. Sind n Elemente gegeben, so gibt jedes derselben n Variationen der zweiten Classe mit Wiederholungen, somit ist n^2 die Anzahl aller solcher Variationen.

Ist überhaupt die Anzahl aller Variationen der r ten Classe mit Wiederholungen von n Elementen bekannt, so ist, da jede solche Variation durch Verbindung mit allen n Elementen n Variationen der (r + 1)ten Classe gibt,

$$V_n^{w,r+1} = V_n^{w,r} . n.$$

Da nun $V_n^{w,2} = n^2$ ist, so hat man $V_n^{w,3} = n^3$, folglich $V_n^{w,4} = n^4$; allgemein

$$V_n^{w,r} = n^r.$$

II. Binomischer Lehrsatz.

§. 266. Unter dem binomischen Lehrsatze versteht man das Gesetz, nach welchem die Potenz eines Binoms in eine Reihe entwickelt wird.

Jede Potenz eines Binoms mit einem ganzen positiven Exponenten kann aus dem Producte mehrerer Binome, welche das erste Glied gemeinsam haben, hergeleitet werden, indem man in denselben auch die zweiten Glieder gleichsetzt. So geht das Product $(a+b)(a+c)(a+d)(a+e)(a+f)$, wenn man $c=d=e=f=b$ setzt, in die Potenz $(a+b)^5$ über.

§. 267. Das Product mehrerer Binome, welche ein Glied gemeinsam haben.

Um das Product $(a+b)(a+c)(a+d)(a+e)\ldots$ zu entwickeln, multipliciere man zuerst die ersten zwei Binome mit einander, ihr Product mit dem dritten Binom, u. s. w. Man erhält

$$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc,$$

$$(a+b)(a+c)(a+d) = a^3 + (b+c+d)a^2 + (bc+bd+cd)a + bcd,$$

$$(a+b)(a+c)(a+d)(a+e) = a^4 + (b+c+d+e)a^3 + (bc+bd+be+cd+ce+de)a^2 + (bcd+bce+bde+cde)a + bcde,$$

u. s. w.

Das in diesen Producten herrschende Gesetz ist leicht zu ersehen. Das erste Glied eines jeden Productes ist die sovielte Potenz von a, als Binomialfactoren gegeben sind; in den folgenden Gliedern nehmen die Exponenten von a in natürlicher Ordnung ab, bis im letzten Gliede $a^0 = 1$, d. i. gar kein a erscheint. Der Coefficient des ersten Gliedes ist 1, der Coefficient des zweiten, dritten, vierten, ... Gliedes ist bezüglich die Summe der Combinationen der ersten, zweiten, dritten, ... Classe aus den zweiten Gliedern der Binome, jeder dieser Complexionen als ein Product der darin vorkommenden Elemente aufgefasst.

Gilt nun dieses Bildungsgesetz für ein Product von n Binomialfactoren $a+b$, $a+c$, $\ldots a+p$, so dass

$$(a+b)(a+c)\ldots(a+p)$$
$$= a^n + S_1(b..p)a^{n-1} + S_2(b..p)a^{n-2} + \ldots + S_{n-1}(b..p)a + S_n(b..p)$$

ist, wo allgemein $S_k(b..p)$ die Summe aller Combinationen der kten Classe aus den n Elementen $b, c, ..p$, die einzelnen Complexionen als Producte aufgefasst, bezeichnet, so gilt dasselbe Gesetz auch, wenn noch ein neuer Factor $a+q$ dazutritt. Man erhält nämlich

$$(a+b)(a+c)\ldots(a+p)(a+q)$$
$$= a^{n+1} + \left\{\begin{matrix} S_1(b..p) \\ +q \end{matrix}\right\} a^n + \left\{\begin{matrix} S_2(b..p) + \\ S_1(b..p).q \end{matrix}\right\} a^{n-1} + \ldots + \left\{\begin{matrix} S_n(b..p) + \\ S_{n-1}(b..p).q \end{matrix}\right\} a$$
$$+ S_n(b..p).q.$$

Nun ist

$$S_1(b..p) + q = b + c + \ldots + p + q = S_1(b..q).$$

Ferner ist $S_2(b..p)$ die Summe der Amben von $b, c, ..p$, und $S_1(b..p).q$ die Summe der Amben, welche man erhält, indem man die Elemente $b, c, ..p$ noch mit dem neuen Elemente q verbindet; folglich ist $S_2(b..p) + S_1(b..p).q$ die Summe aller Combinationen der zweiten Classe aus den Elementen $b, c, \ldots p, q$; also

$$S_2(b..p) + S_1(b..p).q = S_2(b..q).$$

Ebenso folgt

$$S_3(b..p) + S_2(b..p).q = S_3(b..q),$$
$$S_4(b..p) + S_3(b..p).q = S_4(b..q),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n(b..p) + S_{n-1}(b..p).q = S_n(b..q).$$

Endlich ist

$$S_n(b..p).q = bc..pq = S_{n+1}(b..q).$$

Man hat daher

$$(a+b)(a+c)\ldots(a+p)(a+q)$$
$$= a^{n+1} + S_1(b..q)a^n + S_2(b..q)a^{n-1} + ..$$
$$+ S_n(b..q)a + S_{n+1}(b..q).$$

Das angeführte Bildungsgesetz gilt also für ein Product von $n+1$ Binomialfactoren, wenn es für ein Product von n solchen Factoren richtig ist. Nun gilt es nach dem Obigen für 2, 3, 4 Factoren, folglich gilt es auch für 5, folglich auch für 6 Factoren.., mithin allgemein für jede Zahl von Factoren.

§. 268. Die Potenz eines Binoms.

Setzt man in dem Producte von n Binomialfactoren

$$(a+b)(a+c)(a+d)\ldots(a+p)$$
$$= a^n + S_1(b..p)a^{n-1} + S_2(b..p)a^{n-2} + S_3(b..p)a^{n-3} + \ldots$$
$$+ S_{n-1}(b..p)a + S_n(b..p)$$

die zweiten Glieder $c = d = \ldots = p = b$, so wird

$$(a+b)(a+c)(a+d)\ldots(a+p) = (a+b)^n,$$

ferner

$$S_1(b..p) = b + c + .. + p = b + b + .. + b = \binom{n}{1}b,$$
$$S_2(b..p) = bc + bd + .. + op = b^2 + b^2 + .. + b^2 = \binom{n}{2}b^2,$$
$$S_3(b..p) = bcd + bce + .. + mop = b^3 + b^3 + .. + b^3 = \binom{n}{3}b^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{n-1}(b..p) = bcd..mo + .. = b^{n-1} + b^{n-1} + .. + b^{n-1} = \binom{n}{n-1}b^{n-1},$$
$$S_n(b..p) = bcd..mop = b^n = \binom{n}{n}b^n.$$

Durch die Substitution in den obigen Ausdruck erhält man daher für den binomischen Lehrsatz die Formel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

In dieser Formel herrscht folgendes Bildungsgesetz:

1. Die Potenzen des ersten Gliedes a des Binoms erscheinen fallend, jene des zweiten Gliedes b steigend geordnet. Der Exponent von a ist im ersten Gliede gleich dem Potenzexponenten n des Binoms, in jedem folgenden Gliede um 1 kleiner und wird im letzten Gliede $= 0$, woraus zugleich folgt, dass die ganze Reihe ein Glied mehr hat, als der Potenzexponent n des Binoms Einheiten enthält. Die Exponenten von b nehmen umgekehrt von 0 bis n zu. Die Summe der Exponenten von a und b ist in jedem Gliede gleich n.

2. Der Binomialcoefficient des ersten Gliedes ist 1; der Coefficient des zweiten, dritten, vierten, ... $(k+1)$ten Gliedes ist bezüglich die Zahl der Combinationen der ersten, zweiten, dritten ... kten Classe ohne Wiederholungen von n Elementen.

3. Ist das zweite Glied b des Binoms negativ, so wird das zweite, vierte, ... überhaupt jedes geradstellige Glied der Reihe negativ; man hat daher

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n.$$

Hiernach ist in der Binomialreihe $(a \pm b)^n$ allgemein das $(k+1)$te Glied gleich $(\pm 1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Beispiele.

1) $(x+a)^6 =$

$$= x^6 + \binom{6}{1} a x^5 + \binom{6}{2} a^2 x^4 + \binom{6}{3} a^3 x^3 + \binom{6}{4} a^4 x^2 + \binom{6}{5} a^5 x + a^6$$

$$= x^6 + 6 a x^5 + 15 a^2 x^4 + 20 a^3 x^3 + 15 a^4 x^2 + 6 a^5 x + a^6.$$

2) $(3x-2y)^4 =$

$$= (3x)^4 - \binom{4}{1}.(3x)^3.2y + \binom{4}{2} (3x)^2.(2y)^2 - \binom{4}{3}.3x.(2y)^3 + (2y)^4$$

$$= 81 x^4 - 4.27 x^3.2y + 6.9 x^2.4 y^2 - 4.3x.8y^3 + 16 y^4$$

$$= 81 x^4 - 216 x^3 y + 216 x^2 y^2 - 96 x y^3 + 16 y^4.$$

3) Das 7te Glied von $(2x^2-3y)^9$ ist $(-1)^6 \binom{9}{6}.(2x^2)^{9-6}.(3y)^6$ $= 84.8x^6.729y^6 = 489888 x^6 y^6$.

§. 269. Wir lassen nun auch noch eine zweite Entwicklung des binomischen Lehrsatzes folgen, die unmittelbar auf der Combinationslehre beruht.

Wir multiplicieren $a+b$ mit $a+b$, das Product wieder mit $a+b$, u. s. w., schreiben aber dabei, damit das Bildungsgesetz leichter erkannt werde, in jedem Theilproducte zuerst den Multiplicator an, und machen in den Resultaten vorläufig auch von der Potenzbezeichnung für die gleichen Factoren keinen Gebrauch. Es ist

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = \left.\begin{matrix} aa+ab \\ +ba+bb \end{matrix}\right\}$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = \left.\begin{matrix} aaa+aab+aba+abb \\ +baa+bab+bba+bbb \end{matrix}\right\}$$

u. s. w.

Die Bildungsweise der auf einander folgenden Potenzen stimmt vollständig überein mit der Bildungsweise der Variationen mit Wiederholungen der entsprechenden Classe aus den beiden Elementen a und b. Demnach ist allgemein $(a+b)^n$ die Summe aller Variationen der $n$ten Classe mit Wiederholungen aus den Elementen a und b, wenn man jede Variation als Product auffasst.

Diese Variationen ordnet man so in Gruppen, dass die Complexionen einer jeden Gruppe durch Permutation entstehen. Dann gibt jede Complexion einer Gruppe dasselbe Product; mithin ist der Coefficient dieses Productes gleich der Zahl der Permutationen der Factoren dieses Productes. Für das Product $a^{n-k}\,b^k$ ist nach §. 257, 3 die Zahl der Permutationen $\binom{n}{k}$; somit gibt diese Gruppe das Glied $\binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k$. Da n gleiche Elemente nur eine Permutation geben, so ist der Coefficient des ersten und letzten Gliedes 1. Für das zweite Glied ist $k=1$, für das dritte $k=2$, für das vorletzte $k=n-1$.

Es ergibt sich sonach

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\,b + \binom{n}{2} a^{n-2}\,b^2 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1} a\,b^{n-1} + b^n.$$

Zusatz. Genau auf dieselbe Art, wie hier die Binomialformel entwickelt wurde, kann auch der polynomische Lehrsatz, d. i. eine Formel für $(a+b+c+d+\ldots)^n$, abgeleitet werden, da diese Potenz der Summe aller Variationen der $n$ten Classe mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d,... gleich ist, wenn man jede Variation als Product auffasst. Um daher die $n$te Potenz eines gegebenen Polynoms zu erhalten, bildet man aus den Gliedern desselben die Combinationen der $n$ten Classe mit Wiederholungen, multipliciert jede derselben als Product betrachtet mit der zugehörigen Permutationszahl und addiert die erhaltenen Producte.

§. 270. Beziehungen zwischen den Binomialcoefficienten.

1. Je zwei vom Anfange und vom Ende gleich weit abstehende Binomialcoefficienten sind einander gleich.

Der $(k+1)$te Binomialcoefficient vom Anfange ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1.2\ldots\ldots(k-1).k}.$$

Der $(k+1)$te Binomialcoefficient vom Ende ist der $(n-k+1)$te vom Anfange, also

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(k+2)(k+1)}{1.2\ldots(n-k-1)(n-k)}.$$

Multipliciert man Zähler und Nenner des ersten Bruches mit

$$(k+1)(k+2)\ldots(n-k-1)(n-k),$$

so erhält man

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)..(n-k+1)(n-k)\ldots(k+2)(k+1)}{1.2\ldots.k(k+1)\ldots(n-k-1)(n-k)};$$

folglich ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Ein zweiter Beweis ergibt sich aus §. 260, Zusatz.

Zusatz. Aus der letzten Gleichung ergibt sich für $k = 0$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

2. Die Summe aus dem kten und $(k+1)$ten Binomialcoefficienten einer Potenz ist gleich dem $(k+1)$ten Binomialcoefficienten der um 1 höheren Potenz.

Es ist $\binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots..(n-k+3)(n-k+2)}{1.2\ldots\ldots(k-2)(k-1)}$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots.(n-k+2)(n-k+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots.(k-1).k};$$ daher

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots.(n-k+2)}{1.2\ldots\ldots.(k-1)k}\{k+(n-k+1)\}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2.3\ldots\ldots..k} = \binom{n+1}{k}.$$

Mittelst dieses Satzes kann man aus den Binomialcoefficienten irgend einer Potenz jene der nächst höheren Potenz durch bloße Addition ableiten. Man erhält dadurch für die auf einander folgenden Potenzen eines Binoms folgende Coefficienten (Pascal'sches Dreieck):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

u. s. w.

3. Die Summe aus den $(k+1)$ten Binomialcoefficienten der kten, $(k+1)$ten, $(k+2)$ten, ... bis nten Potenz ist gleich dem $(k+2)$ten Coefficienten der $(n+1)$ten Potenz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt $\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$; daher ist

$$\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} - \binom{k}{k+1},$$
$$\binom{k+1}{k} = \binom{k+2}{k+1} - \binom{k+1}{k+1},$$
$$\binom{k+2}{k} = \binom{k+3}{k+1} - \binom{k+2}{k+1},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k+1},$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}.$$

Addiert man diese Gleichungen, so ergibt sich, da sich die Glieder auf der zweiten Seite paarweise aufheben und $\binom{k}{k+1} = 0$ ist, die Gleichung

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Z. B. für $k = 2$ ist

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

4. Die absolute Summe aller Binomialcoefficienten für die nte Potenz ist gleich 2^n.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

5. Die algebraische Summe der abwechselnd positiven und negativen Binomialcoefficienten ist gleich Null.

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0.$$

Die Combinationslehre und die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden von Fermat und Pascal (1654) begründet und insbesondere von Jakob Bernoulli (1713) weiter ausgebildet. Der binomische Lehrsatz ist eine der ersten Entdeckungen Newton's (1676). n! von Kramp (1808); $\binom{n}{k}$ von Euler.

III. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die absolute und einfache Wahrscheinlichkeit.

§. 271. Sind unter mehreren gleich möglichen Fällen einige dem Eintreffen eines bestimmten Ereignisses günstig, die übrigen dagegen ungünstig, so heißt das Verhältnis der Anzahl jener Fälle, welche dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, zu der Anzahl aller gleich möglichen Fälle die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieses Ereignisses.

Bezeichnet a die Zahl der einem Ereignisse günstigen und b die Zahl der ihm ungünstigen Fälle, so ist, wenn die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen jenes Ereignisses durch w ausgedrückt wird,

$$w = \frac{a}{a + b}.$$

Je mehr Fälle dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind oder je größer a ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden des Ereignisses; sind alle Fälle günstig, so ist das Stattfinden gewiss, und man hat, da $b = 0$ ist, als das mathematische Symbol der Gewissheit

$$w = \frac{a}{a} = 1.$$

Je weniger günstige Fälle vorkommen, desto geringer wird auch die Wahrscheinlichkeit; ist gar kein Fall günstig, so ist das Eintreffen des Ereignisses unmöglich, und hat man, da $a = 0$ ist, für das mathematische Symbol der Unmöglichkeit

$$w = \frac{0}{b} = 0.$$

Im gewöhnlichen Leben heißt ein Ereignis wahrscheinlich, wenn $w > \frac{1}{2}$ zweifelhaft, wenn $w = \frac{1}{2}$, und unwahrscheinlich, wenn $w < \frac{1}{2}$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis nicht eintreffen werde, heißt die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Sie wird durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler die Anzahl aller ungünstigen und der Nenner die Anzahl aller gleich möglichen Fälle ist. Bezeichnet man die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit durch w', so ist

$$w' = \frac{b}{a + b}, \text{ daher } w + w' = \frac{a + b}{a + b} = 1,$$

d. h. die Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen eines Ereignisses und jener für das Nichteintreffen gibt die Einheit, somit die Gewissheit; was auch ganz natürlich erscheint, da es gewiss ist, dass jenes Ereignis entweder eintreffen oder nicht eintreffen muss.

Aus $w + w' = 1$ folgt $w' = 1 - w$.

Beispiele:

Wirft man zwei Spielwürfel A und B, deren sechs Flächen nach der Reihe mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 Punkten oder Augen bezeichnet sind, so sind in Bezug auf die Zahlen, welche auf den oberen Flächen der beiden Würfel zu stehen kommen, folgende 36 Fälle gleich möglich:

AB	AB	AB	AB	AB	AB
11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	51	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

a) Um die Summe 5 zu werfen, sind 4 Fälle günstig, nämlich 14, 23, 32, 41. Die Wahrscheinlichkeit, mit beiden Würfeln 5 Augen zu werfen, ist also $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Dieser Ausdruck, welcher anzeigt, dass in 9 Würfen die Summe 5 einmal geworfen werde, ist jedoch nicht so zu verstehen, als wenn man in den ersten 9 Würfen die Summe 5 gerade einmal werfen müsste; man kann diese Summe vielleicht gar nicht, oder gerade einmal, oder auch mehr als einmal werfen; aber wenn man sehr viele Würfe macht, so wird sich das Verhältnis der Anzahl der Würfe, worin man 5 wirft, zu der gesammten Anzahl der Würfe umsomehr dem Verhältnisse 1 : 9 nähern, je länger das Spiel fortgesetzt wird. Der wirkliche Erfolg wird der durch Zahlen ausgedrückten Wahrscheinlichkeit um so näher kommen, je größer die Anzahl der Versuche ist; und in diesem Sinne ist die mathematische Wahrscheinlichkeit stets aufzufassen.

b) Die Wahrscheinlichkeit, die Summe 5 nicht zu werfen, ist $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

c) Die Wahrscheinlichkeit, die Zahlen 3 und 5 zu werfen, ist, da nur zwei Fälle 35 und 53 günstig sind, $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

d) Die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch, d. i. zwei gleiche Zahlen zu werfen, ist $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Die relative Wahrscheinlichkeit.

§. 272. Die bisher betrachtete Wahrscheinlichkeit, wobei nur *ein* Ereignis an und für sich betrachtet wird, heißt die *absolute* Wahrscheinlichkeit, im Gegensatze zu der *relativen*. Darunter versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Ereignissen, welche einer Reihe möglicher Fälle angehören, das eine eher eintreffe als das andere.

Sind für verschiedene Ereignisse s Fälle gleich möglich, und vergleicht man nur die Ereignisse A und B, deren einem m und dem andern n Fälle günstig sind, so ist die relative Wahrscheinlichkeit W für das erste Ereignis $\frac{m}{m+n}$, und die relative Wahrscheinlichkeit W' für das zweite Ereignis $\frac{n}{m+n}$.

Man kann die relativen Wahrscheinlichkeiten auch aus den absoluten herleiten. Es ist nämlich, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B beziehungsweise durch w und w' bezeichnet,

$$W = \frac{m}{m+n} = \frac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{s} + \frac{n}{s}} = \frac{w}{w+w'}. \qquad W' = \frac{n}{m+n} = \frac{\frac{n}{s}}{\frac{m}{s} + \frac{n}{s}} = \frac{w'}{w+w'}.$$

Die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist also gleich dem Quotienten aus der absoluten Wahrscheinlichkeit jenes Ereignisses und der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse.

Z. B. In einer Urne sind 4 weiße, 6 blaue und 8 rothe Kugeln. Wenn nun aus derselben nur eine Kugel gezogen wird, so ist die absolute Wahrscheinlichkeit,

$$\text{eine weiße Kugel zu ziehen, } \frac{4}{18},$$

$$\text{„ rothe „ „ „ } \frac{8}{18};$$

daher die relative Wahrscheinlichkeit,

eher eine weiße als eine rothe Kugel zu ziehen, $\frac{\frac{4}{18}}{\frac{4}{18}+\frac{8}{18}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

eher eine rothe als eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{\frac{8}{18}}{\frac{4}{18}+\frac{8}{18}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

§. 273. Beruht die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf der Berechnung mehrerer einfacher Wahrscheinlichkeiten, so heißt eine solche Wahrscheinlichkeit eine zusammengesetzte.

1. Fall. Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines von mehreren Ereignissen, die sich gegenseitig ausschließen.

Ist s die Anzahl aller gleich möglichen Fälle, von denen m dem Ereignisse A, n dem Ereignisse B, p dem Ereignisse C, ... also $m + n + p \ldots$ für das Eintreffen irgend eines unter den Ereignissen A, B, C, ... günstig sind, so ist, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse durch w', w'', w''', ... und die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines dieser Ereignisse durch W bezeichnet,

$$w' = \frac{m}{s}, \quad w'' = \frac{n}{s}, \quad w''' = \frac{p}{s}, \ldots \text{ und}$$

$$W = \frac{m+n+p+\ldots}{s} = \frac{m}{s} + \frac{n}{s} + \frac{p}{s} + \ldots, \text{ oder}$$

$$W = w' + w'' + w''' + \ldots,$$

d. i. die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines von mehreren sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen ist gleich der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Z. B. Aus einer Urne, in welcher 6 gelbe, 8 rothe und 10 weiße Kugeln sind, wird eine Kugel gezogen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine gelbe oder rothe Kugel zu ziehen?

Die W., eine gelbe Kugel zu ziehen, ist $\frac{6}{24}$; die W., eine rothe Kugel zu ziehen, ist $\frac{8}{24}$; daher die W., eine gelbe oder rothe Kugel zu ziehen,

$$\frac{6}{24} + \frac{8}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}.$$

§. 274. 2. Fall. Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer von einander unabhängiger Ereignisse.

Es sei W die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier Ereignisse A und B, von denen dem ersteren m' Fälle günstig und n' Fälle ungünstig, dem letzteren m'' Fälle günstig und n'' Fälle ungünstig sind. Die absoluten Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse sind

$$w' = \frac{m'}{m' + n'}, \quad w'' = \frac{m''}{m'' + n''}.$$

Da nun jeder der m' dem Ereignisse A günstigen Fälle mit jedem der m'' dem Ereignisse B günstigen Fälle zusammen eintreffen kann, so gibt es für das Zusammentreffen beider Ereignisse $m' m''$ günstige Fälle. Die Anzahl aller möglichen Fälle ist $(m' + n')(m'' + n'')$, da jeder der $m' + n'$ bei A möglichen Fälle mit jedem der $m'' + n''$ bei B möglichen Fälle zusammentreffen kann. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Ereignisse A und B zusammen eintreffen,

$$W = \frac{m' m''}{(m' + n')(m'' + n'')} = \frac{m'}{m' + n'} \cdot \frac{m''}{m'' + n''} = w' w''.$$

Sind ebenso w', w'', w''', ... die absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse A, B, C, ..., so erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller dieser Ereignisse

$$W = w' w'' w''' \ldots,$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse ist gleich dem Producte aus den absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse.

Z. B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf die Summe 5, auf den zweiten die Summe 7 zu werfen?

Die W., auf den ersten Wurf die Summe 5 zu werfen, ist $\frac{4}{36}$; die W., auf den zweiten Wurf die Summe 7 zu werfen, ist $\frac{6}{36}$; daher die W. für das Zusammentreffen dieser beiden Ereignisse $\frac{4}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{54}$.

Zusatz. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis r mal nach einander stattfinde, ist also gleich w^r, wenn w die absolute Wahrscheinlichkeit für jenes Ereignis ist.

§. 275. Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Combinationen zweier Ereignisse.

Sind s gleich mögliche Fälle, von denen m' dem Ereignisse A, und m'' dem Ereignisse B günstig sind, so ist, wenn

$$\frac{m'}{s} = w' \text{ und } \frac{m''}{s} = w''$$

gesetzt wird, die Wahrscheinlichkeit,

dass A eintrifft	w'
„ A nicht eintrifft	$1 - w'$
„ B eintrifft	w''
„ B nicht eintrifft	$1 - w''$
„ A eintrifft, B nicht	$w'(1 - w'')$
„ A nicht eintrifft, aber B	$(1 - w')w''$
„ nur A oder B eintrifft	$w'(1-w'') + (1-w')w''$
„ A und B beide eintreffen	$w' w''$
„ A und B nicht beide eintreffen ...	$1 - w' w''$

dass weder A noch B eintrifft .... $(1 - w')(1 - w'')$

" von A und B wenigstens eines eintrifft,

also A, oder B, oder auch beide .. $1 - (1 - w')(1 - w'')$

Z. B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln in zwei Würfen wenigstens einmal 9 Augen zu werfen?

Hier ist $w' = \frac{1}{9}$, und $w'' = \frac{1}{9}$, daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1 - (1 - w')(1 - w'') = 1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{17}{81}.$$

Mathematischer Hoffnungswert.

§. 276. Ist mit dem Eintreffen eines Ereignisses ein bestimmter Gewinn verbunden, so hat derselbe vor dem Eintreffen jenes Ereignisses einen kleineren Wert, welchen man den mathematischen Hoffnungswert des Gewinnes nennt. Dieser Wert h muss sich zum Gewinne g verhalten, wie die Zahl der dem Eintreffen des Ereignisses günstigen Fälle a zur Zahl aller möglichen Fälle $a + b$, wo b die Zahl der ungünstigen Fälle ist.

$$h : g = a : (a + b), \text{ somit}$$

$$h = \frac{a}{a + b} \cdot g = w g,$$

d. h. der mathematische Hoffnungswert eines Gewinnes ist gleich dem Producte aus dem Gewinne und der Wahrscheinlichkeit desselben.

Z. B. Jemand setzt auf zwei Nummern einer Zahlenlotterie, welche 90 Nummern enthält, 1 fl. und gewinnt, wenn seine beiden Nummern gezogen werden, 240 fl.; wie groß ist der mathematische Hoffnungswert?

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Nummern einen Ambo zu machen, ist $\frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$, daher $h = \frac{2}{801} \cdot 240 = \frac{480}{801} = \frac{160}{267}$ fl.

§. 277. Bei Versicherungen, Wetten und Glücksspielen wird eine bestimmte Summe eingesetzt und dafür im günstigen Falle eine bestimmte Summe gewonnen. Jede rechtmäßige Versicherung, sowie jedes rechtmäßige Glücksspiel beruht auf dem Grundsatze: Der Einsatz muss dem mathematischen Hoffnungswerte des Gewinnes gleich sein.

Heißen e' und e'' die Einsätze zweier Spieler, welche die Wahrscheinlichkeit w' und w'' haben, einen Gewinn g zu erhalten, so ist $e' = w' g$ und $e'' = w'' g$, daher $e' : e'' = w' : w''$, d. h. die Einsätze müssen den Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen, proportioniert sein.

Z. B. A wettet gegen B, dass er mit zwei Würfeln einen Pasch wirft.

Die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, ist für A $\frac{1}{6}$, für B $\frac{5}{6}$; es müssen sich also auch die Einsätze der beiden Spieler, wenn die Wette rechtmäßig sein soll, wie $\frac{1}{6} : \frac{5}{6}$ oder wie $1 : 5$ verhalten, d. h. B muss 5 mal so viel setzen als A.

Wahrscheinlichkeit in Beziehung auf die Lebensdauer des Menschen.

§. 278. Durch Vergleichung der Sterbelisten, die für zahlreiche Orte und durch viele Jahre hindurch geführt wurden, ist man zu Tabellen gelangt, welche angeben, wie viele von einer bestimmten Anzahl in demselben Jahre geborener Menschen in den aufeinander folgenden Jahren noch am Leben sind. Solche Tabellen heißen Sterblichkeits- oder Mortalitätstafeln. Wir theilen nachstehend eine solche Tafel mit.

Süßmilch-Baumann'sche Sterblichkeitstafel.

n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n	n	a_n
0	1000	**20**	491	**40**	374	**60**	210	**80**	37
1	750	**21**	486	**41**	367	**61**	201	**81**	32
2	661	**22**	481	**42**	360	**62**	192	**82**	28
3	618	**23**	476	**43**	353	**63**	182	**83**	24
4	593	**24**	471	**44**	346	**64**	172	**84**	20
5	579	**25**	466	**45**	339	**65**	162	**85**	17
6	567	**26**	461	**46**	332	**66**	152	**86**	14
7	556	**27**	456	**47**	324	**67**	142	**87**	12
8	547	**28**	451	**48**	316	**68**	132	**88**	10
9	539	**29**	445	**49**	308	**69**	122	**89**	8
10	532	**30**	439	**50**	300	**70**	112	**90**	6
11	527	**31**	433	**51**	291	**71**	103	**91**	5
12	523	**32**	427	**52**	282	**72**	94	**92**	4
13	519	**33**	421	**53**	273	**73**	85	**93**	3
14	515	**34**	415	**54**	264	**74**	77	**94**	2
15	511	**35**	409	**55**	255	**75**	69	**95**	1
16	507	**36**	402	**56**	246	**76**	62	**96**	0
17	503	**37**	395	**57**	237	**77**	55		
18	499	**38**	388	**58**	228	**78**	49		
19	495	**39**	381	**59**	219	**79**	43		

Diese Tabelle, welche sich auf 1000 in demselben Jahre Geborene bezieht, enthält in der ersten mit n überschriebenen Spalte die Altersjahre der Personen, in der zweiten mit a_n bezeichneten die Zahl der im Alter von n Jahren noch Lebenden. Die Differenz zweier Zahlen der Lebenden gibt die Anzahl der in dem bezüglichen Zeitraume Gestorbenen. So sterben z. B. vom 20. bis zum 30. Lebensjahre $491 - 439 = 52$ Personen. Die Zahl der im $n$ten Altersjahre Gestorbenen ist gleich $a_n - a_{n+1}$.

§. 279. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine $n$jährige Person das Alter von $n + p$ Jahren erreichen werde, darzustellen.

Von a_n im Alter von n Jahren lebenden Personen leben im Alter von $n + p$ Jahren noch a_{n+p} Personen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine n jährige Person das $(n+p)$te Jahr erreichen werde, ist demnach, da a_{n+p} die Anzahl der günstigen und a_n die Anzahl aller gleich möglichen Fälle angibt,

$$w = \frac{a_{n+p}}{a_n}.$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass nämlich eine n jährige Person das $(n+p)$te Jahr nicht erleben werde, ist $w' = 1 - \frac{a_{n+p}}{a_n}$.

Beispiele. 1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 24jährige Person das 50ste Jahr erreichen werde? $\frac{a_{50}}{a_{24}} = \frac{300}{471} = 0 \cdot 637$.

2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Eheleuten, von denen der Mann 40, die Frau 30 Jahre alt ist, beide das 60ste Jahr erreichen werden? Die Wahrscheinlichkeit, das 60ste Jahr zu erreichen, ist für den Mann $\frac{a_{60}}{a_{40}}$, für die Frau $\frac{a_{60}}{a_{30}}$, daher die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, dass beide das 60ste Jahr erleben, $\frac{a_{60}}{a_{40}} \cdot \frac{a_{60}}{a_{30}} = \frac{210}{374} \cdot \frac{210}{439} = 0 \cdot 2686$.

Lebensversicherungsrechnung.

§. 280. Verpflichtet sich eine Versicherungsanstalt, einer Person oder deren Rechtsnachfolgern gegen eine zu entrichtende Geldsumme in einem bestimmten Falle, welcher von dem Leben oder Tode einer oder mehrerer Personen abhängt, einen gewissen Capitalsbetrag oder eine bestimmte Leibrente (§. 253) zu zahlen, so heißt der bezügliche Vertrag ein Lebensversicherungsvertrag. Bei allen Rechnungen über Lebensversicherungen wird der Grundsatz festgehalten, dass der Barwert der Zahlungen, welche die Versicherungsanstalt von den unter gleichen Bedingungen versicherten Personen zu empfangen hat, gleich sei dem Barwerte der Zahlungen, welche die Anstalt an diese Versicherten zu leisten hat.

Unter der Reserve (Prämienreserve) eines Versicherten in einem gegebenen Zeitpunkte versteht man den Betrag, welcher sich ergibt, wenn man den Barwert der von ihm noch weiterhin zu leistenden Zahlungen von dem Barwerte seiner künftigen Bezüge subtrahiert. Die Reserve gibt den Wert der Versicherungs-Polizze für jenen Zeitpunkt an.

Wir beschränken uns hier auf einige besonders wichtige Aufgaben.

§. 281. Aufgabe. Eine n jährige Person will bei einer Versicherungsanstalt ein Capital C so versichern, dass dieses nach p Jahren, wenn die Person dann noch lebt, an dieselbe ausgezahlt werden soll, dass dagegen, falls die Person während der p Jahre stirbt, die eingezahlte Summe zu Gunsten der Anstalt verfällt; wie groß ist der Betrag M (Mise), welcher an die Anstalt sogleich einzuzahlen ist? (Versicherung auf den Lebensfall.)

Wenn alle a_n Personen, welche in der Sterblichkeitstafel bei dem Alter n angegeben sind, unter denselben Bedingungen der Versicherungsanstalt beitreten, so haben sie zusammen $M \,.\, a_n$ einzuzahlen. Von den a_n Personen leben nach p Jahren noch a_{n+p}; an diese hat die Anstalt je C, also im ganzen den Betrag $C \,.\, a_{n+p}$ zu zahlen, dessen Barwert, wenn hier wie auch in den folgenden Aufgaben der Verzinsungsfactor durch q bezeichnet wird, $\frac{C \,.\, a_{n+p}}{q^p}$ beträgt. Da nun die Barwerte der Einnahmen und der Ausgaben der Anstalt gleich sein sollen, so hat man die Gleichung

$$M \,.\, a_n = C \,.\, \frac{a_{n+p}}{q^p} \text{ daher } M = C \,.\, \frac{a_{n+p}}{a_n\, q^p}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch durch folgende Schlussweise, die ebenso bei den späteren Aufgaben angewendet werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass die n jährige Person das $(n+p)$te Jahr erreichen und dass also die Auszahlung des versicherten Capitals C wirklich erfolgen werde, ist $\frac{a_{n+p}}{a_n}$, daher (nach §. 276) der mathematische Hoffnungswert dieses Capitals $C \,.\, \frac{a_{n+p}}{a_n}$, und sein Barwert $C \,.\, \frac{a_{n+p}}{a_n\, q^p}$. Es ergibt sich daher,

$$\text{wie früher, } M = C \,.\, \frac{a_{n+p}}{a_n\, q^p}.$$

Es sei in diesem Falle die Reserve R des Versicherten, wenn er k Jahre alt ist, zu bestimmen.

Der mathematische Hoffnungswert des Capitales C für den Zeitpunkt, da der Versicherte das Alter von k Jahren erreicht $(n < k < n + p)$ ist $C \,.\, \frac{a_{n+p}}{a_k}$ und der für eben diesen Zeitpunkt berechnete Barwert ist

$$R = C \,.\, \frac{a_{n+p}}{a_k \,.\, q^{n+p-k}}.$$

Beispiel. Wie groß ist der Betrag, den ein Vater bei 5% Zinseszins an eine Versicherungsanstalt einzahlen muss, damit diese seinem 10jährigen Sohne, wenn er das 24ste Jahr erreicht, ein Capital von 2000 K auszahle?

$$M = 2000 \,.\, \frac{a_{24}}{a_{10} \,.\, 1{\cdot}05^{14}} = \frac{2000 \,.\, 471}{532 \,.\, 1{\cdot}05^{14}} = 894{\cdot}32 \text{ K}.$$

Zu diesem Betrage kommt noch ein Verwaltungskostenzuschlag.

Wenn der Sohn 20 Jahre alt wird, ist seine Reserve

$$R = 2000 \,.\, \frac{a_{24}}{a_{20} \,.\, 1{\cdot}05^4} = \frac{2000 \,.\, 471}{491 \,.\, 1{\cdot}05^4} = 1578{\cdot}37 \text{ K}.$$

§. 282. Aufgabe. Wie groß ist der Betrag M, den eine n jährige Person an eine Versicherungsanstalt sogleich einzahlen muss, damit sie, so lange sie lebt, am Ende eines jeden Jahres eine Leibrente B beziehe? (Rentenversicherung.)

Versichern sich a_n Personen vom Alter n unter gleichen Bedingungen, so haben sie $M \,.\, a_n$ einzuzahlen. Von diesen Personen leben am Ende des

1., 2., 3., . . . Jahres noch a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}. . . Die Anstalt hat daher an Renten auszuzahlen $B \,.\, a_{n+1}$, $B \,.\, a_{n+2}$, $B \,.\, a_{n+3}$, . . .

Die Summe der Barwerte dieser Rente ist

$$B \,.\, \left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots\right),$$

wobei die Reihe innerhalb der Klammern bis an das Ende der Sterblichkeitstafel fortzusetzen ist.

Setzt man die Barwerte der Einnahmen und der Ausgaben der Versicherungsanstalt gleich, so ergibt sich

$$M \,.\, a_n = B \,.\, \left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots\right), \text{ und daher}$$

$$M = B \,.\, \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots\right),$$

oder, wenn man den für $B = 1$ sich ergebenden Betrag durch r_n bezeichnet, also

$$r_n = \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \ldots\right) \ldots\ldots 1)$$

setzt,

$$M = B \,.\, r_n.$$

Die Reserve für das Alter k der Person ist dann gleich

$$R = B \,.\, r_k.$$

Die Berechnung von r_n, welches den Barwert der Renteneinheit für das Alter n darstellt und ein Hauptelement der Versicherungsrechnung bildet, gestaltet sich meistens sehr mühsam und weitläufig. Wir geben in der nachfolgenden Tabelle die für 4% und 5% bereits ausgerechneten Werte von r_n.

Die Construction einer solchen Tafel geschieht am einfachsten auf folgende Weise:

Nach der Formel 1) ist $r_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}\left(\frac{a_{n+2}}{q} + \frac{a_{n+3}}{q^2} + \ldots\right)$, also

$$\frac{1 + r_{n+1}}{q} = \frac{1}{a_{n+1}}\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots\right) = \frac{1}{a_{n+1}} \,.\, r_n\, a_n,$$

und folglich

$$r_n = \frac{a_{n+1}\,(1 + r_{n+1})}{a_n\, q} \ldots 2).$$

Man bestimmt nun, z. B. für 4%, zuerst, und zwar nach der Formel 1)

$$r_{94} = \frac{1}{a_{94}} \cdot \frac{a_{95}}{1{\cdot}04} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1{\cdot}04} = 0{\cdot}48077;$$

sodann nach der Formel 2)

$$r_{93} = \frac{a_{94}\,(1 + r_{94})}{a_{93} \,.\, 1{\cdot}04} = \frac{2 \,.\, 1{\cdot}48077}{3 \,.\, 1{\cdot}94} = 0{\cdot}94921,$$

hierauf nach derselben Formel r_{92}, dann folgeweise r_{91}, r_{90}, u. s. f., was mit Hilfe der Logarithmen leicht auszuführen ist.

Barwert einer Renteneinheit

nach der Süßmilch-Baumann'schen Sterblichkeitstafel für 4% und 5% berechnet.

n	r_n 4%	r_n 5%	n	r_n 4%	r_n 5%	n	r_n 4%	r_n 5%
0	11·432	9·782	**10**	18·249	15·709	**20**	16·790	14·645
1	14·852	12·695	**11**	18·149	15·651	**21**	16·642	14·535
2	16·525	14·125	**12**	18·029	15·559	**22**	16·487	14·421
3	17·382	14·863	**13**	17·895	15·463	**23**	16·327	14·301
4	17·840	15·264	**14**	17·756	15·362	**24**	16·160	14·175
5	18·002	15·415	**15**	17·610	15·256	**25**	15·987	14·043
6	18·118	15·528	**16**	17·459	15·146	**26**	15·807	13·906
7	18·216	15·627	**17**	17·302	15·029	**27**	15·619	13·761
8	18·256	15·678	**18**	17·138	14·907	**28**	15·424	13·609
9	18·268	15·706	**19**	16·968	14·779	**29**	15·257	13·482
30	15·085	13·350	**52**	10·349	9·505	**74**	5·220	4·966
31	14·905	13·212	**53**	10·118	9·309	**75**	5·058	4·819
32	14·719	13·067	**54**	9·881	9·108	**76**	4·854	4·631
33	14·526	12·916	**55**	9·639	8·900	**77**	4·691	4·482
34	14·326	12·758	**56**	9·392	8·687	**78**	4·476	4·282
35	14·117	12·592	**57**	9·138	8·468	**79**	4·304	4·124
36	13·938	12·452	**58**	8·879	8·243	**80**	4·202	4·032
37	13·752	12·307	**59**	8·614	8·010	**81**	4·053	3·895
38	13·560	12·115	**60**	8·342	7·771	**82**	3·818	3·675
39	13·362	11·997	**61**	8·064	7·525	**83**	3·632	3·501
40	13·156	11·883	**62**	7·780	7·272	**84**	3·533	3·412
41	12·944	11·662	**63**	7·536	7·055	**85**	3·322	3·214
42	12·723	11·483	**64**	7·293	6·838	**86**	3·196	3·098
43	12·494	11·296	**65**	7·053	6·624	**87**	2·877	2·796
44	12·257	11·101	**66**	6·817	6·412	**88**	2·591	2·522
45	12·011	10·896	**67**	6·589	6·207	**89**	2·368	2·311
46	11·755	10·682	**68**	6·372	6·011	**90**	2·284	2·235
47	11·527	10·494	**69**	6·170	5·829	**91**	1·851	1·816
48	11·291	10·297	**70**	5·990	5·667	**92**	1·406	1·384
49	11·048	10·093	**71**	5·774	5·471	**93**	0·949	0·937
50	10·796	9·880	**72**	5·580	5·294	**94**	0·481	0·476
51	10·575	9·695	**73**	5·418	5·147			

Beispiel. Welchen Betrag muss eine 47jährige Person einzahlen, um sich eine Leibrente von 200 Kronen zu sichern, die Zinsen zu 4% gerechnet?

$$M = 200 . r_{47} = 200 . 11·527 = 2305·4 \text{ Kronen.}$$

§. 283. Aufgabe. Eine njährige Person will bei einer Anstalt ein Capital C versichern, das nach ihrem Tode ihren Erben ausgezahlt werden soll; wie groß ist der Betrag M, den sie sogleich einzuzahlen hat? (Versicherung auf den Todesfall.)

Treten der Anstalt a_n Personen unter gleichen Bedingungen bei, so muss die Summe ihrer Einzahlungen, nämlich $M.a_n$, gleich sein dem Barwerte aller Capitalien, welche von der Anstalt für die gestorbenen Personen an deren Erben zu zahlen sind.

Von a_n Personen leben nach einem Jahr noch a_{n+1}, die Zahl der Gestorbenen des ersten Jahres ist also $a_n - a_{n+1}$. Ebenso sterben im 2., 3.,... Jahre $a_{n+1} - a_{n+2}$, $a_{n+2} - a_{n+3}, \ldots$ Die Anstalt hat also am Ende des 1., 2., 3.,... Jahres an die Erben der Gestorbenen die Capitalsbeträge

$$C.(a_n - a_{n+1}),\ C.(a_{n+1} - a_{n+2}),\ C.(a_{n+2} - a_{n+3}), \ldots$$

zu zahlen.

Die Summe der Barwerte aller dieser Zahlungen ist

$$C.\left[\frac{a_n - a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+2} - a_{n+3}}{q^3} + \ldots\right]$$

$$= C.\left[\frac{a_n}{q} - \left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots\right)\right]$$

$$= C.\frac{a_n}{q}.\left[1 - \frac{q}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots\right) + \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots\right)\right]$$

$$= C.\frac{a_n}{q}\left[1 - (q-1).\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots\right)\right]$$

$$= \frac{C}{q}.a_n\left[1 - (q-1)\,r_n\right],$$

wenn der Ausdruck $\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots\right)$ durch r_n ersetzt wird (§. 282).

Somit ist

$$M.a_n = \frac{C}{q}.a_n\left[1 - (q-1)\,r_n\right], \text{ daher}$$

$$M = \frac{C}{q}.\left[1 - (q-1)\,r_n\right].$$

Ebenso ist die Reserve für die Person, wenn sie k Jahre alt ist,

$$R = \frac{C}{q}.\left[1 - (q-1)\,r_k\right].$$

Beispiel. Welches Antrittsgeld hat eine 36jährige Person bei 5% Zinsen an eine Versicherungsanstalt zu zahlen, damit nach ihrem Tode ihre Erben eine Summe von 2500 K erhalten?

$$M = \frac{2500}{1{\cdot}05}.(1 - 0{\cdot}05\,.\,r_{36}) = \frac{2500}{1{\cdot}05}.(1 - 0{\cdot}05\,.\,12{\cdot}452) = 898{\cdot}54 \text{ K}.$$

§. 284. Aufgabe. Eine njährige Person will gegen eine am Anfange jedes Jahres zahlbare Prämie P ein Capital C versichern, das bei ihrem Absterben an die Erben ausbezahlt werden soll; man suche die Beziehung zwischen P und C.

Nimmt man wieder a_n Personen vom Alter n an, so beträgt die von ihnen gleich beim Eintritte an die Anstalt zu zahlende Prämie zusammen $P.a_n$. Nach 1. 2,... Jahren leben noch a_{n+1}, $a_{n+2}\ldots$ Personen; diese zahlen an Prämien $P.a_{n+1}$, $P.a_{n+2}, \ldots$

Der Barwert aller Prämien ist also

$$P \,.\left[a_n + \frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots\right]$$

$$= P \,.\, a_n \left[1 + \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \ldots\right)\right]$$

$$= P \,.\, a_n (1 + r_n) \;\; (\S.\ 282).$$

Der Barwert aller Leistungen der Anstalt an die Erben der Versicherten ist, wie in der Aufg. §. 283,

$$\frac{C}{q} \,.\, a_n [1 - (q - 1) r_n].$$

Man hat daher

$$P \,.\, a_n (1 + r_n) = \frac{C}{q} \,.\, a_n [1 - (q - 1) r_n], \text{ oder}$$

$$P \,.\, (1 + r_n) = \frac{C}{q} \,.\, [1 - (q - 1) r_n].$$

Die Reserve für das Alter k der Person ist gleich der Differenz der auf diesen Zeitpunkt bezogenen Barwerte der künftigen Bezüge und Prämien, also

$$R = \frac{C}{q} \,.\, [1 - (q - 1) r_k] - P [1 + r_k],$$

oder, wenn man für P den Wert aus der früheren Gleichung substituiert und dann den Ausdruck reduciert,

$$R = C \,.\, \frac{r_n - r_k}{1 + r_n}.$$

Beispiel. Eine 55jährige Person will auf den Todesfall ihren Erben ein Capital von 4000 Kronen versichern; welche jährliche Prämie hat sie bei 4% Verzinsung einzuzahlen?

$$P = \frac{4000}{1{\cdot}04} \,.\, \frac{1 - 0{\cdot}04 r_{55}}{1 + r_{55}} = \frac{4000}{1{\cdot}04} \,.\, \frac{1 - 0{\cdot}04 \,.\, 9{\cdot}639}{1 + 9{\cdot}639} = 222{\cdot}1 \text{ Kronen.}$$

Für die obige Person wäre nach 10 Jahren die Reserve

$$R = 4000 \,.\, \frac{r_{55} - r_{65}}{1 + r_{55}} = 4000 \,.\, \frac{2{\cdot}586}{10{\cdot}639} = 972{\cdot}3 \text{ Kronen.}$$

Anhang.

I. Goniometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§. 285. Sind in $x^2 \pm ax \pm b = 0$ a und b große Zahlen, so kann die umständliche Berechnung der Wurzeln durch Einführung der goniometrischen Functionen eines Hilfswinkels vereinfacht werden. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem b positiv oder negativ ist.

1. Fall. $x^2 + ax + b = 0$, wo $0 < b < \left(\frac{a}{2}\right)^2$ somit $\frac{4b}{a^2} < 1$.

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}},$$

$$x_1 = -\frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right); \quad x_2 = -\frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right).$$

Man setzt $\frac{4b}{a^2} = \sin^2 \varphi$, also $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ und $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{\sin \varphi}$;

so ist
$$x_1 = -\frac{\sqrt{b}\,(1 - \cos\varphi)}{\sin\varphi} = -\frac{\sqrt{b}\, 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$x_1 = -\sqrt{b} \,.\, \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \text{ analog } x_2 = -\sqrt{b} \,.\, \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

Für
$$x^2 - ax + b = 0, \text{ wo } 0 < b < \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

ist
$$x_1 = \sqrt{b} \,.\, \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} \text{ und } x_2 = \sqrt{b} \,.\, \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Zusatz. Ist $b > \frac{a}{2}$, dann setzt man $\frac{2\sqrt{b}}{a} = \frac{1}{\cos\varphi}$ und erhält $x = -\sqrt{b}\,(\cos\varphi \mp i \sin\varphi)$.

2. Fall. $x^2 + ax - b = 0$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}$$

$$x_1 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}} - 1\right); \quad x_2 = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}} + 1\right).$$

Man setzt $\frac{4b}{a^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi$, also $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ und $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg}\varphi}$;

so ist $x_1 = \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg}\varphi}\left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} - 1\right) = \frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tg}\varphi}\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right) = \frac{\sqrt{b}\,(1 - \cos\varphi)}{\sin\varphi}$

$$= \frac{\sqrt{b} \cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{b}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2};$$

somit
$$x_1 = \sqrt{b} \,.\, \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \text{ analog } x_2 = \sqrt{b} \,.\, \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

Für $x^2 - ax - b = 0$

ist
$$x_1 = \sqrt{b}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}, \qquad x_2 = \sqrt{b} \,.\, \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

II. Größte und kleinste Werte einer gegebenen Function.

§. 286. Eine Function $y = f(x)$ wird für einen bestimmten Wert x_0 ihrer Veränderlichen ein Maximum oder Minimum, wenn bei einer Ab- oder Zunahme der Veränderlichen um beliebige kleine Größen δ, ε der Wert der Function abnimmt, beziehungsweise zunimmt.

Für das Maximum $f(x_0 - \delta) < f(x_0) > f(x_0 + \varepsilon)$,
für das Minimum $f(x_0 - \delta) > f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$.

Wenn man daher umgekehrt x als eine Function von y darstellt, so liefert dieselbe für einen Wert von y, welcher kleiner (bez. größer) ist als $y_0 = f(x_0)$ zwei verschiedene reelle Werte für $x_1 = x_0 - \delta$ und $x_2 = x_0 + \varepsilon$, für $y = y_0$ nur einen reellen Wert x_0 und für einen Wert von y, welcher größer (bez. kleiner) ist als y_0, imaginäre Werte für x.

Um nun jenen Wert für x zu bestimmen, für welchen ein Ausdruck von der Form $\frac{a x^2 + b x + c}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}$ ein Maximum (Minimum) wird, setzt man denselben gleich y und löst die erhaltene, in Bezug auf x quadratische Gleichung nach x auf. Gemäß den obigen Auseinandersetzungen ist für den Maximal- (Minimal-) wert von y die Quadratwurzel gleich Null. Man setzt also den Ausdruck unter der Quadratwurzel gleich Null und erhält so diesen Maximal- (Minimal-) wert von y. Die Substitution desselben gibt den zugehörigen Wert von x. Ein Maximum ist vorhanden, wenn der Ausdruck unter der Quadratwurzel negativ, somit x imaginär wird, falls y über den erhaltenen Wert wächst. Im gegentheiligen Falle ist ein Minimum vorhanden.

Beispiele. 1. Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfange $2a$ den größten Flächeninhalt?

1. Seite x; 2. Seite $a - x$; Flächeninhalt y.

$x(a - x) = y$ oder $x^2 - ax + y = 0$, $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - y}$;

somit $\frac{a^2}{4} - y = 0$; Maximum: $y = \frac{a^2}{4}$

für $x = \frac{a}{2}$, also beide Seiten: $\frac{a}{2}$.

Lösung: Das Quadrat mit der Seite $\frac{a}{2}$.

2. Welches Rechteck hat bei gegebenem Flächeninhalte f den kleinsten Umfang?

1. Seite x; 2. Seite $\frac{f}{x}$; Umfang y.

$2x + 2\frac{f}{x} = y$ oder $x^2 - \frac{y}{2}x + f = 0$, $x = \frac{y}{4} \pm \sqrt{\frac{y^2}{16} - f}$;

somit $\frac{y^2}{16} - f = 0$; Minimum: $y = 4\sqrt{f}$ (Zeichen — unbrauchbar)

für $x = \sqrt{f}$, also beide Seiten: $\sqrt{f}$.

Lösung: Das Quadrat mit der Seite $\sqrt{f}$.

III. Höhere numerische Gleichungen.

§. 287. Die allgemeine Form einer geordneten numerischen Gleichung des $m$ten Grades mit einer Unbekannten ist

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

wo die Coefficienten A_1, $A_2, \ldots A_m$ besondere positive oder negative Zahlen bedeuten, einige von ihnen auch Null sein können.

Setzt man das Polynom

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = f(x),$$

so kann mit Hilfe dieser Bezeichnung die obige Gleichung durch $f(x) = 0$ dargestellt werden.

Allgemeine Sätze über die Gleichungen.

§. 288. Fundamentalsatz. Jede Gleichung

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

hat mindestens eine Wurzel.

Für diesen Satz gibt es mehrere Beweise, die jedoch alle die Grenzen dieses Buches überschreiten. Wir werden daher hier den Satz geradezu als wahr annehmen und ihn sodann den weiteren Untersuchungen zugrunde legen.

§. 289. Ist a eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist $f(x)$ durch $x - a$ theilbar.

Beweis. Vor.: $a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \ldots + A_{m-1} . a + A_m = 0$.

Somit $x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m =$

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m - (a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots + A_{m-1} a + A_m)$$

$$= x^m - a^m + A_1 (x^{m-1} - a^{m-1}) + A_2 (x^{m-2} - a^{m-2}) + \ldots + A_{m-1} (x - a)$$

$$= (x - a)(x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \ldots + B_{m-1}),$$

wo B_1, $B_2 \ldots$ nur constante Größen enthalten.

§. 290. 1. Das Polynom jeder geordneten Gleichung $f(x) = 0$ vom mten Grade läſst sich in m Binomialfactoren von der Form $x - a$ zerlegen.

2. Jede Gleichung des mten Grades hat m Wurzeln.

Beweis. 1. Es sei a_1 eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ vom mten Grade; nach §. 289 ist dann $f(x) = (x - a_1) f_1(x)$, und $f_1(x)$ ein Polynom vom $(m - 1)$ten Grade. Die Gleichung $f_1(x) = 0$ hat aber ebenfalls eine Wurzel a_2, folglich ist $f_1(x) = (x - a_2) f_2(x)$; die Gleichung $f_2(x) = 0$ vom $(m - 2)$ten Grade hat ebenfalls eine Wurzel a_3, folglich ist $f_2(x) = (x - a_3) f_3(x)$, u. s. w. Schließlich erhält man $f_{m-2}(x) = (x - a_{m-1}) f_{m-1}(x)$, wo dann die Gleichung $f_{m-1}(x) = 0$ vom ersten Grade noch eine Wurzel a_m hat, so dass $f_{m-1}(x) = x - a_m$ wird. Durch allmähliche Substitution ergibt sich demnach

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_{m-1})(x - a_m).$$

2. Aus dem letzten Ausdrucke folgt, dass $f(x)$ für jeden der m Werte $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{m-1}, a_m$ Null wird, dagegen für keinen andern von diesen verschiedenen Wert a_n Null werden kann; d. h. die Gleichung $f(x) = 0$ vom mten Grade hat m Wurzeln, aber auch nicht mehr als m Wurzeln.

Die Wurzeln selbst sind entweder reell oder imaginär, und im ersten Falle entweder ganze oder gebrochene oder auch irrationale Zahlen; auch können zwei oder mehrere Wurzeln einander gleich sein.

§. 291. In jeder geordneten Gleichung ist der Coefficient des zweiten Gliedes gleich der Summe der mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln, der Coefficient des dritten, vierten, . . . Gliedes gleich der Summe der Combinationen zweiter dritter, . . . Classe, das letzte von x freie Glied gleich dem Producte aller mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln.

Beweis. Sind $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ die Wurzeln der Gleichung
$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_{m-1} + A_m = 0$,
so ist nach § 290

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_m).$$

Entwickelt man nun das letzte Product nach dem Bildungsgesetze in §. 267 in ein Polynom, so ist, da die Coefficienten der gleichnamigen Glieder in beiden Polynomen von f (x) gleich sein müssen,

$$\begin{aligned}
A_1 &= -(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m), \\
A_2 &= (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + \ldots + a_{m-1} a_m), \\
A_3 &= -(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \ldots + a_{m-2} a_{m-1} a_m), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_m &= (-1)^m a_1 a_2 a_3 \ldots a_{m-1} a_m.
\end{aligned}$$

Folgesätze. 1. Jede Wurzel einer Gleichung ist ein Factor ihres letzten Gliedes.

2. Ändert man in einer Gleichung die Vorzeichen aller geradstelligen Glieder, wobei die etwa fehlenden mitzuzählen sind, so sind sämmtliche Wurzeln der neuen Gleichung die entgegengesetzten Werte von den Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Durch diesen Satz reduciert sich die Auflösung einer numerischen Gleichung auf die Bestimmung der positiven Wurzeln. Um nämlich die negativen Wurzeln derselben auszumitteln, braucht man nur die Zeichen an den geraden Stellen zu ändern und die positiven Wurzeln dieser transformierten Gleichung zu suchen; werden diese entgegengesetzt genommen, so hat man die negativen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.

§. 292. Bringen zwei reelle Werte $x = a$ und $x = b$ in der Function f (x) entgegengesetzt bezeichnete Resultate hervor, so muss zwischen a und b mindestens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegen.

Beweis. Es sei

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Setzt man statt x überall $x + h$, wo h sehr klein ist, so ist

$$f(x+h) = (x+h)^m + A_1 (x+h)^{m-1} + \ldots + A_{m-1}(x+h) + A_m,$$

oder, wenn man diesen Ausdruck entwickelt und nach den steigenden Potenzen von h ordnet,

$$f(x+h) = f(x) + C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + \ldots \text{ und}$$

$$f(x+h) - f(x) = C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + \ldots,$$

woraus folgt, dass für sehr kleine Änderungen h auch f (x) sehr wenig zu- oder abnimmt, dass also, wenn x sich stetig ändert, auch f (x) sich stetig ändert. Lässt man daher x alle Zwischenwerte von a und b durchlaufen, so wird auch f (x) stetig aus f (a) in f (b) übergehen und muss während dieses Überganges, wenn f (a) und f (b) entgegengesetzt bezeichnet sind, mindestens einmal durch Null durchgehen.

Zusatz. Sind f (a) und f (b) entgegengesetzt bezeichnet, so kann, da nach zweimaliger Änderung des Vorzeichens dasselbe ungeändert bleibt, f (x) von $x = a$ bis $x = b$ auch 3mal, 5mal, allgemein $(2n + 1)$ mal aus dem Positiven ins Negative und umgekehrt übergehen und während dieses Überganges Null werden; d. i. es können, wenn f (a) und f (b) entgegengesetzte Vorzeichen haben, zwischen a und b auch mehrere reelle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, jedoch immer nur in ungerader Anzahl, liegen.

§. 293. Sind die Coefficienten in der Function f (x) ganze Zahlen, so sind alle rationalen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ebenfalls ganze Zahlen.

Wäre die gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$, in welcher p und q relative Primzahlen seien, eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

so würde aus

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m + A_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{m-1} + A_2 \left(\frac{p}{q}\right)^{m-2} + \ldots + A_{m-1}\left(\frac{p}{q}\right) + A_m = 0,$$

wenn man mit q^{m-1} multipliciert,

$$\frac{p^m}{q} = -(A_1 p^{m-1} + A_2 p^{m-2} q + \ldots + A_{m-1} p q^{m-2} + A_m q^{m-1})$$

folgen; es müsste also $\frac{p^m}{q}$ einer ganzen Zahl gleich sein, was nicht möglich ist, da p^m und q relative Primzahlen sind (§. 74, 2).

Bestimmung der rationalen Wurzeln.

§. 294. Sind in der Gleichung

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_m$ ganze Zahlen, so müssen die Wurzeln, wenn sie rational sind, ebenfalls ganze Zahlen sein (§. 293).

In diesem Falle gibt der Satz, dass jede Wurzel einer Gleichung ein Factor ihres letzten Gliedes ist, ein einfaches Mittel an die Hand, die Wurzeln zu bestimmen. Man zerlegt das von x freie Glied in seine Factoren und sucht durch Substitution derselben diejenigen auf, welche die Gleichung auf Null bringen.

Findet man dabei, dass ein Factor a eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, so können die weiteren Substitutionen statt in der gegebenen Gleichung in der Gleichung $\frac{f(x)}{x-a} = 0$, welche die übrigen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ enthalten muss, gemacht werden.

Es sei z. B. $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$.

Das von x freie Glied 6 hat die Factoren ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Durch Substitution dieser Factoren erhält man

für $x = 1 \ldots 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0$, somit $x_1 = 1$.

$$\frac{f(x)}{x-1} = f_1(x) = x^3 - 7x - 6 = 0$$

für $x = -1 \ldots -1 + 7 - 6 = 0$, also $x_2 = -1$.

$$\frac{f_1(x)}{x-1} = f_2(x) = x^2 - x - 6 = 0, \text{ also } x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+24} = \frac{1 \pm 5}{2}.$$

$$x_3 = 3;\ x_4 = -2.$$

§. 295. Sind in der Gleichung

$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$ die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_m$, oder einige derselben gebrochene Zahlen, so lässt sich dieselbe immer in eine andere Gleichung transformieren, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, indem für x überall $\frac{x}{q}$, wo q das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner aller gebrochenen Coefficienten ist, gesetzt und dann mit q^m multipliciert wird.

Alle rationalen Wurzeln der transformierten Gleichung sind ganze Zahlen und können nach §. 294 gefunden werden; wird jede derselben durch q dividiert, so erhält man die Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$.

Bestimmung der irrationalen Wurzeln.

§. 296. Sind die Wurzeln einer Gleichung mit ganzen Coefficienten nicht ganze Zahlen, so sind sie irrational (§. 293). Wenn man in der Gleichung die auf einander folgenden ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, . . substituiert, so lässt sich nach §. 292 aus den Vorzeichen der Resultate erkennen, zwischen welchen Zahlen als Näherungswerten die einzelnen positiven irrationalen Wurzeln dieser Gleichung liegen und es handelt sich dann nur darum, aus den gefundenen Näherungswerten die dazwischen liegende Wurzel mit jedem geforderten Grade der Genauigkeit zu berechnen. Die Bestimmung der negativen irrationalen Wurzeln kann auf die Berechnung der positiven Wurzeln zurückgeführt werden (§. 291, 2. Folges.).

Für die annäherungsweise Berechnung der irrationalen Wurzeln gibt es verschiedene Methoden, von denen wir hier nur zwei betrachten wollen.

§. 297. I. Newton'sche Näherungsmethode.

Dieselbe soll an einem speciellen Beispiele auseinander gesetzt werden.

$f(x) = x^3 + 10x - 12 = 0.$ I)

$f(1) = 1 + 10 - 12 = -1,\quad f(2) = 8 + 20 - 12 = 16,$

demnach $1 < x_1 < 2$.

Man setzt daher $x_1 = 1 + h$, substituiert in I) und erhält

$$h^3 + 3h^2 + 13h - 1 = 0. \quad \text{II)}$$

Vernachlässigt man die Glieder mit h^2 und h^3, so erhält man zur Bestimmung eines Näherungswertes für h die Gleichung

$$13h - 1 = 0 \text{. Diese gibt } h = \frac{1}{13} \backsim 0{\cdot}07 \text{ .}$$

Die Substitution dieses Wertes in II) gibt $-0{\cdot}074957$; demnach ist $0{\cdot}07$ zu klein, man setzt daher $h = 0{\cdot}07 + k$.

Die Substitution in II) gibt

$$k^3 + 3{\cdot}21\,k^2 + 13{\cdot}4347k - 0{\cdot}074957 = 0 \text{ .}$$

daher angenähert $k = 0{\cdot}074957 : 13{\cdot}4347 = 0{\cdot}0056$;

also ist $x_1 = 1{\cdot}0756$ ein Näherungswert für eine Wurzel.

Die beiden anderen Wurzeln können aus der quadratischen Gleichung gewonnen werden, welche man erhält, wenn man die gegebene Gleichung durch $x - 1{\cdot}0756$ dividiert.

$$x^2 + 1{\cdot}0756\,x + 11{\cdot}1569 = 0$$

$$\text{gibt } x_{\substack{2\\3}} = -0{\cdot}5378 \pm 3{\cdot}2966\,i.$$

II. Die Regula falsi.

§. 298. Aus §. 292 folgt unmittelbar, dass in erster Annäherung der Zuwachs der Function proportional ist dem Zuwachse der Veränderlichen. Auf diesen Satz stützt sich die folgende Auflösungsmethode, die unter dem Namen der Regula falsi bekannt ist.

Dieselbe soll wiederum an einem speciellen Beispiele erörtert werden.

Es sei z. B. die Gleichung $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 6 = 0$ gegeben. Man hat

$$f(1) = -1\,;\ f(2) = 8.$$

Einem Zuwachse der Function um 9 entspricht ein Zuwachs der Veränderlichen um 1, somit entspricht angenähert einem Zuwachse der Function um 1, wodurch dieselbe den Wert Null erhält, ein Zuwachs der

Veränderlichen um $\frac{1}{9}$; somit ist $1\frac{1}{9}$ ein Näherungswert für eine Wurzel. Substituiert man in die Gleichung $1 \cdot 1$ statt $1\frac{1}{9}$, so erhält man
$f(1 \cdot 1) = -0 \cdot 379$; $1 \cdot 1$ ist zu klein; die Substitution $1 \cdot 2$ gibt
$f(1 \cdot 2) = 0 \cdot 288$.

Dem Zuwachse der Function um $0 \cdot 667$ entspricht ein Zuwachs der Veränderlichen um $0 \cdot 1$, daher dem Zuwachse der Function um $0 \cdot 379$ ein Zuwachs der Veränderlichen gleich $\frac{0 \cdot 1 . 0 \cdot 379}{0 \cdot 667} = 0 \cdot 057$;

$$\text{also } x = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 057 = 1 \cdot 157.$$
$$f(1 \cdot 157) = -0 \cdot 004833,$$
$$f(1 \cdot 16) = 0 \cdot 015296.$$

Dem Zuwachse der Function um $0 \cdot 003$ entspricht $\frac{0 \cdot 003 . 0 \cdot 004833}{0 \cdot 020129} = 0 \cdot 00072$ als Zuwachs der Veränderlichen; somit $x = 1 \cdot 15772$.

Die Regula falsi läßt sich auch bei transcendenten Gleichungen anwenden.

Es sei z. B. die Gleichung $x^x = 10$ aufzulösen. Man erhält daraus $x \log x = 1$, daher $f(x) = x \log x - 1 = 0$.

$$f(2) = -0 \cdot 39794, \; f(3) = 0 \cdot 43136.$$

Zuwachs der Veränderlichen $\frac{0 \cdot 39794}{0 \cdot 82930} = 0 \cdot 5 \ldots$ also $x = 2 \cdot 5$.

$$f(2 \cdot 5) = -0 \cdot 00515\,; \; f(2 \cdot 51) = 0 \cdot 00318.$$

Zuwachs der Veränderlichen $\frac{0 \cdot 01 . 0 \cdot 00515}{0 \cdot 00833} = 0 \cdot 00618 \ldots,$ also $x = 2 \cdot 50618 \ldots$

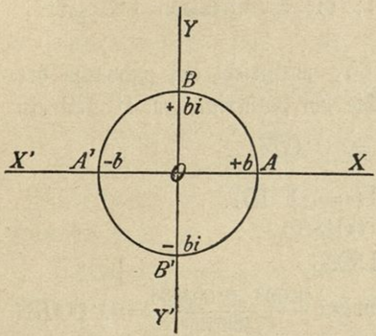
Geometrische Darstellung der imaginären und der complexen Zahlen.

1. Geometrische Darstellung der imaginären Zahlen.

§. 299. Jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt der unbegrenzten reellen Zahlenlinie und umgekehrt jedem Punkte derselben entspricht eine reelle Zahl. Jeder reellen Zahl b kann man eine rein imaginäre Zahl bi zuordnen. Demnach läßt sich auch die Reihe der rein imaginären Zahlen durch die Punkte einer geraden Linie (der imaginären Zahlenlinie) graphisch darstellen, wobei den Zahlen b und bi auf den beiden Geraden Punkte entsprechen, welche vom Nullpunkte die gleiche absolute Entfernung haben. Legt man beide Gerade in dieselbe Ebene, so müssen sich dieselben erstens in dem der Null entsprechenden Punkte schneiden, weil nur die Null sowohl der Reihe der reellen als auch der Reihe der rein imaginären Zahlen angehört, und zweitens müssen dieselben zu einander normal sein.

Begründung. Es schließe der Strahl, auf dem die positiven reellen Zahlen liegen, mit dem Strahle, auf welchem die positiven imaginären

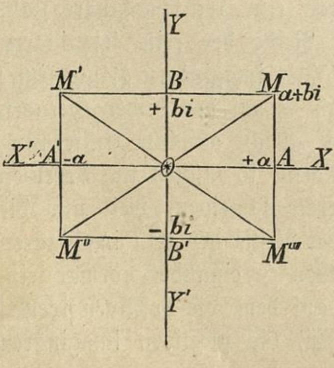
Zahlen liegen, den unbekannten Winkel φ ein; ferner entspreche der Zahl $+ b$ der Punkt A. Dann findet man den der Zahl $+ bi$ entsprechenden Punkt B, wenn man die Strecke OA um den Winkel φ^0 dreht. Es entspricht also der Multiplication mit i graphisch eine Drehung um φ^0. Man erhält demnach den der Zahl $(+ bi) . i$ entsprechenden Punkt A', wenn man die Strecke OB wieder um φ^0, also die Strecke OA um $2\varphi^0$ dreht. Weil $(+ bi) . i = - b$ ist, so ist der gesuchte Punkt A' identisch mit dem der reellen Zahl $- b$ entsprechenden Punkte, welchen man erhält, wenn man OA um



180^0 dreht. Somit ist $2\varphi^0 = 180^0$ und $\varphi = 90^0$. In Übereinstimmung hiemit entspricht dem Punkte B', weil OB' entgegengesetzt ist zu OB, die Zahl $- bi = b . i^3$ (Drehung von OA um 270^0).

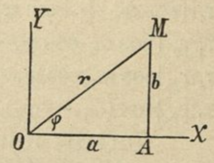
2. Geometrische Darstellung der complexen Zahlen.

§. 300. Der Punkt, welcher der complexen Zahl $a + bi$ entspricht, muss von der imaginären Zahlenlinie den Abstand a und von der reellen Zahlenlinie den Abstand b haben, damit derselbe für $b = 0$ in den der Zahl a entsprechenden Punkt und für $a = 0$ in den der Zahl bi entsprechenden Punkt übergeht. Deshalb betrachtet man die reelle Zahlenlinie XX' als die Abscissenachse und die imaginäre Zahlenlinie YY' als die Ordinatenachse eines rechtwinkligen Coordinatensystems und nimmt die reellen Zahlen a und b einer complexen Zahl $a + bi$ als Coordinaten eines Punktes M, und zwar a als Abscisse und b als Ordinate an; dadurch ist die Lage dieses Punktes in der Ebene eindeutig bestimmt; umgekehrt entspricht einem Punkte M, dessen Coordinaten a und b gegeben sind, eine einzige complexe Zahl, welche die Abscisse a des Punktes als reellen Bestandtheil und die Ordinate b als reellen Factor des imaginären Bestandtheils enthält. Man gelangt zu diesem Punkte der Zahlenebene, wenn man vom Anfangspunkte auf der Abscissenachse die Strecke a und dann senkrecht darauf die Strecke b aufträgt.



Ebenso ergibt sich, dass die complexen Zahlen $- a + bi$, $- a - bi$, $+ a - bi$ bezüglich durch die Punkte M', M'', M''' dargestellt werden.

§. 301. Der Punkt M, welcher der complexen Zahl $a + bi$ entspricht, kann auch durch seine Polarcoordinaten bestimmt werden. Zu diesem Zwecke wählt man den Anfangspunkt als Pol und die positive Abscissenachse als Polarachse; dann ist $OM = r$ der Radiusvector und $MOX = \varphi$ der Polarwinkel des Punktes M. Aus $a = r \cos \varphi$ und $b = r \sin \varphi$ ergibt sich unmittelbar



$$a + bi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Dieser letztere Ausdruck heißt die reducierte Form, r der Modul und φ das Argument der complexen Zahl $a + bi$.

Zur Bestimmung von r und φ dienen die Gleichungen

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

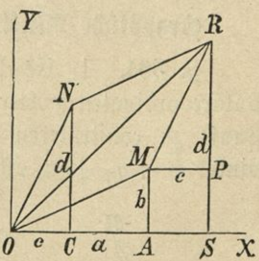
also $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$, wo r stets positiv zu nehmen ist und φ zwischen den Grenzen 0 und 2π (360°) liegend vorausgesetzt wird.

Graphische Addition und Subtraction complexer Zahlen.

§. 302. Da die formalen Verbindungen complexer Zahlen im allgemeinen wieder auf complexe Zahlen führen, so entspricht jeder Rechnung mit complexen Zahlen die geometrische Aufgabe, aus gegebenen Punkten einer Ebene nach vorgeschriebenen Gesetzen andere Punkte zu construieren.

1. **Addition.** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$

Es seien die den Summanden entsprechenden Punkte M (a, b) und N (c, d) gegeben, dann findet man den der Summe entsprechenden Punkt R mittelst der Coordinaten $x = a + c$ und $y = b + d$. Die Construction zeigt, dass man zu diesem Punkte R auch gelangt, wenn man in dem Endpunkte des Radiusvectors der ersten Zahl M eine Strecke MR aufträgt, welche in Größe und Richtung mit dem Radiusvector der zweiten Zahl ON übereinstimmt.



2. **Subtraction.** Es sei $a + c = m$, $b + d = n$ so ist

$$(m + ni) - (c + di) = (m - c) + (n - d)i.$$

Den der Differenz entsprechenden Punkt M findet man mittelst der Coordinaten $x = m - c$ und $y = n - d$. Man gelangt zu diesem Punkte M auch, wenn man in dem Endpunkte des Radiusvectors des Minuends R eine Strecke RM aufträgt, welche mit dem Radiusvector des Subtrahends gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung hat.

Multiplication und Division complexer Zahlen in der reducierten Form.

§. 303. 1. **Multiplication.**

$r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) . r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$

$r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) =$

$r_1 r_2 \{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)\} =$

$r_1 r_2 \{\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)\}.$

Das Product zweier complexer Zahlen ist eine complexe Zahl, deren Modul gleich ist dem Producte der Moduln und deren Argument gleich ist der Summe der Argumente der Factoren.

Zusatz. Multipliciert man das erhaltene Product neuerdings mit einer complexen Zahl entsprechend der abgeleiteten Regel, so ergibt sich, dass das Gesetz für eine beliebige Anzahl von Factoren Giltigkeit hat.

2. **Division.** Aus 1) folgt:

$r_1 r_2 \{\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)\} : r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$

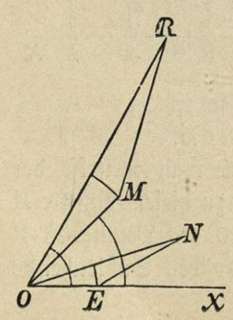
Setzt man $r_1 r_2 = r$ und $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$, so ist $r_2 = \frac{r}{r_1}$ und $\varphi_2 = \varphi - \varphi_1$;

somit $r (\cos \varphi + i \sin \varphi) : r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = \frac{r}{r_1} \{\cos (\varphi - \varphi_1) +$
$i \sin (\varphi - \varphi_1)\}.$

Der Quotient zweier complexer Zahlen ist eine complexe Zahl, deren Modul gleich ist dem Quotienten der Moduln und deren Argument gleich ist der Differenz der Argumente des Dividends und des Divisors.

Graphische Multiplication und Division complexer Zahlen.

§. 304. 1. Es liegt nach §. 303 die Aufgabe vor, mittelst der Polarcoordinaten zweier gegebener Punkte M (r_1, φ_1) und N (r_2, φ_2) einen Punkt zu construieren, dessen Radiusvector $r = r_1 r_2$ und dessen Polarwinkel $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ist.



Zu diesem Zwecke trägt man auf der Polarachse die Strecke OE = 1 auf, verbindet N mit E und construiert ein zu ONE ähnliches Dreieck, in welchem OM die zu OE homologe Seite ist. Man construiert also $\sphericalangle$ MOR = $\sphericalangle$ NOE = φ_2 und $\sphericalangle$ OMR = $\sphericalangle$ OEN. Somit ist OR zu ON homolog. OR : ON = OM : OE oder OR : $r_2 = r_1 : 1$ also OR = $r_1 . r_2$ und $\sphericalangle$ XOR = $\sphericalangle$ XOM + $\sphericalangle$ MOR = $\varphi_1 + \varphi_2$, demnach ist R der dem Producte entsprechende Punkt.

2. Ist in der bezüglichen Figur $R(r, \varphi)$ der dem Dividend und $M(r_1, \varphi_1)$ der dem Divisor entsprechende Punkt, so gelangt man zu jenem Punkte, welcher dem Quotienten entspricht, indem man ein dem Dreiecke OMR ähnliches Dreieck OEN so construiert, dass die mit OM homologe Seite OE der Einheit gleich ist. Dann ergibt sich $ON : OR = OE : OM$ oder $ON : r = 1 : r_1$ also $ON = \frac{r}{r_1}$ und $\sphericalangle XON = \sphericalangle XOR - \sphericalangle XOM = \varphi - \varphi_1$, demnach ist nach §. 303, 2 N der dem Quotienten entsprechende Punkt.

Potenzieren und Radicieren einer complexen Zahl in der reducierten Form.

§. 305. 1. Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo der Exponent eine ganze positive Zahl ist.

Setzt man in der in §. 303, 1 gewonnenen Gleichung

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \, . \, r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') \, . \, r''(\cos\varphi'' + i\sin\varphi'') \ldots$$
$$= r r' r'' \ldots \{\cos(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots) + i\sin(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots)\}$$

$r = r' = r'' = \ldots$, $\varphi = \varphi' = \varphi'' \ldots$ und die Anzahl der Factoren $= n$, so geht die Gleichung in die folgende über:

$$\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \ldots 1).$$

Diese Gleichung ist unter dem Namen der Moivre'schen Binomialformel bekannt; sie enthält den Satz:

Die nte Potenz einer complexen Zahl ist wieder eine complexe Zahl, deren Modul gleich ist der nten Potenz des Moduls der Basis und deren Argument gleich ist dem nfachen Argumente der Basis.

2. Setzt man in der Gleichung 1)

$$r^n = r_1 \qquad \text{und} \qquad n\varphi = \varphi_1, \text{ daher}$$
$$r = \sqrt[n]{r_1} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \frac{\varphi_1}{n}$$

so ergibt sich

$$\left[\sqrt[n]{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1}{n} + i\sin\frac{\varphi_1}{n}\right)\right]^n = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

somit

$$\sqrt[n]{\left[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\right]} = \sqrt[n]{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1}{n} + i\sin\frac{\varphi_1}{n}\right).$$

Wird hier φ_1 durch $\varphi_1 + 2k\pi$ ersetzt, wo k irgend eine ganze Zahl, die 0 mit eingeschlossen, bedeutet, so nimmt die Gleichung, da $\sin(\varphi_1 + 2k\pi) = \sin\varphi_1$ und $\cos(\varphi_1 + 2k\pi) = \cos\varphi_1$ ist, folgende Gestalt an:

$$\sqrt[n]{\left[r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\right]} = \sqrt[n]{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n}\right) \ldots 2),$$

wodurch die nte Wurzel aus einer complexen Zahl dargestellt wird.

Substituiert man für k nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... $n-1$, so erhält man aus der Gleichung 2), da die Winkel $\frac{\varphi_1}{n}$, $\frac{\varphi_1+2\pi}{n}$, $\frac{\varphi_1+4\pi}{n}$, .. nicht um 2π, sondern um $\frac{2\pi}{n}$ differieren und daher nie gleichzeitig gleiche Sinus und gleiche Cosinus haben können, n verschiedene Werte. Außer diesen aber kann die obige nte Wurzel keine anderen Werte annehmen. Denn jede für k gesetzte Zahl, die in der Reihe 0, 1, 2, .. $n-1$ nicht enthalten ist, läßst sich durch $k=\alpha n+\beta$ ausdrücken, wo α irgend eine von 0 verschiedene ganze Zahl, β aber irgend eine Zahl der obigen Reihe bedeutet. Durch diese Substitution geht $\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}$ über in $\frac{\varphi_1+2\beta\pi}{n}+2\alpha\pi$, welcher Winkel jedoch gleichen Sinus und gleichen Cosinus hat mit dem Winkel $\frac{\varphi_1+2\beta\pi}{n}$, der schon einmal durch die Substitution $k=\beta$ hervorgebracht wurde.

Die nte Wurzel aus einer complexen Zahl hat demnach n verschiedene Werte.

Folgerungen. a) Setzt man in der Gleichung 2) $r_1=1$ und $\varphi_1=0$, so erhält man

$$\sqrt[n]{+1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

woraus hervorgeht, dafs $\sqrt[n]{+1}$ n verschiedene Werte hat. Damit einer derselben reell werde, mufs $\sin\frac{2k\pi}{n}=0$ sein, was aber, da k nicht größer als $n-1$ wird, nur für $k=0$ oder $k=\frac{n}{2}$ stattfinden kann. Der zweite Wert ist für ein ungerades n nicht möglich. $\sqrt[n]{+1}$ hat also, wenn n gerade ist, zwei reelle Werte $+1$ und -1, und wenn n ungerade ist, nur einen reellen Wert $+1$; die übrigen Werte sind imaginär.

b) Setzt man in der Gleichung 2) $r_1=1$ und $\varphi_1=\pi$, so ergibt sich

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n},$$

welcher Ausdruck n verschiedene Werte liefert. Damit einer derselben reell werde, mufs $\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}=0$ sein, was nur für $k=\frac{n-1}{2}$ möglich ist. Von den n Werten ist daher für ein ungerades n ein einziger, nämlich -1, reell; für ein gerades n sind alle Werte imaginär.

c) Da $\sqrt[n]{\pm a}=\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{\pm 1}$ ist, so folgt, mit Rücksicht auf die Vieldeutigkeit von $\sqrt[n]{\pm 1}$, dafs der nten Wurzel einer jeden positiven oder negativen Zahl n verschiedene Werte zukommen, welche erhalten werden, indem man die absolute Wurzel $\sqrt[n]{a}$ mit allen Werten von $\sqrt[n]{\pm 1}$ multipliciert

Aufgaben-Sammlung.

1. Anwendung der Klammern.

1. Analysiere die folgenden Ausdrücke und berechne dieselben für $a = 50$, $b = 10$, $c = 15$, $d = 20$:

1) $a - b + (c + d)$; 2) $a - (b + c) + d$;
3) $a - (b + c + d)$; 4) $(a - b) + (c + d)$.

2. Ebenso für $a = 5$, $b = 8$, $c = 3$:

1) $a + b . b - c$; 2) $(a + b) . b - c$;
3) $a + b . (b - c)$; 4) $(a + b) . (b - c)$.

3. Ebenso für $a = 120$, $b = 20$, $c = 2$:

1) $a b c$; 2) $a . (b c)$;
3) $a : b : c$; 4) $a : (b : c)$;
5) $(a : b) c$; 6) $a : (b c)$.

Schreibe 3), 4), 5) mit einmaliger Anwendung des Bruchstriches.

4. Substituiere in den folgenden Ausdrücken $x = a + b$ und $y = a - b$:

1) $3x - xy - y$; 2) $3x - y(x - 1)$;
3) $x(3 - y) - y$; 4) $x(x - y) - y(x + y)$.

5. Berechne: 1) $5.10 - 2.3 + 1$; 2) $5.(10 - 2.3 + 1)$;
3) $5.10 - 2.(3 + 1)$; 4) $5.10 - (2.3 + 1)$.

6. Berechne:

1) $360 - 3.12 - 5.2 - 1$; 2) $(360 - 3).12 - 5.(2 - 1)$;
3) $360 - (3.12 - 5.2 - 1)$; 4) $360 - 3.[12 - 5.(2 - 1)]$;
5) $(360 - 3.12 - 5).2 - 1$; 6) $360 - 3.(12 - 5.2 - 1)$.

7. Berechne: 1) $(6 + 54) : (6 - 3)$; 2) $6 + 54 : 6 - 3$;
3) $6 + 54 : (6 - 3)$; 4) $(6 + 54) : 6 - 3$.

8. Berechne: 1) $(10.4) : 2$; 2) $10.(4 : 2)$;
3) $25 : [5.(9 - 4)]$; 4) $(25 : 5).(9 - 4)$.

9. Schreibe nieder:

1) a ist um die Summe aus b und c zu vermindern. 2) Die Summe von a und b ist zu vermindern um die Differenz von a und b. 3) Die dreifache Summe von a und b ist durch b zu dividieren. 4) Das Product von a und b ist um den Quotienten aus a durch b zu vermehren. 5) a ist durch den Quotienten aus b durch c zu dividieren.

2. Addition mit absoluten ganzen Zahlen.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}; \qquad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

1. Addiere auf kürzeste Weise:
1) $998 + 357 + 2$; 2) $98 + 75 + 2 + 25$;
3) $95 + 96 + 97 + 3 + 4 + 5$; 4) $9997 + 7632 + 3$.

2. Wie addiert man beim Kopfrechnen zu 217 die Zahl 47? Lehrsatz?

3. Man soll zu 400 zuerst 80, zum Resultate 15 und dann noch 5 addieren. Wie kann man das Resultat kürzer berechnen? Lehrsatz?

4. Erläutere das Verfahren beim Addieren mehrnamiger Zahlen, z. B. $3^0 15' + 8^0 7'$, an der Aufgabe $(a + b) + (c + d)$.

5. Wie addiert man gleichartige aber verschieden benannte Zahlen, z. B. $5\,m + 3\,cm$?

6. $(2a + 3b + 4c) + 3a$. **7.** $[(7p + 5q) + 3p] + 5q$.

8. $2p + 3q + 5p + 3q + q$. **9.** $m + 6m + 3n + 7m + 9n$.

10. $7m + [3m + (2m + 8n)]$. Probe für $m = 1$, $n = 2$.

Die Probe besteht darin, dass man die besonderen Zahlen in dem gegebenen Ausdrucke substituiert und die Klammern durch Vereinigung der in ihnen stehenden Zahlen (nicht durch Auflösung) von innen angefangen verschwinden läßt. Das so erhaltene Resultat muß mit jenem übereinstimmen, welches man durch Substitution in dem Resultate der vorausgegangenen Rechnung in allgemeinen Zahlen erhalten hat. Z. B.

a) $7 + [3 + (2 + 16)] = 7 + (3 + 18) = 7 + 21 = 28$.
b) Resultat: $12m + 8n$. Subst. $12 + 16 = 28$.

11. $3a + [7b + (5a + b)]$. Probe für $a = 10$, $b = 10$.

12. $5p + [(7p + 8q) + 6q]$. Probe für $p = 1$, $q = 1$.

13. $[15x + \{5x + (7y + x)\}] + 2y$. Probe für $x = 4$, $y = 5$.

14. $\{(3a + 4b) + 2c\} + \{6a + (4b + 5c)\}$.

15. $\{(2x + 3y) + (5x + 2y)\} + [\{4x + (5x + y)\} + 6y]$.

16. Verbinde durch Addition:

1) $a > b$	2) $5 > 3$	3) $a > b$
$5 = 5$;	$a = a$;	$5 > 4$.

---

3. Subtraction mit absoluten ganzen Zahlen.

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}; \qquad \mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c};$$
$$\mathbf{a} - (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c};$$
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{n}) - (\mathbf{b} + \mathbf{n}) = (\mathbf{a} - \mathbf{n}) - (\mathbf{b} - \mathbf{n}).$$

Berechne aus den folgenden Gleichungen x auf Grund der Erklärung und der Folgesätze in §. 15 und 16:

1. a) $x + 5 = 12$; b) $x + 3a = 5a$.

2. a) $36 - x = 10$; b) $5a - x = a$.

3. a) $x - 36 = 10$; b) $x - 5a = a$.

Berechne ebenso zuerst den Ausdruck, in welchem x vorkommt, und sodann in gleicher Weise x selbst:

4. a) $30-(x+4)=10$; b) $30-(x-4)=10$.

5. a) $(x+4)-30=10$; b) $(x-4)-30=10$.

6. Wie lauten die beiden Umkehrungen zu $ma+na=(m+n)a$?

7. Welche Gleichungen ergeben sich nach §. 16, 1 und 2 aus $(a+1)-2=a-1$?

8. $(9m+2n)-6m$.

9. $(7m-3a)+2a$.

10. $[(3x+5)+2x]-4x$.

11. $3m+9m+m-5m$.

12. $(8x-4y)+7x$.

13. $[(5z-7)+3z]+4$.

14. $(3a-4)-6$.

15. $(16y-8x)-8y$.

16. $[(5x-2)-2x]-3$.

17. $5a+7b-2b-4a$.

18. $12-(4+m)$.

19. $9y-(3x+7y)$.

20. $(6x+4y)-(3x+2y)$.

21. $5m-[(2m+3a)+2m]$.

22. $6+(n-4)$.

23. $x+(8x-4a)$.

24. $7a+(3a-2b)$.

25. $15m+[(4m-3)+2]$.

26. $5y-(8z-3y)$.

27. $(m+n)-[m-(a-n)]$.

28. $(2x-4)-(x-1)$: Probe für $x=3$.

29. $7a+(8a-2)+(9a-4)$. Probe für $a=6$.

30. $[x-(m+n)]+[x-(m+p)]+[x-(n+p)]$. Probe für $x=20$, $m=1$, $n=2$, $p=3$.

31. $a-\{b-[c-(a-b)]\}$. Probe für $a=10$, $b=8$, $c=9$.

32.
$$\begin{array}{l} 5a-3b \\ 2a-\;\;b \\ -\;+ \\ \hline \end{array}$$

33.
$$\begin{array}{l} 7b-3c \\ 2b-3c. \\ \hline \end{array}$$

34.
$$\begin{array}{r} 17x-15y \\ 8x-\;\;9y \\ \hline \end{array}$$

35.
$$\begin{array}{r} 20m-27n+12p \\ 15m-\;\;\;\;n+12p \\ \hline \end{array}$$

36. $(17p+15q-13r-11s)-(5p-6q-7r+8s)$.

37. $(5a+2b-3c)-(2a-3b+5c)-(a-2b-4c)$.

38. $(3x-5y-7z)+(7x+4y-3z)-(6x-3y+10z)$.

39. $7a-(3c-6b)-(6a-3c)-3b+(3a-8c)$.

40. $(8m-5y)+[(2y-7m)-(y-x)]$.

41. $(x+y)-[x-\{a-(y-m)\}]$.

42. $2x-[(3a+4x)-(4x-1)]-(x-2a-2)$. Probe für $x=20$, $a=5$.

43. $(8m-5x)-(2m-3n-4x)+[(3x-2n)-(4m+3n)]$.

Berechne die folgenden Ausdrücke und mache die Probe für $a=4, b=3$:

44. $(8a+7b)-(5a-4b)-(2a-b)$;

45. $8a+(7b-5a)-\{(4b-2a)-b\}$;

46. $8a+(7b-5a)-\{4b-(2a-b)\}$;

47. $(8a+7b)-\{5a-(4b-2a)-b\}$.

Bestimme für $X = 4x - (3y + 2z)$, $Y = 2x + (4y - 3z)$ und $Z = x - (2y - 4z)$ die Ausdrücke:

48. $X + (Y - Z)$; **49.** $X - (Y + Z)$; **50.** $X - (Y - Z)$

Bestimme folgende Ausdrücke:

51. $A + \{B - (C + D)\}$; **52.** $A - \{B + (C - D)\}$;

53. $A + \{B - (C - D)\}$; **54.** $A - \{B - (C - D)\}$;

wenn $A = 6a - (2b + 3c)$, $B = 3a + (3b - 4c)$,
$C = 2a - (b + c)$, $D = a - (4b - 2c)$ ist.

55. Welche Zahl muss man zu $7m - (3n - 1)$ addieren, um $5m + 5n$ zu erhalten?

56. Welche Zahl muss man von $8a - 4b$ subtrahieren, um $2a - 2b - 2$ zu erhalten?

57. Von welcher Zahl muss man $8a - 4b$ subtrahieren, um $2a - 2b - 2$ zu erhalten?

58. Verwandle die folgenden Ausdrücke auf doppelte Weise in Binome mit unverändertem ersten Gliede:

a) $x - 3y + 2z$; b) $3a - 4b - 2c + 3$;

c) $7a - 5b + 3c - d$; d) $a - 2b + 3c + 4d + e$.

59. Verwandle $3a - (b + c)$ in eine Differenz mit dem Minuend
a) $4a$, b) $2a$, c) $3a + b$, d) $3a - 1$, e) $3a + 1$.

60. Wie subtrahiert man beim Kopfrechnen die Zahl 46? Lehrsatz?

61. Berechne nach $a - (b - c) = ?$
a) $735 - 99$; b) $7364 - 997$; c) $18756 - 9990$.

62. Erläutere die Subtraction 19 *m* 87 *cm* — 5 *m* 43 *cm* an der Formel $(a + b) - (c + d)$.

63. Verbinde durch Subtraction:

1) $a = b$, $5 > 4$; 2) $a > b$, $4 = 4$; 3) $a > b$, $5 < 6$.

64. Ebenso: 1) $7 > 4$, $5 > 2$; 2) $7 > 4$, $5 > 1$; 3) $7 > 4$, $5 > 3$.

---

4. Addition und Subtraction mit algebraischen ganzen Zahlen.

1. Stelle die folgenden Differenzen mit dem Minuend 0 dar.
1) $9 - 11$; 2) $a - (a + 7)$; 3) $(a - n) - a$.

2. $(+8) - (-5) + (-3) - (+7) + (+1)$.

3. $(+7a) + (+3a)$. **4.** $(-6m) + (+3m)$.

5. $(+5n) + (-5n)$. **6.** $(-8x) + (-2x)$.

Schreibe 3) — 6) einfacher (§. 31).

7. $(+2x) - (+x)$. **8.** $(-6a) - (+4a)$.

9. $(+6m) - (-3m)$. **10.** $(-4s) - (-8s)$.

11. $(-4x)+(-2x)-(-x)+(+9x)$.
12. Berechne $x-(x-2)+(x-4)-(x-6)$ für $x=4$.
13. $(x+y-z)-(x-y+z)+(-x+y+z)-(-x-y+z)$.
Probe für $x=3$, $y=1$, $z=-2$.
14. $[(a-b)-b]-(b-a)$. Probe für $a=-7$, $b=-2$.
15. $5m-[3m-(-n+m)]$. Probe für $m=1$, $n=-1$.
16. $x+[(x-y)-(y-x)]$. Probe für $x=1$, $y=-10$.
17. $x-[(x+z)-(-x+z)]$. Probe für $x=-1$, $z=-5$.
18. $2a+3b-\{2a-[-2a+3b-\{(2a+2b)-(2a-3b)\}]\}$.
19. $[\{(a-b)+(b-c)\}-\{c-(d-e)\}]-[-c+\{d+(-c-e)\}]$.
Probe für $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$.
20. $[6x+7y-\{-6x+7y-[(6x-7y)-(6x+7y)-6x]\}]$
$-[6x-\{(6x-7y)-(6x+7y)\}]$.
21. Um wie viel ist $-a$ kleiner als $+a$, $+5$ größer als -2?
22. Welche ganzen Zahlen (mit x bezeichnet) genügen der folgenden Bedingung?
a) $-2<x<+1$; b) $-3\leqq x<0$; c) $-8<x\leqq-5$.
23. Welche Werte hat man für x zu nehmen, damit jeder der folgenden Ausdrücke a) Null, b) negativ werde?
1) $x-3$; 2) $x+5$; 3) $x-a$; 4) $x+a$;
5) $x+a-b$; 6) $x-a-b$; 7) $a-x$; 8) $a-b-x$;
24. Verbinde durch Subtraction:
1) $-5>-8$ 2) $a=a$ 3) $a>b$
$-a=-a$; $-5<2$; $-2<2$.

---

5. Multiplication mit absoluten ganzen Zahlen.

$$\mathbf{a.b=b.a.;\ (a\,b)\,c=(a\,c).b=a.(b\,c);\ a^m.a^n=a^{m+n}}.$$

1. Bilde 1) aus 2.3.5, 2) aus a.b.c auf sechs verschiedene Arten ein Product von zwei Factoren.
2. Berechne auf kürzeste Weise: a) (5.8.7).(125.2); b) 4.9.8.25.125; c) 25.125.32.13.
3. Wie kann man eine Zahl mit $56=7.8$ multiplicieren? Lehrsatz?

4. $a^3.4a^2$. 5. $8xy.7x$. 6. $2y^3.4y^2$.
7. $7a^2x.ax^2$. 8. $4z^3.5bz^2$. 9. $6m^3n^4.5m^3n^2$.
10. $a.2a.3a$. 11. $xy.xy.xy$. 12. $z^2.2z^3.3z$.
13. $a^3b.5a^2b^2.8ab^3$. 14. $x^3.3x^2y.3xy^2.y^3$.
15. $3ax^{n+1}.4a^2x^{2n-2}.5a^3x^{3n+7}$.
16. $2a(a+b).3a^3(a+b)^2.3a^3(a+b)^2$.

$(a \pm b) . m = a m \pm b m; \; a (m \pm n) = a m \pm a n.$

17. $(a + 1) . 5.$ **18.** $(x + 5) . 4 - 2x.$ **19.** $[(x + 1) x + x] x + 1.$
20. $(a^2 b + a b^2) . a b.$ **21.** $(6m + 5m^2) . 2m.$ **22.** $(2a^3 + a^2) 3a - (a + 1) a^3.$
23. $(m - 1) . m.$ **24.** $8x - (7 - x) . 3.$ **25.** $[(x - 3) x - 5x] x - 7.$
26. $(8xy^3 + 5x^2 y^2 - 3x^3 y) . 12x^2 y^2.$
27. $(3z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 4z) . 6z^2.$
28. $(4m^3 - 3m^2 n + 2mn^2 - n^3) . 3m^2 n^2.$
29. $(3x^2 + 5x + 7) . 5x - (4x^2 - 6x - 8) . 3x.$
30. $6 . (m + n) - 5m.$ **31.** $12a^2 . (3x^2 + 2y^2).$ **32.** $3ax . (a^2 + ax + x^2).$
33. $a . (b - 1).$ **34.** $5x^2 . (3x^2 - 8xy + 2y^2).$
35. $5 . (z - 2) + 7.$ **36.** $x^3 . (x^3 - x^2 + x - 1).$
37. $4a^2 b^4 . (5a^2 b^3 - 7a^3 b^2 - 5a^4 b - 3a^5).$
38. $7x^2 y . (2x^2 y - 2xy^2 - 3xz^2 + 3y^2 z) + x^2 y^2 . (14xy - 21yz).$
39. $\{a^2 (3a - 2b) - b^2 (2a - 3b) + 2ab (a + b)\} . 4a^2 b^2.$
Probe für $a = 9$, $b = 2$.
40. Berechne mit Probe für $m = 20$, $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$:
a) $m - (x . y + z)$; c) $(m - x) y + z$;
b) $m - x (y + z)$; d) $(m - x . y) + z$.
41. Um wieviel wird das Product xy größer (kleiner), a) wenn x um 1 vermehrt (vermindert) wird, b) wenn y um z vermehrt (vermindert) wird?
42. Berechne nach der Formel $(a - b) . c = ?$ a) $98 . 7$; b) $999 . 17$.
43. $4 (a + 1) - a + 7 (a - 1).$ Probe für $a = 2$.
44. $3 (a + b + 1) - 2b - 2b (b + 3).$ Probe für $a = 3$, $b = 2$.
45. $a^2 - (a + b - 1) a - (a - b + 1) b.$ Probe für $a = 10$, $b = 5$.
46. $a^2 (a - 1) - b (b^2 - 1) - (a^2 + b^2).$ Probe für $a = 9$, $b = 1$.
47. $a^3 - a^2 b - ab (a - 1) - (ab - 1).$ Probe für $a = 1$, $b = 2$.
48. $a [b (c + d) - c] - ab (c + d) - (c + abc - d).$

$a m \pm b m = (a \pm b) . m.$

49. $4a + 4b.$ **50.** $5x^2 + 9x^2.$ **51.** $(a + m) x + (a - m) x.$
52. $m (b^2 - x^2) + n (b^2 - x^2).$ **53.** $6m + 6n + 6p.$
54. $a . 10^m - b . 10^m.$ **55.** $15ay^2 - 9ay^2.$ **56.** $ax + ay - a.$
57. $a (3x + 2) - 3b (3x + 2) + 2a (3x + 2).$
58. $(3a - 4b) (2x - y) - (a + b) (2x - y) - 2x + y.$
59. $2m (x + y) - 3mx - 4m (y - 1).$
60. $a^3 b^8 - a^8 b^3.$ **61.** $a^3 b + a^2 b^2 + ab^3.$
62. $12a^4 b^2 - 6a^3 b^3 + 18a^2 b^4.$ **63.** $6a^3 - 12a^4 + 24a^5.$
64. $am + bm - an - bn.$
Lösung: $m (a + b) - n (a + b) = (a + b) (m - n).$
65. $ac + 3c + ad + 3d.$ **66.** $ab + b - ac - c.$

67. $ab + b + a + 1$. 68. $25ab - 20a + 15b - 12$.
69. $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$. 70. $12x^3 - 9x^2y - 16xy^2 + 12y^3$

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})\,(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a\,c} \pm \mathbf{b\,c} + \mathbf{a\,d} \pm \mathbf{b\,d}.$$
$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})\,(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathbf{a\,c} \pm \mathbf{b\,c} - \mathbf{a\,d} \mp \mathbf{b\,d}.$$

71. $(5x + 3a)\,(5x + 4a)$. 72. $(a^m + b^m)\,(a^n - b^n)$.
73. $(3x^2 + 2y^2)\,(4x^2 + 5y^2)$. 74. $(ax^m - by^n)\,(bx^n + ay^m)$.
75. $(2a^2 + 3b^2)\,(5a^2 - 4b^2) - (10a^4 - 12b^4)$. Probe für $a = 3$, $b = 2$.
76. $(p + 2)^2$. 77. $(a - 1)^2$. 78. $(3a - 4)^2$.
79. $(10m + n)^2$. 80. $(2x + y)^2$. 81. $(x - 2y)^2$.
82. $(3m - 2n)^2$. 83. $(3a^2 - 4b^2)^2$. 84. $(5p^3 - 3q^3)^2$.
85. $(x + 3)^2 - 6x$. Pr. f. $x = 3$. 86. $(y - 4)^2 + 8y$. Pr. f. $y = 6$.
87. $(x + a)^2 + (x - a)^2$. 88. $(x + a)^2 - (x - a)^2$.
89. $(ax^2 + by^2)^2 - 2abx^2y^2$. 90. $(a^2x - b^2y)^2 + (a^2x + b^2y)^2$.
91. $(x + a)\,(x - a) + a^2$. 92. $y^2 - (y + 2)\,(y - 2)$.
93. $(15a + 9b)\,(15a - 9b)$. 94. $(a^m + b^n)\,(a^m - b^n)$.
95. $(3a^2 - 2b^2)\,(3a^2 + 2b^2)$. 96. $(5x^3 + 3x^2y)\,(5x^3 - 3x^2y)$.
97. $(mx^3 + ny^3)\,(mx^3 - ny^3) + 2ny^3\,(mx^3 + ny^3)$.
98. $(3a^2 + 5b^2)\,(3a^2 - 5b^2) - (3a^2 + 7b^2)\,(2a^2 - 4b^2)$.
99. $(5x + a)\,(2x - a) - (4x - 3a)\,(7x + a) + (3x - a)\,(6x + 2a)$.
100. $4a^2 + 3b^2 - (a - 2b)\,(2a + b) - (a + b)\,a$. Pr. f. $a = 6$, $b = 2$.
101. $(x^2 - 2xy)\,x - (x^2 - 2y^2)\,(2x + y) - (x^2 + 2y^2)\,y$.
102. Berechne nach der Formel $(a \pm b)\,(c \pm d)$ a) $98 . 999$; b) $107 . 999$.

---

103. $(x^2 + xy + y^2)\,(x - y)$. 104. $(x^2 - xy + y^2)\,(x + y)$.
105. $(z^2 - 2z + 1)\,(6z + 3)$. 106. $(5y^2 + 6y - 7)\,(4y - 5)$.
107. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3)\,(a - 2b)$.
108. $(16x^4 + 8x^2y^2 + y^4)\,(4x^2 - y^2)$.
109. $(4a^4 - 12a^2b^3 + 9b^6)\,(2a^2 - 3b^3)$.
110. $(2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2)\,(x - 1)$.
111. $(a^2 + 2ab + b^2)\,(a + b) + (a^2 - 2ab + b^2)\,(a - b)$.
112. $(5x^2 + 4x - 3)\,(4x + 8) - (4x^2 - 3x - 6)\,(5x + 4)$.
113. $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)\,(a + 1)$. Probe für $a = 3$.
114. $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)\,(a - 1)$. Probe für $a = 3$.
115. $(a^3 - a^2 + a - 1)\,(a + 1)$. Probe für $a = 4$.
116. $(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)\,(a - 1)$. Probe für $a = 2$.
117. $(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)\,(x + y)$.
118. $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)\,(x - y)$.
119. $(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5)\,(x + y)$.
120. $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)\,(x - y)$.

Welche Gesetzmäßigkeit läßt sich in den Multiplicationen 113. bis 120. erkennen?

121. $(x^{5m} - x^{4m} + x^{3m} + x^{2m} + x^m - 1).(x^m + 1)$.
122. $(x+1)(x+2)(x+3)$. 123. $(x+3)(x-2)(x+4)$.
124. $(x+a)(x+b)(x+c)$.
125. $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.
126. $(a+b+c)^2$. 127. $(3x-2y+z)^2$.
128. $(y^2-4y+4)^2$. 129. $(ax^2+by^2+c)^2$.
130. $(2x+3y)^3$. 131. $(5x^2-1)^3$. 132. $(3x^3-5)^3$.
133. $(ax^2-by^2)^3$. 134. $(8a^2+7b^2)^3$. 135. $(ax^m-b^n)^3$.
136. $(3a^3-4a^2b+6ab^2-2b^3)(4a^2-3ab+b^2)$.
137. $(4x^3-3x^2+2x-1)(7x^3-5x^2+3x-1)$.
138. $(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)(a^3-2a^2b+2ab^2-b^3)$.
139. $(2a^2b-3ab^2-4b^3+5)(2a^2b-3ab^2+4b^3-5)$.
140. $(x^{4m}-2x^{3m}y^n+2x^{2m}y^{2n}-4x^my^{3n}+4y^{4n})(x^{2m}+2x^my^n+2y^{2n})$.
141. $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.
142. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$.
143. $(a+b+c)^2(a-b-c)(a+b-c)$.
144. $(a+b+c)^2(c-a-b)(a-b-c)$.
145. $(a^2-2ab+3b^2)(3a^2+ab-2b^2)(2a^3-3b^3)$.
146. $(a^2-4a-6)(a^2-4a+6)(a^2+4a-6)$.
147. $(4x^2-3x+2)(3x^2+2x-1)(x^2-2x-3)$.
148. $(a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2)$
$(a^2+2ab+2ac+b^2-2bc+c^2)$.
149. $[x^2+(a+b)x+(a^2+b^2)][x^2-(a-b)x+(a^2-b^2)]$.
150. $6x\{x-x[3x-(x-1)^2]-x(x+1)(x-1)\}-x$.
151. $[x^3-(x-1)^3][x^4-(x-1)^4]$. Probe für $x=3$.

Substituiere in den folgenden Ausdrücken für $A=5x-3y$, $B=2x-1$, $C=1-2y$ und berechne dann dieselben:

152. $2AB-3AC-BC$; 153. $(A^2-2BC)(B-C)$;
154. $AB-C^2$; 155. $(A^2-B^2)C-(B^2+C^2)A$.

---

6. Multiplication algebraischer Zahlen.

1. $8.(-3)-(-5).(-6)-9.(-2)+(-7).(-5)$.
2. $(7-9).(-2)-(8-10).(-3)-(-1-3).(-2).(-3)$.
3. $3ax.(-4ay).(-2bx).ab.(-5bx)$.
4. $a^2xy.(-mx^2).ny^2.(-bz^2).(-bmx).(-bny)$.
5. $2ax.(-6by)-(-8bx).(-ay)+(-3ab).(-7xy)$.
6. $a^{2m-4}b^{3n+2}.(-a^mb^{n-4})$. 7. $3bx^{2n}.(-4b^2x^{2n-2}).2bx^2$.
8. $(-2z)^3$. 9. $(-4xy)^3$. 10. $(-2x^2y)^4$.
11. $(-2x^2)^2.(-3x)^3.(-4)^4.(-5)^5.(-1)^6$.
12. Berechne den Ausdruck $x^2-6x-16$ für $x=+8$ und für $x=-2$.

13. $8x + (2x - 3y).(-4)$. **14.** $(7a^2 - 4b^2).(-2b^2) + 14a^2b^2$.
15. $(6x^2 - 5z^2)(-2xy^2z) + 3xy^2.[-3z^3 - 4x^2z]$.
16. $(5 - 7x + 6x^2).(-3x^2) + (9y^3 + 4x^2 - x)\,2x$.

Mache die Probe

17. zu Cap. 5, Aufg. 112 für $x = -2$. **18.** zu Cap. 5, Aufg. 113 für $a = -1$.
19. zu Cap. 5, Aufg. 114 für $a = -1$. **20.** zu Cap. 5, Aufg. 115 für $a = -3$.
21. zu Cap. 5, Aufg. 117 für $x = -2$, $y = -1$.
22. zu Cap. 5, Aufg. 122 a) für $x = -1$; b) für $x = -4$.
23. a) zu Cap. 5, Aufg. 141, b) zu Cap. 5, Aufg. 142, c) zu 5, 143, d) zu Cap. 5, Aufg. 144 für $a = -1$, $b = -2$, $c = -2$.
24. zu Cap. 5, Aufg. 149 für $x = -2$, $a = -1$, $b = -3$.
25. Für welche Werte von x werden die folgenden Ausdrücke a) gleich Null, b) negativ?
    1) $x(x+5)$; 2) $x(x-5)$; 3) $(x+5)(x+2)$;
    6) $(x+1)(x-2)$; 7) $(x-1)(x+2)$; 8) $(x-1)(x-2)$.
26. Setze in $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ für $b \ldots\ldots -b$.
27. Leite aus dem Resultate der Aufg. 5, 124 unmittelbar die Resultate der folgenden Aufgaben ab:
    a) $(x+a)(x-b)(x+c)$, b) $(x-a)(x+b)(x-c)$,
    c) $(x-a)(x-b)(x+c)$, d) $(x-a)(x-b)(x-c)$.

---

7. Division mit absoluten ganzen Zahlen.

$$ab : c = ?;\quad \frac{a}{b}.c = ?;\quad \frac{a}{b} : c = ?;\quad a : bc = ?$$

$$a.\frac{b}{c} = ?;\quad a : \frac{b}{c} = ?;\quad a^m : a^n = ?.$$

Berechne aus den folgenden Gleichungen x auf Grund der Definition und der Folgesätze in §§. 48 und 49:

1. a) $x.4 = 12$; b) $3ax = 6a^3$.
2. a) $\frac{x}{12} = 4$; b) $\frac{x}{4ab} = b$.
3. a) $\frac{12}{x} = 4$; b) $\frac{4ab}{x} = b$.

Berechne ebenso den Ausdruck, in welchem x vorkommt, und dann x selbst:

4. a) $\frac{x}{4}.7 = 56$; b) $\frac{x}{a}.b = 8ab^2$.
5. a) $\frac{5x}{9} = 15$; b) $\frac{xa}{b} = c$.
6. a) $\frac{5}{x}.4 = 20$; b) $\frac{a^2}{x}.b^2 = ab^2$.
7. a) $\frac{60}{5x} = 4$; b) $\frac{12ab}{cx} = a$.

8. a) $8x - 5 = 27$; b) $ax + ab = 5ab$.
9. a) $40 - 3x = 1$; b) $7a - 2x = a$.
10. a) $3(x - 2) = 15$; b) $a(x - b) = c$.
11. a) $\frac{x+4}{3} = 3$; b) $\frac{a-x}{b} = c$.
12. a) $\frac{10}{x+4} = 2$; b) $\frac{b}{x-a} = c$.
13. Vereinfache $\left(\frac{a}{b} + 1\right).b$. **14.** $\left(\frac{a}{b} - \frac{a-1}{b} + \frac{2a+3}{b}\right).b$.

---

15. $x^5 : x^3$. **16.** $a^4 : a$. **17.** $a^{m+n} : a^n$.
18. $15a : 5$. **19.** $2a(m-1) : a$. **20.** $50ab : 2a$.
21. $12x^6 : 3x^4$. **22.** $7a^2y^4 : ay^4$. **23.** $66a^9b^7 : 11a^7b^7c^2$.
24. $9a^2b^2x : 3abx$. **25.** $(x+y)(x-y) : (x-y)(y-x)$.
26. $28a^5m^2y^4 : 7a^4my^2$. **27.** $20a^mb^nx^p : 5a^{m-1}b^{n-2}x^{p-3}$.
28. $\frac{2a}{b}.c$. **29.** $\frac{x}{ny}.nx$. **30.** $\frac{a}{b}.bm$.
31. $\frac{2x}{ay}.a$. **32.** $\frac{a}{bc}.abc$. **33.** $\frac{2x}{5y}.5ax$.
34. $\frac{5a^2}{6bc^3}.3ab$. **35.** $\frac{3x^2}{4y^4}.4z^2$. **36.** $\frac{16ax^m}{25by^{2n}}.5y^n$.
37. $\frac{5ax}{7b} : x$. **38.** $\frac{mxy}{nz} : my$. **39.** $\frac{8ax}{5y} : 3b$.
40. $\frac{15a^3b^2}{4mn} : 5a^2b$. **41.** $\frac{6a^2x^4}{5by} : 3ax^2$. **42.** $\frac{4m^2n^3}{7p^2} : 2p^3$.
43. $(15x^2y^2 : 5x) : 3y$. Pr. f. $x = y = 2$. **44.** $(2m^3x^3 : ny^2) : 3n^2y$.
45. $mn.\frac{m}{np}$. **46.** $15x\frac{4y}{3x}$. **47.** $3x^2y.\frac{2z}{3xy}$.
48. $5my^3.\frac{8abx^2}{5my}$. **49.** $2a^2x.\frac{3x}{4a^2b^2}$. **50.** $4a^2bc^2.\frac{5x}{2a^2b^2c}$.
51. $x : \frac{x}{y}$. Pr. f. $x = 8, y = 2$. **52.** $y : \frac{x}{y}$. Pr. $x = 8,\ y = 4$.
53. $xy : \frac{x}{y}$. Pr. $x = 6, y = 3$. **54.** $axy : \frac{x}{z}$. **55.** $5a^4 : \frac{a^2}{b^2}$.
56. $6a^3m^2x : \frac{2ax}{y^2}$. **57.** $2m(m+1) : \frac{2m}{m-1}$. Pr. f. $m = 3$.
58. $b^2 + \left[(b^2 + c^2) : \frac{b^2+c^2}{a^2-b^2}\right]$. **59.** $15m^2n^3 : (6n^2 : 2nx^2)$.
60. $4a^3b^5m : (2ab^3 : m)$. **61.** $\frac{xy}{z} : \frac{xz}{y}$. **62.** $m^2n^2 : \frac{mp}{n} : \frac{np}{m}$.
63. $\frac{ab}{m} : \frac{an}{b}$. **64.** $\frac{6am}{25bn} : \frac{3a}{5b}$. **65.** $\frac{8m^3x}{5n^3y} : \frac{4mx}{ny}$.
66. $[(a+b)\ x^2 : (a-b)\ y^2] : [x : (a-b)\ y]$. Pr. $a = x = 2, b = y = 1$.
67. $\frac{x^2y^2}{z^2} : \left[\left\{\left(\frac{xy}{z^2} : \frac{yz}{x^2}\right) : \left(\frac{yz}{x^2} : \frac{y^2}{xz}\right)\right\} : \frac{y}{z}\right]$.

Weitere Aufgaben unter **11** von 127 ab.

$$\frac{a \pm b}{m} = \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m}$$; **Umkehrung.**

68. $(ax + bx) : x$. 69. $(8x + 8) : 8$.

70. $(a^2 b + ab^2) : ab$. 71. $(12a^3x^2 + 9ax^4) : 3ax^2$.

72. $\frac{x}{3a} + \frac{y}{3a}$. 73. $\frac{7m}{5} + \frac{3m}{5}$. 74. $\frac{3a}{n} + \frac{5a}{n}$.

75. $\frac{a+b}{n} + \frac{a-b}{n}$. 76. $\frac{2x+3}{x+1} + \frac{3x+2}{x+1}$.

77. $(am - bm) : m$. 78. $(mp - np) : p$.

79. $(5a^2x - 10ax^2) : 5ax$. 80. $(8x^3y^3 - 4x^2y^2z^2) : 4x^2y^2$.

81. $\frac{b}{4} - \frac{c}{4}$. 82. $\frac{6a}{m} - \frac{5a}{m}$. 83. $\frac{9x}{4a} - \frac{5x}{4a}$.

84. $\frac{a+b}{m} - \frac{a-b}{m}$. 85. $\frac{8y-3}{2y+1} - \frac{4y-5}{2y+1}$.

86. $\frac{3x-2y}{x-y} + \frac{4x+3y}{x-y} - \frac{3x+5y}{x-y}$. Probe für $x = 4$, $y = 2$.

87. $\frac{17x+12y}{x+y} - \frac{3x-7y}{x+y} + \frac{2x-3y}{x+y}$.

Weitere Aufgaben unter **11** von 47—126.

88. $(45am - 25bm + 35cm) : 5m$.

89. $(2a^3 - 6a^2b + 30ab^2) : 2a$. Probe für $a = 5$, $b = 2$.

90. $(5m^4x - 4m^3x^2 - 3m^2x^3) : m^2x$. Probe für $m = 3$, $x = 2$.

91. $(10x^4y^2z - 25x^3y^2z^2 - 15x^2y^2z^3 + 5xy^2z^4) : 5xy^2z$.

Division zweier Polynome.

92. $(6am - 12bm + 5an - 10bn) : (6m + 5n)$.

93. $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)$. 94. $(x^2 - 2xy + y^2) : (x - y)$.

95. $(4x^2 - 9y^2) : (2x + 3y)$. 96. $(16a^2 - b^2) : (4a - b)$.

97. $(x^{2m} - y^{2n}) : (x^m - y^n)$. 98. $(81m^8 - 16n^6) : (9m^4 + 4n^3)$.

99. $(a^6 + b^6) : (a + b)$. Pr. $a = 3$, $b = 2$.

100. $(a^6 + b^6) : (a - b)$. Pr. $a = 4$, $b = 1$.

101. $(a^6 - b^6) : (a + b)$. Pr. $a = 3$, $b = 2$.

102. $(a^6 - b^6) : (a - b)$. Pr. $a = 4$, $b = 1$.

103. $(a^5 + b^5) : (a + b)$. Pr. $a = 3$, $b = 2$.

104. $(a^5 - b^5) : (a - b)$. Pr. $a = 4$, $b = 1$.

Welche Gesetze herrschen in den Quotienten 99 bis 104? Wann läſst sich die Summe oder Differenz gleich hoher Potenzen zweier Zahlen durch die Summe oder Differenz dieser Zahlen ohne Rest theilen?

105. $(x^{2m} - y^{2m}) : (x + y)$. 106. $(x^{2m} - 1) : (x + 1)$.

107. $(x^{2m} - y^{2m}) : (x - y)$. 108. $(x^{2m} - 1) : (x - 1)$.

109. $(x^{2m+1} + y^{2m+1}) : (x + y)$. 110. $(x^{2m+1} + 1) : (x + 1)$.

111. $(x^{2m+1} - y^{2m+1}) : (x - y)$. 112. $(x^{2m+1} - 1) : (x - 1)$.

113. $(a^{7m} + 1) : (a^m + 1)$. 114. $(81x^8 - 16y^8) : (3x^2 - 2y^2)$.

In den Aufgaben 115 bis 122 sind die Quotienten ohne Ausführung der Division niederzuschreiben.

115. $(8a^3 + 1) : (2a + 1)$.
116. $(8 - 27a^6) : (2 - 3a^2)$.
117. $(16a^4 - 1) : (2a - 1)$.
118. $(81a^4 - 16b^4) : (3a + 2b)$.
119. $(a^5 + 1) : (a + 1)$.
120. $(32a^5b^5 - 1) : (2ab - 1)$.
121. $(a^6 + b^6) : (a^2 + b^2) = [(a^2)^3 + (b^2)^3] : (a^2 + b^2)$,
122. $(a^{10} + 1) : (a^2 + 1) = [(a^2)^5 + 1] : (a^2 + 1)$.

Stelle die Polynome 123—128 als Quotienten dar:

123. $x^2 + x + 1)$.
124. $x^2 - 2x + 4$.
125. $4x^4 + 2x^2 + 1$.
126. $8x^3 + 4x^2 + 2x + 1$.
127. $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$.
128. $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$.
129. $(14x^2 - 31x + 15) : (2x - 3)$.
130. $(1 - 2x + x^2 - 6x^4 + 8x^6) : (1 - 2x)$.
131. $(6x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 19x - 5) : (3x - 1)$.
132. $(3a^2x^2 - abxy - 2b^2y^2) : (ax - by)$.
133. $(20a^5 - 18a^4b + 4a^3b^2) : (4a^2 - 2ab)$.
134. $(4a^3 - 16a^2 + 7a + 20) : (2a - 5)$.
135. $(x^{3m} + x^{2m}y^n - x^my^{3n} - y^{4n}) : (x^{2m} - y^{3n})$.
136. $(x^3y^{3m} - x^{n+1}y^{2m+2} + x^{2n+2}y^{m+1} - x^{3n}y^3) : (x^2y^m - x^ny^2)$.
137. $(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) : (m^2 + 2mn + n^2)$.
138. $(6a^4 - 5a^3 + 4a^2 + 11a - 4) : (2a^2 - 3a + 4)$.
139. $(12x^4 - x^3y - 32x^2y^2 + xy^3 + 20y^4) : (4x^2 + xy - 5y^2)$.
140. $(2 - 7x + 16x^2 - 25x^3 + 24x^4 - 16x^5) : (2 - 3x + 4x^2)$.
141. $(15a^4 + 8a^3b - 41a^2b^2 + 10ab^3 + 8b^4) : (5a^2 + 6ab - 8b^2)$.
142. $(63y^8 + 10a^2y^6 - 155a^4y^4 + 10a^6y^2 + 63a^8)$
$: (9y^4 - 5a^2y^2 - 7a^4)$.
143. $(49a^6 + 6a^4 - 51a^2 - 25) : (7a^3 - 6a^2 + 3a - 5)$.
144. $(4x^6 + 15x^4y^2 + 10x^2y^4 - 9y^6) : (2x^3 + x^2y + 4xy^2 + 3y^3)$.
145. $(4 + 5a - 16a^2 - 4a^3 + 4a^4 - 5a^5 + 4a^6) : (4 - 3a + 2a^2 - a^3)$.
146. $(32 + 104x + 100x^2 + 26x^3 - 13x^4 + x^5)$
$: (8 + 12x + 6x^2 - x^3)$.
147. $(27a^6 - 33a^5b - 45a^4b^2 + 71a^3b^3 - 36ab^5 + 16b^6)$
$: (9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3)$.
148. $[\{x^3 + (a + b - c)x^2 + (ab - ac - bc)x - abc\} : (x + a)]$
$: (x - c)$
149. $\{(120 - 326x + 329x^2 - 146x^3 + 24x^4) : (4 - 3x)\}$
$: (6 - 7x + 2x^2)$.
150. $(2 - 7x + 16x^2 - 17x^3 + 12x^4) : \{(2 - 7x + 12x^2 - 9x^3) : (2 - 3x)\}$.

8. Division algebraischer Zahlen. (§. 61.)

1. $\frac{16}{-2} + \frac{-12}{-3} - \frac{-18}{6} + \frac{20}{-5}$.
2. $(-5) \cdot \frac{-18}{-15} + \frac{20}{(-4):(-2)} - \frac{(-4)\cdot(-8)\cdot(-9)}{(-2)\cdot(-6)}$.

Mache die Probe:

3. zu 7, 79 für $a = -2$, $x = -1$.
4. zu 7, 86 für $x = 2$, $y = 3$.
5. zu 7, 87 für $x = -3$, $y = 2$.
6. Berechne $a + \frac{a-7}{6} - \frac{3-2a}{-5}$ für $a = 19$.
7. Berechne $\frac{x-14}{5-x} - x + \frac{x-10}{7-x} - \frac{5(x-2)}{3(6-x)}$ für $x = 8$.
8. Ebenso $\frac{(x-1)^2}{(y-1)^3} - \frac{(x+1)^3}{(y+2)^3}$ für $x = -3$, $y = -1$.
9. Für welche Werte von x werden die folgenden Ausdrücke negativ? a) $(x+5):x$; b) $(x+7):(x+2)$; c) $(x-7):(x+2)$; d) $(x-7):(x-2)$.
10. Schreibe die folgenden Quotienten in anderer Form mit negativem und mit positivem Vorzeichen: a) $\frac{a-b}{-c-d}$; b) $\frac{a^2-2a-1}{1-3a-2a^2}$.
11. Vereinfache: a) $\frac{a^2-b^2}{b-a}$; b) $\frac{(a-b)(a^2-1)}{(b-a)(1-a)}$; c) $\frac{(-a)^3(a-2b+3c)}{(-a)(2b-a-3c)}$.
12. $(-288a^{3n+x-2}):9a^{2n-x+1}$. **13.** $(-25a^{m+n}b^p):(-5a^n b^{p-q})$.
14. $(32x^{m-2n+3p}y^{2m-n-p}):(-8x^{m-3n+4p}y^{m-n-2p})$.
15. $(24a^3b^3 - 15a^4b^2):(-3a^3b^2)$. Probe für $a = 3$, $b = -2$.
16. $(18am^2y^3 - 27bmy^2 + 36cy):(-3y)$.
17. $(6x^3 - 23x^2 + 24x - 10):(-2x+5)$. Probe für $x = 4$.
18. $(30x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 10x - 2):(-5x^2 + 3x - 1)$.
19. $(27 - 51x - 125x^2 - 2x^3 + 30x^4):(-3 + 8x + 6x^2)$.
20. $(1 - 15x + 72x^2 - 54x^3 - 405x^4 - 243x^5):(-1 + 6x + 9x^2)$.

---

9. Zahlensysteme. (§§ .63—66.)

1. Verwandle in dekadische Zahlen die folgenden Zahlen aus Zahlensystemen mit der neben ihnen angezeigten Grundzahl:

a) 211021220 [3]; b) 103223013 [4];
c) 852076 [9]; d) 58329 [12].

2. Verwandle die dekadische Zahl 2897 in eine Zahl a) des Systems [2], b) des Systems [5], c) des Systems [6], d) des Systems [8].

3. Verwandle

a) 520613 [7] in eine Zahl des Systems [4];
b) 12112012 [3] „ „ „ „ „ [8];
c) 110100101 [2] „ „ „ „ „ [5].

Führe folgende Rechnungsoperationen aus:

4. $240978 + 97477 + 504336 + 378264 + 615089$ [10].

5. $321402 + 114324 + 403122 + 213440 + 302113$ [5].

Mache hier, wie auch in den weiter folgenden Aufgaben, welche nichtdekadische Zahlen enthalten, die Probe, indem du die gegebenen Zahlen in das dekadische Zahlensystem verwandelst und dann die verlangte Operation ausführst.

6. $57016 + 124560 + 36425 + 61433 + 225347$ [8].

7. $2120221 + 1012112 + 1221012 + 2111021$ [3].

8. $875421 - 191086$ [10].
9. $3355770 - 886644$ [10].

10. $3122013 - 2033123$ [4].
11. $876543 - 234567$ [9].

12. $250764 . 2576$ [10].
13. $790475 . 9184$ [10].

14. $110101110 . 101101$ [2].
15. $2414302 . 32142$ [5].

16. $897715 : 91$ [10].
17. $5606912 : 752$ [10].

18. $777167 : 1145$ [8].
19. $3365241 : 354$ [7].

---

10. Theilbarkeit der Zahlen.

Suche das gr. g. Maß folgender Zahlen mittelst Kettendivision (§§. 69, 70, 79):

1. 637 und 4277;
2. 2091 und 1353;
3. 1404 und 8658;
4. 3552 und 5143;
5. 7774 und 3718;
6. 27671 und 21708;
7. 14539 und 25728;
8. 55660 und 66055;
9. 39215 und 73997;
10. 24955 und 338625;
11. 1701, 6426, 10521;
12. 120582, 145530, 167706.
13. $12a^2 + 7a + 1$ und $6a^2 + 11a + 3$;
14. $x^3 - 49x - 120$ und $x^2 + 10x + 25$;
15. $4m^3 - 16m^2 + 23m - 20$ und $6m^2 - 7m - 20$;
16. $a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3$ und $a^2 - 5ab + 4b^2$;
17. $x^6 + 6x^4 + 5x^2 - 12$ und $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6$;
18. $6y^3 + 16y^2 - 22y + 40$ und $9y^3 - 27y^2 + 35y - 25$;
19. $28a^4 + 10a^3 + 39a^2 + 7a + 15$ und $14a^3 - 37a^2 + 15a - 25$;
20. $3z^4 - 8z^3 + 11z^2 - 8z + 3$ und $2z^3 - 9z^2 + 9z - 7$;
21. $15x^4 + 10x^3y + 4x^2y^2 + 6xy^3 - 3y^4$ und $12x^3 + 38x^2y + 16xy^2 - 10y^3$;
22. $6x^5 - 4x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ und $4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5$;
23. $6x^4 - 5x^2 - 1$, $5x^3 - 4x - 1$ und $2x^2 - 2$;
24. $a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 4a + 7$, $a^4 - 2a^3 + 10a + 7$ und $a^3 - 5a^2 + 11a - 7$.

Theilbarkeit dekadischer Zahlen. (§. 71.)

Durch welche von den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 25, 100, 125, 1000 sind folgende Zahlen theilbar:

25. a) 312; b) 6225; c) 17280; d) 71016; e) 948656?

26. a) 720; b) 6472; c) 76450; d) 484572; e) 567000?

27. a) 534; b) 8625: c) 10692; d) 734520; e) 350496?

Zerlegung in Factoren. (§§. 72—77.)

28. Untersuche, ob die folgenden Zahlen Primzahlen sind:
a) 1001, b) 1003, c) 1007, d) 1009.

Zerlege folgende Zahlen in ihre Primfactoren:

29. a) 420; b) 504; c) 1260; d) 1664; e) 2025.

30. a) 2268; b) 3075; c) 3828; d) 5376; e) 10528.

31. a) $76a^3$; b) $66ab^2$; c) $26x^2y^2$; d) $72a^3b^2$; e) $60ax^2z^4$.

Suche alle Prim- und alle zusammengesetzten Factoren folgender Zahlen:

32. a) 48; b) 210; c) 315; d) 360; e) 810.

33. a) $18ab$; b) $36x^2$; c) $27mz^2$; d) $165xyz$; e) $114an^2x^3$.

Zerlege nach §. 77, 1. in zwei Factoren:

34. $18ab - 15ac$. **35.** $9x^2 - 24xy$.

36. $2a^4 - 4a^3 + 6a^2$. **37.** $ax^4y^2 + bx^3y^3 + cx^2y^4$.

38. $a^3b^2x - a^2b^2x^2 + ab^2x^3$. **39.** $5x^3z^2 - 15x^2z^3 + 25xz^4$.

40. $2x(a - 3b) - (a - 3b)$. **41.** $n(x - y) - x + y$.

42. $ax + ay + bx + by$. **43.** $ab - bx + a - x$.

44. $x^3 + x^2 + x + 1$. **45.** $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$.

46. $x^2 - y^2 + x + y$. **47.** $x^2 - x + y - y^2$.

48. $x^2 - 1 - (x + 1)^3$. **49.** $x - 1 - (x - 1)^3$.

50. $(a - b)(2a + 1) - (a - b)(2b + 3) - a + b$.

Zerlege nach §. 77, 2. in Factoren:

51. $9b^2 - 12b + 4$. **52.** $y^2 + 10y + 25$. **53.** $x^2 - 6xy + 9y^2$.

54. $5x^3 + 10x^2 + 5x$. **55.** $2x^4 - 4x^3 + 2x^2$. **56.** $16a^5 + 48a^4 + 36a^3$.

57. $4x^2 - 1$. **58.** $9a^2 - 16b^2$. **59.** $25x^2 - 16y^2$.

60. $6x^2 - 54a^2$. **61.** $a^2 - (b - c)^2$. **62.** $(b + c)^2 - a^2$.

63. $75a^3b^3 - 3ab$. **64.** $a^2 - 4ab + 4b^2 - 4$. **65.** $27a^3b - 48ab^3$.

66. $4(2x - 1)^2 - 9x^2$. **67.** $9a^2 - (2a - 3b)^2$.

68. $16(3a - 2b)^2 - 25(a - b)^2$. **69.** $25x^2 - 20xy + 4y^2 - 9z^2$.

70. $x^3 + 1$. **71.** $x^3 - 1$. **72.** $x^4 - 1$.

73. $x^5 + y^5$. **74.** $x^5 - y^5$. **75.** $x^6 - y^6$.

76. $27x^3 + 8$. **77.** $8x^3y^3 - 1$. **78.** $48a^4b^2 - 3b^6$.

79. $32x^5 + 1$. **80.** $64a^7b^7 - 2a^2b^2$. **81.** $x^6 + y^6$.

82. $x^{10} + y^{10}$. **83.** $x^8 - 1$. **84.** $x^{12} + y^{12}$.

Zerlege nach §. 77, 3. in zwei Factoren:

85. $x^2 + (a + b)x + ab$.
86. $x^2 + 7x + 10$.
87. $m^2 + 5mn + 6n^2$.
88. $x^2 + 2ax + (a^2 - b^2)$.
89. $x^2 - (a + b)x + ab$.
90. $a^2 - 4a + 3$.
91. $10y^2 - 7yz + z^2$.
92. $x^2 - 2ax + (a^2 - b^2)$.
93. $x^2 + (a - b)x - ab$.
94. $m^2 + m - 12$.
95. $a^2 + 2ab - 15b^2$.
96. $x^2 + 2bx - (a^2 - b^2)$.
97. $x^2 - (a - b)x - ab$.
98. $z^2 - 6z - 16$.
99. $b^2 - 4bc - 5c^2$.
100. $x^2 - 2bx - (a^2 - b^2)$.

Suche mittelst Zerlegung in Factoren das gr. g. Maß folgender Zahlen:

101. 84 und 308.
102. 360 und 680.
103. 108, 450 und 540.
104. 560, 620 und 760.
105. 693, 819 und 945.
106. 504, 756, 1260 und 1764.
107. $12acx$, $14a^2x$ und $16ax^2$.
108. $10x^2y^4$, $5x^3y^3$ und $20x^4y^2$.
109. $m^2 + 2mn + n^2$ und $m^2 - n^2$.
110. $a^2 - 2ab - 8b^2$ und $a^2 + 2ab - 3ab^2 - 6b^3$.
111. $x^4 - 10x^2y^2 + 16y^4$ und $x^4 + 2x^2y^2 - 80y^4$.
112. $8x^4y^2 - 32xy^4$, $12x^4y - 96xy^4$.
113. $12x^3y^2 - 12x^2y^3$, $18x^4y^2 - 18x^2y^4$, $24x^3y - 48x^2y^2 + 24xy^3$.
114. $a^4b^2 - a^2b^4$, $a^4 - a^2b^2$, $a^4 - a^3b$.
115. $8a^5b^2 - 8a^3b^4$, $4a^4b^2 - 8a^3b^3 + 4a^2b^4$.
116. $(2a + b)^2 - (a - b)^2$, $a^4 + 8ab^3$.

Suche mittelst Zerlegung in Factoren das kl. g. Vielfache der Zahlen:

117. 300 und 620.
118. 240 und 486.
119. 120, 168 und 182.
120. 105, 144 und 270.
121. 3, 4, 6, 10 und 25.
122. 2, 5, 9, 20, 21 und 24.
123. 4, 5, 6, 12, 18, 25, 70.
124. 10, 12, 14, 15, 16, 18, 21.
125. 4, 6, 7, 26, 35, 40, 56.
126. 8, 12, 16, 24, 32, 36, 256.
127. a, $2a^2$, $3ab^2$, $12abm$.
128. $6amn$, $10am^2n$, $5a^2n^2$.
129. m, $5m^2$, $3n$, $8mn$ und $15m(m - n)$.
130. $3x$, $x - 2$, $5(x + 2)$, $20(x^2 - 4)$ und $6(x + 2)^2$.
131. $a^2 - b^2$, $(a - b)^2$.
132. $a^2 - b^2$, $(a + b)^2$, $(a - b)^2$.
133. $4a^3 - a$, $8ab + 4b$, $16a^2b^2$.
134. $3x^3y - 3x^2y$, $2x^2y^2 + 2xy^2$, $4x^4 - 8x^3 + 4x^2$, $2x^3 - 4x^2 - 6x$.
135. $6x^2 - 3x$, $24x^4 - 6x^2$, $12x^5 - 12x^4 + 3x^3$.
136. $a - b$, $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$.
137. $(x - 1)^3$, $x^3 - 1$.

Weitere Aufgaben in der vorhergehenden Gruppe 107, 108, 112, 113, 114, 115 und 116.

Suche das kl. g. Vielfache folgender Zahlen mittelst des gr. g. M. (§. 81.):

137. 874 und 943; **138.** 561 und 1530;
139. 1716 und 2222; **140.** 6987 und 8083;
141. 816, 765, 697; **142.** 259, 3219, 7548.
143. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ und $2(x^2 - y^2)$;
144. $a^3 - 49a - 120$ und $a^2 + 10a + 25$;
145. $6x^3 + 13x^2 - 45x - 25$ und $x^3 + 2x^2 - 20x - 25$;
146. $a^4 + 3a^3 + 6a^2 + 5a + 3$ und $a^3 + 2a^2 + 2a + 1$;
147. $2a^5 - a^4 - 2a^3 - 2a^3 - 4a - 1$ und $2a^6 - a^5 - 5a^3 - 5a^2 - a$;
148. $21x^3 + 20x^2 - 3x - 2$, $6x^3 - 11x^2 - 12x + 5$ und $3x^3 - 10x^2 - 9x + 4$.

---

11. Gemeine Brüche.

Formänderung der Brüche. (§§. 91, 92.)

1. Bringe den Bruch $\frac{a-1}{a+1}$ a) auf den Zähler $a^2 - 1$; b) auf den Nenner $2a^3 - 2a$.
2. Erweitere den Bruch $\frac{x-2}{x+2}$ a) auf den Zähler $x^4 - 4x^2$; b) auf eben diesen Nenner.

Bringe folgende Brüche auf den kleinsten gemeinsamen Nenner:

3. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$. 4. $\frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{13}{20}, \frac{8}{15}, \frac{11}{12}$.
5. $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{7}, \frac{18}{35}, \frac{25}{56}$. 6. $\frac{1}{m}, \frac{5a}{3m^2}, \frac{3bc}{4m^3}, \frac{4def}{5m^4}$.
7. $\frac{1}{a}, \frac{2m}{3ab}, \frac{5n}{6ax}, \frac{3p}{10by}$. 8. $\frac{1}{2a}, \frac{3}{4a^2b}, \frac{5}{6a^3b}, \frac{7}{8a^2b^2}$.
9. $\frac{a-1}{a+1}, \frac{a-2}{a+2}, \frac{a-3}{a+3}$. 10. $\frac{y+1}{y-1}, \frac{y-1}{y+1}, \frac{y^2+1}{y^2-1}$.
11. $\frac{x+1}{x-1}, \frac{x^2+2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}$.
12. $\frac{1-a}{1+a}, \frac{1+a}{1-a}, \frac{1+a^2}{1-a^2}, \frac{1-2a+a^2}{1+2a+a^2}, \frac{1+2a+a^2}{1-2a+a^2}$.

Kürze folgende Brüche ab:

13. a) $\frac{45}{54}$; b) $\frac{114}{250}$; c) $\frac{840}{1020}$; d) $\frac{1824}{7008}$; e) $\frac{4096}{7424}$.
14. a) $\frac{5.12.18}{4.10.27}$; b) $\frac{6.12.20.28}{4.8.16.30}$; c) $\frac{6.21.24.36.75}{8.27.50.56.60}$.
15. a) $\frac{391}{989}$; b) $\frac{637}{819}$; c) $\frac{765}{5304}$; d) $\frac{2079}{7029}$; e) $\frac{9082}{67735}$.
16. Bestimme den Wert von $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$ für $n = 6$, dann für $n = 8$, und kürze die erhaltenen Brüche ab.

Kürze folgende Brüche ab:

17. a) $\frac{3abx}{12bmx}$; b) $\frac{12a^2x}{28ax^2}$; c) $\frac{15amx^3}{40bmx}$; d) $\frac{72mx^2y^3}{96nx^3y^2}$.

18. a) $\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$; b) $\frac{2m^2-m}{4m^2-1}$; c) $\frac{x-x^3}{x^2+x}$.

19. $\frac{9a+6b-3c}{12ax+8bx-4cx}$. **20.** $\frac{12x^3y^3-6x^2y^4}{8x^4y^2+4x^3y^3}$. **21.** $\frac{2a-ab-b+2}{3a+ab+b+3}$.

22. $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$. **23.** $\frac{1+m-2m^2}{1+3m+2m^2}$. **24.** $\frac{8a^2-6a+1}{16a^2-10a+1}$.

25. $\frac{m^2+6m-16}{m^2+5m-24}$. **26.** $\frac{x^2+3xy+2y^2}{x^2+6xy+5y^2}$. **27.** $\frac{a^2-8ax+15x^2}{a^2-11ax+30x^2}$.

28. $\frac{x^4+4x^3-5x+2}{x^3-x^2-3x+2}$. Pr. f. $x=3$. **29.** $\frac{2a^3-a^2+4a+7}{2a^4-15a^3+29a^2-48a+14}$.

30. $\frac{a^3+1}{a^2-1}$. Pr. f. $a=2$. **31.** $\frac{8a^3+1}{16a^4-1}$. Pr. f. $a=1$. **32.** $\frac{(1+x)^3}{1+x^3}$.

33. $\frac{x^4-y^4}{x^6-y^6}$. **34.** $\frac{x^4-y^4}{x^6+y^6}$. **35.** $\frac{x^4+2x^3+4x^2}{x^6-8x^3}$.

36. $\frac{a^5-8a^2b^3}{a^6-4a^4b^2}$. **37.** $\frac{x^8-16}{x^6+4x^2}$. Pr. f. $x=2$. **38.** $\frac{x^6-2x^5+x^4}{x^6-x^4}$.

Berechne:

39. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ für $x=2$. **40.** $\frac{x^2-a^2}{2x^2-3ax+a^2}$ für $x=a$.

41. $\frac{x^2+6x-16}{x^2+5x-24}$ für $x=-8$. **42.** $\frac{x^3-4x^2-3x+18}{3x^3-22x^2+51x-36}$ für $x=3$.

43. $\frac{y^4+y^3-y^2-4y-12}{y^4-2y^2-8}$ für $y=2$ und für $y=-2$.

Berechne die folgenden Brüche für jenen Wert von x, für welchen dieselben scheinbar unbestimmt sind.

44. $\frac{x^3-1000}{x^2-100}$. **45.** $\frac{x^3+8}{x^4-16}$. **46.** $\frac{x^5-a^5}{x^4-a^4}$.

Addition und Subtraction der Brüche. (§§. 93, 94.)

47. $\frac{x}{10}-\frac{y+z}{10}$. **48.** $\frac{x}{8}-\frac{y-z}{8}$.

49. $\frac{a+4x}{3}+\frac{2a-x}{3}$. **50.** $\frac{5m+n}{4}-\frac{m-3n}{4}$.

51. $\frac{a+b+c}{3m}+\frac{a-b}{3m}+\frac{a-c}{3m}$.

52. $\frac{m-a}{m+n+p}+\frac{n-p}{m+n+p}+\frac{2p+a}{m+n+p}$.

53. $a+\frac{b}{a}$. **54.** $3x-\frac{5y^2}{2x}$. **55.** $a+\frac{x^2-1}{x}$.

56. $x-\frac{x^2-1}{x}$ **57.** $m-\frac{m+n}{2}$. **58.** $\frac{m+n}{2}-n$

59. $1 + \frac{a-b}{a+b}$.

60. $1 - \frac{a-b}{a+b}$.

61. $\frac{(x+y)^2}{4xy} - 1$.

62. $\frac{(x-y)^2}{4xy} + 1$.

63. $x + y + \frac{2y^2}{x-y}$. Pr. f. $x = -3$, $y = -5$.

64. $a - 1 + \frac{a^2+1}{a+1}$.

65. $m + n - \frac{m^2+n^2}{m+n}$.

66. $a^2 + b^2 - \frac{a^4 - 2b^4}{a^2 - b^2}$.

67. $1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$.

68. $1 - \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$.

69. $x^2 - y^2 - \frac{x^4 - 2x^2y^2 - y^4}{x^2 + y^2}$.

70. $x - 1 - \frac{4x^3 - 4x^2 + x}{4x^2 + 4x + 1}$.

71. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - \frac{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a}{a+1}$.

---

72. $\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b + \frac{4}{5}c\right) + \left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c\right)$.

73. $\left(\frac{3}{4}x + \frac{7}{6}y\right) + \left(\frac{5}{3}x + \frac{4}{5}y\right) + \left(\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}y\right)$.

74. $\left(\frac{2a}{3} - \frac{3b}{4} - \frac{4c}{5}\right) - \left(\frac{a}{2} - \frac{2b}{3} + \frac{3c}{4}\right)$.

75. $\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{2xy}{3} + \frac{y^2}{9}\right) + \left(\frac{5x^2}{6} - \frac{3xy}{5} + \frac{7y^2}{12}\right)$.

76. $\left(\frac{5a^2}{4} - \frac{4ab}{3} + \frac{3b^2}{2}\right) - \left(\frac{4a^2}{5} - \frac{3ab}{4} - \frac{2b^2}{3}\right)$.

77. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2$.

78. $1 - \frac{a}{2b} - \frac{b}{2a}$.

79. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}$.

80. $\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} - \frac{z^2}{ab}$.

81. $\frac{a+b}{9a^2b} - \frac{a-b}{12ab^2} + \frac{2}{15b^2} + \frac{b}{18a^3}$. Probe für $a = 10$, $b = 2$.

82. $\frac{1}{8x^2} - \frac{4x-y}{12x^2y} - \frac{2x+3y}{9xy^2}$. Probe für $x = 2$. $y = -1$.

83. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

84. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$.

85. $\frac{3a+4}{3} - \frac{7a+5}{4} - \frac{8-7a}{6} + \frac{5-3a}{8} - \frac{3-7a}{12}$.

86. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

87. $\frac{a+x}{a} - \frac{2x}{a+x}$.

88. $\frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y}$.

89. $\frac{x}{2(x-y)} - \frac{y}{2(x+y)}$.

90. $\frac{m+n}{m-n} + \frac{m-n}{m+n}$.

91. $\frac{m+n}{m-n} - \frac{m-n}{m+n}$.

92. Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ sollen 1) um m vermehrt, 2) um m vermindert werden; wie groß ist die Differenz zwischen dem gegebenen und dem jedesmal entstehenden neuen Bruche?

93. $\frac{6+3x^2}{9-4x^2} - \frac{2-3x^2}{3+4x^2}$.

94. $\frac{3a^2-4a+5}{6a-7} + \frac{4a^2+5a-6}{8a-9}$.

95. $\frac{2}{2x-1} - \frac{5}{3x-1} + \frac{4}{2x-3}$.

96. $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x-2} - \frac{4x-3}{x-3}$.

97. $\frac{2x+3y}{6x(2x-3y)} - \frac{2x-3y}{6x(2x+3y)}$.

98. $\frac{a^2+5ab-b^2}{a^2+4ab+b^2} - \frac{a-b}{a+2b}$.

99. $\frac{2x-5y}{9x+3y} - \frac{6x+5y}{12x+4y} + \frac{3x+4y}{3x+y}$.

100. $\frac{1}{4+2a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a+a^2}$.

101. $\frac{2m-4n}{3m-3n} - \frac{1}{2} - \frac{m-5n}{6m-6n}$.

102. $\frac{1}{x-y} - \frac{x+y}{x^2-xy} + \frac{x-2y}{2xy}$.

103. $\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$.

104. $\frac{a+1}{a-1} + \frac{a+2}{a-2} + \frac{a+3}{a-3}$.

105. $\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c}$.

106. $\frac{a+b-c}{ab} + \frac{a-b+c}{ac} + \frac{b+c-a}{bc}$. Pr. f. $a = 4$, $b = -3$, $c = 2$.

107. $\frac{5a-8b}{a+b} + \frac{3a-b}{a-b} - \frac{a-4b}{a+b} + \frac{a+5b}{a-b}$. Pr. f. $a = 5$, $b = 9$.

108. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} - \frac{2b}{a^2-b^2} - \frac{2a}{a^2+2ab+b^2}$. Pr. f. $a = 7$, $b = 5$.

109. $\frac{y+1}{y-1} + \frac{y-1}{y+1} + \frac{y^2+1}{y^2-1} + \frac{y^2-2y+1}{y^2+2y+1}$. Pr. f. $y = 11$.

110. $1 - \frac{a-1}{a+1} + \frac{a^2-a+1}{a^2+1} - \frac{a+1}{a-1} + \frac{a^2+a+1}{a^2-1} - \frac{2a-4}{a^4-1}$.

111. $\frac{ab}{(a-c)(b-c)} - \frac{ac}{(a-b)(b-c)} + \frac{bc}{(a-b)(a-c)}$.

112. $\frac{1}{a-(b+c)} + \frac{1}{b-(a+c)} + \frac{1}{c-(a+b)}$.

113. $\frac{a^2-2ab-4b^2}{a^5-16ab^4} - \frac{a-2b}{a^4+4a^2b^2}$.

114. $\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} - \frac{x^3}{x^4-y^4}$.

115. $\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{(a+b)^2} - \frac{b^2}{a^3-ab^2}$.

116. $\frac{1}{6x^2-x-1} - \frac{1-x}{12x^2-12x+3}$.

117. $\frac{1}{2a^2-2} - \frac{1}{3a+3} - \frac{1}{ab-b}$.

118. $\frac{2x-1}{2x^3-x^2-3x-1} - \frac{2x+1}{2x^3-3x^2-x+1}$. Pr. f. $x = -2$.

119. $\frac{5x^2+9x+14}{2x^2+3x-2} - \frac{3x-5}{x+2} + \frac{x-4}{x-2}$. Pr. f. $x = -3$.

120. $\frac{3m+n}{3m^2-mn} - \frac{2m+3n}{12mn-4n^2} + \frac{3m^2-mn-6n^2}{18m^2n-6mn^2}$.

121. $\frac{6x-9y}{6x^2-11xy+3y^2} - \frac{2x-3y}{2x^2-7xy+6y^2} + \frac{3x+4y}{3x^2-7xy+2y^2}$. $\left[=\frac{1}{x-2y}\right]$

122. $\frac{x}{2x-y} + \frac{2x^2+2xy}{2xy+3y^2} - \frac{4xy}{4x^2+4xy-3y^2}$. $\left[=\frac{x}{y}\right]$

123. $\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{(x^2-b^2)(b^2-y^2)}{b^2(a^2-b^2)} + \frac{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}{a^2(a^2-b^2)}$. $[=1]$

124. $\frac{2a^2-3ax}{2a-x}-\frac{2a^2-3ax}{2a+x}+\frac{10a^2x^2-7ax^3}{4a^3-4a^2x-ax^2+x^3}$. $\left[=\frac{ax}{a-x}\right]$

125. $\frac{5x^2}{18x^2-6y}-\frac{27x^4+x^2y}{54x^4-6y^2}+\frac{x^2+6y}{6y}-\frac{x^4-x^2y}{6x^2y+2y^2}$. $[=1]$

Multiplication und Division eines Bruches durch eine ganze Zahl. (§. 95.)

126. $\frac{ab}{4m}.3c$. 127. $\frac{a}{2m}.2m$ 128. $\frac{24x^2}{5y^2}.(-y^2)$.

129. $\frac{2a^2x^2}{15b^2y^2}.5y^2$. 130. $\frac{a-b}{2ab}.2b$. 131. $\frac{a+b}{m}.(a-b)$.

132. $\left(a+\frac{b^2-a^2}{a}\right).a$. 133. $\left(1+\frac{1-a}{1+a}\right).(1+a)$.

134. $\left(\frac{x^2+2xy+y^2}{4xy}-1.\right).2xy$. 135. $\left(\frac{3m^3}{4n^3}+\frac{2m^2}{3n^2}+\frac{m}{2n}\right).12n$.

136. $\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m}\right).m^4$. 137. $\left(\frac{a^3}{x^3}+\frac{2a^3}{x^2}+\frac{3a}{x}+4\right).x^3$.

138. $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{2n}{n^2-1}\right).(n+1)$. 139. $\left(\frac{y^2+a^2}{a^3-a^2}-\frac{1}{a-1}\right).(a-1)$.

140. $\left(1+\frac{a^2b^2-2abc^2+c^4}{4abc^2}\right).(a^2b^2-2abc^2+c^4)$.
Pr. f. $a=2$, $b=5$, $c=3$.

141. $\left(\frac{2x^3}{5}-\frac{5x^2y}{8}+\frac{3xy^2}{4}-\frac{7y^3}{10}\right).(4x^2-5xy+y^2)$. Pr. f. $x=5, y=-5$.

142. $1-(a^2-b^2)\left(\frac{5}{a+b}-\frac{7}{a-b}\right)$. Probe für $a=8$, $b=-3$.

---

143. $\frac{2ab}{3m}:2a$. 144. $\frac{12amx}{5bc}:-4ax$. 145. $\frac{2x}{3my}:3my$.

146. $\frac{10m^3n^2}{xy^2}:5m^2n^2$. 147. $\frac{24p^2q}{13xy}:8qy$. 148. $\frac{3x^3y^3}{4a^2b}:2ab^2$.

149. $\left(1+\frac{m-n}{m+n}\right):2m$. 150. $\left(a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right):(a+b)$.

151. $\left(\frac{bx^2}{a}+\frac{ay^2}{b}\right):ab$. 152. $\left(\frac{8a^3b^2}{m^2n^3}-\frac{12a^2b^3}{m^3n^2}\right):4a^2m^2$.

153. $\frac{6a^2+5ab-6b^2}{2a+3b}:(3a-2b)$. Probe für $a=5$, $b=10$.

154. $\frac{1-2m-7m^2-4m^3}{1+4m}:(1+2m+m^2)$. Probe für $m=-4$.

Multiplication und Division durch einen Bruch. (§§. 95.—99.)

155. $ax.\frac{2b}{y}$. 156. $4x^2y^2.\frac{3ab}{2xy}$. 157. $2a^2.\frac{bx^2}{2a^2c^2y^2}$.

158. $(a-2b)\,\frac{2m}{3n}$. 159. $(a-x).\frac{a+x}{ax}$. 160. $3ax.\left(a-\frac{b}{3ax}\right)$.

161. $\frac{2ab}{cd}.\left(-\frac{3ax}{cm}\right)$. 162. $\frac{6a}{7b}.\frac{2b}{3d}.\left(-\frac{14c}{15e}\right).\left(-\frac{5d}{6a}\right)$.

163. $\frac{2a}{3b}\cdot\frac{4y^3}{9x^3}\cdot\frac{6b}{5a}\cdot\frac{3x^2}{2y^2}$. **164.** $\frac{5a^2x^2}{6m^2y^2}\cdot\frac{9b^3y^3}{10a^3z^3}\cdot\frac{4mz^3}{5b^3x}\cdot\frac{2amx}{3y^3}$.

165. $\frac{a+b}{m-n}\cdot\frac{a-b}{m+n}$. **166.** $\left(1+\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{a-b}{2b}$.

167. $\left(\frac{2a+3x}{2a-3x}\right)^2$. **168.** $\left(\frac{4a^2-9b^2}{12ab}\right)^2$.

169. $\frac{2a^2-ax}{ax-x^2}\cdot\frac{a^2x^3-ax^4}{2a-x}$. **170.** $\frac{x^2+2x+9}{x^4-5x^2+12}\cdot\frac{x^3-8x}{x+7}$.

171. $\left(\frac{x+m}{x}-\frac{2x}{x-m}\right)\cdot\frac{x-m}{x^2+m^2}$. **172.** $\left(\frac{a^3}{2b}-\frac{a^2}{3b^2}-\frac{a}{4b^3}\right)\cdot\frac{3b^3}{4a^3}$.

173. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{b-a}$. Pr. f. $a=3$, $b=-2$.

174. $\left(\frac{3m}{m-1}-\frac{2m}{m+1}-\frac{m^2}{m^2-1}\right)\cdot\frac{m^2-1}{m}$. Pr. f. $m=7$.

175. $\left(\frac{y^2}{x(x+y)}+\frac{x^2}{y(x-y)}-\frac{x^2+y^2}{xy}\right)\cdot\left(1-\frac{2y}{x+y}\right)$. Pr. f. $x=8$, $y=2$.

176. $\left(\frac{3a}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{c}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}+\frac{3b}{4}-\frac{4c}{5}\right)$. Pr. f. $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$.

177. $\left(\frac{5x^2}{3}+\frac{2x}{5}-2\right)\left(\frac{7x^2}{10}+\frac{5x}{4}+\frac{2}{3}\right)$. Pr. f. $x=\frac{3}{2}$.

178. $\left(\frac{5y^2}{12}-yz+\frac{5z^2}{3}\right)\left(\frac{6y}{5}-\frac{3z}{2}\right)\left(\frac{2y}{3}+z\right)$. Pr. f. $y=\frac{3}{5}$, $z=\frac{1}{5}$.

179. $\left(\frac{p^2x^2}{2q^2y^2}+\frac{2px^3}{3q^2y}-\frac{3x^4}{4q^4}\right)\left(\frac{4p^2x^2}{3q^2y^2}-\frac{3px^3}{2q^3y}+\frac{2x^4}{q^4}\right)$.

---

180. $2am:\frac{2m}{b}$. **181.** $6a^2x:-\frac{3b^2y}{2x}$. **182.** $12a^3b^4:\frac{4ab^2}{x^2y^2}$.

183. $(x+y):\frac{x+y}{x-y}$. **184.** $3y:\left(1-\frac{y}{x}\right)$. **185.** $(x^2-y^2):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$.

186. $(a^2-b^2):\frac{a+b}{a-b}$. **187.** $\frac{32a^4x^4}{27b^4x^4}:\frac{4a^3x}{9b^3y}$.

188. $\frac{8x^3y^2z}{15mn^2p^3}:\frac{4m^2n^2p}{5xy^2z^3}$. **189.** $\frac{21bx^2y^3}{25a^2cz^3}:\frac{14a^2y^2z}{45b^2c^2x}$.

190. $\left(\frac{8x^3}{27y^3}-\frac{2x^2}{9y^2}\right):\frac{2x}{3y}$. **191.** $\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right):\frac{xy}{x^2-y^2}$.

192. $\left(1-\frac{a-2b}{a+2b}\right):\left(\frac{a}{a-2b}-\frac{2b}{a+2b}\right)$. Probe für $a=-1$, $b=2$.

193. $\left(1-\frac{x-3y}{x+y}\right):\left(\frac{3x+y}{x-y}-3\right):(x^2-y^2)$. Probe für $x=4$, $y=9$.

194. $\left(\frac{x-2}{6}-\frac{x-1}{8}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{2}-x\right):\left(2-\frac{x+1}{3}\right)$. Probe für $x=-3$.

195. $\frac{8a^3b}{27c}:\left(\frac{6a^2}{b^3}:4b^2c^2\right)$. Probe für $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$.

196. $(a^2-b^2):\frac{(a+b)^2}{a-b}:(a^3-b^3)$. Probe für $a=4$, $b=-1$.

197. $\left(\frac{1}{1-a} - a\right) : (1 + a^3)$. Probe für $a = -2$.

198. $\left(\frac{3x^3}{4y} - \frac{9x^2}{15} + \frac{xy}{10}\right) : \frac{3x}{5y}$. **199.** $\left(\frac{x^9}{27} - \frac{8a^6}{125}\right) : \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2a^2}{5}\right)$.

200. $\left(\frac{8x^6}{27y^4} - \frac{27a^3}{8b^6}\right) : \left(\frac{2x^2}{3y} - \frac{3a}{2b^2}\right)$. **201.** $\left(\frac{2a^2}{9} - \frac{ax}{12} - \frac{3x^2}{16}\right) : \left(\frac{2a}{3} - \frac{3x}{4}\right)$.

202. $\left(\frac{3x^2}{4a^8} - \frac{19y^2}{3a^2} + \frac{12a^4y^4}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{2a^4} + \frac{y}{3a} - \frac{2a^2y^2}{x}\right)$.

203. $\left(\frac{3x^4}{a^4} - \frac{4x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{8x^2}{a^2} - \frac{4y^4}{b^4} + \frac{8y^2}{b^2} - 3\right) : \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} - 1\right)$

204. $\frac{a^5 + 7a^4y + 25a^3y^2 + 48a^2y^3 + 36ay^4}{a^3y - 27y^4} : \left(a + 7y + \frac{25y^2}{a-3y}\right)$. $\left[= \frac{a}{y}\right]$

205. $\left\{\frac{12a^2 + a - 6}{12a^2 - a - 6} - \frac{6a^2 - a - 2}{6a^2 + a - 2}\right\} : \left\{\frac{3a+2}{4a-3} - \frac{12a+8}{12a^2 - a - 6}\right\}$.

$\left[= \frac{4a}{6a^2 + a - 2}\right]$

206. $\left\{\frac{a^2 - 2ab}{4a^2b - b^3} - \frac{2ab - b^2}{a^3 - 2a^2b}\right\} : \left\{\frac{\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{8}ab - \frac{3}{4}b^2}{2a^2 - 3ab - 2b^2} - \frac{\frac{3}{8}ab - \frac{1}{2}b^2}{2a^2 - ab}\right\}$. $\left[= \frac{a+b}{ab}\right]$

207. $a - \frac{a-1}{a + \frac{1}{a}}$. **208.** $\frac{\frac{a}{m+n}}{\frac{b}{m-n}}$. **209.** $\frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x}{x^2-1}}$.

210. $\frac{\frac{1+x}{1-x} - 1}{\frac{1-x}{1+x} + 1}$. **211.** $\frac{a + \frac{bx - ay}{x+y}}{a - \frac{bx + ay}{x+y}}$. **212.** $\frac{x - \frac{x^2 - 2x + 3}{x}}{x - \frac{x^2 - 3x + 2}{x}}$

213. $\frac{\frac{a+b}{a-b} - 1}{\frac{a-b}{a+b} + 1} : \frac{a+b}{a-b}$. **214.** $\frac{\frac{3x+3y}{2y} - \frac{5x+6y}{4y}}{\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}} \cdot \frac{4x + \frac{4x^2}{y}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$.

215. Bestimme den Bruch $\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}$

für $x = \frac{m-n}{m+n}$, $y = \frac{n-p}{n+p}$, $z = \frac{p-m}{p+m}$.

Mache die Probe:

216. Zu 192 für $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{5}{6}$. **217.** Zu 193 für $x = 1\frac{2}{3}$, $y = 3\frac{3}{4}$.

218. Zu 196 für $a = 2$, $b = -\frac{2}{5}$. **219.** Zu 197 für $a = -\frac{4}{5}$.

220. $\frac{x - \frac{x-2}{x+2}}{x - \frac{x+2}{x-2}}$. **221.** $\frac{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}}{\frac{b}{a+b} - \frac{a}{a-b}}$. **222.** $\frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x-y}}{\frac{2}{x-y} - \frac{1}{y}} : \frac{y}{x}$.

223. $\frac{\frac{a^2 - ab + b^2}{a-b}}{\frac{a-b}{a+b}} : \frac{a}{a - \frac{b^2}{a}}$.

12. Decimalbrüche.

Verwandeln gemeiner Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt.

(§§. 101—103.)

Verwandle folgende gemeine Brüche in Decimalbrüche a) durch Erweitern:

1. a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{17}{8}$; c) $\frac{15}{16}$; d) $\frac{63}{25}$; e) $\frac{103}{32}$; f) $\frac{7}{40}$.

2. a) $\frac{37}{50}$; b) $\frac{17}{64}$; c) $\frac{67}{80}$; d) $\frac{117}{125}$; e) $\frac{2359}{128}$; f) $\frac{9084}{625}$.

$$\text{z. B. } \frac{17}{64} = \frac{17.5^6}{2^6.5^6} = \frac{17.15625}{10^6} = 0\cdot265625.$$

3. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{7}{9}$; c) $\frac{313}{11}$; d) $\frac{29}{33}$; e) $\frac{80}{99}$.

4. a) $\frac{15}{27}$; b) $\frac{36}{37}$; c) $\frac{8}{111}$; d) $\frac{100}{333}$; e) $\frac{97}{101}$; f) $\frac{1000}{909}$.

$$\text{z. B. } \frac{8}{111} = \frac{8.9}{999} = 0\cdot\dot{0}7\dot{2}.$$

b) Durch Division:

5. a) $\frac{26}{41}$; b) $\frac{92}{205}$; c) $\frac{131}{14}$; d) $\frac{129}{130}$; e) $\frac{85}{222}$; f) $\frac{3121}{404}$.

6. a) $\frac{50}{73}$; b) $\frac{137}{96}$; c) $\frac{37}{135}$; d) $\frac{259}{444}$; e) $\frac{1211}{825}$; f) $\frac{5432}{615}$.

Verwandle folgende Decimalbrüche in gemeine Brüche:

7. a) $0\cdot25$; b) $7\cdot75$; c) $0\cdot072$; d) $17\cdot525$; e) $0\cdot9518$.

8. a) $0\cdot\dot{6}$; b) $0\cdot\dot{1}\dot{8}$; c) $4\cdot\dot{0}\dot{6}$; d) $26\cdot\dot{7}5\dot{2}$; e) $6\cdot\dot{3}2\dot{4}$.

9. a) $0\cdot\dot{8}\dot{1}$; b) $0\cdot\dot{0}4\dot{1}$; c) $8\cdot\dot{5}6\dot{7}$; d) $0\cdot\dot{4}37\dot{8}$; e) $0\cdot\dot{9}024\dot{3}$.

10. a) $0\cdot7\dot{3}$; b) $15\cdot3\dot{5}\dot{1}$; c) $0\cdot79\dot{3}2\dot{4}$; d) $0\cdot290\dot{7}\dot{4}$; e) $0\cdot2346\dot{8}\dot{4}$.

Rechnen mit unvollständigen Decimalbrüchen. (§§. 104.—107.)

11. Kürze auf 3 Decimalstellen ab:

a) $25\cdot7917$, b) $3\cdot14159$, c) $0\cdot8398$, d) $81\cdot57924$.

12. $0\cdot91654 + 0\cdot17357 + 0\cdot23408 + 0\cdot16999 + 0\cdot879$. (3 Decim.)

13. $19\cdot3875\ldots + 23\cdot473\ldots + 38\cdot378\ldots + 8\cdot4531\ldots + 0\cdot082\ldots$

14. Verwandle die Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{10.11.12}$$

in Decimalbrüche und berechne die Summe auf 3 Decimalen.

15. Berechne ebenso auf 4 Decimalstellen die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{2.4.6.8} + \frac{1}{2.4.6.8.10} + \frac{1}{2.4.6.8.10.12}.$$

16. $88\cdot9397 - 51\cdot4823$. (2 Dec.)

17. $4\cdot37147 - 1\cdot6392$. (3 Dec.)

18. $8\cdot2315 - 3\cdot5678\ldots$

19. $35\cdot79\ldots - 10\cdot809$.

---

20. $\pi.9\cdot2587$. (3 Dec.)

21. $0\cdot9156.23\cdot851$. (2 Dec.)

22. $12\cdot0748.1\cdot91345$. (4 Dec.)

23. $81\cdot2867.0\cdot1234$. (3 Dec.)

24. $8\cdot14739 . 7\cdot10936 . 2\cdot51446$. (4 Dec.)
25. $1\cdot045 . 1\cdot045 . 1\cdot045 . 1.045$. (6 Dec.)
26. Bestimme auf 4 Decimalen
$p = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$
für $a = 1\cdot30785$, $b = 2\cdot09122$, $c = 2\cdot80116$.
27. Berechne die Reihe
$$1+\frac{1}{m}.x-\frac{m-1}{2.m^2}.x^2+\frac{(m-1)(2m-1)}{2.3.m^3}.x^3-\frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{2.3.4.m^4}.x^4$$
für $m = 3$ und $x = 0\cdot015$ auf 7 Decimalstellen.
28. $834 \times 2\cdot1335..$
29. $0\cdot37 \times 15\cdot0816..$
30. $2\cdot955.. \times 0\cdot1563..$
31. $6\cdot04.. \times 0\cdot0085..$
32. $28\cdot1354.. \times 7\cdot089..$
33. $0\cdot1956.. \times 0\cdot8091..$

---

34. $45\cdot12345 : \pi$. (3 Dec.)
35. $986\cdot256 : 127\cdot85$. (2 Dec.)
36. $13\cdot794 : 28\cdot376$. (4 Dec.)
37. $0\cdot7123 : 43\cdot566$. (4 Dec.)
38. $754\cdot06 : 0\cdot649$. (2 Dec.)
39. $\pi : 7\cdot825$. (3 Dec.)
40. $7\cdot24257 : 19\cdot14$. (3 Dec.)
41. $0\cdot436861 : 18\cdot547$. (4 Dec.)
42. 1 Kilogramm $= 1\cdot785523..$ Wiener Pfund; wie viel Kilogramm beträgt 1 Wiener Pfund? (5 Dec.)
43. $3\cdot187 : 5\cdot3185..$
44. $912\cdot857 : 0\cdot118..$
45. $53\cdot4428.. : 2\pi$.
46. $71\cdot293.. : 8\cdot8764$.
47. $0\cdot3497.. : 4\cdot284..$
48. $9\cdot2737.. : 0\cdot0856..$
49. $0\cdot00869.. : 3\cdot846..$
50. $30\cdot2582.. : 0\cdot71356..$
51. $\frac{5\cdot3145.. \times 3\cdot4906..}{7\cdot2084.. \times 3\cdot7449..}$.
52. $\frac{3\cdot027.. \times 8\cdot2579..}{9\cdot461.. \times 6\cdot3047..}$.
53. 1 dm^3 Quecksilber hat ein Gewicht von $13\cdot5959..kg$; welches Volumen hat 1 kg Quecksilber?
54. 1^0 des Äquators hat eine Länge von $111\cdot3066..km = 15$ geographische Meilen. Welche Entfernung haben 2 Orte des Äquators von einander, deren geographische Längen $8^0\ 17'\ 35''$ östl. und $57^0\ 13'\ 24''$ östl. sind?
55. 1^0 eines Erdmeridians hat eine Länge von $111\cdot1111..\ km = 60$ Seemeilen. Wieviel Seemeilen hat eine geographische Meile?

---

13. Verhältnisse und Proportionen.

a) Verhältnisse. (§§. 112 und 113.)

1. Kürze folgende Verhältnisse ab:
a) $10 : 24$; b) $72 : 56$; c) $120 : 48$; d) $ax(m^2-n^2) : ab(m+n)$.
2. Drücke folgende Verhältnisse in den kleinsten ganzen Zahlen aus:
a) $4 : 6\frac{2}{3}$; b) $12\frac{6}{7} : 8\frac{4}{7}$; c) $\frac{6}{7} : 1\frac{7}{8}$; d) $15\frac{3}{4} : 6\frac{9}{16}$.
e) $0\cdot75 : 0\cdot625$; f) $3\cdot208 : 1\cdot28$; g) $\frac{x+y}{ax} : \frac{x^2-y^2}{bx^2}$.

3. Von zwei Körpern legt A in jeder Minute 80 Meter, A' 96 Meter zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

4. Der Körper A legt in a Zeiteinheiten dieselbe Strecke zurück, wie A' in a' Zeiteinheiten; in welchem Verhältnisse stehen ihre Geschwindigkeiten?

5. Ein Meter verhält sich zu einem Wiener Fuß, wie 174 : 55; wie verhält sich ein Decimeter zu einem Wiener Zoll ($\frac{1}{12}$ Wiener Fuß)?

6. Aus 1 *kg* feinen Goldes werden in Österreich 164 Zwanzig-Kronenstücke, im Deutschen Reiche 279 Zehn-Markstücke geprägt. In welchem Verhältnisse steht das 10 Kronenstück zum 10 Markstücke? Stelle das Verhältnis a) mit dem Vordergliede 1, b) mit dem Hintergliede 1 dar.

7. Wie verhalten sich die Flächen zweier Rechtecke, von denen das eine 28 Meter lang und 15 Meter breit, das andere 25 Meter lang und 16 Meter breit ist?

8. Von zwei Dampfmaschinen kann die eine in a Secunden b Kilogramm c Meter hoch, die andere in a' Secunden b' Kilogramm c' Meter hoch heben; wie verhalten sich die Leistungskräfte dieser Maschinen?

---

b) Proportionen. (§§. 114—122.)

Löse folgende Proportionen auf:

9. $x : 5 = \frac{2}{3} : \frac{3}{8}$.

10. $3\frac{1}{8} : x = 15\frac{5}{8} : 5$.

11. $4\frac{1}{2} : 4\frac{4}{5} = x : 8\frac{8}{15}$.

12. $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4} : x$.

13. $x : 0{\cdot}35 = 2{\cdot}38 : 1{\cdot}25$.

14. $14{\cdot}35 : 218{\cdot}275 = 9{\cdot}18 : x$.

15. $\frac{a}{m} : \frac{b}{p} = x : \frac{c}{q}$.

16. $x : 3\frac{3}{4} = m^3 : \frac{3\,m^2}{2}$.

17. $x : (m - 2n) = (6m + 8n) : (2m - 4n)$.

18. $(6a - 5b) : x = (12a^2 - 4ab - 5b^2) : (8a^2 - 2ab - 3b^2)$.

19. $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} : \frac{m + n}{m - n} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m + n} : x$.

20. $\left(b + \frac{b^3}{a^2 - b^2}\right) : x = \left(b + \frac{b^2}{a - b}\right) : \frac{a + b}{b}$.

Forme zunächst die folgenden Proportionen so um, dass x nur in einem Gliede vorkommt, und löse dann dieselben auf:

21. $(x + 3) : x = 7 : 1$.

22. $(x + a) : x = b : c$.

23. $x : (a - x) = \frac{a}{a + b} : \frac{b}{a - b}$.

24. $(a - x) : (x - b) = a : b$.

25. $(1 + x) : (1 - x) = (1 + a^2) : 2a$.

26. $x : y = 2 : 5;\ x + y = 70$.

27. $x : y = 1 : 2;\ 4x - y = 12$.

28. Führe an der Proportion

$$20a(a + b) : 12a = 25(a^2 - b^2) : 15(a - b)$$

die in den §§. 118 und 119 bezeichneten Formänderungen durch.

29. Wenn $a:b=2:3$, $b:c=4:9$, $c:d=3:5$ und $d:e=3:8$ ist, wie verhält sich $a:b:c:d:e$?

30. Gegeben ist $a:d=4:3$, $c:d=5:6$, $b:e=20:9$, $b:f=5:9$, $e:c=3:5$; wie verhält sich $a:b:d:e:f$?

31. Ein Kilogramm verhält sich zu einem deutschen Pfund wie $2:1$, ein deutsches Pfund zu einem Londoner Pfund wie $43:39$, ein russisches Pfund zu einem Londoner Pfund wie $65:72$; wie verhält sich a) das Londoner Pfund, b) das russische Pfund zu einem Kilogramm?

Bestimme x, y, z:

32. $x:y:z=2:3:5$; $x+y+z=60$.

33. $x:y:z=2:3:5$; $2x-3y+4z=60$.

34. $x:y:z=(m-1):m:(m+1)$; $x-2y+3z=a$.

---

c) Anwendung der Proportionen.

Angewandte Aufgaben mit einfachen Verhältnissen. (§. 123.)

35. 9 *g* Wasser enthalten 1 *g* Wasserstoff und 8 *g* Sauerstoff. Wieviel enthält 1 *kg* 375 *g* Wasser von jedem Bestandtheile? Welches Volumen hat dieser Wasserstoff, wenn 1 dm^3 Wasserstoff 0·0896.. *g* wiegt?

36. Das Kronenstück wiegt 5 *g* und ist 0·835 fein; wie viel Silber enthält es?

37. Wenn die Luft auf eine Fläche von 1 cm^2 einen Druck von 1·0033.. *kg* ausübt, welcher Luftdruck lastet auf einer Fläche von $1\frac{1}{2}$ m^2?

38. Ein Land von m Quadratkilometer zählt r Einwohner; a) wie viele Einwohner kommen bei gleicher relativer Bevölkerung auf n Quadratkilometer; b) auf wie viele Quadratkilometer kommen s Einwohner?

39. Das Vorderrad eines Wagens hat a Meter, das Hinterrad b Meter im Umfange; wie oft hat sich ersteres umgedreht, wenn letzteres m Umläufe gemacht hat?

40. Ein sich gleichförmig bewegender Körper legt in a Secunden b Meter zurück; a) wie viel Meter legt er in t Secunden zurück; b) in wie viel Secunden legt er s Meter zurück?

41. Die Geschwindigkeiten zweier sich bewegender Körper verhalten sich wie $c:c'$; wie viel Zeit braucht der zweite zu einem Wege, zu welchem der erste t Stunden braucht?

42. Von einem Gasometer, welches 11·2 Cubikmeter fasst, werden für eine gewisse Zeit 92 Laternen mit Gas versorgt; wie viel Cubikmeter muss ein Gasometer halten, um 148 Lampen auf ebenso lange Zeit mit Gas zu versehen?

43. Ein Manuscript gibt 162 Seiten, jede zu 50 Zeilen; wie viele Seiten wird es geben, wenn auf jede Seite 45 Zeilen kommen?

44. Ein Vorrath von Lebensmitteln reicht für a Personen auf b Tage; für wie viele Personen reicht der nämliche Vorrath c Tage länger?

$$a = 72,\ b = 52,\ c = 65.$$

45. Ein Staatslos im Nominalwerte von 250 fl. wird im Course 122·25 (für 100 des Nominalwertes) gekauft; wie viel kostet es?

46. Jemand kauft eine Eisenbahn-Actie von 200 fl., welche jährlich 5% Zinsen trägt, für 186 fl.; zu wie viel % legt er sein Geld an?

47. Ein Capital bringt in t Jahren z Kronen Zins; a) wie viel Zins bringt es bei gleichem Procent in t' Jahren; b) in wie viel Jahren bringt es z' Kronen Zins?

48. Zu wie viel % muss ein Capital angelegt werden, damit es in t' Jahren ebensoviel Zins bringe, als es in t Jahren zu p% Zins bringt?

49. Beim freien Falle ist der zurückgelegte Weg direct proportional dem Quadrate der Zeit. Wenn nun ein Körper in 5 Secunden frei fallend 245·25 *m* zurücklegt, welchen Weg legt er in 6·1 Secunden zurück?

50. In welchem Verhältnisse steht die Oberfläche einer Kugel zu ihrem Radius? Die Radien zweier Kugeln verhalten sich wie 2 : 3. Die Oberfläche der kleineren Kugel beträgt 60 cm^2; wie groß ist die der anderen Kugel?

51. In welchem Verhältnisse steht der Rauminhalt einer Kugel zu ihrem Radius? Die Radien zweier Kugeln verhalten sich wie 1 : 10. Das Volumen der größeren Kugel ist 800 cm^3; wie groß ist das der kleineren Kugel?

Angewandte Aufgaben mit zusammengesetzten Verhältnissen. (§§. 124 u. 125.)

52. a Kilogramm Garn geben b Meter Leinwand von c Centimeter Breite; α) wie viel Meter Leinwand von c' Centimeter Breite geben a' Kilogramm desselben Garns; β) wie breit wird die Leinwand, wenn aus a' Kilogramm Garn b' Meter gefertigt werden; γ) wie viel Kilogramm Garn braucht man, um b' Meter Leinwand von c' Centimeter Breite zu erhalten?

53. Eine Mühle mahlt auf a Gängen bei b Umdrehungen pr. Minute in c Stunden d Hektoliter Getreide; auf wie viel Gängen können bei b' Umdrehungen pr. Minute in c' Stunden d' Hektoliter geliefert werden?

54. Von zwei Rädern, welche ineinander greifen, hat das eine a, das andere b Zähne; wenn nun das erste Rad in s Minuten m Umläufe macht, wie vielmal dreht sich das zweite Rad in t Minuten um?

55. Für $2\frac{7}{10}$ fl. werden auf einer Eisenbahn 14 Centner einer Ware 14 Kilometer weit befördert; a) wie viel Fracht wird man zahlen müssen, damit $10\frac{1}{2}$ Ctr. 76 Kilometer weit befördert werden; b) wie viel Ctr. wird die Eisenbahn für $4\frac{1}{20}$ fl. 63 Kilometer weit befördern; c) wie weit werden $17\frac{1}{2}$ Ctr. für $3\frac{3}{5}$ fl. geführt?

56. 6 Arbeiter vollendeten in 4 Tagen einen Graben, welcher 300 Meter lang, $11\frac{1}{5}$ Decimeter breit und $3\frac{1}{2}$ Decimeter tief ist. Bei einem zweiten Graben erfordert die Förderung von 5 Cubikmeter ebensoviel Zeit als beim ersten die Förderung von 6 Cubikmeter. In wie viel Tagen vollenden den zweiten Graben 10 Arbeiter, wenn derselbe 280 Meter lang, $8\frac{3}{4}$ Decimeter breit und 5 Decimeter tief ist?

57. Wie viel Zins geben a) 1287 K, b) 3745 K, c) 8391 K 34 h zu $5\frac{1}{2}\%$ in α) 2 Jahren, β) $3\frac{1}{2}$ Jahren, γ) 2 Jahren 4 Monaten 18 Tagen?

58. Wie viel Zins bringen 3600 K Capital in 125 Tagen a) zu 6%, b) zu 4%, c) zu $4\frac{1}{5}\%$, d) zu 5%?

59. Eine Staatsschuldverschreibung von 500 fl. wird am 17. August zum Course von 102 eingekauft; wie viel muss man dafür bezahlen, wenn die rückständigen Zinsen (des Nominalwertes) à $4\frac{1}{5}\%$ seit 1. Mai zu vergüten sind?

60. In welcher Zeit geben 5844 K Capital, zu $4\frac{3}{4}\%$ angelegt, $744\frac{4}{5}$ K Zins?

61. Wie groß muss das Capital sein, welches zu $5\frac{1}{4}\%$ in $2\frac{7}{12}$ Jahren $976\frac{1}{2}$ K Zins bringt?

62. Zu wie viel % müssen 2424 K angelegt werden, damit sie in $3\frac{1}{3}$ Jahren $727\frac{1}{5}$ K Zins geben?

63. Wenn c K Capital in t Jahren z K Zins tragen, a) welchen Zins bringen c′ K Capital in t′ Jahren; b) welches Capital bringt in t′ Jahren z′ K Zins; c) in wie viel Jahren bringen c′ K Capital z′ K Zins?

64. Ein Capital c wird nach t Jahren zurückgezahlt; zu welcher Summe (s) ist es bei p% einfachen Zinsen angewachsen?

$$s = c \cdot \frac{100 + tp}{100}.$$

65. Ein Capital c, welches nach t Jahren ohne Zinsen fällig ist, soll zu Anfang dieser Zeit ausgezahlt werden; wie viel (b) hat der Schuldner zu entrichten, wenn er wegen der früheren Zahlung p% einfache Zinsenvergütung anspricht?

$b = c - \frac{cpt}{100 + pt}$ (Discont auf Hundert). Bei kleinen Terminen wird in unrichtiger aber bequemer Weise kaufmännisch der Discont von Hundert berechnet; $b = c - \frac{cpt}{100}$.

66. Eine Wechselsumme von 2813 fl. 15 kr. wird 2 Monate vor der Verfallszeit mit 4% discontiert; a) wie viel beträgt der Discont; b) wie viel hat der Käufer zu bezahlen?

67. Die Capitalien c′, c″, c‴ ... sind bezüglich nach t′, t″, t‴ ... Zeiteinheiten (Jahren, Monaten, ...) unverzinslich zu zahlen. Alle Zahlungen sollen auf einmal geleistet werden. Wann muss die Gesammtsumme $s = c' + c'' + c''' + \ldots$ gezahlt werden? (Terminrechnung.)

68. Jemand hat 2000 fl. nach $2\frac{1}{2}$ Monaten, 1500 fl. nach 8 Monaten, 3000 fl. nach 10 Monaten, 2500 fl. nach 1 Jahre 4 Monaten unverzinslich zu zahlen; wann muss die Zahlung geschehen, wenn die Summe aller jener Terminzahlungen auf einmal erlegt werden soll?

Theilregel (§§. 126 und 127.)

69. In dem zur Bereitung des Sauerstoffes verwendeten Kaliumchlorat ($KClO_3$) kommen auf 39 Gewichtstheile Kalium 35·5 G. Chlor und 48 G. Sauerstoff. Wie viel Sauerstoff erhält man aus 100 *g* Kaliumchlorat? Welches Volumen hat derselbe, wenn 1 dm^3 Sauerstoff 1·433. . .*g* wiegt?

70. Es soll die Zahl 3710 in 4 Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten wie die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

71. Eine Summe von s Kronen ist in drei Theile a, b, c so zu theilen, dass sich $a : b = m : n$ und $b : c = p : q$ verhalte.

72. In der englischen Schwefelsäure (H_2SO_4) verhält sich das Gewicht des Wasserstoffes zu dem des Schwefels wie 1 : 16, das Gewicht des Schwefels zu dem des Sauerstoffes wie 1 : 2; wie viel von jedem der 3 Grundstoffe enthält 1 *kg* Schwefelsäure?

73. Drei Personen sollen 9150 fl. so unter einander theilen, dass A so oft 5 fl. als B 3 fl., und C so oft 3 fl. als B 4 fl. erhalte; wie viel erhält jede Person?

74. S Kronen sind in 4 Theile a, b, c, d so zu theilen, dass $a : d = m : n$, $b : d = p : q$ und $c : b = r : s$ sei.

75. Das Zwanzig-Kronenstück hat ein Gewicht von 6·775. . *g* (praktisch 6·77 *g*, kleinstes Gewicht mit Annahme-Zwang 6·74 *g*) und ist 0·9 fein. Wie viel Gold und Kupfer enthält es? Wie viel Stücke geben 1 *kg* feines Gold?

76. Eine Erbschaft von 18420 K soll unter 4 Personen getheilt werden, dass A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{3}{10}$ und D den Rest erhalte. Vor der Theilung stirbt jedoch A, und die übrigen drei theilen nun auch den Antheil des A im Verhältnisse ihrer ursprünglichen Antheile unter sich. Wie viel bekommt jeder?

77. Drei Gemeinden erhalten für geleistete Erdarbeiten 750 fl. Aus der Gemeinde A arbeiteten 11 Mann durch 10 Tage zu 9 Stunden, aus der Gemeinde B 9 Mann durch 9 Tage zu 10 Stunden, aus der Gemeinde C 15 Mann durch 5 Tage zu 6 Stunden täglich. Welchen Antheil an jener Entlohnung wird jede der drei Gemeinden haben?

78. A beginnt am Anfange des Jahres ein Unternehmen mit einem Fonde von 8000 K; nach zwei Monaten tritt B mit 5000 K und noch zwei Monate später auch C mit 3000 K dazu. Beim Jahresabschlusse zeigt sich ein Gewinn von 1059 K; wie viel bekommt jeder davon?

---

14. Gleichungen des ersten Grades.

1. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. (§§. 128—132.)

Bringe folgende Gleichungen auf die geordnete Form und bestimme den Grad derselben:

1. $x + \frac{1}{x} = 2.$ **2.** $(x - a)(x - b) = (x - c)(x - d).$

3. $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} = 2.$ **4.** $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{x}.$

5. $(x - a)^2 - (x - b)^2 = c^2.$ **6.** $(x - a)^2 + (x - b)^2 = c^2.$

7. $\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} = 2x.$ **8.** $(x - 2)^3 - (x - 1)^3 = 4.$

9. $(x - 2)^3 + (x - 1)^3 = 4.$ **10.** $x^2 - \frac{1}{x^2} = 1.$

11. $a : \left(a + \frac{b}{x}\right) = \left(a - \frac{b}{x}\right) : (a - 1).$

---

12. $9 - (5 - 2x) = 3x + 1.$ **13.** $5(x - 2) - 2x = 2(x - 1).$

14. $(a + b)x = 2a - (a - b)x.$ **15.** $a(x - b) = b(a - x) - c.$

16. $m(x - a) - n(x - b) = (a + b)x.$

17. $3(2x + 9) - 9(4 + x) = 3(5 + x) - 2(x + 6).$

18. $(8x - 1) : (4x + 2) = (6x - 9) : (3x - 4).$

19. $y(a - y) + (b - y)^2 = a^2 - 3b^2.$

20. $ax = bx + cx.$ **21.** $ax + b^3 = bx + a^3.$

22. $ax - 27 = a^3 - 3x.$ **23.** $a^2x + a^3 - abx + b^3 + b^2x = 0.$

24. $a^2x + a^3 + ax + x - 1 = 0.$

25. $a^2x - a^4 = b^2x - b^4.$ **26.** $a^2x + a^4 = x + 1.$

27. $ax - a^4 = bx - b^4.$ **28.** $ax + a^4 + bx - b^4 = 0.$

29. $(2 - x)(3 - x) = (4 + x)(3 + x).$

30. $(z + 1)(z - 1) = z^2 + z + 1.$

31. $(2 + x)(2x + 1) + (2 - x)(2x - 1) = 0.$

32. $x(x - 2a) - (b - x)^2 = 3b^2 - 4a^2.$

33. $(x + 2)(x + 3) - 4 = (x + 4)(5 + x) - 10.$

34. $(x + 8)^2 + (x + 3)^2 = (x + 12)^2 + (x - 5)^2.$

35. $(13x + 3)^2 - (5x + 10)^2 = (12x - 3)^2.$

36. $(x - 5)^2 - (x - 9)^2 = 144.$ **37.** $a^2(a - x) - b^2(b + x) = abx.$

38. $(a + b - c)x - (a - b - c)x - (a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + ac + bc) - (a - b + c)x.$

39. $\{3(y - 2) - 5\} . 5 - 4(2y - 6) = y - 19.$

40. $5(x + 10) - 4\{160 - 3(3x - 2) + 2x\} = 2 - x.$

41. $5\{3 + (2x - 7)\} - 7(x + 5) + 3 = 3\{4(3 - x) - x\} - 70.$

42. $x - \{2x - [3x - (4x - 5x)]\} = 1.$

43. $2x - 2\{x - 2[x - 2(x - 2)]\} = 0.$

44. $a^2(x-b)-b^2(x-a)=a^2(a-x)-b^2(b-x)$.

45. $(x-a)^2-(x-b)^2+3(a-b)^2=0$.

46. $4(x-a-1)^2+5(x-3a-2)^2=(3x+1)^2$.

47. $[(a^2-1)x-1]^2+(2ax-1)^2=[(a^2+1)x+1]^2$.

48. $(x-2):(x-5)=3:2$.

49. $(x-5):(x-11)=(x+1):(x-7)$.

50. $(2x^2+x+1):(x^2-9x-2)=2:1$.

51. $(x-a):(x-b)=(2a-x):(3b-x)$.

52. Löse die Gleichung $2s=n(a_1+a_n)$ nach allen darin vorkommenden allgemeinen Zahlen auf.

53. $\frac{3-4x}{7}+3=4x$.

54. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=x+1$.

55. $\frac{5+x}{2}+\frac{13+7x}{3}=72$.

56. $a-b-\frac{ab}{x}=0$.

57. $\frac{a-y}{b}=\frac{b-y}{a}$.

58. $\frac{m(a^2+x^2)}{ax}-\frac{mx}{a}=cm$.

59. $\frac{5x^2-6x-7}{2x^2-3x-1}=\frac{5}{2}$.

60. $\frac{m}{x-n}-\frac{n}{x-m}=0$.

61. $\frac{a-b}{b-z}=\frac{a}{z}$.

62. $\frac{x}{a}-b=\frac{x}{b}-a$.

63. $\frac{a-b}{x}+1=\frac{a}{b}-\frac{a+x}{x}$.

64. $\frac{13}{x-5}+\frac{3}{4}=\frac{65}{2x-10}$.

65. $\frac{9x+8}{6x+5}=\frac{3x+2}{2x+1}$.

66. $\frac{8x-3}{2x-1}=\frac{3x+4}{x+1}+1$.

67. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$.

68. $\frac{a+b}{a-b}.x-4ab=\frac{b-a}{a+b}.x$.

69. $\frac{a+b}{a-b}.x=\frac{b-a}{a+b}.x+\frac{a^2+b^2}{2}$.

70. $\left\{1+\frac{a-b}{a+b}\right\}x-1=\left\{\frac{a+b}{a-b}-1\right\}x$.

71. $\frac{z}{2}+\frac{z+1}{3}+\frac{z-1}{4}=\frac{2z}{5}+\frac{7}{4}$.

72. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+\frac{x}{7}+\frac{x}{11}-9=x+\frac{23}{66}$.

73. $\frac{x}{x+a}-\frac{x}{x-a}=\frac{b}{x+a}$.

74. $\frac{ax}{mx-a}+\frac{bx}{nx-b}=\frac{a}{m}+\frac{b}{n}$.

75. $(a+b)^2-\frac{ax}{bc}-\frac{bx}{ac}=\frac{cx}{ab}+\frac{2x}{c}-c^2$.

76. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-8}$.

77. $\frac{1}{ac-cx}-\frac{1}{bd-dx}=\frac{1}{ad-dx}-\frac{1}{bc-cx}$.

78. $3-\frac{x}{2}\left(1-\frac{1}{2x}\right)=\frac{3x}{4}\left(2-\frac{3}{x}\right)-34\frac{1}{2}$.

79. $a-x\left(a+\frac{2a}{x}\right)=(a-x)\left(a-\frac{2a}{x}\right)-a$.

80. $\frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-2} + \frac{6}{x^2-4} = 0.$

81. $\frac{1}{2b} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a-b}{bx} = \frac{1}{a-b} - \frac{2b}{(a-b)x}.$

82. $\frac{a^2-ac}{c^2+x} - \frac{c-a}{c} = \frac{ax}{c^3+cx}.$

83. $\frac{ax}{ab-bx} - \frac{bx}{a^2-ax} - \frac{b}{a} - 1 = 0.$

84. $\frac{1-x}{1-a} - \frac{1+x}{1+a} + \frac{1-x}{1+2a+a^2} = 0.$

85. $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-4}{x-3} = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}.$

86. $\frac{x}{10} + \frac{x+5}{15} - \frac{5x+4}{18} + \frac{5x-2}{24} - 2 = 0.$

87. $\frac{x-a}{ab} + \frac{3(x+3b)}{ac} + \frac{3}{a} - \frac{x-a}{bc} = 0.$

88. $\frac{7}{x-1} + \frac{3}{x-3} = \frac{10}{x-2}.$

89. $\frac{x+7}{x-2} - \frac{x+5}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-1}.$

90. $\frac{x-1}{6x^2+2x} - \frac{3(x-2)}{18x^2-2} = \frac{5}{42x^2-14x}.$

91. $\frac{7}{3}(2x+5) + 3(2x-3) - \frac{3}{4}(5x-7) = 1.$

92. $\frac{4}{5}(3x-7) - 22 = \frac{3}{7}\left[\frac{7}{9}(8x-63) - (2x+3)\right].$

93. $\frac{1}{4}\left(\frac{8}{9}\left\{\frac{7}{6}\left[\frac{3}{2}(x+1)+3\right]+2\right\}-4\right) = 1.$

94. $\frac{3\cdot07x}{16} + \frac{x-0\cdot08}{5} = \frac{3x}{8} - 0\cdot00925.$

95. $\frac{8\cdot4}{x} - \frac{5\cdot4}{3x} + \frac{2}{5x} = \frac{0\cdot94}{x} + 27.$

96. $(x-0\cdot1)^2 - 3x(x-2\cdot1) = 8\cdot8 - (2x+6\cdot8)(x-0\cdot6).$

97. $\frac{x-28\cdot37..}{150\cdot37..-x} = 3\cdot528..$

98. $\frac{x+4\pi}{x+\pi} = \pi$ (x auf 3 Dec.).

99. $4 : \frac{2x}{3} = 1 : \left(15 - \frac{x}{3}\right).$

100. $\frac{a+b}{a+1} : \frac{a-1}{x-1} = \frac{a-b}{a-1} : \frac{a+1}{x+1}.$

101. $\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{x}} + \frac{1}{3} = 3.$

102. $\frac{m-\frac{1}{x}}{m+\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x-\frac{1}{m}}{x+\frac{1}{m}} - \frac{1}{m}$

103. $\frac{x+\frac{1}{2}}{x+2} = \frac{x-\frac{1}{2}}{x-1}.$

104. $\frac{2x+1}{x-\frac{1}{3}} - 3 = \frac{3x-1}{x-\frac{1}{3}}.$

105. $\frac{a+\frac{x}{a-b}}{a-\frac{x}{a+b}} = \frac{a+b}{a-b}.$

106. $\frac{1}{\frac{a+b}{ax}-\frac{a-b}{ab}} = \frac{a}{2}.$

107. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=3.$

108. $\dfrac{2}{3-\dfrac{2}{3-\dfrac{2}{x}}}=\dfrac{3}{2}.$

109. $\dfrac{a}{x-\dfrac{bx+a^2}{a+b}}+\dfrac{a+b}{a-\dfrac{a^2+b^2}{a-b}}=\dfrac{2a-b}{x-a}.$

110. $(x-1)(x-2)=(x-1)(2x-1).$

111. $x^2-ax+bx=0.$

112. $x-a=a^2-x^2.$

113. $2x-4=3x^2-12.$

---

2. Gleichungen des ersten Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten.

(§§. 133—136.)

114. $8x-5y=25,\quad 3x+7y=36.$

115. $3x+4y=4,\quad 12x-6y=5.$

116. $16y-25z=7,\quad 5z-24y=9.$

117. $7x+8y=23,\quad 14x-4y=6.$

118. $6x+8y=7,\quad 2x+6y=4.$

119. $3y+5z=93,\quad 4y+7z=128.$

120. $\left.\begin{array}{l} x+y=s, \\ x-y=d. \end{array}\right\}$ Wie findet man aus der Summe zweier Zahlen und deren Differenz die beiden Zahlen selbst?

121. $ax+y=m,\quad x-y=n.$

122. $x+my=a,\quad x-ny=b.$

123. $a(x+y)=m,\quad b(x-y)=n.$

124. $y=ax+b,\quad y=a'x+b'.$

125. $y=2x+3,\quad y+1=4x+3.$

126. $ax+y=a^3,\quad x+ay=1.$

127. $3x-4y=4,\quad \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=6.$

128. $x+2y=30,\quad \dfrac{3x}{5}+\dfrac{x}{2}=11.$

129. $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{3}y=2,\quad \dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{3}y=4.$

130. $\dfrac{x+7}{y}=\dfrac{4}{5},\quad \dfrac{x}{y+4}=\dfrac{1}{2}.$

131. $\dfrac{28}{x}+\dfrac{6}{y}=9,\quad \dfrac{9}{y}-\dfrac{4}{x}=2.$

132. $\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{2}{x+y},\quad \dfrac{2}{3x-7y}=\dfrac{3}{2x-9}.$

133. $\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=1,\quad \dfrac{30}{x}+\dfrac{31}{y}=6.$

134. $\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{5}{y-1}=1,\quad \dfrac{4}{x-1}+\dfrac{7}{y-1}=2.$

135. $\dfrac{x+9}{2y-8}=2,\quad \dfrac{2x-8}{y-2}=2.$

136. $\dfrac{m}{n+y}=\dfrac{n}{m+x},\quad \dfrac{n}{m-y}=\dfrac{m}{n-x}.$

137. $\dfrac{x-a+2b}{b}+\dfrac{y}{c}=\dfrac{b}{c},\quad \dfrac{x}{ab}+\dfrac{y}{bc}=\dfrac{x+y}{ac}.$

138. $ax-by=a^2+b^2,\quad bx+ay=a^2+b^2.$

139. $(a+c)x+(a-c)y=2bc,\quad (b-c)x+(b+c)y=2ac.$

140. $a^2x+aby=b^4,\quad bx+ay=a^2b.$

141. $a^2x+ay=a+b,\quad (a+b)x+y=\dfrac{a+2b}{a}.$

142. $ax + by = a^5,$
$bx + ay = b^5.$

143. $ax + by = a^2 + b^2,$
$a^2x + b^2y = a^3 - ab(a - b) + b^3.$

144. $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{y+b} = \frac{a+b}{ab},$
$\frac{a}{x-a} - \frac{b}{y+b} = \frac{a^2-b^2}{ab}.$

145. $\frac{8}{2x-3y} + \frac{9}{4x+y} = 1,$
$\frac{6}{4x+y} - \frac{5}{2x-3y} = \frac{1}{48}.$

146. $ax + \frac{1}{a}y = a^2,$
$\frac{1}{a}x + ay = a^3.$

147. $x - (a+b)y = \frac{b^2-a^2}{b},$
$(b-a)x + aby = b^2.$

148. $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b},$
$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}.$

149. $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2,$
$\frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = \frac{4ab}{a^2-b^2}.$

150. $\frac{2x-b}{a} - \frac{2y-a}{b} = 2,$
$\frac{2x-a}{b^2} + \frac{2y+b}{a^2} = \frac{a+b}{ab}.$

151. $\frac{3x-2y}{5} + \frac{5x-3y}{3} = x + 1,$
$\frac{2x-3y}{3} + \frac{4x-3y}{2} = y + 1.$

152. $x - y = 2a + b + \frac{4ab^2 - 2a(a^2-b^2)}{a^2-b^2},$
$ax - by = (a+b)^2 - \frac{a-b}{a+b} + \frac{(a^2+b^2) - 2ab(a^2-b^2+1)}{a^2-b^2}.$

153. $\frac{x + 42\frac{1}{3}}{2} = y - 42\frac{1}{3},$
$x - 23\frac{1}{2} = \frac{y + 23\frac{1}{2}}{3}.$

154. $41x - 32{\cdot}75y = 10{\cdot}42,$
$5{\cdot}2x - 36y + 2{\cdot}5 = 0.$

155. $x : y = 3 : 7,$
$x + y = 50.$

156. $x : y = 1 : 4,$
$17x - 3y = 3.$

157. $(x+2):(y+4) = 4:5,$
$(x-8):(y-6) = 2:3.$

158. $(x+y):(y-x):(2y-x-3) = 9:1:5.$

159. $5x : 8 = (y+5) : 2,$
$3x : 8 = (y-2) : 1.$

160. $(4x+y) : (2x-y) = 16 : 5,$
$(2x+7y) : (x+8) = 14 : 5.$

161. $(3x + 2y - 4) : (2x + 3y - 1) = 3 : 2,$
$(x - 2y - 3) : (2x - 3y - 6) = 2 : 3.$

---

162. $x + 3y = 39,$
$3x + 2z = 48,$
$4y - 3z = 18.$

163. $3x - 4y = 6,$
$2x + 3z = 26,$
$5y - 6z = 18.$

164. $3x + y + 2z = 13,$
$x + 2y + 2z = 17,$
$2x + 3y + z = 12.$

165. $6x - 4y + 3z = 28,$
$4x - y - 3z = 7,$
$2x - 3y + 4z = 13.$

166. $\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}\right\}$ Gib das Gesetz an, welches in den für x, y und z erhaltenen Ausdrücken vorherrscht.

167. $x+y+z=s,$
$x:y=a:b,$
$y:z=b:c.$

168. $0\cdot4x+0\cdot5y+0\cdot7z=51,$
$0\cdot3x+0\cdot4y+0\cdot5z=38,$
$0\cdot2x+0\cdot3y+0\cdot4z=29.$

169. $\frac{x}{5}+\frac{3y}{4}+\frac{7z}{15}=18,$
$\frac{2x}{5}+\frac{5y}{12}+\frac{2x}{3}=19,$
$\frac{x}{10}+\frac{5y}{6}+\frac{4z}{5}=23.$

170. $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=612,$
$\frac{x}{3}+y+\frac{z}{3}=612,$
$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+z=612.$

171. $3x-y-z=10,$
$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=13,$
$\frac{x}{2}+\frac{y}{8}+\frac{z}{5}=10.$

172. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$
$\frac{ax-by}{a+b}=\frac{az-cy}{c},$
$\frac{by-cz}{b-c}=\frac{bx+az}{a}.$

173. $\frac{x+1}{y+1}=2,$
$\frac{y+2}{z+1}=4,$
$\frac{z+3}{x+1}=\frac{1}{2}.$

174. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a,$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b,$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c.$

175. $-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a,$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=b,$
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=c.$

176. $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=9,$
$-\frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{8}{z}=10,$
$\frac{5}{x}+\frac{4}{y}-\frac{6}{z}=20.$

177. $x+z=18,$
$z-y=2,$
$u+y=12,$
$u+2x=26.$

178. $u+x+y-z=a,$
$u+x-y+z=b,$
$u-x+y+z=c,$
$-u+x+y+z=d.$

179. $3u-x+y+2z=20,$
$2u+3x-y+z=17,$
$u+2x+3y-z=21,$
$-u+x+2y+3z=12.$

180. $3u-4x+2y=5,$
$4u-3x-2z=4,$
$2u+y-5z=3,$
$3x-4y+z=2.$

181. $2u-3w+4x-5y+6z=6,$
$3u+w-5x+y-3z=3,$
$-u+4w+2x-5y+z=8,$
$u-w+x-y+z=3,$
$u+w+x+y+z=15.$

3. Anwendung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.
(§§. 137 und 138.)

182. Das 3fache und das 4fache einer Zahl beträgt zusammen 196; wie groß ist die Zahl?

183. Von welcher Zahl ist der siebente Theil um 8 kleiner als der dritte Theil?

184. Wenn man eine Zahl mit 15 multipliciert, zu dem Producte 20 addiert, die Summe durch 4 dividiert und von dem Quotienten 14 subtrahiert, so erhält man das 3fache der fraglichen Zahl; welche Zahl ist es?

185. Wie heißt die stetige geometrische Proportion, deren drei Glieder um gleichviel größer sind als 1, 3 und 6?

186. Die Zahl a soll in zwei Theile so getheilt werden, dass das mfache des ersten Theiles um d größer sei als das nfache des zweiten Theiles.

187. In welche zwei Theile muss man 60 zerlegen, damit der größere Theil durch den kleineren dividiert 2 zum Quotienten und 3 zum Reste gebe?

188. Eine Zahl a ist so in zwei Theile zu zerlegen, dass deren Quotient der gegebenen Zahl selbst gleich sei.

189. a) Welche Zahl muss man vom Zähler und vom Nenner des Bruches $\frac{a}{b}\left(\frac{7}{13}\right)$ subtrahieren, damit der neue Bruch gleich $\frac{c}{d}\left(\frac{1}{3}\right)$ werde?

b) Welche Zahl muss zum Zähler des Bruches $\frac{a}{b}\left(\frac{7}{13}\right)$ addiert und vom Nenner desselben subtrahiert werden, damit der erhaltene Bruch der reciproke des früheren sei?

190. Eine zweiziffrige Zahl hat die Ziffernsumme 6; vertauscht man die Ziffern, so ist die neu entstandene Zahl um 6 größer als das Dreifache der ersten Zahl. Wie heißt die Zahl?

191. Eine fünfziffrige Zahl hat an der niedrigsten Stelle die Ziffer 4. Wenn man dieselbe rechts wegnimmt und links ansetzt, so erhält man eine Zahl, welche um 16 größer ist als das Doppelte der ersten Zahl. Wie heißt die Zahl?

192. Wenn man in einer dreiziffrigen Zahl 5 links wegnimmt und rechts ansetzt, so erhält man eine Zahl, welche sich zur ursprünglichen wie 19 : 13 verhält. Wie heißt die Zahl?

---

193. Jemand wird nach 10 Jahren doppelt so alt sein, als er vor 4 Jahren war; wie alt ist er jetzt?

194. Ein Vater ist jetzt 48, sein Sohn 21 Jahre alt; vor wie viel Jahren war der Vater 10mal so alt als sein Sohn?

195. Ein Vater ist 36, sein Sohn 10 Jahre alt; wie viel Jahre muss der Vater noch leben, damit er gerade doppelt so alt werde, als es dann sein Sohn sein wird?

196. A ist jetzt m mal so alt und wird nach a Jahren n mal so alt sein als B; wie alt ist A, wie alt B?

Welche Beziehung muss zwischen m, n und a stattfinden, damit die Auflösung einen Sinn habe?

197. Ein Vater ist gegenwärtig 3 mal so alt als sein Sohn; vor 12 Jahren war er 9 mal so alt als der Sohn. Wie alt ist jeder?

198. Ein Knabe sagt: meine Mutter ist 25 Jahre älter als ich, mein Vater ist 5 Jahre älter als die Mutter, und wir alle zusammen haben 91 Altersjahre. Wie alt ist der Knabe, die Mutter, der Vater?

---

199. Bei der Theilung einer gewissen Summe erhält A a (1000) K und $\frac{1}{m}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$ des Restes, B $\frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ des neuen Restes und noch b (500) K darüber, C die noch übrigen c (2500) K. Wie viel erhält A, wie viel B?

200. 2380 K sollen unter vier Personen in folgender Weise vertheilt werden. B erhält $1\frac{1}{2}$ mal soviel als A weniger 60 K, C erhält $\frac{3}{4}$ dessen, was A und B zusammen erhalten, und noch 20 K, D erhält $\frac{2}{5}$ dessen, was die 3 anderen Personen zusammen erhalten haben. Wie viel erhält jede?

201. Unter drei Personen wird eine bestimmte Summe so vertheilt, dass B 20 K weniger als A, und C 20 K weniger als B bekommt; die ganze Summe ist um 25 K größer als das 4fache dessen, was C bekommt. Wie viel erhält jeder?

202. Ein Kaufmann hat zwei Sorten einer Ware; von der einen kostet das Kilogr. 60 kr., von der andern 40 kr.; er will von beiden eine Mischung von 80 Kilogr. bereiten, die er zu 45 kr. das Kilogr. verkaufen kann. Wie viel Kilogr. muss er dazu von jeder Sorte nehmen?

203. Ein Weinhändler hat zweierlei Weine; von dem ersten kostet das Hektoliter 120 K, von dem zweiten 64 K; er will durch Mischung 7 Hektoliter zu 80 K bekommen. Wie viel Hektoliter wird er von jeder Gattung zu der Mischung nehmen müssen?

204. Wie viel Kupfer (Gehalt = 0) muss man mit 26 Kilogr. Silber, das 0·9 fein ist, legieren, um 0·52 feines Silber zu erhalten?

205. Zu 24 Kilogr. 0·8 feinem Silber werden 12 Kilogr. einer andern Silbersorte hinzugesetzt, wodurch die Mischung 0·75 fein wird; welchen Feingehalt hat die zweite Sorte?

---

206. Ein Vater schenkt seinem Sohne für jede fehlerfreie Aufgabe 10 Heller; für jede fehlerhafte Aufgabe dagegen muss der Sohn dem Vater 5 Heller zurückzahlen. Bei 20 Aufgaben ergab sich nun, dass dem Sohne von den erhaltenen Geschenken 80 Heller übrig blieben; wie viele Aufgaben hat er ohne Fehler, wie viele fehlerhaft gearbeitet?

207. Jemand dingt einen Gärtner auf einen Monat (30 Tage); er verspricht ihm während dieser Zeit die Kost und für jeden Tag, an dem er arbeitet, $\frac{4}{5}$ fl.; für jeden Tag, an dem der Gärtner nicht arbeitet, muss dieser dem Herrn $\frac{1}{5}$ fl. für die Kost bezahlen. Nach einem Monat erhielt der Gärtner 18 fl.; wie viele Tage hat er gearbeitet und wie viele nicht?

208. Zwei Fässer enthalten 351 Liter Wein; nimmt man aus dem ersten den sechsten und aus dem zweiten den dritten Theil heraus, so bleibt in beiden gleichviel übrig. Wie viel Liter enthält jedes Fass?

209. In einer Gesellschaft waren 2mal so viel Männer als Frauen; nachdem 8 Männer mit ihren Frauen weggiengen, blieben noch 4mal so viel Männer als Frauen. Wie viel Männer und Frauen waren anfangs da?

210. In einer Fabrik arbeiten 62 Arbeiter, theils Meister, theils Gesellen; jeder Meister erhält täglich 2 fl., jeder Geselle nur die Hälfte davon; würde man jedem Meister von seinem Lohne 0·4 fl. abziehen und dafür jedem Gesellen so viel zulegen, so würde der tägliche Lohn um 12·8 fl. mehr betragen. Wie viele Meister und wie viele Gesellen sind es?

211. Die Vorderräder eines Wagens haben 35 Decim., die Hinterräder 44 Decim. im Umfange; wenn nun ein Vorderrad von A bis B 387 Umdrehungen mehr gemacht hat als ein Hinterrad, a) wie vielmal hat sich jedes umgedreht, b) wie viel Meter ist A von B entfernt?

212. Gibt Jemand 10 h in die rechte Tasche, so hat er in dieser halb so viel als in der linken; gibt er aber dieselben in die linke Tasche, so hat er in dieser dreimal so viel als in der rechten. Wie viel enthält jede Tasche?

213. Ein Spieler verlor den dritten Theil seiner Barschaft und 1 K; beim zweiten Spiele gewann er ein Drittel des Restes weniger 1 K. Beim dritten Spiele gewann er den fünften Theil seiner jetzigen Barschaft und hatte nun im ganzen weder gewonnen noch verloren. Wie groß war seine anfängliche Barschaft?

---

214. Jemand verkaufte eine Ware mit 3% Verlust für 1784·8 fl.; wie viel hatte er im Einkaufe dafür gegeben?

215. Ein Kaufmann verkauft den Centner einer Ware für 161 K und gewinnt dabei 15%; wie theuer hatte er den Centner eingekauft?

216. Wie viel muss man heute gegen 6% ausleihen, damit man nach 3 Jahren sammt Zinsen $3010\frac{4}{5}$ fl. zurückerhalte?

217. Wie lange muss ein Capital zu p% angelegt bleiben, damit die Zinsen $\frac{1}{n}$ des Capitals betragen?

218. Zwei Capitalien sind auf Zinsen angelegt, 4400 K à 5% und 5500 K à $4\frac{1}{2}$%; in welcher Zeit werden sie zusammen 1870 K Zinsen gebracht haben?

219. Von zwei Capitalien, deren Summe 5350 K beträgt, ist das erste zu 5%, das zweite zu 4% angelegt; wie groß ist jedes, wenn das erste doppelt so viel Zins trägt als das zweite?

220. Für eine nach vier Jahren fällige Schuld bezahlt jemand bar 2400 fl., der Discont beträgt 480 fl.; wie viel % Discont werden jährlich gerechnet?

221. Jemand ist verpflichtet, 3000 K nach 1 Jahre zu zahlen. Statt dessen will er 1000 K sogleich und den Rest in 4 gleichen Terminen zu gleichen Beträgen abzahlen. Wie groß ist ein solcher Termin?

Bei dieser und der folgenden Aufgabe ist der Discont von Hundert zu rechnen; siehe Cap. 13, Aufg. 65.

222. Jemand ist verpflichtet, ein Capital nach 1 Jahre zu zahlen. Statt dessen will er in 4 Terminen, welche immer 3 Monate aus einander liegen, jedesmal $\frac{1}{4}$ des Capitals abzahlen. Wann ist die erste Rate fällig?

---

223. Ein Wasserbehälter fasst 9117 m^3. Derselbe kann durch 3 Röhren gefüllt werden; die erste liefert in 3 Stunden 144 m^3, die zweite in 4 Stunden 231 m^3 und die dritte in 5 Stunden ebensoviel, wie die zweite in 4 Stunden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn alle 3 Röhren geöffnet werden?

224. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, und zwar durch die erste Röhre allein in a (3), durch die zweite allein in b ($4\frac{1}{2}$) Stunden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt sein, wenn man das Wasser durch beide Röhren zugleich fließen läſst?

225. Ein Wasserbehälter kann durch eine erste Röhre allein in a (4) Stunden, durch eine zweite Röhre allein in b (8) Stunden gefüllt werden, hingegen kann der gefüllte Behälter durch eine dritte Röhre in c (6) Stunden entleert werden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn alle 3 Röhren geöffnet werden?

226. Ein Dampfschiff legt in einer Stunde stromaufwärts einen Weg von 10·2 Kilometer, stromabwärts einen Weg von 17·7 Kilometer zurück; welchen Weg würde das Schiff durch die Kraft der Maschine allein (bei stillstehendem Wasser), welchen Weg durch die Kraft des Stromes allein (bei stillstehender Maschine) in einer Stunde zurücklegen?

---

227. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich a (2·7346.. m); wie groß ist die andere, wenn sie um d (0·8135.. m) kleiner ist als die Hypotenuse?

228. Eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist um d (28·512 m) größer als ihre Projection auf die Hypotenuse. Wie groß ist die Hypotenuse, wenn die Projection der anderen Kathete gleich q (109·512 m) ist?

229. Die Höhe eines rechtwinkligen Dreieckes ist um d (4·76) größer als der kleinere Hypotenusenabschnitt und um e (16·32) kleiner als der größere Abschnitt. Wie groß ist dieselbe?

230. Wenn man die Grundlinie eines Dreieckes um 6 *cm* vergrößert und die Höhe um ebensoviel verkleinert, nimmt der Flächeninhalt um 42 cm^2 ab. Wie groß sind die Grundlinie und die Höhe, wenn ihre Summe gleich 40 *cm* ist?

231. Wie groß ist die Seite jenes Quadrates, dessen Flächeninhalt um 475 cm^2 wächst, wenn die Seite um 5 *cm* vergrößert wird?

232. Bestimme zwei regelmäßige Vielecke von der Eigenschaft, dass die Anzahl der Seiten des einen doppelt so groß ist als die des anderen, und ein Winkel des ersten um 10^0 größer ist als ein Winkel des zweiten.

233. Von einem Punkte ist an einen Kreis eine Tangente gezogen, welche um a (16 *cm*) kleiner ist als eine von demselben Punkte gezogene Secante, hingegen um b (8 *cm*) größer als deren äußerer Abschnitt. Wie groß ist die Tangente?

234. Eine Kreissehne wird durch eine zweite halbiert. Von den beiden Abschnitten der letzteren ist der eine um 3 *cm* größer, der andere um 2 *cm* kleiner als die Hälfte der ersten Sehne. Wie groß sind diese Sehnen?

---

235. Zwei Körper K′ und K″ bewegen sich auf einer geraden Linie in derselben Richtung von den Punkten A′ und A″ gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c′ und c″. Der Körper K′ verläſst den Punkt A′, welcher um d Längeneinheiten rückwärts von A″ liegt, um t Zeiteinheiten später, als der Körper K″ den Punkt A″ verläſst. Wann und wo werden beide Körper zusammentreffen? (Discussion des Resultates.)

236. Vom Orte A′ aus geht des Morgens 5 Uhr eine Locomotive ab, welche in 4·5 Stunden 105 Kilometer zurücklegt. Eine halbe Stunde später wird von A″ aus, welcher Ort 52·5 Kilometer hinter A′ liegt, der ersten Locomotive eine zweite nachgesendet, die 105 Kilometer in 3 Stunden fährt. Wann wird die zweite Locomotive die erste einholen?

237. Ein Courier soll von A aus einem Regimente, das vor 6 Tagen von dort abmarschiert ist und täglich 28 Kilometer vorwärts geht, Ordre bringen. In welcher Entfernung von dem gemeinschaftlichen Abgangsorte wird er dasselbe erreichen, wenn er täglich 84 Kilometer zurücklegt?

238. Zwei Körper bewegen sich von demselben Punkte aus nach derselben Richtung. Der erste hat die Geschwindigkeit c *m*, der zweite, welcher seine Bewegung um t Secunden später beginnt, hat die Geschwindigkeit c′ *m*. Nach welcher Zeit, vom Abgange des zweiten Körpers an gerechnet, werden beide Körper d *m* von einander entfernt sein?

239. Von A′ nach A″ sind 315 Kilometer. Um Mittag geht von A′ ein Eilwagen ab, der 10 Kilometer in der Stunde macht. Um wie viel Stunden früher muss von A′ eine Fahrpost, die in der Stunde nur 6 Kilometer zurücklegt, abgehen, damit sie mit dem Eilwagen gleichzeitig in A″ eintreffe?

240. Zwei Körper bewegen sich von zwei Punkten, deren Entfernung d *m* beträgt, mit den Geschwindigkeiten c und c' gegen einander. Der erste beginnt seine Bewegung um t Secunden früher als der zweite. Wann und wo werden beide Körper zusammentreffen?

241. A' und A'' sind durch eine Eisenbahn verbunden, deren Endpunkte 225 Kilometer von einander abstehen. Von A' geht gegen A'' ein Personenzug ab, der in jeder Stunde 30 Kilometer zurücklegt; zu gleicher Zeit geht von A'' gegen A' ein Lastenzug ab, der in jeder Stunde 20 Kilometer zurücklegt. Wann begegnen sich die beiden Züge?

242. Ein Courier M' geht von A' nach A'', ein anderer Courier M'' von A'' nach A'; M' tritt die Reise um 5 Tage früher an als M'', dagegen legt M'' täglich 20 Kilometer mehr zurück als M'. Nachdem M'' 240 Kilometer zurückgelegt hatte, traf er mit M' zusammen, und dann brauchte M' noch 4 Tage bis A'', und M'' noch 6 Tage bis A'. Wie viel Kilometer hat jeder täglich zurückgelegt, und wie groß ist die Entfernung zwischen A' und A''?

243. A' und A'' sind durch eine 152 Kilometer lange Eisenbahn verbunden. Von A' geht um 8 Uhr 30 Min. vormittags ein Zug nach A'' ab mit der Geschwindigkeit von 10 Meter per Secunde; an demselben Vormittage um 9 Uhr 15 Min. geht von A'' ein Zug mit der Geschwindigkeit von 9 Meter per Secunde nach A' ab. Wann und in welcher Entfernung von A'' begegnen sich diese Züge?

244. Von A' geht ein Courier, welcher täglich 14 Meilen zurücklegt, nach A''; zu gleicher Zeit wird von A'' ein Courier, welcher dem ersten nach 5 Tagen begegnen soll, nach A' abgeschickt. Wie viel Meilen muss der zweite Courier täglich zurücklegen, wenn die Entfernung A' A'' 150 Meilen beträgt?

245. Um 8 Uhr morgens fährt von A' nach A'' ein Eilwagen, der jede Stunde 9 Kilometer zurücklegt; 20 Minuten nach 2 Uhr nachmittags verlässt ein Dampfwagen den Ort A'' und langt auf einer neben der Landstraße liegenden Eisenbahn, indem er stündlich 30 Kilometer zurücklegt, zu derselben Zeit in A' an, zu welcher der Eilwagen in A'' ankommt. Wie groß ist die Entfernung zwischen A' und A''?

246. Zwei Körper bewegen sich von den Punkten A' und A'', deren Entfernung d Meter beträgt, gegen einander. Fängt der erste t' Stunden früher an sich zu bewegen, so treffen sie T' Stunden nach dem Abgange des zweiten zusammen; fängt der zweite t'' Stunden früher an sich zu bewegen, so treffen sie T'' Stunden nach dem Abgange des ersten zusammen. Wie viel Meter legt jeder in einer Stunde zurück?

247. Von zwei Orten gehen gleichzeitig zwei Boten einander entgegen. Der eine würde den ganzen Weg in t (15), der andere in t' (10) Stunden zurücklegen. Wann begegnen sie einander?

248. „Ein weidmann hetzet einen Fuchs, hat der Fuchs 60 sprüng bevor, und als offt der Fuchs thut 9 sprüng, so offt thut der Hund 6 sprüng. Aber doch thun 3 Hundsprüng so vil als 7 Fuchssprüng. Ist die Frag, wie vil der Hund muß sprüng thun, bis er den Fuchs erhasche?" (Aus der „Coss von Chr. Rudolff".)

249. Ein Dampfschiff und ein Segelschiff fahren von A nach B. Das erste legt in 3 Stunden 51 *km*, das zweite nur 15 *km* zurück. Das Segelschiff hat bereits 24 *km* zurückgelegt, bevor das Dampfschiff abfährt, und kommt 4 Stunden nach diesem in B an. Welche Zeit braucht es, um den ganzen Weg zurückzulegen, und wie groß ist die Entfernung beider Orte?

250. Zwei Körper bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises, welche p Längeneinheiten beträgt, zu gleicher Zeit von demselben Punkte aus in derselben Richtung mit den Geschwindigkeiten c' und c''. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten werden sie wieder zusammentreffen?

251. Zwei Körper bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises gleichzeitig von demselben Punkte aus in entgegengesetzter Richtung. Der eine legt in jeder Secunde einen Bogen von α^0 ($3^0\,12'\,30''$), der andere von β^0 ($1^0\,17'\,30''$) zurück; nach wie viel Secunden werden sich dieselben zum ersten-, zweiten-, nten mal begegnen?

252. Wie viel Zeit verfließt von einem Zusammentreffen der beiden Zeiger einer Uhr bis zum nächsten Zusammentreffen derselben?

253. Wie viel Minuten nach vier Uhr wird der Minutenzeiger einer Uhr über den Stundenzeiger zu stehen kommen?

254. Auf der Peripherie eines Kreises bewegen sich zwei Körper gleichförmig und in derselben Richtung; der erste beschreibt den Umfang in t Secunden und trifft mit dem zweiten alle T Secunden zusammen. In welcher Zeit vollendet der zweite einen Umlauf?

255. Auf zwei concentrischen Kreisen bewegen sich zwei Körper in derselben Richtung; der eine legt seinen Kreis in 27·322.. Tagen, der andere in 365·24.. Tagen zurück. Welche Zeit verfließt von dem Zeitpunkte, da beide sich auf demselben Radius befinden, bis dies wiederum der Fall ist?

256. Auf einem Kreise bewegen sich zwei Körper gleichzeitig von demselben Punkte aus nach entgegengesetzter Richtung; der eine legt den Kreis in t, der andere in t' Secunden zurück. Wann begegnen sich die beiden Körper zum ersten-, zweiten-, nten mal?

257. Zwei Körper bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises nach entgegengesetzter Richtung. Ihre Umlaufszeiten sind m bezüglich n Secunden, ihre anfängliche Entfernung d *m*. Wenn dieselben sich nach t Secunden zum erstenmal begegnen, wie groß ist die Peripherie des Kreises? Welcher Zeitraum liegt zwischen zwei Begegnungen?

4. Anwendung der Gleichungen des ersten Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten.

258. Wenn man zum Zähler und Nenner eines Bruches 7 addiert, so erhält er den Wert $\frac{4}{5}$; subtrahiert man vom Zähler und Nenner 2, so erhält er den Wert $\frac{1}{2}$. Welches sind Zähler und Nenner des Bruches?

259. Zwei Zahlen werden mit denselben zwei Ziffern geschrieben und verhalten sich wie 13 : 31; welche Zahlen sind es, wenn ihre Summe 88 beträgt?

260. Vermehre ich eine zweiziffrige Zahl um das 9fache ihrer Einer, so erhalte ich 80; vermehre ich sie dagegen um 18, so erscheinen in der Summe ihre Ziffern in umgekehrter Ordnung; wie heißt die zweiziffrige Zahl?

261. Zwei zweiziffrige Zahlen werden mit denselben Ziffern geschrieben. Setzt man die erste Zahl links vor die zweite und dividiert die so entstandene Zahl durch die zweite, so erhält man zum Quotienten 64 und zum Reste 38; wenn man hingegen die zweite vor die erste stellt und dann durch die erste dividiert, so erhält man 158 zum Quotienten und 21 zum Reste. Wie heißen die beiden Zahlen?

262. Eine dreiziffrige Zahl hat die Ziffernsumme 17. Die erste Ziffer links ist der vierte Theil der rechts folgenden zweiziffrigen Zahl, und die erste Ziffer rechts der neunte Theil der links stehenden zweiziffrigen Zahl. Wie heißt die Zahl?

263. Die Ziffernsumme einer dreiziffrigen Zahl ist 18. Vertauscht man die Einer mit den Hundertern, so ist die neue Zahl um 396 größer als die ursprüngliche; wenn man hingegen die Zehner mit den Hundertern vertauscht, so wächst die Zahl nur um 180. Wie heißt die Zahl?

264. Vertauscht man in einer dreiziffrigen Zahl mit der Ziffernsumme 11 die zweite Ziffer mit der ersten Ziffer links, so bleibt die Zahl ungeändert; vertauscht man aber die zweite mit der ersten Ziffer rechts, so wird die neue Zahl um 18 größer als die ursprüngliche. Wie heißt die Zahl?

265. In jedem von zwei Fässern ist eine gewisse Menge Wein. Gießt man aus dem ersten in das zweite so viel, als jetzt darin ist; dann aus dem zweiten in das erste so viel, als schon darin ist; dann wieder aus dem ersten in das zweite so viel, als darin übrig geblieben war, so enthalten beide Fässer gleich viel Wein, nämlich 72 Liter. Wie viel Liter enthielt jedes Fass?

266. A und B machen eine Wette von 12 Kronen; gewinnt A, so hat er dreimal so viel Geld als B; verliert er, so hat er nur doppelt so viel als B. Wie viel Geld hat jeder?

267. Drei spielen mit einander; im ersten Spiele verliert der erste an jeden der anderen so viel, als jeder von diesen bei sich hatte; im zweiten Spiele verliert der zweite an den ersten und dritten so viel, als jeder derselben hat; im dritten Spiele verliert der dritte an den ersten und zweiten so viel, als jeder hat; nach geendigtem Spiele hat jeder 24 Kronen. Wie viel hatte jeder am Anfange des Spieles?

268. A sagt zu B: Gib mir 10 h, so habe ich 9mal so viel als du. Darauf antwortet B: gib du mir so viel, so habe ich eben so viel als du. Wie viel hat jeder?

269. Jemand nimmt abwechselnd aus der einen Tasche den dritten Theil des darin befindlichen Geldbetrages und gibt denselben in die andere Tasche. Nachdem er dies viermal gethan hat, hat er in jeder Tasche 32 h. Wie viel hatte er anfänglich in jeder Tasche?

270. Eine Frau bringt Eier zu Markte. Unterwegs werden ihr 10 Eier zerbrochen. Hätte sie jedes Stück um $\frac{1}{2}$ h theurer verkaufen können, als sie ursprünglich beabsichtigte, so hätte sie keinen Schaden gehabt. Da es ihr aber nur gelingt, die Hälfte der Eier zum ursprünglichen Preise zu verkaufen, und sie die andere Hälfte per Stück um $\frac{1}{2}$ h billiger verkaufen muss, so nimmt sie um 60 h weniger ein, als sie erwartet hatte. Wie viel Eier hatte sie, und was sollte jedes Stück kosten?

271. Ein Vater ist doppelt so alt als seine beiden Söhne zusammen. Vor 4 Jahren war er 4mal so alt als sein älterer und 6mal so alt als sein jüngerer Sohn. Wie alt ist jeder von ihnen?

272. Von drei Metallstangen enthält

die erste	4 Dekagr. Gold,	8 Dekagr. Silber,	12 Dekagr. Kupfer,
die zweite	8 „ „	10 „ „	2 „ „
die dritte	10 „ „	6 „ „	14 „ „ .

Aus diesen will man durch Legierung eine Metallstange erhalten, welche 10 Dekagr. Gold, 10 Dekagr. Silber und 11 Dekagr. Kupfer enthält; wie viel Dekagr. muss man von jeder der drei Metallstangen dazu nehmen?

273. Jemand hat 3 Stücke Silber von dem Feingehalte 0·900, 0·800 und 0·720, welche zusammen 2000 g wiegen. Wenn er die beiden ersten zusammenschmilzt, erhält er den Feingehalt 0·840; thut er dies mit den beiden letzten, so erhält er den Feingehalt 0·750. Welches Gewicht hat jedes Stück?

274. Zwei Körper vom specifischen Gewichte s_1 und s_2 sollen so mit einander verbunden werden, dass der entstehende Körper p Kilogr. wiege und das specifische Gewicht s habe; wie viel Kilogr. eines jeden Körpers hat man zu nehmen?

275. Wie groß sind die specifischen Gewichte zweier Körper A und B, wenn a Kilogr. vom ersten und b Kilogr. vom zweiten zusammen das

specifische Gewicht s, dagegen a_1 Kilogr. vom ersten und b_1 Kilogr. vom zweiten zusammen das specifische Gewicht s_1 haben?

276. Eine aus Gold und Silber gemachte Krone des Königs Hiero von Syracus wog 20 Pfund, unter Wasser getaucht nur $18\frac{3}{4}$ Pfund; wenn nun Gold im Wasser scheinbar $\frac{1}{19}$ und Silber $\frac{1}{10}$ von seinem Gewichte verliert, wie viel Gold und wie viel Silber war in der Krone?

277. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden, und zwar durch die Röhren R_1 und R_2 in a, durch R_1 und R_3 in b, durch R_2 und R_3 in c Stunden; wie viel Zeit braucht jede Röhre allein dazu, um den Behälter zu füllen?

278. Zu einer Arbeit erbieten sich drei Personen, A, B und C; A und B würden zusammen die verlangte Arbeit in 18 Tagen liefern können, A und C zusammen könnten dies in 12 Tagen, B und C zusammen in 9 Tagen. In welcher Zeit kann die Arbeit durch alle drei Personen zusammen geleistet werden?

279. Wird die Besatzung einer Festung um 2000 Mann verstärkt, so reicht der Proviant für 15 Tage weniger lang aus. Wenn hingegen dieselbe um 3000 Mann vermindert wird, so kommt dieselbe 24 Tage länger aus. Wie stark war die Besatzung und für welche Zeit war dieselbe verproviantiert?

280. Zwei Arbeiter A und B können eine Arbeit in 20 Tagen vollenden. Nach 9 Tagen erkrankt A, und B vollendet die Arbeit in weiteren $24\frac{3}{4}$ Tagen. Wie viel Tage hätte jeder allein zu der Arbeit gebraucht?

281. Zwei Capitalien, von denen das eine zu $3\frac{3}{4}\%$, das andere zu 4% ausgeliehen ist, tragen zusammen jährlich 414·25 K Zinsen. Wäre das erste Capital zu 4% und das zweite zu $3\frac{3}{4}\%$ angelegt, so würden die Zinsen um 6·95 K größer sein. Wie groß sind die beiden Capitalien?

282. Ein Capital ist um 400 fl. größer als ein anderes; da es aber $\frac{1}{2}\%$ weniger trägt, so sind die Zinsen beider gleich. Würde hingegen das erste Capital zum Zinsfuße des zweiten und dieses zum Zinsfuße des ersten angelegt, so wären die jährlichen Zinsen des ersten Capitales um 30 K größer als die des zweiten. Wie groß sind die beiden Capitalien?

283. Jemand hat zwei Capitalien, das eine zu 3%, das andere zu $4\frac{1}{2}\%$ angelegt, welche ihm zusammen jährlich 352 K Zinsen brachten. Hätte er dieselben um $\frac{1}{2}\%$ höher angelegt, so hätte er jährlich 53·5 K Zinsen mehr erhalten. Wie groß sind die Capitalien?

284. Ein Radfahrer fährt um 8 Uhr von einem Orte A nach einem 15 *km* entfernten Orte B und von dort sofort zurück nach A. Ein Fußgeher geht um 8 Uhr 20 Minuten von B nach A. Der Radfahrer begegnet ihm um 9 Uhr und überholt ihn um 9 Uhr 48 Minuten. Wie viel Meter legt jeder von beiden in der Minute zurück?

285. Bewegen sich zwei Punkte auf einem Kreise gleichzeitig von demselben Orte aus in derselben Richtung, so treffen sie stets nach 15 Sec. zusammen; wenn sie sich aber in entgegengesetzter Richtung bewegen, so begegnen sie sich stets nach 3 Sec. Wie viel Grad legt jeder in der Secunde zurück?

286. Zwei Boten gehen von zwei Städten, welche 74·4 *km* von einander entfernt sind, einander entgegen. Wenn A 2 Stunden später aufbricht als B, dann begegnen sie sich 6 Stunden nach Abgang des A; wenn aber B um 2 Stunden später aufbricht als A, dann begegnen sie sich $5\frac{1}{9}$ Stunden nach Abgang des B. Wie viel Meter legt jeder in der Secunde zurück?

287. Verwandle folgenden Bruch in eine Summe von Brüchen, deren Nenner die Factoren des gegebenen Nenners sind:

$$\frac{39 + a}{(2 + 3a)(5 - 4a)}.$$

288. Ebenso: $$\frac{15 + 88a + 124a^2}{(1 + 2a)(1 + 3a)(1 + 4a)}.$$

289. Ebenso: $$\frac{1 - x + x^2}{x - x^3}.$$

---

290. Die Summe der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes ist s (223 *m*); wenn man die kleinere um d (60 *m*) vergrößert und die größere um e (90 *m*) verkleinert, so wächst der Flächeninhalt um m (1950 m^2). Wie groß sind die Katheten?

291. Vergrößert man die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes um 8 *cm*, die andere um 2 *cm*, so wächst das Quadrat der Hypotenuse um 144 cm^2 und der Flächeninhalt um 24 cm^2. Bestimme die Seiten.

292. Zwei rechtwinklige Dreiecke haben eine gleiche Hypotenuse. Eine Kathete des ersten Dreieckes ist um 4 *m* kleiner, die andere um 8 *m* größer als die entsprechenden Katheten des zweiten Dreieckes; wenn nun der Flächeninhalt des ersten Dreieckes um 34 m^2 größer ist als der des zweiten, wie groß sind die Katheten?

293. In einem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten 42 *dm*, die Summe der zugehörigen Höhen 40·32 *dm* und die Summe aus einer Seite und der zugehörigen Höhe 41 *dm*. Wie groß sind diese Seiten?

294. Grundlinie und Höhe eines Dreieckes verhalten sich wie m : n (6 : 5); vergrößert man dieselben um d (9 *cm*), so ist der Inhalt des entstandenen Dreieckes um p (189 cm^2) größer als der des ursprünglichen. Wie groß ist der letztere?

295. Der Flächeninhalt eines Rhombus wächst um 324 cm^2, wenn man jede Diagonale um 6 *cm* vergrößert, hingegen um 54 cm^2, wenn man die eine Diagonale um 6 *cm* vergrößert und die andere um 4 *cm* verkleinert. Wie groß sind die Diagonalen?

296. Die Centriwinkel zweier gleicher Kreissectoren mit den Radien 20 *cm* und 16 *cm* unterscheiden sich um 27°; wie groß sind dieselben?

297. Ein Kreisring hat die Breite d. Jede Sehne des größeren Kreises, welche den kleineren berührt, hat die Länge s. Berechne die Radien beider Kreise.

---

15. Potenzen.

$1^n = 1. \quad 0^n = 0. \quad (-a)^{2n} = a^{2n}. \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$

1. $(-a)^4 - (-a)^3$. **2.** $(-a)^6 - (-a)^4$.

3. $(-2)^3 + (-3)^2 + (-1)^5 - (-2)^5 - (-1)^4 + (-2)^2$.

4. $(-2)^2 . (-3)^3 - (-2)^4 . (-4)^2 . (-1)^3 - \frac{(-4)^3}{(-2)^6}$.

5. Berechne: $2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ für $x = -2$.

6. Berechne: $(x-1)^5 - (x+1)^4 - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x+3)^3}$ a) für $x = -2$; b) für $x = -1$.

7. Berechne $\frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ a) für $x = -2$; b) für $x = -1$.

$a^m . a^n = a^{m+n}.$

8. $a^{3n} . a$. **9.** $a^{3n} . a^3$. **10.** $a^{3n} . a^n$.

11. $a^x b^x a^{3x} b^{2x}$. **12.** $a^{m-1} a^{n+1} . a^{m+n} b^{3m-2n} . b^{2m+3n}$.

13. $3(a+b)^3 . 4(a+b)^2$. **14.** $(-a)^4 . (-a)^3$. **15.** $(-a)^{2m+1} . (-a)^{2n-1}$.

16. Berechne 2^{13} $(= 256 . x)$. **17.** Berechne 3^8 mittelst $3^5 = 243$.

18. $x(x-1)^n . x^n . (x-1)^3 x^{n+3} . (x-1)$. Probe für $x = -2$, $n = 2$.

19. $(a-b)(b-a)^2$. **20.** $(a-x)^n (x-a)^{2n+1}$.

21. $(x^{3a-b} - x^{2a} + x^{a+b} - x^{2b} + x^{3b-a})(x^a + x^b)$.

22. $(x^{3m} - x^{2m} + x^m - 1)(x^m + 1)$.

23. $(x^{2m} + 2x^m y^n + 4y^{2n})(x^m - 2y^n)$.

Zerlege in Factoren:

24. $8m^8 - 16m^5 + 24m^3$. **25.** $x^{2n} - x^n$.

26. $x^{2m} - x^{3m+1} + x^{4m+3}$. **27.** $x^{m+4} + 3x^{m+2} + 4x^{m-1}$ $(m > 1)$.

28. $x^n - x^{n-1} + x^{n-2}$ $(n > 2)$.

29. Vereinige: $\frac{a^n}{a+b} - \frac{b^{n+1}}{a^2 - b^2} - \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a^3 + b^3}$.

$a^m : a^n = a^{m-n}.$

30. $x^{10} : x$. **31.** $x^n : x$. **32.** $a^{m+n} : a^{m-n}$.

33. Kürze ab: a) $\frac{a^2}{a^{11}}$; b) $\frac{a^3}{a^{x+4}}$; c) $\frac{a^{m-n}}{a^{m+n}}$.

34. $6a^{m+n} : 2a^n$. **35.** $9a^{2n+1} : 3a^3$.

36. $\frac{5ax^4}{6by^3} \cdot \frac{b^2x^2}{ay} \cdot \frac{3a^2y^4}{5b^3x^3}$. **37.** $\frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5} : \frac{4a^5x^3y}{5b^2cz^4}$.

38. $(9a^{2m+3}b^{m+1} - 12a^{m+n}b^{m+1}) : 3a^{m+3}b^{m-n}$.

39. $(9x^{2m+2} - 2x^{m+1} + \frac{1}{9}) : (3x^{m+1} - \frac{1}{3})$.

40. $(a^{2n} - b^{2n}) : (a^n + b^n)$. **41.** $(x^{3m} - y^{3m}) : (x^m - y^m)$.

42. $(-a)^7 : -(-a)^5$. **43.** $(-a)^9 : -a^4$.

44. $(a^{3n} - 2a^{2n} + 4a^n - 8) : (a^n - 2)$, Probe für $a = -2$, $n = 2$.

45. $(x^{3m-n} - x^{2m} + x^{2n} - x^{3n-m}) : (x^m - x^n)$.

46. $(a^8 - b^8) : (a^5 + a^4b + ab^4 + b^5)$.

(Aufgaben: 7, 97—122.)

48. $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}}$. **49.** $\frac{a^2b}{(a+b)^m} - \frac{b}{(a+b)^{m-2}}$.

50. $\frac{a^n}{(a-b)^{n+1}} - \frac{b^n}{(a-b)^{n-1}}$.

51. Suche das gr. gem. Maß zwischen $x^{3n} - 64y^{6p}$ und $x^{2n}y^{3p} - 16y^{7p}$.

$$(ab)^m = a^m b^m.$$

52. $(2ax)^3$. **53.** $(7x)^3.(3y)^4.(2az)^5$. **54.** $(ab)^{m-2n}.(ac)^{2m-n}.(bc)^{n-m}$.

55. $(-4b)^2.(3x)^3$. **56.** $(5x)^3.(-2y)^4$. **57.** $(-8a)^2.(-3b)^5$

58. $\frac{(3ab)^5.(2ac)^6}{(6bc)^3.(2a)^2.(3b)^3.(4c)^4}$.

59. α) $2^7.5^7$; β) $25^4.4^4$; γ) $2^6.4^6.125^6$.

60. $(x+a)^4.(x-a)^4$. **61.** $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n.a^n$. **62.** $\left(\frac{2a}{5x}\right)^3.\left(\frac{15x}{2a}\right)^3$.

63. $x^n.\left(\frac{1}{x}\right)^n$. **64.** $\left(-\frac{3a}{4b}\right)^2.\left(-\frac{2b}{5a}\right)^2$.

65. $\left(\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}\right)^m.\left(\frac{c+d}{a-b}\right)^m$. **66.** $\left(\frac{a^4-b^4}{c+d}\right)^m.\left(\frac{c^2-d^2}{a^3+a^2b+ab+b^3}\right)^m$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}; \quad \frac{1^m}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m.$$

67. α) $(-1\frac{1}{2})^4$; β) $(-3\frac{1}{3})^5$; γ) $(6\frac{3}{4})^2$.

68. $(\frac{1}{2})^5 - (-0{\cdot}1)^3 + (-0{\cdot}2)^4 - (-0{\cdot}25)^3$.

69. $\left(\frac{ab}{2cd}\right)^4.\left(\frac{2c}{3ab}\right)^3.\left(\frac{3bc}{5a}\right)^2$. **70.** $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{2n+1}.\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n+1}.\left(\frac{1}{a+b}\right)^{n-1}$.

71. $\left(\frac{2ax-3by}{3b}+y\right)^4$. **72.** $\left(1-\frac{2bx-3a}{2bx}\right)^5$.

73. α) $6^8 : 3^8$; β) $(-3\frac{3}{5})^4 : (-1\frac{1}{5})^4$; γ) $4{\cdot}725^2 : 1{\cdot}26^2$;
δ) $(-4\frac{2}{5})^5 : (2\frac{1}{5})^5$.

74. $(8ab)^4 : (2b)^4$. **75.** $(x^2-y^2)^m : (x-y)^m$.

76. $x^n : \left(\frac{1}{y}\right)^n$. **77.** $\left(\frac{3ax}{4by}\right)^5 : \left(\frac{2x}{3b}\right)^5$.

78. $\left(\frac{a-b}{a}\right)^m : \left(\frac{a+b}{a}\right)^m$. **79.** $\left(x-\frac{y^2}{x}\right)^n : \left(\frac{x}{y}+1\right)^n$.

80. $\frac{1}{0 \cdot 1^2} - \frac{1}{(-0 \cdot 2)^3} + \frac{1}{(-0 \cdot 5)^4} + \frac{1}{0 \cdot 25^3}$.

81. Berechne $\frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^3+2x^2+4x+8}$ für $x=-\frac{1}{2}$.

$$(a^m)^p = a^{mp} = (a^p)^m.$$

82. $\alpha)$ $(-2^2)^3$; $\beta)$ $[(-2)^2]^3$; $\gamma)$ $(-2^3)^3$; $\delta)$ $[(-2)^3]^3$.

83. $[(-y)^3]^5$. **84.** $(-a^2)^3$. **85.** $(-a^3)^2$.

86. $[(-z^2)^3]^4$. **87.** $(-a^{2m})^{2n-1}$. **88.** $(-a^{2n-1})^{2m}$.

89. $(m^3)^4 . (-n^2)^6$. **90.** $\left(\frac{a^2 b^3}{cd^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3ab^2}{2c^2d}\right)^5$.

91. $\left(\frac{a^4 b^5 c^2}{x^5 y^7}\right)^3$. **92.** $\left(\frac{3c^3x^2}{4a^2b^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{10a^4b}{9c^3x^2}\right)^3$. **93.** $(a^{m+n}b^{m-n})^{m+n}$.

94. $(3a^2 . 2b^2)^4 . (4ab)^3$. **95.** $\left(\frac{3x^2}{2y}\right)^3 \cdot \left(\frac{3y^2}{4x}\right)^2$. **96.** $[(xy^2)^2 . z^2]^2$.

97. $\left(-\frac{3a^3x}{4b^2y^2}\right)^4$. **98.** $\left[\left(-\frac{ab^2x^3}{c^3d^2z}\right)^3\right]^2$.

99. $(-2a^3)^4 + (-2a^4)^3 - (-3a^6)^2 - (-5a^4)^3$.

100. $[(x+3y)^{2a+1}]^{3a-2} : [(x+3y)^{2a-3}]^3$.

101. $\left(\frac{a^4 b^3 c^2}{x^5 y^7}\right)^3 : \left(\frac{a^3 b^4 c}{x^4 y^6}\right)^4$. **102.** $\left\{\frac{(2x^3y^2)^3 . (3x^4y^3)^2}{6x^2y^2}\right\}^3$.

103. $\left(\frac{2a^2x^3}{3by^3}\right)^3 : \left(\frac{5b^2y}{6ax^2}\right)^2 : \left(\frac{4a^2}{3b^2}\right)^4$. **104.** $\left\{\frac{(2xy^2)^5 . (3x^2z^2)^4 . (5y^3z)^3}{(10x^3y^2)^2 . (6y^2z^4)^3}\right\}^2$.

105. $(x^m - y^n)^2$. **106.** $(5a^2-4x^2)^2 + (5a^2+4x^2)^2$. **107.** $(5x^3-6y^3)^2$.

108. $(a^2-3b^3)^3$. **109.** $(mx^6-nx^3)^3$. **110.** $(2a^x+3a^y)^3$.

111. $(x^2-abx+a^2b^2)^3$. **112.** $(a^{2n}-2a^n+4)^2$.

113. $(x^n-2)^5$. **114.** $(3a^{n-1}b^3-2ab^{n+1})^3$.

115. Zerlege in Factoren: a) a^6+b^6; b) $a^{10}+1$; c) $a^{12}+b^{12}$.

116. Ebenso: a) $x^{2m}-y^{2p}$; b) x^6-y^{12}; c) x^6+y^{12}.

117. Ebenso: a) x^3-y^6; b) x^3+y^6; c) x^2-y^6.

$$a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

118. Bestimme die Werte folgender Potenzen:

a) 2^{-6}; b) 6^{-2}; c) 4^{-3}; d) $0 \cdot 4^{-1}$; e) $0 \cdot 125^{-3}$;

f) $\frac{1}{3^{-4}}$; g) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-5}$; h) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-3}$; i) $\left(\frac{15}{16}\right)^{-1}$; k) $\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{m}{x}\right)^{-2}$.

119. $\frac{(-2)^{-3}}{(-0 \cdot 2)^3} - \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} . (-3)^{-2} . 0 \cdot 1^{-1}$.

120. $(-2)^5 . (-5)^{-2} . (-3)^0 . (-6)^{-1}$.

121. Berechne $(x-1)^3 - (x+2)^{-2} - \frac{1}{(x+1)^{-4}} + (x+3)^3 + x^{x+3}$ für $x=-3$.

122. $3\cdot10^2+2\cdot10^1+5\cdot10^0+4\cdot10^{-1}+7\cdot10^{-2}$.

123. Befreie von den negativen Exponenten:

a) $2x^2y^{-3}$, b) $3a^3b^{-3}$, c) $ab^{-1}x^{-1}y$,

d) $\frac{ax^{-m}}{by^{-m}}$, e) $\frac{3a^{2m-3}y^{-1}}{4b^{2n-2}x^{-2}}$, f) $\frac{13a^{-2}b^{-1}c^5}{8x^3y^{-5}z^{-2}}$.

124. Bringe auf die Form von ganzen Zahlen:

a) $\frac{5x}{y}$, b) $\frac{2ax^{-2}}{b^{-1}}$, c) $\frac{m^3x^2}{y^3z^{-2}}$, d) $\frac{12a^{-4}b}{25x^{-3}y^2}$.

Berechne und stelle die Resultate mit positiven Exponenten dar:

125. $a^5\cdot a^{-3}$. **126.** $x^{m+2}\cdot x^{-3}$. **127.** $(-3a^{-5})\cdot(-2a^{-1})$.

128. $x^{n-3}:x^{-5}$. **129.** $a^{-4}:-a^4$. **130.** $-4a:a^{-4}$.

131. $6a^3b^{-2}:2a^4b^{-3}$. **132.** $36a^{-1}b^{-2}c^{-3}:6a^{-2}b^{-3}c^{-4}$.

133. $(ax^{-4}+bx^{-3}+cx^{-2}+dx^{-1}+e)\cdot x^4$.

134. $(x^{-1}y^{-5}-2xy^{-3}+3x^3y^{-1})\,(3x^{-1}y^{-5}+2xy^{-3}-x^3y^{-1})$.

135. $(a^{-5}+b^{-5}):(a^{-1}+b^{-1})$.

136. $[15x^{-(m+3)}-31x^{-(m+2)}+14x^{-(m+1)}]:(5x^{-3}-7x^{-2})$.

137. $(x^{-2})^4$. **138.** $(x^{-1})^{-1}$. **139.** $[(x^{-m})^n]^{-p}$.

140. $(-a^3)^{-2n}$. **141.** $(-a^{-2})^{2n-1}$. **142.** $(-a^{2n-1})^{-2}$.

143. $(a^{-3}b^4)^{-2}$. **144.** $(3a^2b^{-1}x^3y^{-1})^3$ **145.** $(-2x^{-3}y^3z^{-1})^4$.

146. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2}$. **147.** $\left(\frac{2a^2b^3}{3mx^{-2}}\right)^{-1}$. **148.** $\left(\frac{1}{x}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{-6}$.

149. $5^{-2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$. **150.** $(5a^{-1})^{-2}\cdot(3b)^{-2}$. **151.** $(-a^2)^{-5}-(-a^5)^{-2}$.

152. $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{-m}:\left(\frac{x}{x-y}\right)^{-m}$. **153.** $\frac{(a^2b^{-3})^{-1}}{(x^2y^{-2})^{-1}}$. **154.** $(3a^{-3}x^2-4a^2x^{-3})^2$.

155. $(x-y)^{-2}\cdot(y-x)^{-3}$. **156.** $(a^n-2a^{-n})^3$.

Löse folgende Exponentialgleichungen auf mit Beachtung des Satzes:
Aus $a^m=a^n$ folgt $m=n$.

157. $a^{x+2}=a^5$. **158.** $a^{4-x}=a^2$. **159.** $m^{2x+3}=m^{8-3x}$.

160. $a^x=1$. **161.** $(a^{x-4})^{x-1}=(a^{5-x})^{4-x}$.

162. $8^x\cdot4^{3x}=16^{x+5}$. **163.** $0{\cdot}5^{10x-9}=2^{3-13x}$.

164. $16^x=0{\cdot}25^{x-6}$. **165.** $6{\cdot}25^{x-1}=0{\cdot}4^{x-7}$.

166. $8^{-x}=\frac{4^x}{32}$. **167.** $\frac{2^{3x-10}\cdot3^{x+2}}{8^{x-4}\cdot6^{7-x}}=\frac{1}{3}\cdot9^{x-2}$.

168. $a^{2x+3}\cdot a^{3x-4}=\frac{a^5}{a^{6-4x}}$. **169.** $2^{x+3}+2^x=144$.

170. $3^x=270-3^{x-2}$. **171.** $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-3}+3^{x-4}$.

172. $2\cdot9^{x+1}-3\cdot4^x=6\cdot4^{x+1}+6\cdot9^x$.

173. $a^x\cdot a^y=a^5$, **174.** $4^{2x-3}\cdot2^{3y-2}=1024$,

$\frac{a^x}{a^y}=\frac{1}{a}$. $3^{x-2}\cdot3^{y-3}=\frac{1}{9}$.

175. $a^{4x-y}:a^{y-x}=a$, $a^{x+y}:a^{8x-2y}=1$.

---

16. Wurzeln.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a\,;\ \sqrt[n]{a^n} = a.$$

1. Von welcher Zahl ist a die nte Potenz?
2. Zerlege 64 in 2, 3, 6, 10, n gleiche Factoren.
3. Berechne: $\sqrt{100 - 36} - (\sqrt{100} - \sqrt{36})$.
4. Ebenso: $\sqrt{9 + 16} - (\sqrt{9} + \sqrt{16})$.
5. Setze zwischen $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$ und $a + b$ das richtige Zeichen.
6. $\sqrt{25} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{16} + \sqrt[5]{32}$.
7. $(\sqrt[5]{a})^2 (\sqrt[5]{a})^3 - \sqrt[6]{(a^{-2})^{-3}} + \sqrt{a}.\sqrt{a}$.
8. $[(\sqrt[2n]{a})^n + (\sqrt[2n]{b})^n]\,[(\sqrt[2n]{a})^n - (\sqrt[2n]{b})^n]$.
9. $(a + b + \sqrt{2ab})\,(a + b - \sqrt{2ab})$.
10. $2\sqrt[5]{a^{10}} + 3\sqrt[3]{a^6} + 4\sqrt{a^4} + \sqrt[n]{a^{2n}}$. $(\sqrt[5]{a^{10}} = \sqrt[5]{(a^2)^5} = a^2)$.
11. $(x + \sqrt{x^2 - y^2})\,(x - \sqrt{x^2 - y^2})$.
12. Zerlege in zwei binomische Factoren a) $a - b$; b) $a^2 - 6b$.
13. $5\sqrt[8]{a^3} - 2\sqrt[8]{a^3} + 3\sqrt[8]{a^3}$.
14. $a\sqrt[m]{x^n} - b\sqrt[m]{x^n}$.
15. $\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a}$.
16. $m\sqrt{a} + m\sqrt[3]{a} - 2\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{a}$.
17. $a\sqrt[m]{b} - 2b\sqrt[n]{a} - 2a\sqrt[m]{b} + 8b\sqrt[n]{a} - 5b\sqrt[n]{a} + 6a\sqrt[m]{b}$.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\ [\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}].$$

18. $\sqrt[5]{32a^5b^5}$.
19. $\sqrt{9.49}$.
20. $\sqrt[3]{27a^3b^6}$.
21. $\frac{a}{b}\sqrt[3]{b^3x^3}$.
22. $\sqrt{\sqrt[3]{16^3.81^3}}$.
23. $\sqrt[3]{\sqrt[m]{8^m.27^m}}$.
24. $\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2}$.
25. $\sqrt[m]{\sqrt{25a^2b^2}}$.
26. $\sqrt{1200}$.
27. $7\sqrt{75}$.
28. $\sqrt[3]{48}$.
29. $2\sqrt[3]{81}$.
30. $\sqrt[4]{80}$.
31. $\sqrt[m]{x^{m+n}}$.
32. $\sqrt{x^3}$.
33. $\sqrt{4a^3b}$.
34. $x\sqrt{y^3z^3}$.
35. $m\sqrt[3]{a^6b^5c^4}$.
36. $\frac{1}{xy}\sqrt[m]{x^{m+1}y^{m+1}}$.

Stelle mit gleichen Radicanden dar und reduciere:

37. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + 3\sqrt{50}$.
38. $4\sqrt{50} + 2\sqrt{72} + \sqrt{128}$.
39. $6\sqrt{125} - 3\sqrt{80} + 2\sqrt{20}$.
40. $4\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$.
41. $6\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 7\sqrt{48} - 5\sqrt{75} + 2\sqrt{108}$.
42. $2\sqrt{xy^2 + y^3} - \sqrt{(x + y)^3} + \sqrt{(x^2 - y^2)\,(x - y)}$.

43. $5a\sqrt{12x^3} - 2x\sqrt{27a^2x}$. 44. $4\sqrt[3]{3x} - 2\sqrt[3]{24x} + \sqrt[3]{192x}$.

45. $\sqrt{4x^3y} - 5y\sqrt{xy} - x\sqrt{4xy} + \sqrt{25xy^3}$.

46. $4\sqrt{1+a^2} - \sqrt{9+9a^2} - 2\sqrt{x^2+a^2x^2} + \sqrt{x^4(1+a^2)}$.

47. $\sqrt[n]{a^{n+2}b^{n+1}} - \sqrt[n]{a^{n+1}b^{n+2}}$. 48. $\sqrt[m+n]{a^{2m+n}b^{m+2n} - a^{m+2n}b^{2m+n}}$.

49. $\sqrt{8}.\sqrt{2}$. 50. $\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{200}$. 51. $6\sqrt{6}.5\sqrt{2}$.

52. $\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{xy}$. 53. $\sqrt[3]{\frac{4a}{9b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{3a}}$.

54. $\sqrt{9x^2-4}.\sqrt{\frac{3x-2}{(3x+2)^3}}$. 55. $\sqrt[n]{ax^{n+1}} \cdot \sqrt[n]{bx^{n-1}}$.

56. $\sqrt[m]{xy^2z^3}.\sqrt[m]{x^2y^{m-2}z^{2m-8}}.\sqrt[m]{x^{m-3}z^{5-m}}$.

57. $(\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b}).\sqrt[3]{x}$. 58. $(3\sqrt[3]{2a} + 4).\sqrt[3]{4a^2}$.

59. $(2\sqrt{8} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50} + 4\sqrt{72}).\sqrt{2}$.

60. $(4 + 3\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$. 61. $(8 - 3\sqrt{5})(7 + 21\sqrt{5})$.

62. $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$. 63. $\sqrt{3+\sqrt{5}}.\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

64. $\sqrt{x+y+\sqrt{2xy}}.\sqrt{x+y-\sqrt{2xy}}$.

65. $\sqrt{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}.\sqrt{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$.

66. $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})$.

67. $(\sqrt{a+b} - \sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a+b} + \sqrt{a} - \sqrt{b})$.

68. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$. 69. $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{3x+\sqrt{x}}{1-x}$.

70. $(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1})(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})$.

71. $(a + \sqrt{b})^2$. 72. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.

73. $(5 - 2\sqrt{5})^2$. 74. $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 (5 + 2\sqrt{6})$.

75. $(\sqrt{5} + \sqrt{10} + 15)^2$. 76. $(1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2})^2$.

77. $(3x\sqrt{y} - 2y\sqrt{x})^2$. 78. $(\sqrt{2x+a} - \sqrt{2x-a})^2$.

79. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$. 80. $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$.

81. $\left\{\sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{2}}\right\}^2$. 82. $\left\{\sqrt{\frac{4+\sqrt{11}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{11}}{2}}\right\}^2$.

83. $\left\{\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right\}^2$.

84. $\left[\sqrt{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} \pm \sqrt{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right]^2$.

85. $\left[\sqrt{a^3+\sqrt{a^6-b^6}} \pm \sqrt{a^3-\sqrt{a^6-b^6}}\right]^2$.

Bringe in den folgenden Wurzeln den Factor unter das Wurzelzeichen:

86. $a\sqrt[n]{x}$. 87. $4\sqrt{5a}$. 88. $4x\sqrt[3]{x}$.

89. α) $2\sqrt{3}$; β) $3\sqrt[3]{2}$; γ) $2\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$; δ) $5\sqrt{0\cdot 2}$; ε) $2\sqrt[3]{0\cdot 5}$.

90. $x\sqrt{\frac{a}{x}}$. **91.** $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}$. **92.** $ab\sqrt{\frac{1}{a^{p-1}b^{p-1}}}$.

93. $(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. **94.** $a^2bc^{-2}\sqrt[3]{a^1b^{-1}c^2}$. **95.** $\frac{a^2b}{c^3}\sqrt[n]{\frac{c^{3n-1}}{a^{2n+1}b^{n+1}}}$.

96. $(x-y)\sqrt[3]{\frac{x^2+xy+y^2}{x-y}}$. **97.** $(5-3\sqrt{2})\sqrt{3-\sqrt{2}}$.

98. $(\sqrt{7}-\sqrt{6})\sqrt{84+13\sqrt{2}}$. **99.** $(5-\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

100. $(1+\sqrt{3}-\sqrt{6})\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \cdot \left[\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right].$$

101. $\sqrt{\frac{49}{64}}$. **102.** $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$. **103.** $\sqrt{2\frac{7}{9}}$. **104.** $\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}}$.

105. $\sqrt{\frac{49}{16}-\frac{5}{2}}$. **106.** $\sqrt{\frac{8a^4b}{27c^4}}$. **107.** $5\sqrt{\frac{3x}{25a^2}}$. **108.** $\sqrt{a^{m-2}}$.

109. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2}{b^2}}$. **110.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

111. $\sqrt{75}:\sqrt{3}$. **112.** $\sqrt[3]{108}:\sqrt[3]{4}$. **113.** $3\sqrt{8}:2\sqrt{2}$.

114. $\sqrt[m]{ax}:\sqrt[m]{a}$. **115.** $\sqrt[3]{48x}:\sqrt[3]{6x}$. **116.** $\sqrt{ab}:\sqrt{bx}$.

117. $\sqrt[5]{a^4}:\sqrt[5]{a^3}$. **118.** $\sqrt{a}:\sqrt{\frac{a}{b}}$. **119.** $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a-b}}$.

120. $1:\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. **121.** $1:\sqrt{0\cdot 25}$. **122.** $1:\sqrt{\frac{x-2y}{x^3-3xy^2-2y^3}}$.

123. $\sqrt[n]{\frac{x^{1-n}y^{2n-3}}{a^3b^4}}:\sqrt[n]{\frac{a^{2n-3}b^{n-4}}{x^{2n-1}y^{n+3}}}$. **124.** $\sqrt[n]{\frac{a^{n-1}b^{2n-1}}{a^2b^3}}:\sqrt[n]{\frac{b^{n-4}}{a^3}}$.

125. α) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; β) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$; γ) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; δ) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$.

126. $a:\sqrt[n]{a}$. **127.** $\frac{a}{x}:\sqrt{ax}$. **128.** $\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

129. $(x+y):\sqrt[m]{\frac{(x+y)^{m-1}}{x-y}}$. **130.** $1:\sqrt{\frac{2a+b}{2a^3-3a^2b+b^3}}$.

131. $(3\sqrt{8}-5\sqrt{20}):\sqrt{2}$. **132.** $(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}):\sqrt[3]{ab}$.

133. $(\sqrt{ax}-\sqrt{cx}+\sqrt{az}-\sqrt{cz}):(\sqrt{a}-\sqrt{c})$.

134. $(B-b):(\sqrt{B}-\sqrt{b})$. **135.** $(x-y):(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})$.

136. $\sqrt{\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{m-n}}:\sqrt{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}}$.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}};\ \sqrt[n]{a^m} = a^{m:n};\ \sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

137. Stelle folgende Wurzeln mit einem gemeinsamen Wurzelexponenten dar:

a) $\sqrt{x}$ und $\sqrt[3]{x^2}$; b) $\sqrt[4]{x^3}$ und $\sqrt[6]{y^5}$;

c) $\sqrt[mn]{a^r}$ und $\sqrt[mp]{b^s}$; d) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$ und $\sqrt[5]{c^3}$.

138. Kürze folgende Wurzeln ab:

a) $\sqrt[4]{x^2}$; b) $\sqrt[6]{y^{15}}$; c) $\sqrt[18]{a^{12}}$; d) $\sqrt[mnp]{x^{mpq}}$.

139. a) $\sqrt[15]{a^5}$; b) $\sqrt[mp]{a^m}$; c) $\sqrt[ax+bx]{c^{a+b}}$.

140. $5\sqrt[6]{a^9} - 4\sqrt[4]{a^6} + \sqrt[10]{a^{15}}$. 141. $2\sqrt[12]{a^5}.\sqrt[12]{a} + 3\,(\sqrt[24]{a^{17}} : \sqrt[24]{a^5})$.

142. $3\sqrt[25]{a^6}.\sqrt[25]{a^9} - \sqrt[30]{a^{23}} : \sqrt[6]{a}$.

143. $\sqrt{a}.\sqrt[3]{a}$. 144. $\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[4]{x^3}$. 145. $\sqrt[6]{a^5}.\sqrt[9]{a^7}$.

146. $3\sqrt[3]{b^2}.5\sqrt[4]{b^3}.\sqrt[12]{b}$. 147. $a\sqrt{xy}.b\sqrt[4]{x^3y^3}.c\sqrt[8]{x^7y^7}$.

148. $\sqrt[4]{a} : \sqrt[6]{a}$. 149. $\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[3]{a^2}$. 150. $m\sqrt{a} : \sqrt[4]{a}$.

151. $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a}$. 152. $\sqrt[12]{\frac{ab^2}{c}} : \sqrt[8]{\frac{a^5b^5}{c^6}} : \sqrt[6]{\frac{c^5}{ab^2}}$.

153. $(3\sqrt{7} + 4\sqrt[4]{3})\,(2\sqrt{7} - 2\sqrt[4]{3})$.

154. $(\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{xy})\,(5\sqrt{ab} + 4\sqrt{xy})$.

155. $(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})\,(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})\,(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

156. $(2\sqrt[3]{54} - 3\sqrt{2}) : \sqrt[3]{2}$. 157. $(6\sqrt{x} + 8x) : 2\sqrt[3]{x}$.

158. $\sqrt[3]{b^2a^{-1}}.\sqrt[4]{b^3a^{-2}}.\sqrt[6]{b^4a^{-3}}$. 159. $a\sqrt[n]{a^{n-1}}.\sqrt[3]{a^2}$.

160. $\sqrt{\frac{a^3b}{c}} : \left[\sqrt[3]{\frac{a^{-1}b^{-2}}{c^{-2}}} : \sqrt[6]{\frac{a^{-2}b}{c^3}}\right]$.

161. $\sqrt[m]{a^{mx}}$. 162. $\sqrt[3]{a^6}$. 163. $\sqrt[5]{a^{30}}$. 164. $\sqrt[p]{x^{mnp}}$.

165. $\sqrt[n]{a^{np+nr}}$. 166. $\sqrt[m+n]{x^{am+an}}$. 167. $\sqrt[n]{a^{nx+y}}$.

168. $\sqrt[n]{a^{2n+1}.b^{2n+2}}$. 169. a) $\sqrt{a^{15}}$; b) $\sqrt[3]{a^{15}}$; c) $\sqrt[4]{a^{17}b^9}$.

170. $\sqrt{n^5}\sqrt{n}$. 171. $\sqrt[3]{a^7}.\sqrt[3]{a^5}$.

172. $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}}{b^{mp}}}$. 173. $\sqrt[5]{\frac{a^5x^{10}}{b^5y^{10}}}$. 174. $\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mn}}}$. 175. $\sqrt[3]{\frac{a^p}{a^6}}$.

176. $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}\,b^{mp}\,c^{mq}}{x^{mr}\,y^{ms}}}$. 177. $\sqrt[5]{a^{16}b^{17}c^{-18}}$. 178. $\sqrt[x]{\frac{a^{x+1}}{b^{x-1}c^{x-1}}}$.

179. $\sqrt[2m]{a^{4m}x}$. 180. $\sqrt[x]{\frac{a^{2x+1}\,b^{3x+2}}{c^{4x-3}}}$.

181. Bestimme die Werte folgender Wurzeln:

a) $\sqrt[-n]{x}$, b) $\sqrt[-3]{27}$, c) $\sqrt[-4]{16}$, d) $\sqrt[-2]{0{\cdot}25}$, e) $\sqrt[-m]{a^{-mn}}$.

Stelle folgende Ausdrücke in ihrer einfachsten Form ohne negative Exponenten dar:

182. $\sqrt[-n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}$. **183.** $a\cdot\sqrt[-1]{a}$. **184.** $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[-2]{a}$.

185. $\sqrt[3]{a^2}:\sqrt[-2]{a}$. **186.** $\sqrt{a}:\sqrt[-1]{a}$. **187.** $\sqrt{a}:\sqrt[-2]{a}$.

188. $\sqrt[-2]{\frac{a^2}{b^2}}$. **189.** $\sqrt[-3]{\frac{8}{125}}$. **190.** $\sqrt[-3]{\frac{a^{-3}b^6c^{-9}}{x^{-6}y^3}}$.

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

191. $\sqrt{9^3}+\sqrt[3]{8^2}+\sqrt{(5\tfrac{4}{9})^3}+\sqrt[3]{(2\tfrac{10}{27})^3}$.

192. $\sqrt{1{\cdot}44^{-1}}+\sqrt[3]{0{\cdot}008^{-2}}+\sqrt[4]{0{\cdot}0081^{-3}}$.

193. $\sqrt[x]{(a^{x-2})^n}\cdot\sqrt[x]{(a^{2x+2})^n}$. **194.** $\sqrt{\left(\frac{a^2-4a+4}{a^2+4a+4}\right)^3}$.

195. $(\sqrt[5]{a^2b})^2\cdot(\sqrt[5]{ab^2})^3$. **196.** $(2\sqrt[3]{2})^5+(2\sqrt[6]{2^5})^2$.

197. $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{27a^3b^3}}\right)^5$. **198.** $\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\frac{a^{10}}{32}}}\right)^3$.

199. $(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})^3$. **200.** $(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})^3$.

201. $(4a\sqrt[3]{b}-3b\sqrt[3]{a})^3$. **202.** $(a-3\sqrt[3]{a^2}+4\sqrt[3]{a})^3$.

203. $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2})^2$. **204.** $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}-\sqrt[6]{ab^2})^2$.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

205. $\sqrt[3]{\sqrt[n]{x}}$. **206.** $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$. **207.** $\sqrt[8]{\sqrt[5]{a^{12}}}$. **208.** $\sqrt{\sqrt{2}}$.

209. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$. **210.** $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$. **211.** $\sqrt[n-1]{\sqrt{a^3}}$. **212.** $\sqrt[x]{\sqrt[x]{(a^n)^n}}$.

213. Wenn $\sqrt[3]{262144}=64$ ist, wie groß ist a) $\sqrt[6]{262144}$, b) $\sqrt[9]{262144}$, c) $\sqrt[18]{262144}$?

214. $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$. **215.** $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}\right)^6$. **216.** $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^n$. **217.** $a\sqrt[n]{a^{n-1}\sqrt[3]{a^2}}$.

218. $\sqrt[5]{a^2\sqrt[3]{a^8}}$. **219.** $\sqrt[m]{a^n\sqrt[p]{a^q}}$. **220.** $x\sqrt[m]{x\sqrt{x}}$.

221. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$. 222. $2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}$. 223. $4\sqrt{0{\cdot}25\sqrt{0{\cdot}25\sqrt{0{\cdot}25}}}$.

224. $a\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}$. 225. $\sqrt[x-1]{\dfrac{a}{\sqrt[x]{a}}}$. 226. $a\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a\sqrt{ab}}}$.

227. $\dfrac{\sqrt{3ab^2\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt{6b\sqrt{a}}}$. 228. $\sqrt[m]{a\sqrt{a^3}}\,.\,(\sqrt[m]{a}\,\sqrt{a^3})$.

229. $\sqrt[3]{x^{n-1}}\,.\,\sqrt{x^n}\,.\,\sqrt{x^7} - \sqrt[3]{x^{n-1}\sqrt{x^n\sqrt{x^7}}}$. Probe für $x = 2$, $n = 1$.

230. a) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2} + 3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}$. b) $3\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} - 2\sqrt[4]{a^2\sqrt{a^3}}$.

231. $\sqrt[-2]{\sqrt[3]{64}}$. 232. $\sqrt[-m]{\sqrt[-n]{a^{-mn}}}$. 233. $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[-2]{a}$.

Umformung von irrationalen Wurzelausdrücken.

Befreie folgende Brüche von dem irrationalen Nenner: (§. 162.)

234. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$. 235. $\dfrac{6+\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$. 236. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^2}}$. 237. $\dfrac{m}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

238. $\dfrac{8x}{\sqrt[5]{(2x)^3}}$. 239. $\dfrac{3a^2}{5\sqrt[3]{2a}}$. 240. $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{3x}}$. 241. $\dfrac{3x\sqrt{5a}}{2\sqrt[4]{2a}}$.

242. $\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2-x^2}}$. 243. $\dfrac{\sqrt{2x+3y}}{\sqrt{2x-3y}}$. 244. $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

245. $\dfrac{2s}{\sqrt{5}-1}$. 246. $\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. 247. $\dfrac{4\sqrt{3}}{1+3\sqrt{3}}$.

248. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$. 249. $\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$. 250. $\dfrac{2a+3\sqrt{b}}{3a-2\sqrt{b}}$.

251. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$. 252. $\dfrac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}$. 253. $\dfrac{m}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$.

254. $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$. 255. $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$. 256. $\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$.

257. $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$. 258. $\dfrac{a\sqrt{1-a^2}+b\sqrt{1-b^2}}{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}$.

259. $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$. 260. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

261. $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$. 262. $\dfrac{2s}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$. 263. $\dfrac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}}$.

264. $\dfrac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-y^4}}}{\sqrt{x^2-\sqrt{x^4-y^4}}}$. 265. $\dfrac{\sqrt{2x+3\sqrt{xy}}}{\sqrt{2x-3\sqrt{xy}}}$.

266. $\dfrac{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$. 267. $\dfrac{2\sqrt{5}-4\sqrt{10}}{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}-2\sqrt{10}}$.

268. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}$.

269. $\dfrac{a}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$. 270. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt{5}}$. 271. $\dfrac{5}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}}$.

272. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$. 273. $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{2+\sqrt[3]{7}}$. 274. $\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$.

275. $\dfrac{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}}{4\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}}$. 276. $\dfrac{5\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{12}}{4\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{6}}$. 277. $\dfrac{2+7\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{6}}$.

Verwandle folgende Summen und Differenzen von Quadratwurzeln in eine Quadratwurzel: (§. 163.)

278. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$. 279. $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

280. $\sqrt{12+\sqrt{23}}-\sqrt{12-\sqrt{23}}$. 281. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

282. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}}$. 283. $\sqrt{11+6\sqrt{2}}\pm\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

284. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\pm\sqrt{7-2\sqrt{10}}$. 285. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}\pm\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

286. $\sqrt{1+2a\sqrt{1-a^2}}\pm\sqrt{1-2a\sqrt{1-a^2}}$.

287. $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}\pm\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}$.

Verwandle jede der folgenden Quadratwurzeln in die Summe oder die Differenz zweier Quadratwurzeln: (§. 164.)

288. $\sqrt{6+\sqrt{11}}$. 289. $\sqrt{3-\sqrt{5}}$. 290. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

291. $\sqrt{8+3\sqrt{7}}$. 292. $\sqrt{11\pm2\sqrt{10}}$. 293. $\sqrt{11\pm2\sqrt{30}}$.

294. $\sqrt{18\pm8\sqrt{2}}$. 295. $\sqrt{37\pm20\sqrt{3}}$. 296. $\sqrt{99\pm54\sqrt{2}}$.

297. $\sqrt{7\sqrt{2}\pm4\sqrt{6}}$. 298. $\sqrt{2\sqrt{5}\pm\sqrt{15}}$. 299. $\sqrt{6\sqrt{5}\pm4\sqrt{10}}$.

300. $\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$. 301. $\sqrt{x^2+yz+2x\sqrt{yz}}$.

302. $\sqrt{x^2-2y\sqrt{x^2-y^2}}$. 303. $\sqrt{2x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}}$.

304. $\sqrt{a^2+b^2+ab+2\sqrt{ab\,(a^2+b^2)}}$.

305. $\sqrt{10a^4+a^2b^2+6a^3\sqrt{a^2+b^2}}$.

Löse folgende irrationale Gleichungen auf: (§. 165.)

306. $2\sqrt{x-1}=4$. 307. $\sqrt{4x^2+8x-11}=2x+1$.

308. $\sqrt{2x+1}+5=4\,(\sqrt{2x+1}-1)$.

309. $(b - a\sqrt{x}) : (a - b\sqrt{x}) = a\,(b^2 - 1) : b\,(a^2 - 1)$.

310. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = p$. 311. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$.

312. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} = 2$. 313. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}} = a$.

314. $4 - \sqrt{x} + \sqrt{4 + x}$. 315. $\sqrt{x + 2a} + \sqrt{x + a} = a$.

316. $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \frac{a}{\sqrt{a - x}}$.

317. $\sqrt{8x - 7} - \frac{2x - 2}{\sqrt{2x + 3}} = \sqrt{2x + 3}$.

318. $x - 2a - \sqrt{x^2 - b^2} = (x - a)\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}}\right\}$.

319. $x - a = \sqrt{a^2 + x\sqrt{x^2 - a^2 + b^2}}$. 320. $\frac{a + \sqrt{x - 4ab}}{a - \sqrt{x - 4ab}} = \frac{2a - b}{b}$.

321. $\sqrt[3]{20 - 3\sqrt{5x + 1}} = 2$.

322. $(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} - 4) = (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2)$.

323. $\sqrt{a + bx} + \sqrt{b + ax} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{1 + x}$.

324. $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \sqrt{a + b}$.

325. $\left.\begin{array}{l} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 9, \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1. \end{array}\right\}$ Setze $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$.

326. $b\sqrt{x} + a\sqrt{y} = ab\,(c + d)$,
$d\sqrt{x} + c\sqrt{y} = cd\,(a + b)$.

327. $2\sqrt{x + 5} - 3\sqrt{y - 2} = 3$,
$3\sqrt{x + 5} - 4\sqrt{y - 2} = 5$.

328. $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = 6$,
$\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{y}} = 1$.

329. $\frac{5}{\sqrt{x - 2}} + \frac{4}{\sqrt{y + 2}} = 2$,
$\frac{15}{\sqrt{x - 2}} - \frac{8}{\sqrt{y + 2}} = 1$.

Wurzeln mit algebraischem Radicand. (§. 166.)

330. $\sqrt{+25}$. 331. $\sqrt[3]{+27}$. 332. $\sqrt[3]{-27}$.

333. $\sqrt[3]{-m^6}$. 334. $\sqrt[5]{(-a)^{30}}$. 335. $\sqrt[3]{(-x)^5 \cdot -x}$.

336. $\sqrt[3]{(-a)^5}$. 337. $\sqrt[3]{(-a^2)^4}$. 338. $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{-x}$.

339. $7\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{-24} + 4\sqrt[3]{-81} - \sqrt[3]{-192}$.

Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten. (§. 167.)

340. Verwandle in Wurzeln und berechne:

a) $25^{\frac{1}{2}}$, b) $16^{\frac{1}{4}}$, c) $8^{\frac{2}{3}}$, d) $32^{\frac{3}{5}}$,

e) $49^{0 \cdot 5}$, f) $81^{0 \cdot 25}$, g) $64^{1 \cdot 5}$, h) $16^{1 \cdot 75}$.

i) $9^{-\frac{1}{2}}$, k) $0 \cdot 027^{-\frac{2}{3}}$, l) $(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}}$, m) $(\frac{27}{46})^{-\frac{1}{3}}$.

341. $0{\cdot}32^{\frac{1}{2}}$. $0{\cdot}00032^{\frac{3}{5}}$. $(\frac{1}{32})^{-0\cdot 1}$.

342. $(-0{\cdot}125)^{-\frac{2}{3}}$. **343.** $(-0{\cdot}008)^{-\frac{1}{3}}$. **344.** $(-0{\cdot}027)^{-\frac{5}{3}}$.

345. Verwandle in Wurzeln mit ganzen Exponenten und berechne:

a) $\sqrt[\frac{1}{2}]{3}$, b) $\sqrt[\frac{3}{4}]{8}$, c) $\sqrt[\frac{4}{5}]{5\frac{1}{16}}$, d) $\sqrt[0\cdot 4]{9}$,

e) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{49}$, f) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{0{\cdot}04}$, g) $\sqrt[-\frac{4}{5}]{\frac{16}{81}}$, h) $\sqrt[-0\cdot 2]{2}$.

Berechne und stelle die Resultate als Wurzeln und Potenzen mit positiven ganzen Exponenten dar:

346. $a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}$. **347.** $x^{-\frac{2}{5}}.(32y)^{-\frac{2}{5}}$. **348.** $(\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}}.(3\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}.(\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}$.

349. $a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{4}}$. **350.** $5^{\frac{2}{3}}.5^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{5}{6}}$. **351.** $x^{0\cdot 1}.x^{0\cdot 02}.x^{0\cdot 005}$.

352. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{n}{m}}$. **353.** $a^{\frac{5}{9}} : a^{-\frac{2}{3}}$. **354.** $a^{\frac{m}{n}}.x^{\frac{1}{n}} : x^{\frac{m-1}{n}}$.

355. $2a^{\frac{1}{2}}\,b^{-\frac{2}{3}}\,c^{\frac{3}{4}}.5a^{-\frac{1}{4}}\,b^{1\frac{1}{2}}\,c^{-\frac{1}{2}}$. **356.** $\left(\frac{4a}{9b}\right)^{\frac{1}{2}} : \frac{4a^{\frac{1}{6}}}{6b^{\frac{1}{4}}}$.

357. $(x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{2}{3}})\,(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{5}{6}})$. **358.** $(2a - 3b^{\frac{5}{6}})\,(5a^{\frac{3}{4}} + 6b^{\frac{4}{5}})$.

359. $(a + a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}})\,(1 + a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{6}})$.

360. $(6x^{\frac{7}{6}} - 8x^{\frac{5}{4}} + 3x^{\frac{29}{30}} - 4x^{\frac{21}{20}}) : (3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{3}{4}})$.

361. $(24a^{\frac{4}{3}} + \frac{34}{3}a^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}) : (6a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2})$.

362. $(x^n)^{\frac{1}{n}}$. **363.** $(x^{\frac{m}{n}})^n$. **364.** $\left(x^{-\frac{1}{n}}\right)^{-\frac{1}{m}}$. **365.** $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$.

366. $(a^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}$. **367.** $(a^{\frac{m+p}{n}})^{\frac{n}{m-p}}$. **368** $\left(\sqrt[m]{x}\right)^{\frac{2m}{n}}$. **369.** $\sqrt[-3]{a^{\frac{3}{4}}}$.

370. $\sqrt[3]{(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}}}$. **371.** $(4.25)^{\frac{1}{2}}$. **372.** $(x\,y^{-2}z^3)^{\frac{2}{3}}$.

373. $[(a^{\frac{3}{4}}.a^{-\frac{1}{3}}).\sqrt[4]{a}]^{\frac{3}{2}}$. **374.** $\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. **375.** $\left(\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{5}}$. **376.** $\left(\frac{81\,n^5\,p^4}{16\,m^3q^6}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

377. $(2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{-\frac{3}{4}})^2$. **378.** $(x^{-\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^3$.

379. Mit Benützung von $10^{0\cdot 30103\cdots} = 2$ (angenähert gleich) und $10^{0\cdot 47712\cdots} = 3$ stelle folgende Zahlen als Potenzen von 10 dar: a) 4, 8, 16; b) 3, 9, 27; c) 6, 12, 18; d) 5.

Löse folgende Exponentialgleichungen:

380. $\sqrt[x+1]{a^{20}} : a^2 = a^2$. **381.** $\sqrt[x]{a^{3+5x}} = \sqrt[x]{a^{21}}$.

382. $\sqrt{a^{5-3x}} : \sqrt[3]{a^{5-6x}} = a$. **383.** $4096^x.0{\cdot}5 = 4^{x+\frac{1}{6}}$.

384. $\sqrt[x+5]{2^{x-5}} = \frac{1}{4}\sqrt[x-5]{8^{x+5}}$. **385.** $\sqrt[-x]{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = \sqrt[x-2]{\sqrt[6]{2}}$.

386. $\sqrt{a^{3-4x}} : (a^{4\cdot 5}.\sqrt[5]{a^{6-7x}}) = 1$. **387.** $\sqrt{2^{x+1}} = \sqrt[7]{0{\cdot}5^{1-4x}}$.

388. $a^{1-x}.\sqrt[3]{a^{4x+1}}.\sqrt[4]{a^{x+2}}.\sqrt[5]{a^{1-8x}} = 1.$

389. $\sqrt[x]{2}.\sqrt[y]{8} = \frac{1}{2}$,
$\sqrt[4x]{3}.\sqrt[2y]{27} = 1.$

390. $\sqrt[3]{m^{x-5}} : \sqrt[5]{m^{y-3}} = 1$,
$\sqrt[4]{(m^{x-1})^3}.\sqrt[3]{m^{5y-1}} = \sqrt[3]{m^{23}}.$

391. $\sqrt[x]{a^{3-n^2}}.\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{a^{2+n}}$, $\sqrt[x+y]{a^4}.\sqrt[x+y]{a^{2n}} = a^2.$

---

17. Imaginäre und complexe Zahlen. (§§. 169—174.)

1. $\sqrt{-4} + \sqrt{-9} + \sqrt{-16}.$ 2. $\sqrt{-4} - 2\sqrt{-36} + \sqrt{-100}.$
3. $2a^2\sqrt{-a^2} + 3a\sqrt{-a^4} - \sqrt{-a^6}.$ 4. $\sqrt{-a^2b} + \sqrt{-ab^2}.$
5. $2a\sqrt{-x^2} - b\sqrt{-4x^2}.$ 6. $\sqrt{-12} + \sqrt{-75}.$
7. $2\sqrt{-2} + 3\sqrt{-8} - \sqrt{-18} - \sqrt{-50} + \sqrt{-72}.$
8. $i.(-i) + (-i)^2 - i^3 - (-i)^3 + i^4 - (-i)^1.$
9. $\sqrt{-x^2}.\sqrt{-y^2}.$ 10. $\sqrt{-xy}.\sqrt{-xy^2}.\sqrt{-x^2y^3}.$
11. $\sqrt{-ab}\cdot\sqrt{-a^3b}\cdot\sqrt{-ab^3}\cdot\sqrt{-a^3b^5}.$
12. $(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})\,(\sqrt{-a} - \sqrt{-b}).$
13. $(\sqrt{-2} + \sqrt{-3} - \sqrt{-4})\,(\sqrt{-2} - \sqrt{-3} + \sqrt{-4}).$
14. $\sqrt{-ab} : \sqrt{b}.$ 15. $\sqrt{-ab} : \sqrt{-b}.$ 16. $x : \sqrt{-x}.$
17. $\sqrt{80} : 2\sqrt{-5}.$ 18. $5\sqrt{-6} : \sqrt{-3}.$ 19. $\sqrt{-xy^3} : \sqrt{-x^3y}.$
20. $(\sqrt{-ab} + \sqrt{-ac}) : \sqrt{-a}.$
21. $(\sqrt{-20} - \sqrt{-15}) : \sqrt{-5}.$
22. $(4\sqrt{-8} - 8\sqrt{-12} + 12\sqrt{-16}) : 4\sqrt{-4}.$
23. $i^7 + i^9 + i^{12} + i^{14}.$ 24. $(\sqrt{-3})^3.$ 25. $(-2\sqrt{-3})^4.$
26. $(-2\sqrt{-3})^5 - (2\sqrt{-3})^6.$
27. $(\sqrt{-9})^3 + (\sqrt{-4})^4 - (\sqrt[3]{-8})^3 - (\sqrt{-27})^2.$

---

28. $(1 - \sqrt{-4}) + (3 - \sqrt{-25}) - (2 - \sqrt{-49}).$
29. $(3 + 2i)\,(3 - 2i).$ 30. $(5 + 6i)\,(3 - 4i).$
31. $(\sqrt{a} + \sqrt{-b})\,(\sqrt{a} - \sqrt{-b}).$
32. $(\sqrt{2} + 2\sqrt{-2})\,(\sqrt{2} - 2\sqrt{-2}).$
33. $(x + 1 + \sqrt{-3})\,(x + 1 - \sqrt{-3}).$
34. $(x + 1)\,(x - 1)\,(x + i)\,(x - i).$
35. $(a + bi)\,(a - bi)\,(c + di)\,(c - di).$

Beweise: $(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 =$
$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$

36. $(2-3i)^2$. 37. $(\sqrt{2}-\sqrt{-2})^2$.
38. $(3-\sqrt{-5})^2$. 39. $(3-\sqrt{-1}-\sqrt{-2})^2$.
40. $\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}$. 41. $\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^3$.
42. $(-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}})^2 \,.\, (-1+\sqrt{5}-\sqrt{-10-2\sqrt{5}})^2$.
43. $(1+\sqrt{-3})^4+(1-\sqrt{1-3})^4$.
44. $(1+\sqrt{-3})^3$. 45. $(1-\sqrt{-3})^4$.

Befreie folgende Brüche von ihren imaginären Nennern:

46. $\frac{5}{2i}$. 47. $\frac{\sqrt{a}}{bi}$. 48. $\frac{2x^2}{3\sqrt{-2x}}$.
49. $\frac{1}{1-i}$. 50. $\frac{2}{3+4i}$. 51. $\frac{a-b}{a+bi}$.
52. $\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}$. 53. $\frac{1-20\sqrt{-5}}{7-2\sqrt{-5}}$. 54. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-3}}{\sqrt{3}-\sqrt{-2}}$.
55. $\frac{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}$. 56. $\frac{6\sqrt{-6}+5\sqrt{-5}}{6\sqrt{-5}-5\sqrt{-6}}$.
57. $\frac{a+bi}{a-bi}+\frac{x+yi}{x-yi}$. 58. $\frac{a-bi}{a+bi}-\frac{x+yi}{x-yi}$.
59. $\frac{1}{1-i-\sqrt{3}i}$. 60. $\frac{1-i^3}{(1+i)^3}$. 61. $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^3}$.

Verwandle folgende Summen oder Differenzen von Quadratwurzeln in eine Quadratwurzel:

62. $\sqrt{-3+4i}+\sqrt{-3-4i}$. 63. $\sqrt{-3+4i}-\sqrt{-3-4i}$.
64. $\sqrt{2+\sqrt{-5}}\pm\sqrt{2-\sqrt{-5}}$.
65. $\sqrt{a-b+2\sqrt{-ab}}\pm\sqrt{a-b-2\sqrt{-ab}}$.
66. $\sqrt{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}-i\sqrt{-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}$.

Verwandle folgende Quadratwurzeln in Summen oder Differenzen von Quadratwurzeln:

67. $\sqrt{-3+4i}$. 68. $\sqrt{-3-4i}$.
69. $\sqrt{8-6i}$. 70. $\sqrt{1+\frac{3}{4}i}$.
71. $\sqrt{7+6\sqrt{-2}}$. 72. $\sqrt{6+8\sqrt{-10}}$.
73. $\sqrt{12-10\sqrt{-13}}$. 74. $\sqrt{20-10\sqrt{-5}}$.
75. $\sqrt{4-60\sqrt{-3}}$. 76. $\sqrt{-a+2a\sqrt{-2}}$.
77. $\sqrt{\sqrt{-4}}=\sqrt{0+\sqrt{-4}}=..$ 78. $\sqrt{-3\sqrt{-1}}$.

---

18. Quadrieren und Cubieren. Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel.

Quadrieren. (§§. 175 und 176.)

Aufg. 5., 79—90 und 126—129; **15.**, 105—107 und 112; **16.**, 71—85, 202, 203; **17.**, 36—39.

1. $(4+2y-y^2)^2$. **2.** $(3x^4-2x^2y^2-y^4)^2$. **3.** $(8x^4-4x^2+2)^2$.
4. $(6x^3-5x^2+4x-3)^2$. **5.** $(27x^6-54x^4+36x^2-8)^2$.
6. $\left(2-\frac{a}{2}+\frac{2a^2}{3}\right)^2$. **7.** $\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{4c}-\frac{4c}{5d}\right)^2$. **8.** $\left(\frac{3y^2}{4b^2}+\frac{2y}{3b}-\frac{1}{2}\right)^2$.
9. $(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$.
10. $[(a+x)^2+(b-y)^2]^2-[(a+x)^2-(b-y)^2]^2$.
11. 5019^2. **12.** 70902^2. **13.** 73215^2. **14.** 135709^2.
15. $5{\cdot}91^2$. **16.** $0{\cdot}887^2$. **17.** $0{\cdot}738\ldots^2$. **18.** $0{\cdot}1500\ldots^2$.
19. π^2 (4 Dec.). **20.** 307^4. **21.** $0{\cdot}59371\ldots^4$.
22. a) $99^2=(10^2-1)^2$; b) 999^2; c) 9999^2.
23. a) 96^2; b) 998^2; c) 9995^2.
24. Was kann man angenähert a) für $(1+x)^2$, b) für $\frac{1}{(1+x)^2}$ setzen, wenn x eine sehr kleine Zahl ist?

Ausziehen der Quadratwurzel. (§§. 177—180).

25. $\sqrt{\left(\frac{9a^2x^2}{25b^2y^2}-\frac{2x^2}{3y^2}+\frac{25b^2x^2}{81a^2y^2}\right)}$.
26. $\sqrt{0{\cdot}04a^{-4m}b^{-6m}-0{\cdot}2a^mb^m+0{\cdot}25a^{6m}b^{8m}}$.
27. $\sqrt{\{x^4-6ax^3+11a^2x^2-6a^3x+a^4\}}$.
28. $\sqrt{\{16a^6+16m^5+4m^4-16m^3-8m^2+4\}}$.
29. $\sqrt{\{16a^6-24a^5+25a^4-20a^3+10a^2-4a+1\}}$.
30. $\sqrt{\{9y^6-12y^5+10y^4-28y^3+17y^2-8y+16\}}$.
31. $\sqrt{\{25-70a+139a^2-236a^3+235a^4-198a^5+121a^6\}}$.
32. $\sqrt{\{0{\cdot}16a^4-2{\cdot}4a^3-0{\cdot}16a^2b+9a^2+1{\cdot}2ab+0{\cdot}04b^2\}}$.
33. $\sqrt{\left[\frac{9x^6}{16y^6}-\frac{x^5}{2y^5}-\frac{26x^4}{9y^4}+\frac{53x^3}{6y^3}-\frac{2x^2}{3y^2}+\frac{20x}{y}+25\right]}$.
34. $\sqrt{(a^{4m-4}-4a^{3m-3}b^{-m}+2a^{2m-2}b^{-2m}+4a^{m-1}b^{-3m}+b^{-4m})}$.
35. $\sqrt{\{a^2-4a\sqrt{ab}-2ab+12b\sqrt{ab}+9b^2\}}$.
36. $\sqrt{\{\sqrt[5]{a^4}-4\sqrt[15]{a^{11}}+4\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[5]{a^2}-4\sqrt[3]{a}+1\}}$.
37. $\sqrt{\{a^3-4a^2b^{\frac{1}{4}}+4ab^{\frac{1}{2}}-6a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}}+12a^{\frac{1}{2}}b+9b^{\frac{3}{2}}\}}$.
38. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\ldots$
39. $\sqrt{a^2+b}=a\sqrt{1+\frac{b}{a^2}}=\ldots$ **40.** $\sqrt{a^2-b}=a\sqrt{1-\frac{b}{a^2}}=\ldots$

---

41. $\sqrt{135424}$. **42.** $\sqrt{556516}$. **43.** $\sqrt{226576}$. **44.** $\sqrt{53993104}$.
45. $\sqrt{395850816}$. **46.** $\sqrt{422220304}$. **47.** $\sqrt{54782211136}$.
48. $\sqrt{1406 \cdot 25}$. **49.** $\sqrt{27 \cdot 973521}$. **50.** $\sqrt{0 \cdot 00178929}$.
51. $\sqrt{785 \cdot 6809}$. **52.** $\sqrt{0 \cdot 97535376}$. **53.** $\sqrt{44105 \cdot 040144}$.
54. $\sqrt{\frac{676}{1681}}$. **55.** $\sqrt{\frac{178929}{797449}}$. **56.** $\sqrt{485380\frac{29}{169}}$.
57. $\sqrt{\sqrt{29986576}}$. **58.** $\sqrt[4]{362673936}$. **59.** $\sqrt[8]{1475789056}$.
60. $\sqrt{0 \cdot 1907 \ldots}$. **61.** $\sqrt{335 \cdot 779 \ldots}$. **62.** $\sqrt{0 \cdot 8423 \ldots}$.

Berechne folgende irrationale Wurzeln auf 5 bedeutsame Ziffern:

63. $\sqrt{28}$. **64.** $\sqrt{320}$. **65.** $\sqrt{6584}$ **66.** $\sqrt{3 \cdot 92}$.
67. $\sqrt{0 \cdot 101}$. **68.** $\sqrt{0 \cdot 07854}$. **69.** $\sqrt{0 \cdot 123457}$.
70. $\sqrt{2}$. **71.** $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. **72.** $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.
73. $\sqrt{\frac{67}{3}} = \sqrt{\frac{201}{9}} = \ldots$ **74.** $\sqrt{\frac{591}{67}}$. **75.** $\sqrt{251\frac{7}{12}}$.

76. Berechne mittelst der Formel $s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}$ a) den Umfang des einem Kreise mit dem Radius $r = 1$ eingeschriebenen regelmäßigen Achteckes aus $s_4 = r\sqrt{2}$; b) u_{12} aus $s_6 = r$.

77. Ebenso u_{20} aus $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

78. Berechne mittelst der Formel $S_n = \frac{r\, s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}$ a) den Umfang des einem Kreise mit dem Radius 1 umgeschriebenen regelmäßigen Achteckes, b) Zwölfeckes, c) Zehneckes (mit Benützung der in Aufgabe 76 und 77 erhaltenen Ausdrücke für s_8, s_{12}).

Bestimme mit Rücksicht auf die Aufg. 38, 39 und 40 mit 4 Decimalstellen:

79. $\sqrt{50} = \sqrt{7^2 + 1} = \ldots$ **80.** $\sqrt{79} = \sqrt{9^2 - 2} = \ldots$
81. $\sqrt{26}$. **82.** $\sqrt{146}$. **83.** $\sqrt{35}$. **84.** $\sqrt{220}$.

Cubieren. (§§. 181 und 182.)

Aufg. in **5.**, 130—135; **15.**, 108—111 und 114; **16.**, 198—201.

84. $(y^2 + 2y - 3)^3$. **85.** $(x^2 - 3xy + 2y^2)^3$.
86. $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - 1\right)^3$. **87.** $\left(4a - \frac{2x^2}{3a} + \frac{9x^4}{8a^3}\right)^3$.
88. $(1 - \sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x})^3$. **89.** $(a^{\frac{5}{2}} - ab^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} b^3)^3$.
90. 1585^3. **91.** 6045^3. **92.** 20704^3.
93. 90216^3. **94.** $45 \cdot 09^3$. **95.** $11 \cdot 11^3$. **96.** $101 \cdot 01^3$.

97. $0\cdot858\ldots^3$. **98.** $0\cdot8079\ldots^3$. **99.** 15^9. **100.** $0\cdot65^6$.

101. a) $99^3 = (10^2 - 1)^3$; b) 999^3; c) 9999^3.

102. a) 98^3; b) 998^3.

103. Was kann man angenähert a) für $(1 + x)^3$, b) für $\frac{1}{(1+x)^3}$ setzen, wenn x eine sehr kleine Zahl ist?

Ausziehen der Cubikwurzel. (§§. 183 — 186.)

104. $\sqrt[3]{a^3x^6 - 3a^2bx^4y^2 + 3ab^2x^2y^4 - b^3y^6}$

105. $\sqrt[3]{\{8x^6 - 36x^5 + 78x^4 - 99x^3 + 78x^2 - 36x + 8\}}$.

106. $\sqrt[3]{\{64x^6 - 144ax^5 + 204a^2x^4 - 171a^3x^3 + 102a^4x^2 - 36a^5x + 8a^6\}}$.

107. $\sqrt[3]{\{8a - 60\sqrt[3]{a^2b} + 150\sqrt[3]{ab^2} - 125b\}}$.

108. $\sqrt[3]{\left[1 + \frac{6x}{a} + \frac{15x^2}{2a^2} - \frac{10x^3}{a^3} - \frac{45x^4}{4a^4} + \frac{27x^5}{2a^5} - \frac{27x^6}{8a^6}\right]}$.

109. $\sqrt[3]{\left\{x^{6m} - x^{5m} + \frac{5}{27}x^{3m} - \frac{1}{81}x^m - \frac{1}{729}\right\}}$.

110. $\sqrt[3]{\left\{x^2 - 3x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{2}{3}} - 7 - 6x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{4}{3}} + x^{-2}\right\}}$.

111. $\sqrt[3]{1 + x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \frac{10}{243}x^4 + \ldots$

112. $\sqrt[3]{a^3 + b} = a\sqrt[3]{1 + \frac{b}{a^3}} = \ldots$ **113.** $\sqrt[3]{a^3 - b} = a\sqrt[3]{1 - \frac{b}{a^3}} = \ldots$

114. $\sqrt[3]{262144}$. **115.** $\sqrt[3]{3241792}$. **116.** $\sqrt[3]{8615125}$.

117. $\sqrt[3]{74614263}$. **118.** $\sqrt[3]{1767172329}$. **119.** $\sqrt[3]{627881709547}$.

120. $\sqrt[3]{0\cdot778688}$. **121.** $\sqrt[3]{474\cdot552}$. **122.** $\sqrt[3]{78\cdot402752}$.

123. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{20661046784}}$ **124.** $\sqrt[6]{1126162419264}$.

125. $\sqrt[3]{\frac{704969}{1601613}}$. **126.** $\sqrt[3]{32\cdot856\ldots}$ **127.** $\sqrt[3]{0\cdot00008427\ldots}$

Berechne folgende irrationale Wurzeln auf 5 bedeutsame Ziffern:

128. $\sqrt[3]{100}$. **129.** $\sqrt[3]{5213}$. **130.** $\sqrt[3]{8135}$. **131.** $\sqrt[3]{47838}$.

132. $\sqrt[3]{0\cdot3}$ **133.** $\sqrt[3]{25\cdot643}$. **134.** $\sqrt[3]{0\cdot0957}$. **135.** $\sqrt[3]{0\cdot12345}$.

136. $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{\frac{180}{216}} = \ldots$ **137.** $\sqrt[3]{\frac{37}{70}}$. **138.** $\sqrt[3]{8\frac{7}{12}}$.

Bestimme mit Rücksicht auf die Aufg. 111., 112. und 113. in 4 Decimalen:

139. $\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{4^3 + 1} = ..$ **140.** $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3^3 - 3} = ..$

141. $\sqrt[3]{218}$. **142.** $\sqrt[3]{130}$. **143.** $\sqrt[3]{62}$. **144.** $\sqrt[3]{508}$.

---

19. Logarithmen. (§§. 187—201.)

1. Bilde die Umkehrungen von a) $2^3 = 8$; b) $8^{\frac{1}{3}} = 2$; c) $4^7 = 4096$.

2. Schreibe die folgenden Gleichungen so, dass x Potenzexponent wird, und bestimme x: a) ${}^5\log 625 = x$; b) ${}^2\log \frac{1}{64} = x$; c) ${}^3\log \sqrt[3]{9} = x$.

3. Bestimme den Logarithmus der Zahlen 2, 4, 8, 16, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ zur Basis 2.

4. Wie groß ist der Logarithmus von 64 zur Basis 2, 4, 8, 16, 32, 64?

5. Bestimme: ${}^3\log 9$, ${}^3\log 729$, ${}^3\log 1$, ${}^3\log \frac{1}{3}$, ${}^3\log \frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. Bestimme: ${}^8\log 2$, ${}^8\log 4$, ${}^8\log 8$, ${}^8\log \frac{1}{2}$, ${}^8\log \frac{1}{4}$, ${}^8\log \frac{1}{8}$.

7. Bestimme den Logarithmus der folgenden Zahlen für die Basis $\frac{1}{2}$: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, 2, 4, 8, 16.

8. Wie groß ist $\log 10$, $\log 100$, $\log 1000$, $\log 1$, $\log \frac{1}{10}$, $\log \frac{1}{100}$?

9. Zwischen welchen ganzen Zahlen liegen die Logarithmen der Zahlen 1·3, 2·5, 6, 11, 20, 40 in Bezug auf die Basis 2?

10. Zwischen welchen ganzen Zahlen liegen die Logarithmen der Zahlen 2, 4, 10, 20, 40, 100 in Bezug auf die Basis 3?

11. Zwischen welchen ganzen Zahlen liegt der Briggs'sche Logarithmus einer ein-, zwei-, drei-, vier-, n ziffrigen ganzen Zahl?

12. Schließe die folgenden Zahlen zwischen zwei auf einander folgende Potenzen von 10 und sodann ihre Logarithmen zwischen zwei negative ganze Zahlen ein: 0·7, 0·03, 0·13, 0·0008.

13. Warum eignet sich 1 nicht als Basis eines Logarithmensystems?

14. Welche der Zahlen 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 haben in Bezug auf die Basis —2 keine reellen Logarithmen?

15. Warum eignet sich eine negative Zahl nicht als Basis eines Logarithmensystems?

16. Bilde die zweite Umkehrung zu: $b^{-\infty} = 0$ für $b > 1$.

17. Warum hat eine negative Zahl für eine Basis $b > 1$ keinen reellen Logarithmus?

Bestimme x:

18. $^4\log x = \frac{1}{2}$. 19. $^3\log x = -1$. 20. $^{25}\log x = -\frac{1}{2}$.

21. $^4\log x = -\frac{5}{2}$. 22. $\log x = -2$. 23. $\log x = -\frac{1}{4}$.

---

22. $\log abc$. 23. $\log 6xyz$. 24. $\log 3a(c+d)$.

25. $\log(a+b)(m+n)$. 26. $\log(a^2-b^2)$. 27. $\log a(x^2-1)$.

28. $\log \frac{2ab}{3x}$. 29. $\log \frac{1}{ab}$. 30. $\log \frac{ab-cd}{mn-pq}$.

31. $\log \frac{5mx}{1-m^2}$. 32. $\log \frac{x^2-y^2}{2xy}$. 33. $\log \frac{3(a^2-b^2)x}{(2a+2b)y}$.

34. $\log a^x$. 35. $\log ab^2$. 36. $\log (ab)^2$.

37. $\log 2a^3$. 38. $\log 5a^2x^3$. 39. $\log (a+b)^{x+y}$.

40. $\log \frac{ax^my^n}{bz^p}$. 41. $\log \frac{2a^3}{3bx^2}$. 42. $\log \frac{8mn^2x^3}{5pqy^4}$.

43. $\log \frac{1}{(2a^2)^3(5b^3)^2}$. 44. $\log \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^3\right]$.

45. $\log \sqrt{ab}$. 46. $\log \sqrt{xy^3}$. 47. $\log 8a^2\sqrt[4]{bx^3}$

48. $\log \sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}}$. 49. $\log \frac{2\sqrt{x}}{a\sqrt[3]{y}}$. 50. $\log \frac{x^3\sqrt[3]{a}}{5by^3}$.

51. $\log (\sqrt[m]{x^n}\sqrt[p]{y^q})$. 52. $\log \sqrt[n]{x^2b^3c^4}$. 53. $\log \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^p})^q}$.

54. $\log (a\sqrt{a\sqrt{a}})$. 55. $\log (a\sqrt[x]{a})^{\frac{1}{x}}$. 56. $\log x^{\log x}$.

57. $\log \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 58. $\log \frac{1}{b^2\sqrt{a^3c}}$. 59. $\log \frac{a(a+1)\sqrt[3]{a^2}}{b(b+1)\sqrt{b}}$.

Bestimme den Ausdruck, dessen Logarithmus gleich ist:

60. $\log x + \log y - \log z$. 61. $\log a - (\log b + \log c)$.

62. $3\log a - 2\log b + 4\log c$. 63. $\frac{1}{5}\log a - \frac{1}{3}\log b - \frac{1}{4}\log c$.

64. $\log a + \frac{1}{x}\log a - \frac{1}{y}(\log a + \log b)$.

65. $\frac{n}{m}\log a - \left(\frac{q}{p}\log b + \frac{s}{r}\log c\right)$.

66. $\frac{1}{5}(2\log a + 3\log b) - \frac{1}{2}[\log(a+b) + \log(a-b)]$.

67. $\frac{1}{3}[\log a + \frac{1}{3}\log(a-b) - 2(\log b + \frac{1}{3}\log 3)]$.

68. $\log(a+b) + 2\log a - \frac{1}{2}[\log(a-b) + 3\log b]$.

69. $2\log 3 - \frac{1}{3}(2\log 5 + \frac{1}{2}\log 7)$.

70. $2\log(x-y) - \frac{1}{2}\log(x+y) - \frac{1}{2}\log(x^2-xy+y^2)$.

71. $x\log(\log a)$. 72. $x\log x - \log(\log x)$.

Suche aus den Logarithmentafeln zu folgenden Zahlen die Briggs-schen Logarithmen:

	a)	b)	c)	d)	e)
73.	7;	38;	218;	683;	995.
74.	1035;	4719;	5755;	7899;	9011.
75.	39070;	586100;	59·13;	9·015;	0·4792.
76.	86127;	78008;	0·68315;	85·201;	0·0075536.
77.	0·091457;	364228;	17·8193;	4·48197;	129·356.

Suche zu folgenden Briggs'schen Logarithmen die zugehörigen Zahlen:

	a)	b)	c)	d)
78.	0·24055;	1·57287;	2·98547;	0·61278.
79.	3·89009;	0·66058;	0·27161 — 1;	1·02816.
80.	2·95742;	1·01396;	0·46370 — 3;	2·40016.
81.	0·73048 — 2;	2·81350;	3·91001;	3·69831.
82.	0·55342 — 3;	0·68012 — 1;	1·85603;	4·43065.
83.	4·89195;	0·05168 — 2;	0·69960 — 1;	1·99828.

Berechne mit Hilfe der Logarithmen folgende Ausdrücke:

84. $1 \cdot 2345 \,.\, 1 \cdot 3456$. **85.** $9 \cdot 68453 \,.\, 0 \cdot 29758$.

86. $1 \cdot 025 \,.\, 1 \cdot 0792 \,.\, 1 \cdot 05625 \,.\, -1 \cdot 0751$.

87. $0 \cdot 35679 \,.\, 1 \cdot 0765 \,.\, 1 \cdot 92234 \,.\, 0 \cdot 33258$.

88. $2 \cdot 00415 \,.\, 0 \cdot 56 \,.\, 0 \cdot 0741 \,.\, 0 \cdot 09972 \,.\, 1 \cdot 25463$.

89. $\frac{17 \cdot 846}{9 \cdot 157}$. **90.** $\frac{1}{3 \cdot 14159}$. **91.** $\frac{2488 \,.\, -1926}{521347}$.

92. $\frac{2 \cdot 3456 \,.\, 5 \cdot 2913}{769 \,.\, 0 \cdot 12345}$. **93.** $\frac{413 \,.\, 4124 \,.\, 21358}{425 \,.\, 4998 \,.\, 76143}$.

94. $\frac{2 \cdot 1457 \,.\, 0 \cdot 1248 \,.\, 1385 \,.\, 31 \cdot 273}{277 \,.\, 10 \,.\, 7285 \,.\, 2 \cdot 2812 \,.\, 125 \cdot 082}$.

95. $(1 \cdot 05)^{12}$. **96.** $(1 \cdot 045)^{9}$. **97.** $2^{1 \cdot 235}$.

98. $(42 \cdot 456)^{-2}$. **99.** $2 \cdot 45^{5 \cdot 172^{1 \cdot 05}}$.

100. $\left(-\frac{323}{313}\right)^{17}$. **101.** $\left(\frac{54 \cdot 139}{55 \cdot 817}\right)^{11}$.

102. $\frac{2035 \,.\, (0 \cdot 00876)^7}{3164 \,.\, (0 \cdot 00592)^5}$. **103.** $\frac{1 \cdot 14159^2 \,.\, 2 \cdot 0489^3 \,.\, 1 \cdot 07938^4}{4 \cdot 0932^4 \,.\, 0 \cdot 859^2 \,.\, 210 \cdot 895^3}$.

104. $\frac{4r^3\pi}{3}$ für $r = 1 \cdot 06234$ und $\pi = 3 \cdot 14159$.

105. $(3 \cdot 905)^{\frac{4}{5}}$ **106.** $\left(-\frac{89}{113}\right)^{\frac{2}{3}}$. **107.** $(11 \cdot 716)^{-\frac{3}{4}}$.

108. $\sqrt[3]{0 \cdot 918}$. **109.** $\sqrt[5]{7135}$. **110.** $\frac{\sqrt[5]{0 \cdot 82736}}{0 \cdot 95372^4}$.

111. $\sqrt[5]{\frac{1 \cdot 5852 \,.\, 0 \cdot 028346^3}{0 \cdot 0004594}}$. **112.** $\sqrt[8]{314 \cdot 29}$

113. $\sqrt{13^{0\cdot3414}}$. **114.** $\sqrt[12]{\left(\frac{395}{129}\right)^7}$. **115.** $\sqrt[8]{\frac{9}{13}\sqrt[3]{6}}$

116. $\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c^2}}$ für $a = 0\cdot21537$, $b = 7\cdot7856$, $c = 0\cdot93572$.

117. $\frac{a\sqrt[8]{b}}{c\,d^6}$ für $a = 0\cdot27386$, $b = 30000$, $c = 0\cdot02183$, $d = 0\cdot72$.

118. $\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{c\,b}}$ für $a = 2\cdot145$, $b = 3\cdot087$, $c = 3\cdot248$.

119. $\frac{35^4}{57^3}\cdot\sqrt[5]{30\cdot9}$. **120.** $\frac{\sqrt[3]{37\cdot8}.\sqrt[4]{13^2}}{\sqrt[5]{7\cdot13945^3}}$. **121.** $\sqrt{\frac{87.\sqrt[4]{8105}}{93\cdot24^2}}$.

122. $\frac{3\sqrt[8]{4\sqrt{6}}}{11\sqrt[5]{5\sqrt{124}}}$. **123.** $\sqrt[7]{340}\,.\,\sqrt[5]{\frac{24\cdot105.58\cdot937}{1\cdot47939^3}}$.

124. $\sqrt{10+\sqrt{10}}$. **125.** $\frac{347\sqrt[5]{0\cdot35}+\sqrt[3]{55\cdot33^2}}{4\cdot9275^3}$.

126. $\sqrt{\frac{4.31957^3.\sqrt[3]{3\cdot19338}.\sqrt[5]{17\cdot39}}{15^4.\sqrt[3]{91\cdot34}\,\sqrt[5]{3\cdot4071}}}$.

127. $\frac{q^n-1}{q-1}$ für $q = 1\cdot01875$, $n = 12$.

128. $\sqrt[3]{\sqrt{18\cdot7}-\sqrt[3]{9\cdot2}}$. **129.** $\sqrt[5]{\frac{52-3\sqrt[4]{10}}{\sqrt{8\cdot7}}}$.

130. $x = \frac{\log 13 - \log 6}{\log 3}$. **131.** $x = \frac{\log 2 - \log(\log 2)}{\log 3}$.

132. $x = \frac{\log 37656 - \log 1183}{\log 16 - \log 9}$.

133. Berechne den Radius des einem Dreiecke ein und umgeschriebenen Kreises aus den Seiten: $a = 804\cdot31$, $b = 1006\cdot6$, $c = 864\cdot9$.
$$\left(\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}};\quad r = \frac{a\,b\,c}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\right).$$

134. Ebenso für $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$.

135. Das einem Kreise mit dem Radius 1 eingeschriebene regelmäßige 96=Eck hat den Umfang $6\cdot28206$. Berechne den Umfang a) des eingeschriebenen regelmäßigen 192=Eckes, b) des umgeschriebenen regelmäßigen 96=Eckes. (Aufg. **17.** 76, 78)

Löse folgende Gleichungen ohne Benützung der Logarithmentafeln:

136. $\log x = -3$. **137.** $2\log x = 3\log 4$. **138.** $\frac{1}{3}\log x = 2\log a$.

139. $\frac{1}{2}\log(x-1) = 1 - \log 5$. **140.** $\log x + \log(x+1) = 2\log(x-1)$.

141. $\log(x+5) - \log(x-5) = 2$.

Löse folgende Exponential- und logarithmische Gleichungen auf:

142. $a^{n-x} = n\,b^x$. **143.** $m \,.\, a^{x-\alpha} = n \,.\, b^{x-\beta}$. **144.** $a^x \,.\, b^{mx} = c$.

145. $(m^{x-1})^5 = n^x$. **146.** $m^{ax+\alpha} = n^{bx+\beta}$. **147.** $47^x = 255$.

148. $10^x = 2\cdot71828$. **149.** $3^{2\cdot47806} = 2\cdot47806^x$. **150.** $25^{-x} = 11$.

151. $5^{3x+4} \,.\, 2^{2+x} = 5^x$. **152.** $3^{2x} \,.\, 5^{3x-4} = 7^{x-1} \,.\, 11^{2-x}$.

153. $2^x \,.\, 3^{x-1} \,.\, 4^{x-2} = 5$. **154.** $4096^x \,.\, 0\cdot5 = 4^{x+\frac{1}{6}}$.

155. $\dfrac{a^x}{b^{x-1}} = c$. **156.** $m^x \,.\, n^{x-2} = \dfrac{a}{p^{x-4}}$.

157. $\dfrac{a^{mx} \cdot b^{nx}}{c^{px} \,.\, b^{px}} = s$. **158.** $\left(\dfrac{123}{234}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} = \dfrac{345}{456}$.

159. $\sqrt[x]{10} = 2$. **160.** $\sqrt[x]{2^{5+3x}} = 5$. **161.** $\sqrt[10]{10} = \sqrt[x]{2\cdot57812}$.

162. $\sqrt[5]{a^{x+1}} = \sqrt[4]{b^{2x-1}}$. **163.** $\sqrt[x]{a^{3x-1}} = \sqrt{ab} : \sqrt[2x]{b^{x+1}}$.

164. $\sqrt[3]{14\cdot779^{2x-3}} = \sqrt{89^{x-2}}$. **165.** $\sqrt[3]{3\cdot238^x} \,.\, \sqrt[5]{0\cdot045^{2x}} = \sqrt{4\cdot5^{1-2x}}$.

166. $\sqrt[5x]{13^{3x+4}} = \sqrt[7x]{39\cdot737^{5x-4}}$.

167. $500 \,.\, 0\cdot84^x + 400 \,.\, 0\cdot84^{x-1} = 578\cdot592$.

168. $3^{1+4x} - 2^{3x-5} = 2^{3x-1} - 3^{4x}$.

169. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}$.

170. $3^x \,.\, 5^y = 405,$
$2^x \,.\, 7^y = 112.$

171. $\sqrt[3]{2^x} \,.\, \sqrt[4]{3^y} = 12,$
$\sqrt{2^{-x}} : \sqrt[4]{3^{-3y}} = 3\cdot375$

172. $x^y = 243.$
$\sqrt[y]{10294} = \left(\dfrac{2x}{3}\right)^2$.

173. $\sqrt{2^x} \,.\, \sqrt[3]{3^y} = 12,$
$\dfrac{1}{\sqrt{4^x}} : \sqrt[3]{4^y} = \dfrac{1}{64}$.

174. $\sqrt[x]{4} \,.\, \sqrt[y]{8} = 1,$
$\sqrt[x]{2} \,.\, \sqrt[y]{2} = 1\cdot4131.$

175. $\sqrt[x]{4} \,.\, 5^y = 400,$
$\sqrt[x]{3} \,.\, 2^{y+1} = 72.$

176. $2^x \,.\, 5^y = 2000,$
$3^x \,.\, 6^z = 2916,$
$4^y \,.\, 7^z = 3136.$

177. $\sqrt[x]{a} = m\sqrt[y]{b},$
$\sqrt[x]{c} = n\sqrt[y]{d}.$

178. $\sqrt[x]{a^{y+1}} = m,$
$\sqrt[y]{b^{x+1}} = n.$

179. $\log x + \log 2x + \log 4x = -3$.

180. $\log(x+2) - \log(x-2) = 0\cdot43512$.

181. $\log(5^x - 7) + 0\cdot14267 = x \log 5$.

182. $2^{\log x} = 3$.

183. $11^{\log(2x)} = 0\cdot094672^{11}$.

20. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

Reine quadratische Gleichungen.

1. $(3x+4)(3x-4)=0.$
2. $1-4x^2=7+2x^2.$
3. $(x-a+b)(x+a-b)=4ab.$
4. $(a-bx)^2=(b-ax)^2.$
5. $(9+x)(7-x)+(9-x)(7+x)=76.$
6. $a-x=\frac{2ab}{2+x}.$
7. $\frac{x}{a}+\frac{b}{x}+\frac{ab-1}{a}.$
8. $\frac{x}{150}=\frac{3}{2x}.$
9. $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})=\frac{5}{16}.$
10. $\frac{x+a}{x+b}+\frac{x-a}{x-b}=0.$
11. $\frac{(12+x)(x-3)}{12-x}=x+3.$
12. $\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{3}.$
13. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{5}{2}.$
14. $\frac{a-x}{1-ax}-\frac{1-bx}{b-x}.$
15. $\frac{a}{1+2x}+\frac{a}{1-2x}=2b.$
16. $\sqrt{3x^2+9}=2x.$
17. $\sqrt{33+2x-x^2}=x+1.$
18. $\frac{ax^2+b^2}{\sqrt{bx^2+a^2}}=\sqrt{bx^2+a^2}.$
19. $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=\frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}.$
20. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=3\sqrt{0{\cdot}4a}.$
21. $\sqrt{x+a}-\sqrt{5x-3a-4b}=\frac{2b}{\sqrt{x+a}}.$
22. $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}.$
23. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{a}{b}.$
24. $\frac{2a^2}{x+\sqrt{4a^2-x^2}}+\frac{2a^2}{x-\sqrt{4a^2-x^2}}=x.$
25. $\sqrt{x^2+a^2-2a\sqrt{x^2-b^2}}+x=\frac{ax}{\sqrt{x^2-b^2}}.$
26. $\sqrt[3]{\sqrt{5+x}}+\sqrt[3]{\sqrt{5-x}}=\sqrt[3]{5\sqrt{5}}.$
27. a) $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{a}$; b) $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x-a}=\sqrt[3]{2x}.$
28. a) $(4x-3)^2=81.$ b) $\frac{a+b}{x-a+b}+(a-b)(a-b-x)=0.$ (Neue Unbekannte.)

Gemischte quadratische Gleichungen.

29. $(x-3)(x-2)=0.$
30. $(2x-5)(3x+8)=0.$
31. $x^2-4x=21.$
32. $x^2=12x-35.$
33. $x^2+15x+56=0.$
34. $x^2+x-56=0.$
35. $x^2-4x+4=0.$
36. $x^2-2x=15.$
37. $x^2-6x+7=0.$
38. $x^2-13x=140.$
39. $x^2+9x+5=0.$
40. $x^2+19x+10=0.$

41. $x^2 - 7x = 7.$

42. $x^2 + 2x + 4 = 0.$

43. $5x^2 + 7x = 24.$

44. $12x^2 = 20x - 3.$

45. $5x^2 + 13x + 17 = 0.$

46. $18x^2 + 3x = 10.$

47. $16x^2 - 24x + 11 = 0.$

48. $x^2 - 12x + 100 = 0.$

49. $x^2 - 0{\cdot}9x = 0{\cdot}1.$

50. $x^2 - 6{\cdot}8x + 10{\cdot}92 = 0.$

51. $x^2 + 1{\cdot}28x = 0{\cdot}3825.$

52. $x^2 - 0{\cdot}2392 = 0{\cdot}81x.$

53. $x^2 - 0{\cdot}685x = 0{\cdot}1141.$

54. $x^2 = 8{\cdot}712x - 7{\cdot}23726.$

55. $x^2 + 2ax = 2ab + b^2.$

56. $x^2 - 2abx = a^4 + a^2b^2 + b^4.$

57. $x^2 - (a + b)x + ab = 0.$

58. $x^2 - (a - b)x - ab = 0.$

59. $(a - b)x^2 - bx = a.$

60. $m^2x^2 - m(a - b)x = ab.$

61. $(x + 3)^2 = (x + 2)^2 + (x - 2)^2 + 6.$

62. $(x + 1) : (x + 3) = (x + 11) : (3x - 3).$

63. $(x + \frac{3}{4})(x + \frac{1}{2}) - (4x + \frac{1}{2})(4x - \frac{1}{2}) + 1 = 0.$

64. $(a + b)x^2 - 2(a^2 - b^2)x + a^3 + b^3 = 0.$

65. $x^2 - (a^2 + b^2)x + a^3b - ab^3 = 0.$

66. $x^2 - 4\sqrt{-1}.x + 5 = 0.$

67. $x^2 - 4x = 7 - 4\sqrt{-1}.$

68. $\frac{x + 18}{x + 6} = \frac{6}{x - 3}.$

69. $\frac{(2a - b)x - b^2}{2a + b - x} = \frac{2a(a - b)}{2a - x}.$

70. $\frac{3x - 4}{x - 4} - 10 = \frac{2 - x}{2} - 1.$

71. $\frac{5}{x} - \frac{5}{x + 1} = \frac{12}{x + 2}.$

72. $\frac{2a}{x} - \frac{1}{x^2} = a^2 - b^2.$

73. $\frac{a^2 - b^2}{2x} = \frac{a^2 + b^2}{x^2 + 1}.$

74. $ax - bx = \frac{a}{x} \cdot \frac{a - 2bx}{a + b}.$

75. $\frac{ab}{x} + abx = a^2 + b^2.$

76. $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}.$

77. $\frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} = \frac{a}{b}.$

78. $\frac{a + x}{a - x} + \frac{a - x}{a + x} = \frac{2ax}{a^2 - x^2}.$

79. $\frac{a - x}{b + x} - \frac{b + x}{a - x} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b}.$

80. $\left(\frac{8 + x}{4 - x}\right)^2 = 8\left(\frac{8 + x}{4 - x}\right) - 15.$ Setze $\frac{8 + x}{4 - x} = y.$

81. $\frac{x + 1}{x + 2} - \frac{2x - 3}{3x - 4} = \frac{1}{5}.$

82. $\frac{5x + 4}{2x + 1} + \frac{x - 1}{3x - 4} - 3 = 0.$

83. $\frac{2x - a}{4x + 5a} = \frac{x + 6a}{2x} + 7.$

84. $\frac{3x^2 - 3}{x + 9} + \frac{6x^2 - 4}{2x - 1} = 6x - 6.$

85. $\frac{3a + 5b}{2(a + b)} - \frac{a - b}{a - x} = \frac{b - x}{a + b}.$

86. $\frac{2a - (1 + a^2)x}{1 + a^2 - 2ax} = \frac{2b + (1 + b^2)x}{1 + b^2 + 2bx}.$

87. $x : (x + 1) = (2x + 3) : (3x + 4).$

88. $x^2 + 2x\sqrt{5} = 2\sqrt{6}.$

89. $x(x + 2\sqrt{11}) = 6\sqrt{2}.$

90. $x + 7\sqrt{x} = 30.$

91. $ax - b\sqrt{x} = c.$

92. $2x - 3\sqrt{x - 1} = 4.$

93. $x - 10 = 2\sqrt{x^2 - 3x + 5}.$

94. $\sqrt{3x - 2} - \sqrt{4x - 7} = 1.$

95. $\sqrt[3]{72 - x} - \sqrt[3]{16 - x} = 2.$

96. $\sqrt{x+\sqrt{10}}+\sqrt{x-\sqrt{10}}=\sqrt{6x-11}.$

97. $a\sqrt{x+b^2}+b\sqrt{x+a^2}=2ab.$

98. $3\sqrt{x+8}-\sqrt{x-8}=2\sqrt{2x+2}.$

99. $\sqrt{a^2+x\sqrt{2x^2-a^2}}=a+x.$

100. $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}+\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{a-x}}=\frac{8a}{3\sqrt{x}}.$

101. $\sqrt{5+\sqrt{x}}+\sqrt{7+\sqrt{x}}=\sqrt{2(6+\sqrt{x})}.$

102. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}.$

103. $\frac{\sqrt{x}}{12-\sqrt{x}}+\frac{12-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2.$

104. $\sqrt{a(b+x)}=a+b-\sqrt{b(a-x)}.$

105. $\sqrt{2x+1-2\sqrt{2x+3}}=1.$ 106. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=x.$

107. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}=x-1.$

108. $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}.$

109. $\sqrt{7x-13}-12=\sqrt{5x+1}.$ 110. $\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+2}=x.$

111. $\sqrt{\frac{a+x}{a+b}}+\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}=1.$ 112. $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{x-b}{\sqrt{c^2+(b-x)^2}}=0.$

113. $\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}=\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}.$

Für welche Werte von x werden folgende Ausdrücke positiv, und für welche Werte negativ?

114. $x^2-8x+16.$ 115. $x^2-3x-4.$

116. $x^2+8x+15.$ 117. $x^2-14x+45.$

118. $x^2-6x+9.$ 119. $x^2-4x+5.$

120. $2x^2-x-2=2\left(x^2+\frac{x}{2}-1\right).$

121. $-2x^2-x+10=-2\left(x^2+\frac{x}{2}-5\right).$

122. $8x^2+4x-1.$ 123. $12-x-6x^2.$

Bilde Gleichungen, welche folgende Wurzeln haben:

124. $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}.$ 125. $+3\sqrt{2}$ und $-3\sqrt{2}.$

126. 10 und $-1.$ 127. -9 und $-13.$

128. $\frac{3}{2}$ und $\frac{1}{2}$ 129. $\frac{7}{3}$ und $-\frac{2}{3}.$

130. $0{\cdot}7$ und $-2{\cdot}4.$ 131. $1{\cdot}36$ und $0{\cdot}75.$

132. $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2},$ 133. $1+\sqrt{2}$ und $1-\sqrt{2}.$

134. $(2a-b)^2$ und $(2b-a)^2$.

135. $2a+3b\sqrt{2}$ und $2a-3b\sqrt{2}$.

136. $2+\sqrt{-1}$ und $2-\sqrt{-1}$.

137. $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$ und $\sqrt{2}-\sqrt{-3}$.

138. Eine quadratische Gleichung mit reellen Zahlen hat die eine Wurzel $-5-\sqrt{-5}$. Wie heißt die Gleichung?

139. Die Gleichung $x^2-11{\cdot}175x\ldots\ldots=0$ hat die eine Wurzel $-2{\cdot}8$; ergänze die Gleichung.

140. Dieselbe Gleichung (139) hat die eine Wurzel $2{\cdot}8$; wie heißt die andere und wie die Gleichung?

141. Eine geordnete quadratische Gleichung mit dem absoluten Gliede $+15{\cdot}4$ hat die eine Wurzel $8{\cdot}8$; wie heißt die Gleichung?

142. Dieselbe Aufgabe (wie 141) für $b=-15{\cdot}4$ und $x_1=8{\cdot}8$.

Zerlege folgende Trinome in Factoren:

143. $x^2-17x+70$.

144. $x^2+3x-88$.

145. x^2+x+1.

146. $x^2-9x-10$.

147. $3x^2-14x+8$.

148. $3x^2+10x-153$.

149. $6x^2+x-1$.

150. $20x^2+17x-24$.

151. $x^2-ax+c(a-c)$.

152. $x^2+4abx-(a^2-b^2)^2$.

153. $abx^2+(a+b)x+1$.

154. $abx^2+(a^2-b^2)x-ab$.

155. $acx^2-(a^2+bc)x+ab$.

156. $acx^2-(3ab-bc)x-3b^2$.

Anwendung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

Reine quadratische Gleichungen.

157. Das Product aus dem dritten und vierten Theile einer Zahl beträgt 108; welches ist die Zahl?

158. Welche Zahl muss um d vermehrt und um d vermindert werden, damit das Product der beiden neuen Zahlen a sei?

159. Es ist eine Zahl zu suchen, deren neunter Theil gleich ist dem Producte aus dem dritten, sechsten und achten Theile derselben.

160. Wenn man eine gewisse Zahl um 5 vermehrt und um 5 vermindert, so ist die Summe der Quadrate der so erhaltenen Zahlen 178; welches ist die Zahl?

161. In einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen eine Kathete das $6\frac{2}{3}$fache der andern ist, beträgt die Hypotenuse 82 Meter; wie groß ist jede der beiden Katheten?

162. In einem rechtwinkligen Dreiecke verhalten sich die beiden Katheten wie 3 : 4; vergrößert man die kleinere um 4 und vermindert die größere um 3, so ist die neue Hypotenuse $1\frac{1}{5}$mal so groß als früher. Wie groß sind die drei Seiten beider Dreiecke?

163. Wenn man eine Seite eines Quadrates um a ($11\frac{1}{2}$ *cm*) verlängert und die anstoßende Seite um eben so viel verkürzt, so hat die Diagonale des aus diesen Strecken gebildeten Rechteckes die Länge b (41 *cm*) Wie lang ist die Seite des Quadrates?

164. Wie groß ist die Seite des Quadrates in Aufg. 163, wenn der Flächeninhalt des erwähnten Rechteckes gleich f (860 cm^2) ist?

165. Drei Zahlen verhalten sich wie $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$; die Summe ihrer Quadrate ist 4525. Wie heißen dieselben?

166. Eine Sammlung in einer Gesellschaft, in welcher doppelt so viel Herren als Damen waren, ergab 176 K. Jeder Herr gab doppelt so viel K, als Herren waren, und jede Dame dreimal so viel K, als Damen waren. Wie viel Herren und wie viel Damen waren da?

167. Zwei Körper bewegen sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels von dem Scheitel aus mit der gleichen Geschwindigkeit; doch hat der erste seine Bewegung m (7) Secunden früher begonnen. Wenn nun beide n (12) Secunden nach Abgang des ersten eine gegenseitige Entfernung d (65 *m*) haben, mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich dieselben?

168. Zwei Körper bewegen sich gleichzeitig auf den Schenkeln eines rechten Winkels vom Scheitel aus. Der erste hat die Geschwindigkeit c (4·8 *m*), der zweite c' (1·4 *m*); nach wie viel Secunden ist ihre gegenseitige Entfernung d (100 *m*)?

169. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels befinden sich zwei Körper in der Entfernung 40 *m* bezüglich 20 *m* von dem Scheitel. Der erste bewegt sich zum Scheitel hin mit der Geschwindigkeit 1 *m*, der zweite von dem Scheitel weg mit der Geschwindigkeit 2 *m*. Nach wie viel Secunden wird ihre gegenseitige Entfernung 50 *m* betragen?

170. Ein Punkt außerhalb eines Kreises hat den Centralabstand c. Von demselben wird an den Kreis eine Tangente von der Länge a gezogen; wie groß ist der Radius des Kreises?

171. Ein Kreisring hat den Flächeninhalt f. Das Verhältnis des großen Radius zum kleinen ist gleich m. Wie groß sind die beiden Radien?

Gemischte quadratische Gleichungen.

172. Suche jene Zahl, deren 12faches um 45 kleiner ist als ihr Quadrat.

173. Wenn man zu einer Zahl 40 addiert und die Summe durch die ungeänderte Zahl dividiert, so ist der Quotient um 2 kleiner als die ursprüngliche Zahl; wie groß ist diese?

174. Welche Zahl gibt zu ihrem reciproken Werte addiert a zur Summe?

175. Die rechts stehende Ziffer einer zweistelligen Zahl ist um 3 kleiner als die links stehende; multipliciert man die Zahl mit der letzteren Ziffer, so erhält man das 42fache ihrer Ziffernsumme. Wie heißt die Zahl?

176. Ein Bruch hat den Wert $\frac{1}{3}$. Wenn man Zähler und Nenner um 12 vergrößert, so ist der entstandene Bruch 5mal so groß, als wenn man Zähler und Nenner um 6 verkleinert. Wie heißt der Bruch?

177. Ein Bruch hat den Wert $\frac{1}{2}$. Wenn man seinen Zähler um 8 vergrößert, den Nenner hingegen um 8 verkleinert, so ist der entstandene Bruch um $1\frac{1}{8}$ größer als jener Bruch, welcher entsteht, wenn man umgekehrt den Zähler um 8 verkleinert und den Nenner um 8 vergrößert. Wie heißt der Bruch?

178. Wenn man in einer zweiziffrigen Zahl mit der Ziffernsumme 5 die Ziffern vertauscht und die beiden Zahlen mit einander multipliciert, so erhält man 574; wie heißt die Zahl?

179. Jemand kaufte für a (400) K Tuch; hätte das Meter b (1) K weniger gekostet, so würde er für jenes Geld c (20) Meter mehr erhalten haben. Wie viel Meter hat er gekauft?

180. Die Kosten einer Reise, welche mehrere Personen unternahmen, betrugen 432 fl.; da zwei Personen frei gehalten wurden, musste jede der übrigen Personen um 3 fl. mehr bezahlen. Wie viel Personen waren es?

181. Ein Vater hinterließ seinen Kindern ein Vermögen von 14400 fl. zu gleichen Theilen; bald nach seinem Tode starben zwei Kinder, und es erhielt infolge dessen jedes der übrigen Kinder um 1200 fl. mehr, als es sonst bekommen hätte. Wie viele Kinder hinterließ der Vater?

182. Jemand leiht 5600 K zu einem gewissen Zinsfuße aus; von den Zinsen des ersten Jahres verwendet er 152 K für sich, den Rest schlägt er zum Capital, welches dann im zweiten Jahre 256·5 K Zinsen trägt. Zu wie viel % war das Capital ausgeliehen?

183. Jemand erhält von einem Capitale 120 K Zinsen und von einem zweiten, welches um 6000 K größer ist und 2% mehr einbringt als das erste, 450 K Zinsen; wie groß sind die beiden Capitalien?

184. Ein Baumgarten bildet ein Rechteck, in welchem 560 Bäume in gleichen Entfernungen von einander stehen; eine Reihe nach der Länge enthält 8 Bäume mehr als eine Reihe nach der Breite. Wie viele Bäume stehen in jeder Reihe?

185. Ein Acker von 6936 Quadratmeter Inhalt hat die Gestalt eines Rechteckes, in welchem die Länge um 34 Meter länger ist als die Breite; wie groß ist die Länge und wie groß ist die Breite?

186. In einem Rechtecke, dessen Länge um n (23) Meter länger ist als die Breite, beträgt die Diagonale d (65) Meter; wie groß sind die Seiten?

187. Um ein Rechteck mit der Länge a (24) *cm* und der Breite b (18) *cm* wird ein zweites gezeichnet, dessen Seiten von denen des ersten gleich weit abstehen, und dessen Flächeninhalt m ($1\frac{2}{3}$) mal so groß ist als der des ersten. Welchen Abstand haben die Seiten?

188. Eine Strecke a in zwei Theile so zu zerlegen, dass der eine Theil die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und dem andern Theile wird.

189. Eine Strecke von der Länge a in zwei solche Abschnitte zu theilen, dass die Differenz ihrer Quadrate dem Rechtecke der Abschnitte gleich sei.

190. Eine Strecke a 1) von innen, 2) von außen in zwei Theile so zu theilen, dass das Rechteck aus diesen Theilen flächengleich ist einem Quadrate mit der Seite b.

191. Auf einer Geraden liegen 4 harmonische Punkte. Die Abstände je zweier zugeordneter Punkte sind $AB = a$, $CD = b$. Wie groß sind die Strecken AC, BC, BD?

192. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Kathete um r (7 *m*) kleiner als die andere; die Hypotenuse hat die Länge c (73 *m*). Wie groß sind die Katheten?

193. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse $c = 25\,m$ und die Höhe auf dieselbe $h = 6{\cdot}72\,m$. Berechne zuerst die Abschnitte der Hypotenuse und dann die fehlenden Seiten.

194. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist eine Kathete $a = 117$ und die Projection der anderen auf die Hypotenuse $q = 15{\cdot}488$. Berechne die Hypotenuse.

195. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Kathete um 17 *m* größer als die andere. Vergrößert man die kleinere Kathete um 20 *m* und die größere um 10 *m*, so wächst die Hypotenuse um 20 *m*. Wie groß ist die kleinere Kathete?

196. Von einem rechtwinkligen Dreiecke ist gegeben die Hypotenuse $c = 35\,m$ und die Summe aus einer Kathete und ihrer Projection auf die Hypotenuse $m = 33{\cdot}6\,m$. Wie groß sind die Katheten?

197. Von einem rechtwinkligen Dreiecke ist gegeben die Hypotenuse $c = 50\,m$ und die Summe aus einer Kathete und der Projection der anderen auf die Hypotenuse $m = 60{\cdot}08\,m$. Wie groß ist diese Kathete?

198. Welches Vieleck hat 170 Diagonalen?

199. In welchem Vielecke ist die Zahl der Diagonalen um 18 größer als die Zahl der Seiten?

200. Eine Kreissehne von der Länge a (12) wird durch eine andere von der Länge b (15) halbiert; wie groß sind die beiden Abschnitte der letzteren?

201. Eine Sehne ist um 2 *cm* kürzer als der Durchmesser des Kreises; ihr Centralabstand beträgt $\frac{5}{13}$ von der Länge des Radius. Wie groß ist dieser?

202. Um welche Strecke muss man den Halbmesser r eines Kreises verlängern, damit die vom Endpunkte der Verlängerung an den Kreis gezogene Tangente die Länge a habe?

203. Von einem Kreisausschnitte ist der Umfang u und der Flächeninhalt f gegeben; wie groß ist der Radius und der Bogen?

204. Von einem geraden Cylinder ist die gesammte Oberfläche o und die Höhe h gegeben. Wie groß ist der Radius des Grundkreises?

205. Von einem geraden Kegel ist die gesammte Oberfläche o und die Seitenlinie s gegeben; wie groß ist der Radius des Grundkreises?

206. Von einem geraden Kegelstumpf ist der Cubikinhalt v, die Höhe h und der Radius der einen Grundfläche r gegeben; wie groß ist der Radius der zweiten Grundfläche?

207. Von zwei Orten, welche 152 *km* von einander entfernt sind, fahren zu gleicher Zeit zwei Wagen einander entgegen; dieselben begegnen sich nach 12 Stunden. Wenn nun der eine zu jedem Kilometer eine Minute mehr braucht als der andere, in wie viel Minuten legt jeder Wagen 1 *km* zurück?

208. Zwei Radfahrer fahren gleichzeitig von den beiden Orten A und B einander entgegen. Als sie sich nach 78 Min. begegnen, hat der erste 1560 *m* mehr zurückgelegt als der zweite. Der erste kommt $12\frac{1}{2}$ Min. früher in B an, als der zweite in A. Wie weit sind A und B von einander entfernt?

209. Ein Radfahrer fährt um 8 Uhr vormittags von einem Orte A über einen 9 *km* entfernten Ort B nach C und holt einen Fußgeher, welcher um 8 Uhr von B gegen C aufgebrochen ist, um 11 Uhr 20 Min. vorm. ein. Wenn nun der Fußgeher zu jedem Kilometer $4\frac{1}{2}$ Minute mehr braucht als der Radfahrer, wie viel Meter legt jeder von beiden in der Minute zurück?

210. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich zwei Körper gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c (5) *m* und c′ (3·6) *m* zum Scheitel hin, von welchem jeder die Entfernung a (60) *m* hat. Nach wie viel Secunden beträgt ihre gegenseitige Entfernung b (26) *m*?

211. Zwei Punkte bewegen sich gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c′ und c″ auf zwei sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien zu dem Schnittpunkte hin. Ihre Entfernungen vom Schnittpunkte sind zu einer gewissen Zeit d′ und d″. Nach wie viel (t) Zeiteinheiten werden die beiden Punkte die Entfernung d von einander haben?

212. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich von dem Scheitel aus die Mittelpunkte zweier Kreise, welche die Radien r (15) *cm* und r_1 (14) *cm* haben, mit den Geschwindigkeiten c (5) *cm*, bezüglich c_1 (7) *cm*; doch beginnt der zweite Punkt seine Bewegung t (1) Secunden später. Wann werden sich die beiden Kreise von außen berühren?

213. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren, welche gleichzeitig geöffnet sind, in $2\frac{2}{5}$ Stunden gefüllt werden. In welcher Zeit füllt jede Röhre einzeln den Behälter, wenn bei Verwendung der einen Röhre 2 Stunden weniger erforderlich sind als bei Verwendung der anderen?

214. Um einen Wasserbehälter zu füllen, braucht eine Röhre 2 Stunden weniger, als eine zweite Röhre braucht, um den gefüllten Behälter zu entleeren. Werden beide Röhren geöffnet, dann ist der Behälter erst in 20 Stunden bis zur Hälfte gefüllt. In welcher Zeit wird die erste Röhre allein den Behälter füllen und die zweite den gefüllten entleeren?

215. Man läßt einen Stein in einen Brunnen fallen und zählt t (3) Secunden, bis man das Aufschlagen des Steines im Wasser hört. Wie tief ist der Brunnen, wenn die Acceleration g (9·81) *m*, und die Geschwindigkeit des Schalles c (333) *m* ist?

(Ein frei fallender Körper legt in x Secunden den Weg $s = \frac{g}{2}x^2$ zurück.)

216. Wie viel Zeit braucht ein mit der Geschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfener Körper, um die Höhe h zu erreichen?

217. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfen, t Secunden später wird ein zweiter Körper mit der Geschwindigkeit c′ in die Höhe geworfen; nach wie viel Secunden erreicht dieser mit dem ersten die gleiche Höhe?

Discussion der erhaltenen Gleichung.

---

21. Algebraische Gleichungen höheren Grades und Exponentialgleichungen mit einer Unbekannten, welche sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen.

(§§. 209—212.)

a) Einführung neuer Unbekannte.

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$ **2.** $6x^4 - 11x^2 = 35.$

3. $x^4 - 4x^2 = 45.$ **4.** $\frac{4x^4}{3} - \frac{2x^2}{3} = \frac{3}{64}.$

5. $x^4 - 4abx^2 = (a^2 - b^2)^2.$ **6.** $(9x^2)^2 - 41.(3x)^2 + 400 = 0.$

7. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0.$

8. $x\sqrt{25 - x^2} = 12.$ **9.** $x^2 + \left(\frac{32}{x}\right)^2 = 260.$

10. $6x^{-4} - 5x^{-2} + 1 = 0.$ **11.** $(x + a)^2 + \frac{1}{(x + a)^2} = b.$

12. $\frac{x^2 + 3}{17 - x^2} = \frac{1}{x^2 + 3}.$ **13.** $(x - 2)^2 + \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{82}{9}.$

14. $(x - a)^4 + (x + a)^4 = b.$

15. $(x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) = c.$ Setze $x^2 + ax = y.$

16. $(x^2 - 3)^2 - 7(x^2 - 3) + 6 = 0.$

17. $(2x^2 - 3x + 1)^2 = 22x^2 - 33x + 1.$

18. $\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} = 9.$ **19.** $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 54.$

20. $\sqrt[3]{x^2 - n^2} = n + \sqrt[3]{x}.$ **21.** $\sqrt{x^3 + ax^3} = b.$

22. $x^2 - 8x + 5 = 2\sqrt{x^2 - 8x + 40}.$ Setze $x^2 - 8x = y.$

23. $2x^2 + 3\sqrt{x^2 - x + 1} = 2x + 3.$

24. $(2x + \sqrt{2x})^4 - (2x + \sqrt{2x})^2 = 1260.$

25. $\sqrt[3]{x^2 + 2ax + a^2} - \sqrt[3]{x^2 + 2ax - a^2} = \sqrt[3]{2a^2}.$

26. $\sqrt[3]{x} + 2i\sqrt[6]{x} = 1.$ **27.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{-1}\,.\,\sqrt[3]{-x} = 1.$

---

b) Zerlegung in Factoren (auch verbunden mit a).

28. $x^3 - 3x^2 = 10x.$

29. $x^3 + 3x^2 - (x + 3)(5x + 15) = 0.$

30. $x^3 - 8x^2 + (x - 8)^2 + 6x(x - 8) = 0.$

31. $x^3 - a^3 = a^2(a - x).$ **32.** $(3 - x)^3 = x - 3.$

33. $x^3 + 64 = 0.$ **34.** $x^3 = 125.$ **35.** $x(x^2 - 8) = 8(1 - x).$

36. $\frac{a - x^3}{\sqrt{x^3 - b}} = \sqrt{x^3 - b}.$ **37.** $\frac{9(x^3 - 4)}{x\sqrt{x} - 3} = x\sqrt{x} + 3.$

38. $x^6 + 27 = 28x^3.$ **39.** $3x^6 - 7x^3 = 6.$

40. $2x^3 - 5x\sqrt{x} = 1323.$ **41.** $(3 - x)^3 - 1 = 0.$

42. $x^3 = 2 + 11\sqrt{-1}.$ **43.** $(x - a)^3 - (b - x)^3 = 0.$

44. $(2x - 3)^3 + (x - 9)^3 = 0.$ **45.** $x^4 - 81 = 0.$

46. $x^4 + 16 = 0.$ **47.** $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 240.$

48. $x^8 - 17x^4 + 16 = 0.$ **49.** $x^8 - (a^4 + b^4)x^4 + a^4b^4 = 0.$

50. $\frac{11x^4}{2} - 18x^2 = 9(x^2 - 1)^2 - 65.$

51. $\frac{3x^2 + 4}{3x^2 - 4} + \frac{3x^2 - 4}{3x^2 + 4} = \frac{26}{5}.$ **52.** $3x^6 = 2187.$

53. $\frac{a^2}{x^3 - b} = x^3 + b.$ **54.** $x^6 + i = 0.$ **55.** $x^8 = 1.$

Löse folgende reciproke Gleichungen auf:

56. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$ **57.** $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0.$

58. $x^3 + \frac{7x^2}{2} + \frac{7x}{2} + 1 = 0.$ **59.** $x^3 - \frac{7x^2}{3} + \frac{7x}{3} - 1 = 0.$

60. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0.$ **61.** $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0.$

62. $x^3 + ax^2 + bx + \left(\frac{b}{a}\right)^3 = 0.$ **63.** $x^3 + ax^2 - bx - \left(\frac{b}{a}\right)^3 = 0.$

64. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0.$ **65.** $x^3 + 3x^2 + 15x + 125 = 0.$

66. $27x^3 + 12x^2 - 8x - 8 = 0.$ **67.** $8x^3 + 10x^2 + 15x + 27 = 0.$

68. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0.$
69. $x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 12x + 1 = 0.$
70. $x^4 - \frac{x^3}{3} - 8x^2 - \frac{x}{3} + 1 = 0.$ $x + \frac{1}{x} = z$
71. $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0.$
72. $24x^4 - 50x^3 - 173x^2 - 50x + 24 = 0.$ $: x^2$ $24(x^2 + \frac{1}{x^2}) - \ldots$
73. $3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0.$ $z^2 - 2$
74. $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0.$
75. $x^5 - \frac{13x^4}{6} + x^3 - x^2 + \frac{13x}{6} - 1 = 0.$
76. $36x^5 - 15x^4 - 29x^3 - 29x^2 - 15x + 36 = 0.$ $x_1 = -1$ $(x+1)$
77. $x^5 + x^4 - x - 1 = 0.$
78. $6x^5 + 11x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 11x + 6 = 0.$
79. $x^5 - a^5 = 0.$ 80. $x^5 + a^5 = 0.$ 81. $x^{10} = 1.$

Löse folgende Exponential- und logarithmische Gleichungen:

82. $\sqrt[x]{a} = b^x.$ 83. $2^{x+1} = \sqrt[x+1]{5}.$ 84. $3 . 2^x = 4\sqrt[x]{9}.$
85. $x^{\log x} = 578.$ 86. $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10.$
87. $\log\sqrt{x+1} + \log\sqrt{x-1} = 2 - \log 2.$
88. $\sqrt[x+2]{2} = 4^{x+3}.$ 89. $3 . 4^{x+2} = 4 . 3^{\frac{2x+1}{x}}.$ 90. $\sqrt[x+n]{3^{x-n}} = \frac{1}{9}\sqrt[x-n]{27^{x+n}}.$
91. $3^{x^2-45x+5} = 1200.$ 92. $(2^{x^2+x-2})^{x-3} = 1.$
93. $x^{2\log x - 5} = 0{\cdot}01.$ 94. $x^{\log x} = \frac{x^4}{1000}.$
95. $3^{2x} = 100\,(3^{x-1} - 1).$ 96. $x^{\log x} - 4x^{-\log x} = 3.$
97. $6 . 7^{2x} + 7^x = 301.$ 98. $3 . 4^{2x^2-2x+4} - 5 . 4^{x^2-x+2} = 28.$
99. $\frac{10\,(3^x + 100)}{3^x} = 15 . 3^x + 2.$ 100. $5\sqrt[2x]{3} + 3\sqrt[x]{3} = 10.$
101. $13\sqrt[3x]{10} - 5\sqrt[6x]{10} = 25.$ 102. $\sqrt[x]{2}\sqrt[x+1]{3} . \sqrt[x+2]{4} = 1.$
103. $\sqrt{3^{4x} + 1} + \sqrt{3^{4x} + 2} = 5.$ 104. $\frac{1}{6 - \log x} + \frac{2}{\log x} = 1.$
105. $3^{1+x} + 3^{2-x} = 28.$
106. $\log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x + \frac{2}{3}} = 1{\cdot}5 - \log 2.$

---

22. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

(§§. 213 und 214.)

1. $2x^2 - 3y^2 = 71,$
   $3x^2 + 2y^2 = 165.$

2. $x^2 - y^2 = 12,$
   $x^2 + y = 14.$

3. $x : y = 4 : 1,$
   $x : 6 = 6 : y.$

4. $x^2 - y = 604,$
   $x - y = 4.$

5. $x^2 + y^2 = r^2$,
$y = ax + b$.

6. $y^2 = 2px$,
$y = ax + b$.

7. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$,
$y = Ax + B$.

8. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$,
$y = Ax + B$.

9. $x^2 + y^2 = a^2$,
$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}$.

10. $x^2 - y^2 = 32$,
$\frac{x}{y} = 3$.

11. $x + y = 4$,
$\frac{8}{x} - \frac{12}{y} = 4$.

12. $\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = c$,
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$.

13. $22 = x + 3(y - 1)$,
$92 = \frac{y}{2}(x + 22)$.

14. $(3x - 2y)^2 - (2x - 3y)^2 = 80$,
$4x - 5y = 5$.

15. $x^2 : y^2 = a^2 : b^2$,
$x - y = a^2 - b^2$.

16. $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+4} = 5$,
$5x + 3y = 30$.

17. $\sqrt{x+4} - \sqrt{y+1} = 1$,
$5x - 3y = 16$.

18. $x + y = a$,
$xy = b^2$.

19. $x - y = 2$,
$xy = 15$.

20. $(x - 4) + (y - 3) = 6$,
$(x - 4)(y - 3) = 8$.

21. $xy + x = 40$,
$x + y = 12$.

22. $xy + x = 4$,
$xy + y = 3$.

23. $xy + x = 18$,
$xy - y = 10$.

24. $x + \sqrt{xy} + y = 14$,
$xy = 16$.

25. $x - 3\sqrt{xy} - y = -6$,
$xy = 16$.

26. $x : 11 = 704 : y$,
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 19$.

27. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{b}$,
$xy = a^2$.

28. $x^2 - y^2 = a$,
$xy = b$.

29. $x^2 + y^2 = a^2$,
$xy = b^2$.

30. $x^2 + xy + y^2 = a^2$,
$xy = b^2$.

31. $x^2 + 3xy + y^2 = 7\frac{1}{4}$,
$xy = 1$.

32. $x^2 + xy + y^2 = a$,
$x^2 + y^2 = b$.

33. $x^2 - xy + y^2 = a$,
$x - y = b$.

34. $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$,
$x^2 - xy + y^2 = a^2 + 3b^2$.

35. $x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2$,
$x + y = 2a$.

36. $x^2 + y^2 = 104$,
$x - y = 8$.

37. $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 32$,
$(x + 2) - (y + 3) = 0$.

38. $x + y = 74$,
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12$.

39. $x^2 + y^2 + x + y = a$,
$x^2 + y^2 - x - y = b$.

40. $3x^2 - 7xy + 4y^2 = 0$,
$5x^2 - 3xy - y^2 = 35$.

41. $x^2+xy+y^2=0$,
$mx^2+ny^2=a^2$.

42. $2x^2-2xy-y^2=39$,
$x^2+2xy+4y^2=39$.

43. $(x-2)^2-(y+1)^2=9$,
$(x-2)(y+1)=20$.

44. $x^2+xy=2a^2-3ab-2b^2$,
$y^2-xy=15b^2-5ab$.

45. $x(x-y)=75$,
$y(x+y)=250$.

46. $x^2+xy+y^2=3$,
$2x^2+3xy+4y^2=12$.

47. $x^2+xy+y^2=3$,
$2x^2-3xy+4y^2=18$.

48. $x+xy+y=11$,
$x^2y+xy^2=30$.

49. $(x+y)^2-3(x+y)=290$,
$xy=80$.

50. $x^2+y^2+x+y=8$,
$xy=2$.

51. $x^2+y^2-x-y=12$,
$xy=9$.

52. $x-y-\frac{2}{x-y}=1$,
$xy+\frac{3}{xy}=2$.

53. $x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y}$,
$x^2+y^2=34$.

54. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$,
$x^2y+xy^2=30$.

55. $\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}=17$,
$x^2y+xy^2=3600$.

56. $x^2-y^2=7(x-y)$,
$xy(x^2+y^2)=300$.

57. $x^3-y^3=31(x-y)$,
$x^2+y^2=26$.

58. $x^3+y^3=a^3$ (65),
$xy=b^2$ (4).

59. $x^4+y^4=1\frac{1}{16}$,
$xy=\frac{1}{16}$.

60. $x^3+y^3=\frac{31}{63}(x+y)^2$,
$xy=\frac{3}{2}$.

61. $x^3+y^3=a$,
$x+y=b$.

62. $x^3-y^3=a$,
$x-y=b$.

63. $x^4+y^4=a$,
$x+y=b$.

64. $x^4+y^4=a$,
$x-y=b$.

65. $x^2+y^2=97$,
$\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$.

66. $x+y=72$,
$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6$.

67. $x^3+y^3=1512$,
$x^2y+xy^2=1440$.

68. $(x+y)(x^2+y^2)=a$,
$(x-y)(x^2-y^2)=b$.

69. $x^2+y^2+x-y=a$,
$(x^2+y^2)(x-y)=b$.

70. $x^2+y\sqrt{xy}=9$,
$y^2+x\sqrt{xy}=18$.

71. $x(x+y)^2(x+2y)=p$,
$x^2+(x+2y)^2=s$.

72. $x(x+y)(x+2y)(x+3y)=p$,
$(x+2y)^2-(x+y)^2=d$.

73. $x+xy=b$,
$x^2+x^2y^2=c$.

74. $x^5+y^5=33$,
$x+y=3$.

75. $x^5-y^5=242$,
$(x-y)^2-x+y=2$.

76. $x+y=1$,
$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=35$.

77. $x(x+y+z)=a,$
$y(x+y+z)=b,$
$z(x+y+z)=c.$

78. $x^2+y^2+z^2=94,$
$x(y+z)=45,$
$x+y+z=14.$

79. $\frac{xy}{z}=m,$
$\frac{xz}{y}=n,$
$\frac{yz}{x}=p.$

80. $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}=22.$
$\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}=40.$
$\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}=42.$

81. $\frac{y+z}{xyz}+a^2=0,$
$\frac{x+z}{xyz}+b^2=0,$
$\frac{x+y}{xyz}+(a+b)^2=0.$

82. $x+y+z=6,$
$x^2+y^2-z^2=8,$
$x^3+y^3+z^3=90.$

83. $x:y=y:z,$
$x+y+z=26,$
$x^2+y^2+z^2=364.$

84. $x:y=z:u,$
$x+u=13,$
$y+z=20,$
$x^2+y^2+z^2+u^2=425.$

Anwendung der quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

85. Die Zahl 18 in zwei Factoren zu zerlegen, deren Quadrate 27 zur Differenz geben.

86. Von welchen zwei Zahlen ist das Product um 84 kleiner als die Summe der Quadrate, und um 44 größer als die Differenz der Quadrate?

87. Der Unterschied der Quadrate zweier Zahlen beträgt 88; vergrößert man die erste Zahl um 2 und die zweite um 3, so beträgt der Unterschied der Quadrate nur 81; welches sind die beiden Zahlen?

88. Suche zwei Zahlen von der Beschaffenheit, dass ihre Summe, ihr Product und die Differenz ihrer Quadrate gleich sind.

89. Der Zähler und der Nenner eines Bruches betragen zusammen 33. Wäre der Zähler um 39 und der Nenner um 20 größer, so würde der Bruch doppelt so groß sein; welches ist der Bruch?

90. Dividiert man eine zweiziffrige Zahl durch das Product ihrer Ziffern, so erhält man 6; vertauscht man die Ziffern, so ist die so erhaltene Zahl um 9 größer als die gesuchte; wie heißt die Zahl?

91. Multipliciert man eine zweiziffrige Zahl mit der durch Vertauschung ihrer Ziffern erhaltenen Zahl, so erhält man 1729. Dividiert man hingegen die erste Zahl durch die zweite, so erhält man zum Quotienten 4 und zum Reste 15. Wie heißt die Zahl?

92. Dividiert man eine zweiziffrige Zahl durch das Product ihrer Ziffern, so erhält man den Quotienten 5 und den Rest 2. Subtrahiert man die Zahl von 55, so erhält man als Rest die aus denselben Ziffern in umgekehrter Reihenfolge gebildete Zahl. Wie heißt die Zahl?

93. Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich f (60 m^2); der Umfang desselben verhält sich zur Diagonale wie m : n (34 : 13). Wie groß ist jede Seite?

94. Wie groß sind die Seiten eines Rechteckes mit der Diagonale d (17 *cm*) und dem Umfange u (46 *cm*)?

95. Wie groß ist der Umfang eines Rechteckes, dessen Diagonale d (25 *cm*) und dessen Flächeninhalt f (168 cm^2) ist?

96. Die Diagonale eines Rechteckes ist 13 *m*; vergrößert man die Länge um 28 *m* und die Breite um 4 *m*, so wächst die Diagonale um 28 *m*. Welche Länge und Breite hat das Rechteck?

97. In einem rechtwinkligen Dreiecke wird die Hypotenuse durch ihre Höhe in zwei Abschnitte getheilt; die Hypotenuse ist a, die eine Kathete ist gleich dem nicht anliegenden Hypotenusenabschnitte. Wie groß sind die Katheten?

98. Wie groß sind die Seiten eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Höhe um 2 *cm* kleiner ist als der Schenkel und dessen Umfang 50 *cm* beträgt?

99. Von einem rechtwinkligen Dreiecke sind die Hypotenuse a (65 *m*) und die Differenz d (23 *m*) der beiden Katheten gegeben; wie groß ist jede Kathete?

100. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe beider Katheten 7 *m* und die Höhe 2·4 *m*. Wie groß ist der Flächeninhalt?

101. Aus der Summe s (50 *m*) der Hypotenuse und der einen Kathete und der Summe s′ (81 *m*) der Hypotenuse und der anderen Kathete die Seiten des rechtwinkligen Dreieckes zu berechnen.

102. In zwei Quadraten ist die Differenz der Diagonalen d, die Summe der Flächeninhalte s; wie groß sind die Seiten?

103. Die Diagonale eines Rechteckes ist 85 Meter; verlängert man jede Seite um 2 Meter, so wächst der Flächeninhalt um 230 Quadratmeter; wie groß sind die Seiten?

104. Ein Grundstück von der Form eines Rechteckes ist a Meter lang und b Meter breit; um wie viel Meter muss die Länge verkleinert und um wie viel Meter die Breite vergrößert werden, damit das Grundstück an Inhalt gleich bleibe, an Umfang aber um a — 2b Meter kleiner werde?

105. Bei einem geraden Cylinder mit der Oberfläche o (8042·5 . . m^2) verhält sich der Durchmesser der Basis zur Höhe wie m : n (4 : 5). Wie groß ist der Radius und die Höhe?

106. Die Oberfläche eines geraden Kegels ist o (3141·59.. cm^2), der Umfang eines Achsenschnittes u (130 cm). Wie groß ist der Radius und die Seite?

107. Ein gerader Kegelstumpf hat die Oberfläche o (188·495.. cm^2) und die Seitenlinie a (5 cm). Die Radien der beiden Grundkreise unterscheiden sich um d (1 cm); wie groß sind dieselben?

108. Die Kanten zweier Würfel unterscheiden sich um 3 m, ihre Rauminhalte um 7317 m^3. Berechne die Kanten.

109. Eine eiserne Hohlkugel mit der Dicke $d = 5$ cm wiegt $p = 139·494..$ kg. Wie groß sind die beiden Radien? (specifisches Gewicht des Eisens $s = 7·20..$)

110. Ein Kegelstumpf hat den Rauminhalt $v = 21991..$ dm^3 und die Höhe $h = 12$ dm. Die Summe der Radien der Grundflächen beträgt $s = 15$ dm; wie groß sind dieselben?

111. Eine regelmäßige vierseitige abgestumpfte Pyramide hat den Rauminhalt $v = 855$ m^3 und die Höhe $h = 15$ m. Wie groß sind ihre Grundkanten, wenn sich dieselben wie $m : n = 3 : 2$ verhalten?

112. Eine abgestumpfte Pyramide hat den Rauminhalt $v = 684$ m^3 und die Höhe $h = 18$ m. Wie groß sind ihre Grundflächen, wenn dieselben sich um $d = 30$ m^2 unterscheiden?

113. Eine regelmäßige vierseitige Pyramide hat das Volumen $v = 1280$ m^3 und die Oberfläche $o = 800$ m^2. Wie groß ist die Grund- und die Seitenkante?

114. Ein rechtwinkliges Parallelepiped hat eine Grundfläche von 48 cm^2, eine Oberfläche von 768 cm^2 und eine Diagonale von 26 cm. Wie groß sind seine Kanten und sein Rauminhalt?

115. Von einem rechtwinkligen Parallelepiped ist gegeben der Rauminhalt $v = 720$ dm^3, die Oberfläche $o = 484$ dm^2 und der Umfang der Grundfläche $u = 34$ dm. Wie groß sind die Kanten?

116. Von einem Deltoid sind die beiden Diagonalen $d = 16$ cm und d_1 (Symmetrale) $= 21$ cm sowie der Umfang $u = 54$ cm gegeben. Wie groß sind die Seiten?

117. Auf einen Punkt wirken 3 Kräfte unter rechten Winkeln, deren Stärken sich wie $4 : 5 : 6$ verhalten. Welche Stärke haben dieselben, wenn die Stärke der Resultierende 39 kg beträgt?

118. Drei Zahlen bilden eine stetige geometrische Proportion; ihre Summe ist 14, die Summe ihrer Quadrate 84; welche Zahlen sind es?

119. Die Summe dreier Zahlen, die eine stetige Proportion bilden, ist 39, ihr Product 729; welches sind die Zahlen?

120. In einer geometrischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder 18, die Summe der inneren Glieder 17 und die Summe der Quadrate aller vier Glieder 325; wie heißt die Proportion?

121. Die Summe der vier Glieder einer geometrischen Proportion ist 72, das Product der inneren Glieder 140, die Summe der Quadrate aller vier Glieder 2050; wie heißt die Proportion?

122. Von drei Zahlen ist die zweite das harmonische Mittel zwischen der ersten und der dritten; die Summe aller 3 Zahlen ist 13, die Summe ihrer Quadrate 61. Welche Zahlen sind es?

123. Eine bestimmte Arbeit kann von A und B ausgeführt werden; A allein braucht zu derselben um 2 Tage mehr, B allein um $4\frac{1}{2}$ Tage mehr, als sie beide brauchen würden, wenn sie zusammen arbeiten. Wie viel Tage brauchen beide zusammen zur Vollendung der Arbeit?

124. A und B verkauften zusammen 100 Meter einer Ware, und zwar der eine mehr als der andere, aber beide nahmen dennoch dieselbe Geldsumme ein; hätte A so viel Meter gehabt als B, so würde er 63 fl. dafür eingenommen haben; hätte B so viel Meter als A gehabt, so würde er nur 28 fl. dafür erhalten haben. Wie viel Meter hat jeder verkauft?

125. Zwei Röhren liefern zusammen in 20 Minuten 540 Liter Wasser; die erste Röhre braucht, um allein diese Quantität Wasser zu liefern, 9 Minuten mehr als die zweite. Wie viel Liter liefert jede in 1 Minute?

126. Ein Reisender braucht zu einem Wege von 520 Kilometer 3 Tage mehr als ein anderer, weil dieser täglich 12 Kilometer mehr zurücklegt als der erstere. Wie viel Tage braucht jeder zu dieser Reise?

127. Von zwei Orten, die 270 Kilometer von einander entfernt sind, fahren gleichzeitig zwei Eisenbahnzüge einander entgegen, von denen der eine zu einem Kilometer 0·5 Minuten mehr braucht als der andere. Wenn sich nun diese Züge 5 Stunden nach ihrer Abfahrt begegnen, wie viel Minuten braucht jeder zu einem Kilometer?

128. Zwei Reisende gehen von zwei Orten A und B, welche 45 *km* voneinander entfernt sind, gleichzeitig einander entgegen und begegnen sich nach 5 Stunden. Der erste kommt $2\frac{1}{4}$ Stunde früher in B an als der zweite in A. Wo begegneten sie einander?

129. Zwei Punkte bewegen sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels von dem Scheitel weg, von welchem sie anfänglich die Entfernung 4 *m* bezüglich $3\frac{2}{3}$ *m* haben. Nach 1 Secunde sind sie 13 *m* und nach $2\frac{1}{2}$ Secunden 25 *m* von einander entfernt. Wie groß sind ihre Geschwindigkeiten?

130. Das Vorderrad eines Wagens macht auf einer Strecke von 1260 *m* 105 Umdrehungen mehr als das Hinterrad. Wäre der Umfang eines jeden Rades um $\frac{1}{2}$ *m* größer, so würde das Vorderrad auf derselben Strecke nur 80 Umdrehungen mehr machen als das Hinterrad. Welchen Umfang hat jedes Rad?

Exponential- und logarithmische Gleichungen.

131. $x^y = 243$
$\sqrt[y]{1024} = (\frac{2}{3}x)^2$.

132. $2^y \sqrt[x]{9} = 24$
$3^y \sqrt[x]{25} = 135$.

133. $xy = 400$
$x^{\log y} = 16$.

134. $2^{y+2} = \sqrt[x]{4^{x+4}}$
$3^{y-2} = \sqrt[x+1]{9^{2x-1}}$.

135. $y^x + 4y^{-x} = \frac{65}{4}$
$3\sqrt[x]{y} + 5\sqrt[x]{y^{-1}} = \frac{17}{2}$.

136. $\sqrt[y]{x^2} = 11\sqrt[y]{x} - 10$
$y = 1 - \log x$.

137. $2^x + 3^y = 17$
$2^{2x} + 3^{2y} = 145$.

138. $4\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}} = 11\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}} - 6$
$y = 2 - \log x$.

---

23. Unbestimmte Gleichungen.

1. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades. (§§. 215 – 221.)

Löse in ganzen Zahlen auf:

1. $2x - 3y = 1$.
2. $2x + 3y = 17$.
3. $6x + 5y = 128$.
4. $7x + 11y = 18$.
5. $7x - 13y = 152$.
6. $8x - 11y = 200$.
7. $12x + 13y = 319$.
8. $5x - 7y = 1$.
9. $9x - 22y = 5$.
10. $7x - 4y = 5$.
11. $8x + 5y = 111$.
12. $18x - 25y = 10$.
13. $15x + 14y = 225$.
14. $13x + 19y = 73$.
15. $37x - 22y = 307$.
16. $23x - 13y = 2$.
17. $7x + 17y = 408$.
18. $25x - 11y = 20$.
19. $x + y + z = 12$,
$7x + 8y + 7z = 36$.
20. $x - 4y + 13z = 16$,
$7x + y + z = 45$.
21. $5x + 3y + 7z = 36$.
22. $8x + 11y - 20z = 6$.

Löse in ganzen positiven Zahlen auf:

23. $5x - 7y = 13$.
24. $5x + 7y = 94$.
25. $7x - 12y = 300$.
26. $17x + 14y = 76$.
27. $23x + 57y = 412$.
28. $25x = 36y - 7$.
29. $29x + 17y = 250$.
30. $17x - 1 = 12y - 5$.
31. $28x + 12 = 19y + 17$.
32. $24x - 31y = 196$.
33. $6x + 17y = 500$.
34. $18x + 7y = 600$.
35. $19x - 10y = 7$,
$19x - 8z = 15$.
36. $x + y + z = 48$,
$2x + 3y - 3z = 11$.

37. $3x + 5y + 7z = 49,$
$2x - 3y + 4z = 11.$

38. $2x + 3y + 5z = 123,$
$30x - 7y - 3z = 25.$

39. $3x + 4y + 5z = 97,$
$4x - 5y + 3z = 3.$

40. $5x + 13y + 18z = 997,$
$11x + 20y + 37z = 1866.$

41. $4x - 5y + 3z = 3.$

42. $7x - 3y - 4z = 24.$

Anwendungen.

43. Suche zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit, dass das 8fache der ersten, um das 3fache der zweiten vermehrt, 91 zur Summe gibt.

44. Die Zahl 200 in zwei Theile zu zerlegen, von denen der eine durch 14, der andere durch 23 theilbar ist.

45. Suche zwei um 10 verschiedene Zahlen, deren kleinere durch 21, deren größere durch 34 theilbar ist.

46. Zerlege die Zahl 300 in zwei Theile so, dass der erste um 1 vermindert durch 9, der zweite um 7 vermehrt durch 11 theilbar sei.

47. Suche eine Zahl, welche durch 7 theilbar ist, aber durch 29 dividiert 13 zum Reste gibt.

48. Welche ist die allgemeine Form der positiven Zahlen, welche durch 19 dividiert 1, und durch 28 dividiert 3 zum Reste geben?

49. Welche positive Zahlen geben durch 24 dividiert 18, durch 13 dividiert 1 zum Reste?

50. Welche zwischen 1000 und 2000 liegende Zahlen lassen sich, wenn sie um 5 größer werden, durch 13, und wenn sie um 5 kleiner werden, durch 17 ohne Rest theilen?

51. Zerlege den Bruch $\frac{101}{110}$ in zwei Brüche mit den Nennern 5 und 22.

52. Jemand kauft für 180 K zweierlei Sorten Tuch; von der einen kostet das Meter 8 K, von der andern 6 K. Wie viel Meter erhält er von jeder Sorte?

53. Jemand kaufte Kaffee und Zucker, zusammen für 48 fl. 15 kr.; 1 *kg* Kaffee kostete 1 fl. 55 kr., 1 *kg* Zucker 40 kr. Wie viel ganze *kg* Kaffee und wie viele ganze *kg* Zucker hat er gekauft?

54. Der Durchmesser der Zwanzigkronenstücke beträgt 21, jener der Zehnkronenstücke 19 Millimeter. Wie viel Zwanzig- und Zehnkronenstücke muss man in gerader Linie nebeneinander stellen, damit die Summe der Durchmesser 1 Meter betrage?

55. Von zwei gezahnten Rädern hat das eine 13, das andere 17 Zähne; beim Beginne der Bewegung greift der erste Zahn des ersten Rades in die erste Zahnlücke des zweites Rades ein. Nach wie vielen Umdrehungen des ersten Rades wird der Zahn 1 dieses Rades wieder in die Lücke 1 des zweiten eingreifen?

Dec **56.** Welche dreiziffrige Zahlen mit der Ziffernsumme 18 werden, wenn man ihre Ziffern in umgekehrter Ordnung schreibt, um 198 kleiner?

57. Welche Zahlen geben der Reihe nach durch 11, 19, 29 dividiert bezüglich die Reste 5, 12, 4?

58. Die Zahl 50 ist in drei Theile zu zerlegen, die folgeweise durch 5, 6, 7 theilbar sind.

59. Der Bruch $\frac{121201}{4400}$ soll in drei Brüche zerlegt werden, deren Nenner 11, 16, 25 sind.

60. Für 30 Personen, Männer, Frauen und Kinder, sind 60 K ausgegeben worden. Wenn nun die Ausgabe für einen Mann 4 K, für eine Frau 2 K und für ein Kind 50 h beträgt, wie viel waren Männer, wie viel Frauen und wie viel Kinder?

61. Jemand hat Banknoten zu 10 fl., Staatsnoten zu 5 fl. und Einguldenstücke; er will mit denselben eine Schuld von 328 fl. bezahlen. Wie viele Stücke von jeder Sorte wird er zur Zahlung verwenden, wenn die Zahl der Noten zu 10 fl. so groß sein soll als die Zahl der Noten zu 5 fl. und der Einguldenstücke zusammen?

62. In einem Dreiecke beträgt der dritte Theil des ersten Winkels, der neunte Theil des zweiten und der dritte Theil des dritten zusammen 20^0. Wie groß können diese Winkel sein, wenn jeder eine ganze Anzahl von Graden hat?

63. Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke die kleinere Kathete um 10 vergrößert und die größere um 4 verkleinert, so wächst das Quadrat der Hypotenuse um 120. Wie groß sind die Katheten in ganzen Zahlen?

64. Die Länge eines Kreisbogens ändert sich nicht, wenn man den Radius um 1 verkleinert und den Centriwinkel um 9^0 vergrößert. Wie groß sind der Radius und der Centriwinkel in ganzen Zahlen?

65. Die Oberfläche eines rechtwinkligen Parallepipeds, bei welchem die in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten zusammen die Länge 67 *cm* haben, wächst um 10920 cm^2, wenn die drei Kanten bezüglich um 5, 6 und 7 *cm* wachsen. Wie groß sind die drei Kanten, wenn ihre Maßzahlen ganze Zahlen sind?

---

2. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades. (§. 222.)

Löse in ganzen positiven Zahlen auf:

66. $3xy - 5y = 16x$.

67. $xy + x - y = 64$.

68. $5xy - 2x - 3y = 18$.

69. $7xy + 10y = 136x$.

70. $12x^2 - xy - 3y + 87 = 0$.

71. $x^2 + xy - 2x - 3x = 29$.

72. $3x^2 - 2xy - y + 1 = 0$.

73. $x^2 - 2xy + y = 4$.

74. $x^2 + 3xy - 2x + 2y = 8$.

75. $x^2 - 2xy - 3x + 5y + 20 = 0$.

Löse in rationalen Zahlen auf:

76. $y^2 = 16x^2 + 5x + 7$. 77. $y^2 = 25x^2 - 39x + 12$.
78. $y^2 = 4x^2 - x + 3$. 79. $y^2 = x^2 - 4x - 3$.
80. $y^2 = 4x^2 - 5$. 81. $y^2 = x^2 + 1$.
82. $y^2 = 5x^2 - 7x + 4$. 83. $y^2 = 3x^2 - 2x + 1$.
84. $y^2 = 7x^2 + 9$. 85. $y^2 = 2x^2 + 3x + 4$.
86. $y^2 = 1 - x^2$. 87. $x^2 - y^2 = 25$.
88. $2x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$.
89. $4x^2 + 2xy - y^2 + 11x - 4y + 12 = 0$.

Gib die Werte von x an, für welche folgende Ausdrücke rational werden:

90. $\sqrt{x^2 - 4}$. 91. $\sqrt{9x^2 - 5x + 7}$. 92. $\sqrt{16x^2 + 9x - 8}$.
93. $\sqrt{2x^2 + x + 4}$. 94. $\sqrt{3x^2 + 2x + 9}$. 95. $\sqrt{8x^2 - 3x + 1}$.

Anwendungen.

96. Zwei ganze positive Zahlen zu finden, deren Summe zu dem Producte addiert 74 gibt.

97. Von welchen zwei ganzen positiven Zahlen ist das Product um 33 größer als ihre Differenz?

98. Zwei ganze positive Zahlen zu finden, deren Quotient und Summe zusammen 35 betragen.

99. Suche zwei ganze positive Zahlen, deren Quotient und Differenz gleich sind.

100. Welche zweiziffrige Zahl gibt durch das Product ihrer Ziffern dividiert den Quotienten 5 mit dem Reste 2?

101. Suche die allgemeine Form einer Zahl, welche, wenn man sie entweder um 1 vermehrt oder um 1 vermindert, in beiden Fällen ein Quadrat gibt.

102. Die Summe zweier Quadrate $a^2 + b^2$ in die Summe zweier anderer Quadrate zu verwandeln.

103. Drei Zahlen von solcher Beschaffenheit anzugeben, dass die Summe der Quadrate der beiden ersten dem Quadrate der dritten Zahl gleich sei.

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Setzt man für beliebige Werte $s^2 + m^2 = (s + n)^2$, so folgt daraus $s = \frac{m^2 - n^2}{2n}$ und $s + n = \frac{m^2 + n^2}{2n}$, daher

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{2n}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{m^2 + n^2}{2n}\right)^2,$$

oder, wenn man mit $4n^2$ multipliciert,

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2.$$

Demnach sind

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2$$

rationale Werte von x, y, z, welche der vorgelegten Aufgabe genügen, mögen für m und n was immer für rationale Zahlen gewählt werden. Nimmt man für m und n ganze Zahlen, so erhält man auch für x, y, z ganze Zahlen.

Diese Aufgabe hat in der Planimetrie ihre Anwendung, um rechtwinklige Dreiecke zu erhalten, deren Seiten commensurabel sind (Pythagoreische Dreiecke). Drücken x und y die Katheten aus, so ist z die Hypotenuse, und man hat für

$m = 2$	3	4	4	5	5	6	6	…
$n = 1$	2	1	3	2	4	1	5	…
$x = 3$	5	15	7	21	9	35	11	…
$y = 4$	12	8	24	20	40	12	60	…
$z = 5$	13	17	25	29	41	37	61	…

104. Vier Zahlen von solcher Beschaffenheit anzugeben, dass die Summe der Quadrate der ersten drei dem Quadrate der vierten Zahl gleich sei.

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2.$$

Setzt man $s^2 + m^2 + n^2 = (s + p)^2$, so erhält man

$$s = \frac{m^2 + n^2 - p^2}{2p} \text{ und } s + p = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{2p}; \text{ folglich ist}$$

$$\left(\frac{m^2 + n^2 - p^2}{2p}\right)^2 + m^2 + n^2 = \left(\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2p}\right)^2,$$

oder, wenn man mit $4p^2$ multipliciert,

$$(m^2 + n^2 - p^2)^2 + (2mp)^2 + (2np)^2 = (m^2 + n^2 + p^2)^2.$$

Daher ist $x = m^2 + n^2 - p^2$, $y = 2mp$, $z = 2np$ und $u = m^2 + n^2 + p^2$.

Diese Aufgabe findet in der Stereometrie ihre Anwendung, um rechtwinklige Parallelepipede zu erhalten, in denen die drei Kanten und die Diagonale commensurabel sind.

---

24. Kettenbrüche. (§§. 223—236.)

Verwandle folgende Brüche in Kettenbrüche:

1. a) $\frac{92}{381}$; b) $\frac{61}{437}$; c) $\frac{115}{151}$; d) $\frac{67}{551}$; e) $\frac{113}{355}$.

2. a) $\frac{49}{235}$; b) $\frac{137}{196}$; c) $\frac{188}{487}$; d) $\frac{108}{887}$; e) $\frac{349}{1478}$.

3. a) $\frac{104}{31}$; b) $\frac{284}{83}$; c) $\frac{519}{53}$; d) $\frac{373}{250}$; e) $\frac{8658}{1405}$.

4. a) 0·513; b) 0·0934; c) 0·7307; d) 5·13722.

5. $\frac{24a^3 + 6a}{24a^4 + 18a^2 + 1}$. **6.** $\frac{12x^2 + 17x + 7}{24x^3 + 46x^2 + 35x + 10}$.

Verwandle folgende Kettenbrüche in gemeine Brüche:

7. $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$. **8.** $\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}$.

9. $\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7}}}}}$. **10.** $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a+1 + \cfrac{1}{a+2 + \cfrac{1}{a+3 + \cfrac{1}{a+4}}}}}$.

Näherungsbrüche.

Verwandle folgende Brüche in Kettenbrüche und bestimme deren Näherungsbrüche.:

11. a) $\frac{129}{164}$; b) $\frac{111}{53}$; c) $\frac{135}{328}$; d) $\frac{100}{137}$; e) $\frac{157}{972}$.

12. a) $\frac{999}{439}$; b) $\frac{3361}{900}$; c) 0·357; d) 0·8282; e) 2·7041.

13. Gib die ersten fünf Näherungswerte des Decimalbruches 0·65438 und die Fehlergrenze eines jeden derselben an.

Drücke in kleineren Zahlen möglichst genau aus:

14. Das Verhältnis der Seite eines Quadrates zur Diagonale.

15. Das Verhältnis der Seite eines regelmäßigen Zehneckes zum Radius des umgeschriebenen Kreises.

16. Das Verhältnis der Seite eines Quadrates zum Durchmesser des flächengleichen Kreises.

17. Das Verhältnis der Kanten zweier Würfel, deren Rauminhalte sich wie 1 : 2 verhalten.

18. Das Verhältnis des Kilometers zur geographischen Meile gleich 1 : 7·42044...

19. Das Verhältnis zwischen einem österr. Zehnkronenstücke und einem deutschen Zehnmarkstücke. (Aufg. 13, 6.)

20. Der synodische Monat, d. i. die Zeit von einem Neumonde zum andern, hat 29·53059, das tropische Sonnenjahr 365·24222 Tage; bestimme die ersten acht Näherungswerte des Verhältnisses beider Zeiträume.

Auf dem sechsten Näherungsbruche $\frac{19}{235}$, welcher ausdrückt, dass 19 Sonnenjahre sehr nahe 235 synodische Monate ausmachen, beruht der Meton'sche Cyklus von 19 Jahren, nach deren Verlauf die Mondesphasen wieder nahezu auf die nämlichen Tage des Jahres fallen, sowie die goldene Zahl, welche anzeigt, das wievielte Jahr in diesem Cyklus ein bestimmtes Jahr ist.

21. Das tropische Jahr (die Zeit von einem Frühlings-Anfange bis zum nächsten) hat 365 Tage 5 Std. 48 Min. 47·4 Sec. Stelle das Verhältnis des Überschusses des tropischen Jahres über 365 Tage zu einem Tage in kleineren Zahlen dar. (Erörterung verschiedener Schaltmethoden.)

Bestimme die Werte der folgenden unendlichen periodischen Kettenbrüche:

22. (1, 5, 1, 5...). **23.** (1, 3, 5, 1, 3, 5...).

24. (2, 3, 5, 3, 5...). **25.** (7, 8, 8, ...).

Berechne mittelst der Kettenbrüche folgende irrationale Quadratwurzeln auf 5 Decimalen:

26. $\sqrt{10}$. **27.** $\sqrt{23}$. **28.** $\sqrt{47}$. **29.** $\sqrt{129}$.

30. $\sqrt{61}$. **31.** $\sqrt{205}$. **32.** $\sqrt{531}$. **33.** $\sqrt{2222}$.

Löse mittelst der Kettenbrüche folgende unbestimmte Gleichungen in ganzen Zahlen auf:

34. $9x + 23y = 400.$ **35.** $25x - 36y = 14.$
36. $18x - 25y = 10.$ **37.** $39x + 14y = 137.$
38. $47x - 11y = 7.$ **39.** $24x - 35y = 10.$
40. $34x - 1 = 37y.$ **41.** $21x = 59y + 1.$
42. $61x + 28y = 206.$ **43.** $36x - 115y = 643.$
44. $39x - 56y = 11.$ **45.** $32x + 45y = 552.$

25. Arithmetische Progressionen. (§§. 237—240.)

Suche das allgemeine und das Summenglied der arithmetischen Reihen:

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6,.... **2.** 2, 4, 6, 8, 10, 12,....
3. —28, —25, —22, —19,.... **4.** 100, 97, 94, 91....
5. 100, $92\frac{1}{2}$, 85, $77\frac{1}{2}$, 70,....

6. Wie groß ist die Differenz einer Progression, deren erstes Glied 109, und deren 34stes Glied 10 ist?

7. Mit welcher Zahl fängt eine Progression an, deren Differenz 5, und deren 27stes Glied 139 ist?

8. Eine Progression fängt mit 1 an und steigt nach der Differenz 5; das wievielte Glied ist 116?

9. Das erste Glied einer arithmetischen Progression ist 20, die Zahl der Glieder 10, das letzte Glied —16; wie groß ist die Summe?

10. Wie viele Glieder einer Progression muss man addieren, um 2808 zur Summe zu erhalten, wenn das erste Glied 2 und die Differenz 10 ist?

11. Die Summe einer Progression, deren Differenz 3 und deren letztes Glied 97 ist, beträgt 1612; wie groß ist a) das erste Glied, b) die Anzahl der Glieder?

12. Das 11. Glied einer arithmetischen Reihe ist 50, das 16. Glied 25; wie groß ist die Summe der ersten 41 Glieder?

Löse folgende Aufgaben allgemein und für die besonderen Zahlen:

	a_1	d	n	a_n	s_n
13.	125	35	13	a_n	s_n
14.	50	—5	n	15	s_n
15.	1	9	n	a_n	260
16.	250	d	18	1100	s_n
17.	1·8	d	27	a_n	926·1
18.	8	d	n	$-23\frac{1}{2}$	$-77\frac{1}{2}$
19.	a_1	—2	6	0	s_n
20.	a_1	0·27	16	a_n	52·08
21.	a_1	$8\frac{5}{11}$	n	99	630
22.	a_1	d	12	$7\frac{1}{4}$	54

23. Interpoliere in der Reihe 1, 5, 9, 13, 17, 21,... zwischen je zwei Glieder 8 Glieder, so dass wieder eine arithmetische Progression entsteht.

24. Zwischen p und q sollen r Glieder interpoliert werden, wie groß ist das nte dieser Glieder?

25. Wie viele Zahlen muss man zwischen 16 und 250 einschalten, damit man eine arithmetische Progression mit der Summe 1995 erhalte?

---

26. Wie viele Zahlen, welche durch 6 theilbar sind, liegen zwischen 0 und 100? Wie groß ist ihre Summe?

27. Die Zahl 225 soll in mehrere Theile so getheilt werden, dass jeder folgende um 2 größer als der vorhergehende und der letzte 29 ist. Wie groß ist der erste Theil und wie groß die Anzahl der Theile?

28. Eine Summe Geldes wird unter mehrere Personen so vertheilt, dass die erste 80 Kronen und jede folgende 4 Kronen weniger bekommt; die letzte erhält 28 Kronen. Wie viel Personen sind betheilt worden, und wie groß ist die ganze Geldsumme?

29. Ein Diener war bei einem Herrn 6 Jahre im Dienste und erhielt in jedem folgenden Jahre 12 fl. an Lohn mehr als im vorhergehenden, zusammen 900 fl. Wie viel erhielt er das erste, wie viel das letzte Jahr?

30. Es ist ein Brunnen von 12 Meter Tiefe zu graben; für das erste Meter zahlt man 4 fl. 40 kr., für jedes folgende 40 kr. mehr; wie viel zahlt man für das letzte Meter, wie viel für den ganzen Brunnen?

31. Ein Körper legt in der ersten Secunde a Meter, in jeder folgenden d Meter mehr zurück als in der vorhergehenden. a) Wie groß ist der in n Secunden zurückgelegte Weg; b) in welcher Zeit legt der Körper s Meter zurück?

32. Ein frei fallender Körper durchläuft in der ersten Secunde 4·9 Meter und in jeder folgenden 9·8 Meter mehr als in der vorhergehenden; wie groß ist der Fallraum der 5ten Secunde, wie groß der Fallraum in 5 Secunden? (Der Widerstand der Luft bleibt unbeachtet.)

33. Eine vertical in die Höhe geschossene Kugel legt in der ersten Secunde 200 Meter und in jeder folgenden 9·8 Meter weniger zurück; wie hoch wird sie steigen und in wie viel Zeit wieder auf die Erde zurückfallen?

34. Um einen Punkt herum liegen 6 anstoßende Winkel, von denen jeder folgende um 9° 12′ größer ist als der vorhergehende; wie groß sind die einzelnen Winkel?

35. Jemand setzt in der Lotterie auf eine Nummer 20 kr. und, solange er nicht gewinnt, jedes folgendemal um 20 kr. mehr als das vorhergehendemal. Wenn nun der Treffer einer Nummer mit dem 14fachen Einsatze bezahlt wird, bei welchem Spiele würde der Gewinnende sein ganzes bis dahin eingesetztes Geld zurückerhalten?

36. Eine unverzinsliche Schuld wird in sechs Jahreszahlungen getilgt. Im ersten Jahre bezahlt man 600 Kronen, in jedem folgenden um eine bestimmte Summe mehr; für das sechste Jahr beträgt die Zahlung 850 Kronen; wie groß ist die ganze Schuld?

37. Ein Capital c wird nach n Jahren sammt den einfachen Zinsen zu p % zurückgezahlt; wie viel beträgt die Zahlung?

38. Durch n Jahre wird am Anfange eines jeden Jahres ein Capital c zu p % auf einfache Zinsen angelegt; zu welchem Werte s sind sämmtliche Anlagen bis zum Schlusse des n ten Jahres angewachsen?

---

39. Die Summe der ersten 6 Glieder einer arithmetischen Progression ist 17, das vierte Glied ist 3; wie heißt die Progression?

40. In einer arithmetischen Progression beträgt die Summe der ersten 5 Glieder 75, die Differenz zwischen dem fünften und zweiten Gliede 18; wie groß ist a) das erste Glied, b) die Differenz?

41. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Differenz 4 ist; das Product der letzten zwei Zahlen beträgt 165; welche Zahlen sind es?

42. Zwei arithmetische Progressionen haben gleich viele Glieder, die erste fängt mit 1 an und endet mit 15, die zweite fängt mit 3 an und endet mit 24; wie groß ist die Summe jeder Reihe? (Die Lösung führt auf eine unbestimmte Gleichung.)

43. In einer arithmetischen Reihe, deren Glieder die Summe der gleichstelligen Glieder zweier arithmetischen Progressionen mit den Anfangsgliedern 2 und 3 sind, ist das n te Glied $9n - 4$. Wie heißen die beiden Progressionen, wenn die Differenz der zweiten doppelt so groß ist als die Differenz der ersten?

44. Die Summe von drei Zahlen, welche eine arithmetische Progression bilden, ist 36, die Summe ihrer Quadrate 482; welche Zahlen sind es?

45. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Progression; ihre Summe ist 2, ihr Product 40; welche Zahlen sind es?

46. In einer arithmetischen Progression von vier Gliedern ist das Product aller Glieder 880, die Differenz der Quadrate der beiden mittleren Glieder 39; welche Progression ist es?

47. Zwei Körper bewegen sich gleichzeitig von A aus in derselben Richtung; der eine legt in jeder Secunde 20 Meter zurück, der andere in der ersten Secunde 12 Meter und in jeder folgenden 2 Meter mehr als in der vorhergehenden. Nach wie viel Secunden holt dieser den ersten ein?

48. Zwei Körper bewegen sich gleichzeitig von zwei Orten, deren Entfernung 450 *m* beträgt, gegeneinander. Der erste legt in der ersten Minute 5 *m* und in jeder folgenden Minute 15 *m* mehr als in der vorhergehenden zurück. Der zweite legt in der ersten Minute 100 *m* und in jeder folgenden 10 *m* weniger zurück als in der vorhergehenden. Wann begegnen sich dieselben?

49. In einer arithmetischen Reihe mit der Differenz $\frac{1}{2}$ beträgt die Summe der n ersten Glieder $236\frac{1}{2}$; wird hiezu die Summe der nächsten 7 Glieder addiert, so erhält man $418\frac{1}{2}$. Wie groß ist n und das Anfangsglied?

50. Die Summe des fünften und achten Gliedes einer arithmetischen Reihe ist 21; die Summe der Cuben derselben Glieder ist 2457. Wie groß ist die Summe der ersten 33 Glieder?

51. In der Reihe 50, 48, 46,... soll jenes Glied ermittelt werden, welches gleich ist dem 27. Theile der Summe aller vorhergehenden Glieder?

52. Welche ungerade Zahl ist um 1 größer als der fünfte Theil der Summe aller vorhergehenden ungeraden Zahlen?

53. Die Summe aus dem 2. und 16. Gliede einer arithmetischen Reihe ist $6\frac{1}{2}$; das Product beider Glieder $7\frac{1}{2}$. Wie groß ist die Summe der ersten 16 Glieder?

---

26. Geometrische Progressionen. (§§. 241 — 247.)

Suche das allgemeine und das Summenglied der geometrischen Reihen:

1. 5, 15, 45, 135,.... **2.** 6, $4\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{8}$, $2\frac{17}{32}$,....

3. 10·5, 2·625, 0·65625,.... **4.** 3, —12, 48, —192,....

5. Wie groß ist das erste Glied einer Progression, deren Quotient $1\frac{1}{2}$, deren 7tes Glied $68\frac{11}{32}$ ist?

6. Wie viele Anfangsglieder der geometrischen Progression 1, 3, 9, 27,... muss man addieren, um 3280 zur Summe zu erhalten?

7. Wie groß ist der Quotient einer Progression, deren erstes Glied 2, deren 12tes Glied 4096 ist?

8. Wie groß ist die Summe der ersten 8 Glieder der geometrischen Progression

$$a, -b, \frac{b^2}{a}, -\frac{b^3}{a^2}, \ldots ?$$

9. Bestimme die Summe der Reihe

$$\frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q^3} + \cdots + \frac{r}{q^{n-1}} + \frac{r}{q^n}.$$

Löse folgende Aufgaben allgemein und für die besonderen Zahlen:

	a_1	q	n	a_n	s_n
10.	7	4	9	a_n	s_n
11.	6	$\frac{3}{4}$	n	$1\frac{217}{512}$	s_n
12.	4	3	n	a_n	118096
13.	4096	q	14	$0 \cdot 5$	s_n
14.	31	q	n	$3827\frac{13}{81}$	$5454\frac{7}{81}$
15.	a_1	$-0 \cdot 5$	5	$0 \cdot 75$	s_n
16.	a_1	2	14	a_n	$2047\frac{7}{8}$
17.	a_1	3	n	177147	265720

Bestimme die Summe folgender Progressionen:

18. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1}$.

19. $x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4$.

20. $a^6 - a^5 b + a^4 b^2 - a^3 b^3 + a^2 b^4 - a b^5 + b^6$.

21. Suche in der Progression $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ a) die Summe der ersten 2, 3, 4, 5, 6 Glieder, b) die Summe der unendlichen Reihe.

Bestimme die Summe folgender unendlicher Reihen:

22. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ **23.** $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \ldots$

24. $1 + \frac{1}{1 \cdot 05} + \frac{1}{1 \cdot 05^2} + \frac{1}{1 \cdot 05^3} + \ldots$

25. $1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \ldots$ für $b < a$.

26. Die Summe einer unendlichen geometrischen Progression, die mit 1 beginnt, ist 3; wie groß ist ihr Quotient?

27. Wie heißt das fünfte Glied einer unendlichen geometrischen Reihe, deren Quotient $\frac{3}{4}$ und deren Summe 20 ist?

28. Verwandle einen gemischt periodischen Decimalbruch (§. 103, 3) mit Anwendung der geometrischen Reihe in einen gemeinen Bruch.

29. Bestimme ebenso: a) $x = 0 \cdot \dot{6}\dot{3}$; b) $x = 0 \cdot 6\dot{3}$; c) $x = 03\dot{5}\dot{8}$.

30. Zwischen 5 und 405 sollen 3 Glieder so eingeschaltet werden, dass dann alle fünf Glieder eine geometrische Progression bilden.

31. Interpoliere zwischen je zwei Glieder der Progression 1, 10, 100, 1000, . . 5 neue Glieder.

32. Zwischen 1 und 2 sind 11 Glieder einer geometrischen Progression zu interpolieren. (Anwendung in der Tonlehre.)

33. Interpoliere zwischen x^8 und y^8 noch 7 Glieder, so dass eine geometrische Progression entsteht.

34. Zwischen das erste und zweite Glied der Reihe 16, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{256}$, ... sollen mehrere Glieder so eingeschaltet werden, dass sie mit 16 und $\frac{1}{4}$ eine geometrische Progression bilden und mit diesen $31\frac{3}{4}$ zur Summe geben; wie viele Glieder sind einzuschalten und wie heißen sie?

---

35. Eine Summe von 248 Kronen soll unter 5 Personen so vertheilt werden, dass jede folgende doppelt so viel als die vorhergehende erhalte; wie viel erhält jede?

36. Jemand setzt sechsmal in die Lotterie; das erstemal 10 Kreuzer und jedes folgendemal doppelt so viel als für die frühere Ziehung; das sechstemal gewinnt er, und es wird ihm der letzte Einsatz 4800 mal zurückgezahlt. Wie viel beträgt dieser Gewinn, und wie viel hat er im ganzen eingesetzt?

37. Es legt jemand im Monate Jänner einen Kreuzer zurück, in jedem folgenden Monate 3 mal so viel als im vorhergehenden; wie viel hat er im ganzen Jahre zurückgelegt?

38. Der Erfinder des Schachspieles erbat sich als Belohnung die Summe Weizenkörner, die herauskommt, wenn für das erste Feld des Schachbrettes 1 Korn, für das zweite 2, für das dritte 4, und so fort für jedes folgende der 64 Felder doppelt so viel Körner gerechnet werden als für das vorhergehende. Wie viel Tonnen à 1000 Kilogramm würden diese Körner ausmachen, wenn 20000 Körner 1 Kilogramm wiegen?

39. In einem Fasse sind 100 Liter Wein. Man nimmt daraus 1 Liter und gießt dafür 1 Liter Wasser hinein; aus dieser Mischung nimmt man wieder 1 Liter und gießt eben so viel Wasser hinein. Wie oft kann man so verfahren, bis in der Mischung nur noch 50 Liter Wein übrig sind?

40. Ein Lichtstrahl verliert bei dem Durchgange durch eine Glasplatte $\frac{1}{10}$ seiner Intensität; wie groß wird diese noch sein, wenn er durch 10 hintereinander aufgestellte Platten hindurch gegangen ist?

41. Der Recipient einer Luftpumpe enthält 5·3 Cubikdecimeter, der Stiefel sammt dem Verbindungsrohre 0·6 Cubikdecimeter; nach wie viel Kolbenzügen wird die Luft im Recipienten nur noch den 10ten Theil der ursprünglichen Dichte betragen?

---

42. Drei Zahlen, von denen die zweite um 15 größer ist als die erste, die dritte um 60 größer ist als die zweite, bilden eine geometrische Progression; welche Zahlen sind es?

43. Die Summe von drei Anfangsgliedern einer geometrischen Reihe ist 156, das erste Glied 16; wie groß ist der Quotient?

44. Das $n$te Glied einer geometrischen Reihe ist b, das $p$te Glied c, wie heißt das $r$te Glied?

45. 17496 (b) und 1024 (c) sind zwei Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Anfangsgliede 59049 (a), zwischen welchen 6 (p) Glieder liegen. Wie heißt der Quotient der Reihe, und das wievielte Glied ist b?

46. Wie groß ist die Summe einer unendlichen Reihe, für welche das Product der ersten drei Glieder gleich 1728 und die Summe der dritten Potenzen dieser Glieder 15768 ist?

47. Eine arithmetische und eine geometrische Reihe mit positiven Gliedern haben dasselbe Anfangsglied; die Differenz der ersten Reihe ist gleich dem Quotienten der zweiten. Wie heißen die beiden Reihen, wenn das Product aus dem zweiten Gliede der geometrischen und dem sechsten Gliede der arithmetischen Reihe 102 und das Product aus dem ersten und fünften Gliede der geometrischen Reihe 324 ist?

48. In einer geometrischen Reihe ist das Product aus dem ersten und achten Gliede 4374, die Summe aus dem vierten und fünften Gliede 135; wie groß ist die Summe aller acht Glieder?

49. Addiert man zu den vier Gliedern einer arithmetischen Reihe bezüglich 1, 8, 35, 122, so erhält man vier Zahlen, welche eine geometrische Reihe bilden. Wie heißt die arithmetische Reihe?

50. Die Summe des ersten und dritten Gliedes einer geometrischen Progression ist $9\frac{3}{4}$, die Summe des zweiten und vierten Gliedes $14\frac{5}{8}$; wie heißt die Progression?

51. Acht Zahlen bilden eine geometrische Progression, die Summe der ersten vier ist 15, die Summe der letzten 240; welche Zahlen sind es?

52. In einer geometrischen Progression ist die Summe des dritten und vierten Gliedes b, die Differenz des dritten und fünften d; bestimme den Quotienten und das erste Glied.

53. In einer geometrischen Progression von 10 Gliedern ist die Summe der ungeraden Glieder 36905, die Summe der geraden 110715; wie groß ist der Quotient, wie groß das erste Glied?

54. Die Summe dreier Zahlen, welche eine geometrische Progression bilden, ist 21, die Summe ihrer Quadrate 189; welche Zahlen sind es?

55. Zerlege jedes Glied der geometrischen Progression 3, 48, 768, 12288,... in 4 Theile so, dass alle diese Theile untereinander wieder eine geometrische Progression bilden?

---

56. Von einem Punkte auf dem einen Schenkel eines Winkels α wird eine Normale von der Länge a zum andern Schenkel gezogen, von ihrem Fußpunkte wieder eine Normale zum ersten Schenkel u. s. f. Wie groß ist die Summe aller Normalen?

57. n (6) Gerade schneiden sich in einem Punkte unter gleichen Winkeln; von einem Punkte auf einer derselben wird eine Normale von der Länge a zur nächsten Geraden gezogen, von dem Fußpunkte derselben wieder eine Normale zur nächsten u. s. f. Wie lang ist die so entstandene gebrochene Spirale?

58. Auf der Seite b eines Dreieckes liegt eine Strecke m. Man projiciert dieselbe auf die Seite c, die erhaltene Projection auf a, die neue Projection wieder auf b u. s. f. Wie groß ist die Summe der Strecke m und sämmtlicher Projectionen?

59. Einem Quadrate mit der Seite a wird ein Kreis, diesem ein Quadrat, diesem Quadrate wiederum ein Kreis eingeschrieben u. s. f. Wie groß ist die Summe der Umfänge und Flächeninhalte a) sämmtlicher Kreise, b) sämmtlicher Quadrate?

60. Einem geraden Kegel ist eine Kugel eingeschrieben. In dem Raume gegen den Scheitel wird wiederum eine Kugel construiert, welche die erste und den Kegel-Mantel berührt, u. s. f. Wenn die erste Kugel den Radius r hat, wie groß ist die Summe der Oberflächen und der Rauminhalte sämmtlicher Kugeln?

---

61. Multipliciere die gleichstelligen Glieder der arithmetischen Progression a, 2a, 3a, 4a,... und der geometrischen Progression 1, q, q^2, q^3,... und bestimme das Summenglied S_n der dadurch entstehenden Reihe.

Bestimme ebenso die Summe folgender Reihen:

62. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots + n x^{n-1}$.

63. $1 + 5x + 9x^2 + 13x^3 + 17x^4 + \ldots + (4n - 3) x^{n-1}$.

64. $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + \ldots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} + \ldots$

65. $\frac{1}{2} + \frac{4}{2.3} + \frac{7}{2.3^2} + \frac{10}{2.3^3} + \ldots + \frac{3n-2}{2.3^{n-1}} + \ldots$

66. Wie groß ist die Summe von a) 6, b) 9, c) 15 Anfangsgliedern der Reihe $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots$?

67. Bestimme die Summe von a) 5, b) 8, c) 12 Anfangsgliedern der Reihe $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots$

---

27. Zinseszins- und Rentenrechnung. (§§. 248—253.)

1. Zu welchem Werte wächst ein Capital von 5800 K in 15 Jahren bei $3\frac{1}{2}\%$ Zinseszins an?

2. Jemand legt 5042 fl. in eine Sparcasse, welche die Einlagen zu 4% und zwar halbjährig verzinset, ein; nach 20 Jahren behebt er das Capital sammt Zins und Zinseszins; wie groß ist die Summe?

3. Wie viel werden 7324·2 K bei $4\frac{1}{2}\%$ Verzinsung nach $23\frac{3}{4}$ Jahren wert sein, wenn man die Zinsen ganzjährig zum Capitale schlägt?

4. Der Bestand eines Waldes wird gegenwärtig auf 42350 Cubikmeter geschätzt; wie groß wird derselbe bei einem jährlichen Zuwachs von 3% nach 10 Jahren sein?

5. Ein Land hat gegenwärtig 548200 Einwohner; wie groß wird die Bevölkerung bei einer jährlichen Zunahme von $1\frac{1}{2}\%$ nach 14 Jahren sein?

6. Ein Capital von 9000 K ist nach 10 Jahren unverzinslich fällig; wie groß ist sein Barwert, wenn Zinseszinsen zu $3\frac{3}{4}\%$ gerechnet werden?

7. Eine Stadt zählt gegenwärtig 36230 Einwohner; wie groß war bei einer jährlichen Zunahme von 2% die Bevölkerung vor 30 Jahren?

8. Ein Waldbestand wird gegenwärtig auf 180000 Cubikmeter veranschlagt; wie stark war derselbe vor 15 Jahren, wenn man annimmt, dass er sich während dieser Zeit regelmäßig jährlich um 3% vermehrt hat?

9. Ein Capital von 7537·8 K wächst in 20 Jahren mittelst Zinseszinsen auf 20000 K an; zu wie viel % war es verzinset?

10. 3200 fl. sind vor 80 Jahren angelegt worden und während dieser Zeit sammt Zinseszins auf 34059·83 fl. angewachsen; zu wie viel % war das Capital angelegt?

11. Eine Stadt hatte zu Ende 1880 72610, zu Ende 1890 84725 Einwohner. Wie viel Einwohner wird dieselbe bei gleichem Wachsthum zu Ende 1900 haben, und um wie viel % wächst die Bevölkerung jährlich?

12. In welcher Zeit wird ein Capital zu 4% Zinseszins a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Capitalisierung auf das Doppelte (m fache) anwachsen?

13. In wie viel Jahren erhöht sich die Bevölkerung eines Ortes bei $1\frac{1}{4}\%$ jährlicher Zunahme von 5200 Einwohnern auf 9433 Einwohner?

14. Von einer Schuld von 10000 K werden nach 3 Jahren 2500 K, nach 6 Jahren 1000 K bezahlt; wie groß ist noch die Schuld nach 10 Jahren, wenn 5% Zinseszinsen gerechnet werden?

15. Ein Capital a wird zu p % verzinst, die Verwaltungskosten betragen v% und werden am Ende jedes Jahres abgerechnet; zu welcher Summe wächst das Capital in n Jahren an?

16. Zu wie viel % muss ein Capital ausgeliehen werden, damit es in 30 Jahren bei halbjähriger Capitalisierung auf das Vierfache anwächst?

17. Jemand hat zu Beginn 1880 2000 K und zu Beginn 1890 3000 K auf Zinseszinsen zu 4% angelegt. Wann werden beide Capitalien zusammen auf 10846·3 K angewachsen sein?

18. 4000 K und 3954·1 K werden zu 4% auf Zinseszinsen angelegt, das erste Capital mit ganzjähriger, das zweite mit halbjähriger Capitalisierung der Zinsen. Wann werden beide Capitalien denselben Wert erlangt haben?

19. Ein Capital von 10000 K stand durch 15 Jahre anfangs zu $4\frac{1}{2}\%$, später zu 4% auf Zinseszinsen und ist in dieser Zeit auf 18803·8 K angewachsen. Wie lang stand es zu $4\frac{1}{2}$ und wie lang zu 4%?

---

20. Durch 20 Jahre werden zu Anfang eines jeden Jahres 200 K angelegt; zu welchem Werte werden diese Capitalien bei 4% Zinseszins zur Zeit der letzten Anlage angewachsen sein?

21. Jemand erspart jährlich 280 K und legt diese am Ende eines jeden Jahres in eine Sparcasse, welche die Einlagen mit 4% verzinst und die Zinsen halbjährig capitalisiert; über welche Summe wird er nach 15 Jahren verfügen?

22. Durch n Jahre wird jährlich ein Capital r zu p % Zinseszins angelegt, die Verwaltungskosten betragen jährlich $v\%$ und werden am Ende des Jahres abgerechnet; zu welcher Summe sind diese Capitalsbeträge zur Zeit der letzten Anlage angewachsen?

23. Jemand hat durch 12 Jahre am Anfange eines jeden Jahres den gleichen Geldbetrag zu $4\frac{1}{2}\%$ Zinseszins angelegt, und bezieht dafür am Ende des 12 ten Jahres 1939 fl. 18 kr.; wie groß war die jährliche Einlage?

24. Ein Capital von 12500 K ist nach 7 Jahren fällig; es soll durch gleiche, am Anfange eines jeden der 7 Jahre zahlbare Summen getilgt werden. Wie groß sind die Theilzahlungen bei 5% Zinseszins?

25. Wie hoch müssen die am Ende eines jeden Jahres zu leistenden Abschlagszahlungen sein, damit eine nach 10 Jahren unverzinslich fällige Schuld von 8000 K getilgt werde, den Zins zu 4% gerechnet?

26. Ein Gutsbesitzer will seine Feldfrüchte im veranschlagten Werte von 6800 fl. gegen Hagel versichern; wie hoch wird die Assecuranz-Gesellschaft die jährliche Versicherungsprämie bei 5% Zinseszins ansetzen, wenn angenommen wird, dass der Hagelschlag die Feldfrüchte jener Gegend durchschnittlich alle 16 Jahre gänzlich vernichtet?

---

27. Ein zu $4\frac{1}{2}\%$ Zinseszins ausstehendes Capital von 5000 K wird am Ende jedes Jahres um 500 K vermehrt; wie hoch wird es in 8 Jahren anwachsen?

28. Aufg. 27 bei halbjähriger Capitalisierung der Zinsen.

29. Von einem Walde, dessen jährlicher Zuwachs $2\frac{1}{4}\%$ beträgt, ist der gegenwärtige Bestand 145678 Cubikmeter; wie groß wird der Bestand nach 18 Jahren sein, wenn am Ende eines jeden Jahres 1175 Cubikmeter gefällt werden?

30. Jemand will eine Schuld von 10000 K, die zu 5% zu verzinsen ist, in 10 gleichen Jahresraten abtragen; wie groß wird eine Ratenzahlung sein?

31. Jemand ist verpflichtet, durch 8 Jahre am Ende eines jeden Jahres 550 K zu zahlen. Statt dessen will er die Schuld in zwei gleichen Raten zu Beginn des ersten und fünften Jahres tilgen. Wie groß ist eine solche Rate, wenn der Rechnung 4% zugrunde gelegt werden?

32. Dem Vormunde eines Kindes von 5 Jahren wird eine Summe von 6000 K mit der Verpflichtung überwiesen, das Kind bis zum 18ten Jahre zu erziehen; welches ist der Betrag des nachschussweise zahlbar angenommenen jährlichen Erziehungsgeldes, wenn 5% Zinseszinsen berechnet werden?

33. Eine Stadt will bei einer Bank ein Anlehen mit der Verpflichtung aufnehmen, dasselbe durch einen am Ende jedes Jahres zahlbaren Betrag von 28000 K binnen 25 Jahren zu tilgen; welche Summe wird die Bank der Stadt bei 5% Zinseszins darleihen?

34. Wie viel bleibt von einer Schuld von 26000 fl. bei 5% Zinseszins nach 10 Jahren übrig, wenn für Zinsen und Tilgung eines Theiles der Schuld jährlich 2000 fl. gezahlt werden?

35. Wie groß ist ein auf Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}$% angelegtes Capital, wenn von demselben bei einer am Ende eines jeden Jahres eintretenden Verminderung um 250 K nach 15 Jahren noch 1300 K übrig sind?

36. Ein Vater hinterläßt seinen 5 Kindern ein Vermögen von 20000 fl., welches zu 5% Zinseszins angelegt ist; davon beziehen die Kinder am Ende eines jeden Jahres 1500 fl. Wie viel erhält dann jedes der Kinder nach 6 Jahren, wenn der Rest des Vermögens zu gleichen Theilen unter sie vertheilt wird?

37. Jemand kauft ein Haus und bezahlt den Kaufschilling dadurch, dass er durch 20 Jahre am Schlusse eines jeden derselben eine Abschlagszahlung von 1200 Kronen leistet; wie groß ist der Kaufpreis, wenn jede Abschlagszahlung zugleich 5% Zinsen für die noch unbezahlte Schuld enthält?

38. Wie viel muss man am Schlusse eines jeden Jahres zu einem Capitale von 4500 fl. hinzufügen, damit es sich bei 4% Zinseszins in 6 Jahren verdopple?

39. Jemand hat ein Capital von 12532 K zu $4\frac{1}{2}$% ausstehen und gebraucht davon jährlich 1000 K; nach wie viel Jahren wird das Capital erschöpft sein?

40. Ein $3\frac{1}{2}$ procentiges Anlehen soll in 25 Jahren getilgt werden. Wie viel % des Capitales muss jährlich zur Zahlung der Zinsen und Tilgung verwendet werden?

41. Eine Eisenbahn-Gesellschaft macht eine Anleihe von 4 Millionen Kronen zu 5% und will dieselbe dadurch amortisieren, dass sie jährlich 250000 Kronen zur Zinsenzahlung und theilweisen Tilgung des Anlehens verwendet; nach wie viel Jahren wird die Schuld getilgt sein?

42. Jemand ordnet in seinem Testamente an, dass seinem treuen Diener bis zu dessen Tode jährlich 100 fl. ausgezahlt werden. Die Erben werden mit dem Diener einig, ihm dafür auf einmal einen Betrag von 1200 fl. zu zahlen. Wie viel Jahre müsste der Diener noch leben, wenn er von dem Übereinkommen weder Schaden noch Vortheil haben sollte, die Zinsen zu 5 % gerechnet?

43. Jemand nimmt bei einer Sparcasse ein Capital von 8000 fl. auf, das er durch gleiche Theilzahlungen, die am Ende eines jeden Jahres fällig sind, in 15 Jahren tilgen will; wie groß ist eine Theilzahlung, wenn die Sparcasse verausgabte Gelder mit 5 %, empfangene dagegen mit 4 % Zinseszins in Rechnung bringt?

---

44. Ein Herr will seinem Diener bei einer Versicherungsanstalt ein nach 11 Jahren zahlbares Capital von 1000 fl. versichern; welchen Betrag muss er an die Anstalt zahlen, wenn dieselbe zu 5 % verzinst?

45. Welchen Barwert hat eine durch 14 Jahre am Ende jedes Jahres mit 420 fl. zu leistende Rente, wenn 4 % Zinsen gerechnet werden?

46. Jemand verkauft eine nachschussweise Jahresrente von 620 Mark, die er noch durch 10 Jahre zu genießen hat; wie viel wird er dafür erhalten, wenn 4 % Zinseszinsen gerechnet werden?

47. Ein Vater will für seinen Sohn, wenn dieser das 24ste Jahr erreicht hat, eine Summe versichern; er zahlt zu diesem Zwecke von der Geburt des Sohnes angefangen bis zu jener Zeit an eine Versicherungsanstalt am Anfange jedes Jahres 400 fl. Welchen Betrag wird die Anstalt bei 5 % Zinseszins nach 24 Jahren auszuzahlen haben?

48. Jemand will für seinen Sohn bei einer Bank eine Summe von 4000 K versichern, welche dieselbe am Ende des 15ten Jahres auszahlen soll; welchen jährlichen Betrag muss er am Anfange eines jeden Jahres bis zu jener Zeit zum Zinsfuße $4\frac{1}{2}$ % leisten?

49. Ein Capital von 20000 K soll bei 4 % Zinseszins durch eine jährliche Rente getilgt werden, die vom Ende des ersten Jahres beginnt und 30 Jahre dauert; wie groß muss die Rente sein?

50. Jemand erlegt 12000 K zu 4 % und will dafür durch 24 Jahre am Ende jedes derselben eine Rente beziehen; wie groß wird dieselbe sein?

51. Bei einer Anstalt werden 1000 fl. gegen Entrichtung einer jährlichen Prämie von 27 fl. versichert; nach wie viel Jahren ist bei $4\frac{3}{4}$ % das versicherte Capital durch Prämien gedeckt?

52. Ein Capital von 8000 K soll durch die nachschussweise jährliche Rente von 801·12 K bei 4 % Zins getilgt werden; wie lange muss die Rente gezahlt werden?

53. Wie viele Jahre hat eine nachschussweise Rente zu laufen, die jährlich 600 fl. beträgt und gegenwärtig einen Wert von 10000 fl. hat, die Zinsen zu 5% gerechnet?

54. Jemand versichert bei einer Anstalt auf den Todesfall 5000 fl. und muss am Anfange jedes Jahres eine Prämie von 180 fl. zahlen; wenn er nun nach 24 Jahren stirbt, wie groß ist der Gewinn oder Verlust der Anstalt bei 4% Zinseszins?

55. Jemand hat eine Jahresrente r (1000 K) durch n (24) Jahre zu beziehen. Wann kann dieselbe mit dem Betrage n r (24000 K) abgelöst werden, wenn der Rechnung p ($3\frac{3}{4}$) % zugrunde gelegt werden?

56. Jemand hat eine Jahresrente von 1800 Mark auf 30 Jahre zu beziehen; er wünscht aber statt derselben eine größere auf 20 Jahre zu haben; wie groß wird diese bei $4\frac{1}{2}$% Zins sein?

57. Eine Rente von 500 K (r) ist durch 20 (n) Jahre pränumerando zu beziehen. Wenn nun durch 5 (n_1) Jahre auf den Bezug verzichtet wird, welche Rente kann während der folgenden 15 ($n—n_1$) Jahre bezogen werden bei 3 (p) % Zinsen?

58. Jemand will durch 18 Jahre am Anfange eines jeden Jahres eine bestimmte Summe bezahlen, damit nach Verlauf dieser Zeit er selbst oder eine andere Person 10 Jahre hindurch eine am Ende jedes Jahres fällige Jahresrente von 500 Kronen genieße; wie groß ist die jährlich zu zahlende Summe, wenn 5% gerechnet werden?

59. Welche Einlage muss man durch 20 Jahre am Anfange jedes Jahres an eine Versicherungsanstalt machen, um nach Verlauf dieser Zeit bei 4% Verzinsung eine Jahresrente von 300 fl. durch 12 Jahre zu genießen?

60. Jemand zahlt durch 30 Jahre zu Anfang eines jeden Jahres 68 Kronen in eine Rentenbank, welche zu 4% verzinst; welche nachschussweise Rente wird ihm die Bank durch die 7 folgenden Jahre geben?

61. Jemand hält sich noch auf 20 Jahre für arbeitsfähig; wie viel muss er in dieser Zeit jährlich auf Zinsen à $4\frac{1}{2}$% legen, um nach Ablauf derselben noch 15 Jahre eine Jahresrente von 300 Kronen zu genießen?

62. Jemand, der sich noch 15 Jahre für arbeitsfähig hält, spart in dieser Zeit jährlich 250 fl. und legt sie zu 4% auf Zinsen an; wie lange kann er dafür nach Ablauf jener Zeit eine Jahresrente von 400 fl. ansprechen?

63. Eine Rente, welche im ersten Jahre 400 fl. beträgt und in jedem folgenden Jahre um 50 fl. wächst, wird 10 Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres ausgezahlt; welches ist ihr Barwert, wenn $4\frac{1}{2}$% Zinseszinsen gerechnet werden?

28. Permutationen, Combinationen, Variationen.

Permutationen. (§§. 254—257.)

1. Wie viele und welche Permutationen erhält man aus den Buchstaben des Wortes ROMA?

2. Stelle für die Elemente a b c d e lexikographisch die Permutationen dar, die 1) mit a, 2) mit c anfangen.

3. Bilde die Permutationen aus den Elementen a a a b b c.

4. Wie groß ist die Zahl der Permutationen aus $a^5 b^3$?

5. Wie viele vierziffrige Zahlen gibt es, deren jede die Ziffer 3, 0, 7, 4 enthält?

6. Wie viele fünfziffrige Zahlen enthalten die Ziffer 6 2mal, die Ziffer 3 2mal und die Ziffer 5 1mal?

7. Wie viele neunziffrige Zahlen lassen sich aus den neun arabischen Ziffern bilden, wenn die Ziffern jeder Zahl ungleich sein sollen?

8. Wie oft können 5 Tischgenossen ihre Plätze am Tische wechseln, bis sie in allen Ordnungen gesessen sind?

9. Wie viele verschiedene Stellungen geben 3 weiße, eine blaue und 2 rothe Kugeln?

10. Wie lautet die 68. Permutation von 12345?

11. Die wievielte Permutation ist c d a e b von a b c d e?

12. Wie heißt die 19. Permutation von „r e i f“?

13. Bei wie viel verschiedenen Elementen wird, wenn man die Zahl der Elemente um 2 vermehrt, die Zahl der Permutationen 42mal so groß als früher?

Combinationen. (§§. 258—261.)

14. Bilde für die Elemente a b c d e die Amben und Ternen a) ohne Wiederholung, b) mit Wiederholung.

15. Bilde alle Combinationen ohne Wiederholung von den Elementen 123456.

16. Wie viele Amben und Ternen enthalten 6 Elemente a) ohne Wiederholung, b) mit Wiederholung?

17. Aus wie viel Elementen kann man 435 Amben ohne Wiederholung bilden?

18. Bilde die Ternen mit Wiederholung der Elemente: „Punkt, Gerade, Kreis“.

19. Wie viele Unionen, Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen geben a) die 90 Nummern der gewöhnlichen Zahlenlotterie, b) die in einer Ziehung herausgehobenen 5 Nummern?

20. Welche und wie viele Würfe durchaus ungleicher Felder können mit 2 Würfeln geworfen werden?

21. Wie viele Gerade lassen sich im allgemeinen durch n Punkte legen?

22. In wie vielen Punkten schneiden sich im allgemeinen n Gerade?

23. Wie viele und welche Verbindungen zu drei sind aus den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks möglich?

24. Auf wie viele Arten lassen sich je drei der 7 Farben: roth, orange, gelb, grün, blau, indigo, violett mischen?

25. Auf wie viele Arten läſst sich das Product abcde in zwei Producte zerlegen, von denen das eine 2, das andere 3 Factoren enthält?

26. Auf wie viele Arten läſst sich a) das Product abcd in Producte von 2 Factoren, b) das Product abcdef in Producte von 3 Factoren zerlegen?

27. Auf wie vielerlei Art lassen sich 32 Karten unter 4 Spieler so vertheilen, daſs jeder 8 Karten erhält?

28. Wie viele Elemente werden verwendet, wenn die Zahl der Ternen mit Wiederholung sich zu der Zahl der Ternen ohne Wiederholung wie 15:7 verhält?

Variationen. (§§. 262—265.)

29. Bilde die Variationen der 2ten Classe ohne Wiederholung von den Elementen abcde.

30. Bilde die Variationen der 2ten und 3ten Classe mit Wiederholung von den Elementen abc.

31. Stelle die ersten 20 Variationen der 3ten Classe mit Wiederholung von den Elementen abcd dar.

32. Wie viele Variationen der 2ten, 3ten, 4ten Classe a) ohne Wiederholung, b) mit Wiederholung geben 10 Elemente?

33. Wie viele dreiziffrige Zahlen gibt es, deren Ziffern von einander verschieden sind?

34. Wie viele vierziffrige Zahlen sind mittelst der Ziffern 3, 4 und 5 darstellbar?

35. Wie viele fünfziffrige Zahlen, deren jede mit 5 beginnt, lassen sich aus den Ziffern 1, 5, 9 bilden?

36. Wie viele verschiedene Würfe sind mit 2 Würfeln möglich?

37. Welche verschiedene Würfe geben bei drei Würfeln 10 zur Summe?

38. Auf wie viele Arten kann man mit 4 Würfeln die Summe 15 werfen?

39. Wie viele Würfe sind mit 3 Würfeln möglich, von denen der eine weiß, der zweite gelb, der dritte roth ist, wenn man annimmt, daſs Würfe von gleichviel Augen, aber in verschiedenen Farben als verschieden zu betrachten sind?

40. Ein optischer Telegraph hat 6 Arme, von denen jeder 4 verschiedene Stellungen einnehmen kann; wie viele verschiedene Zeichen kann der Telegraph geben?

41. Es sind 4 Fächer mit 7 verschiedenfarbigen Kugeln zu besetzen, so dass in jedes Fach eine Kugel zu liegen kommt; auf wie vielerlei Art kann dies geschehen?

42. Wie viele vierziffrige Zahlen gibt es?

43. Wie groß ist die Zahl aller Variationen mit Wiederholung der 1., 2., 3. und 4. Classe von den beiden Elementen: „ . —“?

44. Bei wie vielen Elementen gibt es 380 Variationen der zweiten Classe ohne Wiederholung?

45. Bei wie vielen Elementen verhält sich die Zahl der Variationen der dritten Classe ohne Wiederholung zu der derselben Classe mit Wiederholung wie 5 : 9?

46. Bei wie vielen Elementen verhält sich die Zahl der Variationen ohne Wiederholung der zweiten Classe zu der der dritten Classe wie 1 : 20?

---

29. Potenzen von Binomen. (§§. 268—270.)

1. $(x + a)^4$. 2. $(x - y)^{10}$. 3. $(x + 3)^5$.
4. $(2 - a)^8$, 5. $(a - 2b)^6$. 6. $(3x + 4y)^5$.
7. $(5a - 3b)^6$. 8. $(x^2 + 2y^2)^4$. 9. $(3a^2 - 2b^2)^6$.
10. $(a + b)^n \pm (a - b)^n$. 11. $(x^2 + 3)^5 - (x^2 - 3)^5$.
12. Wie heißt a) das sechste Glied der Potenz $(5x^2 + 6a^2)^{10}$;
b) das achte Glied in $(3a - 2)^{12}$?
13. Bestimme den Coefficienten
a) von x^5 in der Entwicklung von $(5x + 3)^9$;
b) von a^{10} in $(3a^2 - 2b^2)^{10} - (2a^2 - 3b^2)^{10}$.
14. $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^5$. 15. $\left(\frac{y}{3} - 2\right)^6$. 16. $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)^5$.
17. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$. 18. $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4a}\right)^5$. 19. $\left(\frac{4m}{3n} - \frac{9n}{4m}\right)^6$.
20. $\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^5$. 21. $\left(\frac{ax^2}{4by^2} + \frac{4b^2y}{a^2x}\right)^4$ 22. $\left(\frac{3ab^2}{4cy^2} - \frac{2c^2y}{3a^2b}\right)^6$.
23. Gib an a) das fünfte Glied der Reihe $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)^9$;
b) das siebente Glied in $\left(\frac{5ax^2}{6by^2} + \frac{3by}{5ax}\right)^{10}$.
24. Wie heißt der Coefficient von x^9 in $\left(\frac{3x^2}{5a} - \frac{5a^2}{3x}\right)^{12}$?
25. $(1\cdot03)^5 = (1 + \frac{3}{100})^5 = ..$ 26. $(0\cdot997)^4 = (1 - \frac{3}{1000})^4 = ..$

Bestimme ebenso auf 6 Decimalen:

27. $(1{\cdot}025)^{15}$; **28.** $(1{\cdot}035)^{12}$; **29.** $(1{\cdot}055)^{14}$;

30. $(0{\cdot}98)^{18}$; **31.** $(0{\cdot}996)^{20}$; **32.** $(1{\cdot}999)^{16}$.

33. $(4+\sqrt{3})^6$. **34.** $(6-5\sqrt{2})^5$. **35.** $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^8$.

36. $(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})^8$. **37.** $\left(2x-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^7$. **38.** $\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^6$.

39. $(1+\sqrt{-1})^6$. **40.** $(3-i)^5$. **41.** $(1+2i)^6$.

42. $(a+bi)^5$. **43.** $(\sqrt{-4}+\sqrt{-2})^6$. **44.** $(2\sqrt{a}-bi)^5$.

45. $(a+bi)^n \pm (a-bi)^n$. **46.** $(1+i\sqrt{5})^6+(1-i\sqrt{5})^6$.

47. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$. **48.** $\left(\frac{3+i\sqrt{2}}{2}\right)^5+\left(\frac{3-i\sqrt{2}}{2}\right)^5$.

---

30. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Absolute und relative Wahrscheinlichkeit. (§§. 271 und 272.)

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Aufwerfen eines Münzstückes „Bild" zu werfen?

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Münzstücke eher „Bild" als „Schrift" zu werfen?

3. In einer Urne sind 15 Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) eine ungerade Zahl, b) eine gerade Zahl von Kugeln herauszuziehen?

4. In einer Urne befinden sich 10 weiße und 6 rothe Kugeln; welches ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen?

5. In einer Urne sind 4 weiße, 3 rothe und 2 blaue Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 4 Kugeln eine weiße, zwei rothe und eine blaue zu greifen?

6. Wie groß ist bei einem Spiele von 32 Karten die Wahrscheinlichkeit, a) eine rothe Karte, b) einen König zu ziehen?

7. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln zwei gleiche Felder (einen Pasch) zu werfen?

8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 8 Augen zu werfen?

9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln auf einen Wurf a) gerade 3, 4 und 6, b) die Summe 6 zu werfen?

10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln a) eher 7 als 10, b) eher 7 als 5 zu werfen?

11. Von 8500 Prioritäts-Obligationen eines Eisenbahnanlehens werden 125 Stück verlost; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Verlosung eines Stückes?

12. Die gewöhnliche Zahlenlotterie enthält 90 Nummern, von denen jedesmal 5 herausgezogen werden; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) eine genannte Nummer (Extrate) zu treffen,

b) mit zwei genannten Nummern einen Ambo zu machen,

c) mit drei genannten Nummern einen Terno zu machen?

Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. (§§. 273—275.)

13. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mit 2 Würfeln auf den ersten Wurf einen Pasch, auf den zweiten die Augenzahl 8 werfe?

14. Wie groß ist bei 3 Würfeln die Wahrscheinlichkeit, zuerst die Summe 5, dann die Summe 4 zu werfen?

15. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln mehr als 9 Augen zu werfen?

16. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel a) in zwei Würfen das erstemal 1, das zweitemal 2 zu werfen, b) in sechs Würfen das erstemal 1, das zweitemal 2, . . . das sechstemal 6 zu werfen?

17. In einer Urne befinden sich 8 weiße, 6 rothe, 10 blaue und 5 schwarze Kugeln; welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, beim Herausziehen zweier Kugeln eher eine weiße und eine blaue, als eine rothe und eine schwarze Kugel zu ziehen?

18. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) mit 2 Würfeln 3 mal nacheinander einen Pasch zu werfen, b) innerhalb der ersten 3 Würfe einen Pasch zu werfen? c) Wie viele Würfe muss man machen, damit die Wahrscheinlichkeit einen Pasch zu werfen $\frac{1}{2}$ ist?

19. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mit einem Würfel 3 mal nacheinander 1 wirft?

20. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 32 Karten in den ersten zwei Zügen König und Dame derselben Farbe, jedoch in beliebiger Ordnung zu ziehen?

21. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 32 Karten zuerst eine Zehn, darauf, wenn die zuerst gezogene Karte nicht wieder hinzugelegt wird, einen König zu ziehen?

22. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Kartenspiele von 52 Blättern 3 mal hintereinander ein Ass zu ziehen?

23. In einer Urne sind 3 weiße, 4 rothe, 5 gelbe und 6 blaue Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße, rothe oder gelbe Kugel zu ziehen?

24. In einer Urne A befinden sich 4 weiße und 6 rothe Kugeln, in einer zweiten B 6 weiße und 8 rothe Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man, wenn man aus beiden Urnen zugleich zieht, aus jeder eine weiße Kugel ziehe?

25. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Herausziehen je einer Nummer aus einer Urne von 90 Nummern das erstemal die Nummer 1, das zweitemal die Nummer 90 zu ziehen, a) wenn die zuerst gezogene Nummer wieder in die Urne zurückgelegt wird, b) wenn das nicht geschieht?

26. In einer Urne sind 12 weiße und 9 schwarze Kugeln. Man zieht 8mal je eine Kugel heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den ersten fünf Ziehungen 5 weiße, und in den späteren drei Ziehungen 3 schwarze Kugeln gezogen werden, a) wenn man nach jeder Ziehung die Kugel in die Urne zurückwirft, b) wenn das nicht geschieht?

Mathematischer Hoffnungswert. (§§. 276 und 277.)

27. Jemand kann, wenn er mit zwei Würfeln die Summe 5 wirft, 2 fl. gewinnen; wie groß ist sein mathematischer Hoffnungswert?

28. Wie hoch kann der Einsatz sein, wenn beim Spiel mit zwei Würfeln jeder Pasch 1 Krone gewinnt, andere Würfe aber nicht zählen?

29. Zwei Spieler A und B kommen mit einander überein, dass derjenige den ganzen Einsatz erhalten solle, welcher zuerst 3 Partien gewinnt; nachdem aber A 1, B 2 Partien gewonnen hat, trennen sie sich; in welchem Verhältnisse ist nun der Einsatz zu theilen?

30. Jemand erbietet sich, demjenigen, der aus einer Urne mit 5 weißen, 6 rothen und 7 blauen Kugeln mit einem Griffe 2 weiße, 3 rothe und 4 blaue heraushebt, 1 fl. zu geben, wenn er selbst jedesmal 8 Kreuzer erhält, sobald 9 andere Kugeln herausgezogen werden; hat er zu seinem Vortheile oder zu seinem Nachtheile gewettet?

31. Nach unseren Lottogesetzen wird a) für den Ambo der 240fache Einsatz, b) für den Terno der 4800fache Einsatz als Gewinn bezahlt; wie viel % Gewinn hat das Lotto, wenn man von den Verwaltungskosten absieht?

Wahrscheinlichkeit in Bezug auf die menschliche Lebensdauer. (§. 279.)

32. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 20jährige Person a) das 30ste, b) das 56ste, c) das 70ste Jahr erreiche?

33. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass a) eine 18jährige, b) eine 35jährige, c) eine 50jährige Person 60 Jahre alt werde?

34. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass a) ein neugeborenes Kind, b) eine 12=, c) 18=, d) 36=, e) 55jährige Person nach 20 Jahren nicht mehr am Leben sei?

35. Ein Mann ist 50, seine Frau 40 Jahre alt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach 20 Jahren a) noch der Mann lebe, b) noch die Frau lebe, c) noch beide leben; dass d) schon der Mann todt sei

e) schon die Frau todt sei, f) schon beide todt seien; dass g) der Mann die Frau überlebe, h) die Frau den Mann überlebe, i) wenigstens eines noch lebe, k) wenigstens eines schon todt sei, l) nur eines noch lebe?

Lebensversicherungsrechnung. (§§. 280—284.)

36. Welchen Betrag muss man an eine Versicherungsanstalt für ein 2jähriges Kind einzahlen, damit dieses nach erreichtem 24sten Lebensjahre, falls es dann lebt, ein Capital von 3500 K erhalte, die Zinsen zu 4% berechnet?

37. Ein 34jähriger Mann zahlt in eine Versicherungsanstalt 1000 fl.; welches Capital wird ihm die Anstalt nach 16 Jahren, falls er noch lebt, bei 5% Verzinsung auszahlen? Wie groß ist seine Reserve nach 10 Jahren?

38. Zwei Eheleute, welche gegenwärtig 30 und 25 Jahre alt sind, wollen ein Capital von 4000 Kronen versichern, das ihnen nach 30 Jahren, wenn sie dann noch beide leben, ausgezahlt werden soll; welchen Betrag müssen sie an die Versicherungsanstalt bei 4% Zins einzahlen?

39. Wie groß ist bei 4% Zinseszins der gegenwärtige Wert einer Leibrente, welche eine 36jährige Person am Ende eines jeden Jahres im Betrag von 280 Kronen zu beziehen hat?

40. Eine 56jährige Person will sich eine jährliche Leibrente von 300 fl. versichern; wie viel hat sie bei 4% Verzinsung an eine Rentenbank sogleich einzuzahlen? Wie groß ist die Reserve nach 8 Jahren?

41. Eine 45jährige Person kauft sich mit einer Einlage von 6000 Kronen eine Jahresrente, welche von dem Ende des laufenden Jahres angefangen bis an das Lebensende dauern soll; wie groß ist die Leibrente bei 5% Zinseszins?

42. Ein 60jähriger Diener erhält von seinem Herrn für seine vieljährige treue Dienstleistung ein Abfertigungscapital von 2000 fl.; welche lebenslängliche Rente kann er sich bei 4% Zinseszins dafür kaufen?

43. Eine njährige Person wünscht nach p Jahren eine Leibrente B, zahlbar am Ende jeden Jahres, zu erhalten; wie groß wird die Einlage M für eine solche auf p Jahre aufgeschobene Leibrente sein?

44. A ist 42 Jahre alt und will auf den Todesfall seinen Erben ein Capital von 4800 Kronen versichern; welche Einlage muss er zu diesem Zwecke bei 4% Zinseszins bei einer Versicherungsanstalt machen? Wie groß ist die Reserve nach 12 Jahren?

45. Eine 38jährige Person zahlt an eine Versicherungsanstalt 1000 fl. ein; welches Capital wird dafür bei 5% Verzinsung nach ihrem Tode die Anstalt an die Erben auszuzahlen haben?

46. Welche Prämie muss eine 32jährige Person zu Anfang jedes Jahres zahlen, um bei ihrem Ableben den Erben eine Summe von 2000 Kronen zu sichern, den Zinseszins zu 4% gerechnet? Wie groß ist die Reserve für diese Person, wenn sie 45 Jahre alt wird?

47. Eine $n$jährige Person will sich gegen eine am Anfange jedes Jahres zahlbare Prämie P ein Capital C so sichern, dass ihr dieses nach k Jahren, wenn sie dann noch lebt, ausgezahlt werden soll; welche Beziehung findet zwischen P und C statt?

48. Ein Vater zahlt an eine Versicherungsanstalt zu Anfang jedes Jahres eine Prämie von 300 Kronen, damit die Anstalt seiner neugebornen Tochter, falls sie das 18te Jahr erreichen sollte, ein gewisses Capital auszahle; wie groß wird dieses bei 5% Verzinsung ausfallen?

---

31. Anhang.

Goniometrische Lösung der quadratischen Gleichungen. (§. 285.)

1. $x^2 - 10{\cdot}253x + 25{\cdot}281 = 0.$ 2. $x^2 + 3{\cdot}7375x + 2{\cdot}8669 = 0.$
3. $x^2 - 4{\cdot}5558x + 4{\cdot}4428 = 0.$ 4. $x^2 + 1{\cdot}0555x + 0{\cdot}20779 = 0.$
5. $x^2 - 5{\cdot}3777x + 14{\cdot}8696 = 0.$ 6. $x^2 + 3{\cdot}5045x + 6{\cdot}14195 = 0.$
7. $x^2 - 0{\cdot}05785x - 17{\cdot}7717 = 0.$ 8. $x^2 + 0{\cdot}64270 - 0{\cdot}035126 = 0.$
9. $x^2 - 22{\cdot}9006x - 198{\cdot}62 = 0.$ 10. $17{\cdot}53x^2 + 40{\cdot}98x - 151{\cdot}4 = 0.$

Größte und kleinste Werte einer Function. (§. 286.)

Bestimme für folgende Ausdrücke a) den größten oder kleinsten Wert und b) jenen Wert der Veränderlichen, für welchen derselbe eintritt:

11. $x^2 + x + 1.$ 12. $x^2 - x + 1.$ 13. $4x^2 - 8x + 6.$
14. $ax^2 - bx + c.$ 15. $x^2 + (a + b)x + a^2 - ab + b^2.$
16. $x^2 + (a - b)x - a^2 - ab - b^2.$ 17. $\frac{x^2 + x + 1}{x^2}.$
18. $ax + \frac{b}{x}.$ 19. $x - a + \frac{1}{x - a}.$ 20. $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}.$
21. $x\sqrt{9 - x^2}.$ 22. $\frac{x^4}{x^2 - 1}.$ 23. $x^2\sqrt{a^2 - x^2}.$

Anwendungen.

24. Zerlege die Zahl a in zwei Summanden, so dass das aus denselben gebildete Product ein Maximum wird.

25. Zerlege die Zahl a in zwei Factoren, so dass die Summe derselben ein Minimum wird.

26. Eine gegebene Strecke a ist so zu theilen, dass die Summe der Flächeninhalte der aus beiden Theilen gebildeten Quadrate einen kleinsten Wert annimmt.

27. Von einem Punkte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes werden Normale zu den Katheten gezogen. Bestimme jenen Punkt so, dass das entstandene Rechteck den größten Flächeninhalt erlangt.

28. Einem Quadrate mit der Seite a soll das kleinste gleichschenklige Dreieck umgeschrieben werden derart, dass eine Seite des Quadrates auf der Grundlinie des Dreieckes liegt.

29. Einem Kreise mit dem Radius r soll das Rechteck von dem größten Flächeninhalte eingeschrieben werden.

30. Einem gegebenen Quadrate ist das Rechteck von dem größten Flächeninhalte einzuschreiben.

31. Einem gegebenen Quadrate soll ein gleichschenkliges Dreieck mit dem kleinsten Umfange so eingeschrieben werden, dass die Spitze des Dreieckes in einem Eckpunkte des Quadrates liegt.

32. Welcher Kreissector hat a) bei gegebenem Inhalte den kleinsten Umfang, b) bei gegebenem Umfange den größten Inhalt?

33. Einem Kreisabschnitte (Radius r, Centralabstand c) ist das Rechteck mit dem größten Umfange einzuschreiben.

34. Einem geraden Kegel (r, h) soll der gerade Cylinder mit der größten Mantelfläche eingeschrieben werden.

35. Wie groß ist der Radius jenes geraden Kegels, der bei gegebener Seite a den größten Rauminhalt hat?

36. Unter allen Kegelstumpfen von gleicher Höhe, in denen die Summe der Radien der beiden Grundflächen gleich 2a ist, soll jener bestimmt werden, welcher den kleinsten Rauminhalt hat.

37. Aufg. 20, 211. Wann haben die beiden Punkte die kleinste Entfernung von einander?

38. Ebenso Aufg. 20, 212.

39. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels befinden sich in den Entfernungen a und 2a zwei Punkte, welche sich gleichzeitig mit der Geschwindigkeit c gegen den Scheitel bewegen. Wann haben sie die kleinste Entfernung von einander? Wo befinden sie sich dann?

Höhere numerische Gleichungen. (§§. 287—293.)

Bilde Gleichungen mit den Wurzeln:

40. $-3, -1, 4.$ **41.** $2, 3+2i, 3-2i.$

42. $1, -1, 2, -2.$ **43.** $-1, -2, -i, +i.$

Bestimme in den folgenden Gleichungen mittelst der gegebenen Wurzeln die übrigen:

44. $x^3 - 5x^2 - 18x + 48 = 0;\ x_1 = 2.$

45. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0;\ x_1 = 3.$

46. $6x^3 - 11x^2 - 5x + 12 = 0$; $x_1 = -1$.
47. $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 46x + 120 = 0$; $x_1 = 4$, $x_2 = 5$.
48. $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$; $x_1 = -2$.
49. $x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$; $x_1 = -2$.
50. $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$ hat 2 Wurzeln, deren Summe 7 ist; wie lauten sämmtliche Wurzeln?

Suche die rationalen Wurzeln folgender Gleichungen (§§. 294 und 295.):

51. $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$.
52. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
53. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$.
54. $x^3 - 39x - 70 = 0$.
55. $x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$.
56. $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$.
57. $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0$.
58. $x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 94x + 48 = 0$.
59. $x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 68x - 60 = 0$.
60. $x^5 + 2x^4 - 42x^3 - 8x^2 + 257x - 210 = 0$.
61. $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$.
62. $x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} = 0$.
63. $x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3} = 0$.
64. $x^3 - \frac{25}{12}x^2 + \frac{29}{24}x - \frac{5}{12} = 0$.
65. $x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{28}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = 0$.
66. $x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{36}x^2 + \frac{2}{27}x - \frac{1}{108} = 0$.

Berechne die irrationalen Wurzeln folgender Gleichungen nach der Newton'schen Methode (§. 297.):

67. $x^3 - 7x + 7 = 0$.
68. $x^3 - 2x - 5 = 0$.
69. $x^2 + 3x - 5 = 0$.
70. $x^3 - 7x + 1 = 0$.
71. $x^3 - 5x^2 + 7 = 0$.
72. $x^3 - 2x^2 - 6x + 8 = 0$.
73. $x^4 - 45x^2 + 20x - 3 = 0$.
74. $x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

Löse folgende Gleichungen nach der Regula falsi auf (§. 298.):

75. $x^3 + 5x - 4 = 0$.
76. $x^3 - 5x - 3 = 0$.
77. $x^3 - x^2 + 2x - 4 = 0$.
78. $x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$.
79. $x^4 - 3x^2 - 4x = 2$.
80. $x^4 - 20x^2 + 28x + 15 = 0$.
81. $x^x = 100$.
82. $\sqrt[x]{x} = \frac{1}{5}$.
83. $\log x = 3x$.
84. $x \log x = 17$.
85. $x + \log x = 5$.
86. $x - \log x = 2$.