SPOMINSKA PLOŠČA FRANCU HOČEVARJU

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 01A55, 01A60, 01A70

Matematiku Francu Hočevarju so 20. junija 2009 v rojstni Metliki odkrili spominsko ploščo. Prispevek vsebuje njegov kratek življenjepis in delo ter predstavi nekaj njegovih znanstvenih objav.

MEMORIAL TABLET TO FRANC HOČEVAR

On June 20, 2009 a memorial tablet to mathematician Franc Hočevar at his birthplace in Metlika, Slovenia was unveiled. This article contains his short biography and work, and presents some of his scientific publications.

I. Ko smo odkrivali spominsko obeležje matematiku Francu Jožefu Hočevarju (1853–1919), smo se lahko v mislih vsaj za hip preselili v svoja osnovnošolska in dijaška, morda tudi v študentska leta, ko smo bolj ali manj uspešno stopali v svet matematike. Nekomu je bila morda pretežka, drugemu se je zdela nepotrebna, tu in tam pa se je le našel kdo, ki z njo ni imel posebnih težav. Še več, vzljubil jo je in postala mu je celo življenjska nuja in užitek, kot se je izrazil prof. Josip Plemelj (1873–1967). Nedvomno je za to potrebno imeti nekaj nadarjenosti, ki pa jo je treba še odkriti. Pri tem pa ne smemo pozabiti, da to ni vse: poleg nadarjenosti so za uspeh potrebni tudi pogum, delavnost in vztrajnost. In zato so po navadi dobrodošli dobri učitelji in profesorji. Franc Hočevar je imel to srečo, da je na gimnaziji v Ljubljani imel izvrstnega in priljubljenega profesorja, ki je spoznal njegove sposobnosti in ga popeljal v svet matematike, tako da jo je vzljubil za vse življenje.

Po končani gimnaziji je mladi Franc odšel na cesarski Dunaj, kjer je študiral matematiko in fiziko pri samih uglednih znanstvenikih tistega časa. Ludwig Boltzmann (1844–1906) je bil njegov profesor matematike in pri njem je mladi Franc tudi doktoriral, star komaj 22 ali 23 let, po podatkih v [4] leta 1875, po [2] pa leta 1876, in sicer se je v svoji doktorski disertaciji posvetil nekaterim določenim integralom. Postal je doktor filozofije in takoj za tem asistent na dunajski tehniški visoki šoli. V šolskem letu 1875/76 je

na Terezijanski akademiji na Dunaju opravil tudi vse predpisane obveznosti, ki so mu dovoljevale poučevati na srednjih šolah.

Kot zanimivost povejmo še, da je pri Boltzmannu leta 1879 doktoriral tudi Ignac Klemenčič (1853–1901) z raziskavami o obnašanju stekla po razbremenitvi. Da Slovenci na Dunaju njega dni niso bili od muh, pove tudi podatek, da je Boltzmann doktoriral pri Jožefu Stefanu (1835–1893).

A tudi tisti časi so bili trdi za zaposlitve v velikih univerzitetnih središčih, kajti mladih doktorjev znanosti se je z leti kar nekaj nabralo in le redki so imeli srečo, da so ostali na Dunaju. Toda monarhija je imela tudi druga visokošolska središča, starejša, novejša in nastajajoča, kjer se je morda laže dobilo službo.

Tako se je Franc Hočevar umaknil na Tirolsko, kjer je dve leti poučeval na gimnaziji, obenem pa je na univerzi v Innsbrucku spoznal še nekaj znanih matematikov in se habilitiral za privatnega docenta, kar mu tiste čase ni dajalo rednih prejemkov, ampak le pravico predavati na univerzi in upati, da se medtem najde mesto pravega docenta. Hočevarju se je upanje uresničilo in zlahka je postal na nemški tehniški visoki šoli v Brnu najprej izredni in nato redni profesor. Tudi čas delovanja na Moravskem je bil zanj le prehodno obdobje, kajti čez štiri leta so ga povabili v Gradec, kjer je na tamkajšnji sloviti tehniki predaval matematiko in s tem sodeloval pri izobrazbi številnih inženirjev, tudi iz slovenskih dežel, in dolga leta opravljal funkcijo dekana strojne fakultete ter prejel naslov dvornega svetnika. V Gradcu je ostal Hočevar do svoje smrti. Več podrobnosti o njegovem življenju in delu lahko preberemo v [4, 5, 6, 8].

Hočevarju je čas poučevanja na gimnaziji zagotovo koristil, kajti na podlagi svojih bogatih pedagoških izkušenj je v nemščini napisal celo vrsto odličnih učbenikov za aritmetiko in geometrijo za gimnazije in realke. Zelo se je zavzemal tudi za uvedbo odvoda in integrala v srednje šole. Veliko njegovih učbenikov so prevedli v druge jezike takratne monarhije in jih še dolgo uporabljali. Žal smo Slovenci ostali v takratnem spletu zgodovinskih okoliščin brez prevoda Hočevarjevih del.

Hočevarjeve učbenike še prav posebej odlikujejo jedrnatost, jasnost, preglednost, razumljivost, a kljub temu ne na škodo matematične natančnosti. Uporablja preprost in lahko razumljiv jezik, skrbi za uravnoteženost med teorijo in uporabo, izbira primerne in koristne naloge, tako da vzbuja pri dijakih zanimanje za predmet.

Zaradi vsega naštetega je nedvomno prav, da je Franc Jožef Hočevar dobil spominsko ploščo v svojem rojstnem mestu Metlika. V sodelovanju Belokranjskega muzejskega društva, DMFA ter Občine Metlika so jo na pobudo metliškega učitelja matematike Jožeta Vraničarja odkrili 20. junija 2009, torej 90 let in en dan po Hočevarjevi smrti, in sicer na metliški komendi. Kljub močno deževnemu vremenu se je slovesnosti udeležilo precej ljudi od blizu in daleč, med njimi tudi podpredsednica DMFA Nada Razpet in častni član prof. Dušan Modic. Zbrane so pozdravili metliška županja Renata Brunskole, direktorica Belokranjskega muzeja v Metliki Andreja Brancelj Bednaršek in minister za šolstvo in šport dr. Igor Lukšič, nekaj besed o Hočevarju pa je dodal avtor tega prispevka. Slovesnost so povezovali domači recitatorji, za glasbene vložke pa so poskrbeli domači tamburaši, ki so vnesli v prireditev nekaj značilnega belokranjskega melosa.

Spominsko obeležje v Metliki, odkrito v čast matematiku Francu Hočevarju, se je tako pridružilo verigi obeležij v Zagorici, Moravčah, Cerknem, Ljubljani, Gornjem Gradu, Novem mestu in Štrukljevi vasi ter na Bledu in Kamnem Potoku. Lahko bi bilo Metliki, vsej Beli krajini, Sloveniji in svetu v ponos.

II. Povejmo še nekaj o znanstveni dejavnosti Franca Hočevarja. Objavil je celo vrsto razprav, ki segajo od problematike srednješolskega matematičnega pouka do področij mehanike in elektrotehnike, največ pa v čisto matematiko. Njegove matematične razprave obravnavajo probleme iz diferencialnega in integralnega računa, diferencialnih enačb, sistemov diferencialnih enačb, algebre, teorije števil, neskončnih vrst in produktov, numerične analize in analitične geometrije v prostoru. Več člankov je posvetil algebraičnim formam in deljivosti le-teh z linearnimi in kvadratnimi formami. Opravil je obsežno in pestro delo, ki se lahko kosa z delom marsikaterega matematika v našem času.

V Sloveniji žal še vedno nimamo zbranih vseh Hočevarjevih člankov. Na srečo so na svetovnem spletu v bazi podatkov pri *Zentralblatt für Mathematik* dostopni povzetki. Tako si lahko ustvarimo vsaj približno predstavo, o čem je pisal. Oglejmo si še nekaj njegovih znanstvenih rezultatov.

1. V članku *Über die unvollständige Gammafunktion (O nepopolni funkciji gama)* je Hočevar našel razvoj nepopolne funkcije gama v vrsto. Ta je za pozitivni realni spremenljivki a in x definirana z integralom (uporabimo oznake iz [1, 3]):

$$\gamma(a,x) = \int_0^x t^{a-1}e^{-t}dt\,. \tag{1}$$

Podintegralske funkcije pa ne integriramo po celotnem poltraku $(0,\infty)$ kot pri funkciji gama, ki je dana z integralom

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt\,,$$

zato ji pravimo *nepopolna*. Integrala (1) se lotimo z metodo per partes:

$$\gamma(a,x) = \frac{1}{a}t^a e^{-t}\Big|_0^x + \frac{1}{a}\int_0^x t^a e^{-t}dt = \frac{1}{a}x^a e^{-x} + \frac{1}{a}\gamma(a+1,x)\,.$$

Tako smo našli rekurzijo

$$\gamma(a,x) = \frac{1}{a}x^a e^{-x} + \frac{1}{a}\gamma(a+1,x)\,.$$

Če jo uporabimo večkrat, najdemo razvoj v vrsto

$$\gamma(a,x) = \frac{1}{a}x^a e^{-x}\left(1 + \frac{x}{a+1} + \frac{x^2}{(a+1)(a+2)} + \cdots\right),$$

ki je uporabna za majhne x in velike a.

2. Znano je, da je naravno število, ki je zapisano v desetiškem sistemu, deljivo z 11, če je alternirajoča vsota njegovih števk deljiva z 11. Hočevar je to pravilo v članku *Zur Lehre der Teilbarkeit der ganzen Zahlen (K teoriji deljivosti celih števil)* posplošil na naravno število n, ki je zapisano v številskem sistemu s poljubno osnovo b:

$$n = a_r a_{r-1} \ldots a_2 a_1 a_0(b) = a_r b^r + a_{r-1} b^{r-1} + \cdots + a_1 b + a_0 \,. \qquad (2)$$

Pri tem so $a_r, a_{r-1}, \ldots, a_1, a_0$ števke števila n v številskem sistemu z osnovo b. Velja $0 \leq a_k < b$. V zapisu (2) razdelimo števke od desne proti levi v skupine po q števk:

$$\ldots |a_{3q-1} \ldots a_{2q+1} a_{2q}|a_{2q-1} \ldots a_{q+1} a_q|a_{q-1} \ldots a_1 a_0|\,.$$

Nato definiramo cela števila

$$m_0 = a_{q-1} \ldots a_1 a_0(b)\,, \quad m_1 = a_{2q-1} \ldots a_{q+1} a_q(b)\,,$$

$$m_2 = a_{3q-1} \ldots a_{2q+1} a_{2q}(b)\,, \quad \ldots$$

in alternirajočo vsoto

$$m = m_0 - m_1 + m_2 \pm \cdots = \sum_{r \geq 0} (-1)^r m_r\,,$$

ki je tudi celo število.

Velja trditev: Če število $b^q + 1$ deli m, potem $b^q + 1$ deli tudi n.

Dokažemo jo pa tako. Najprej je:

$$n = \sum_{k \geq 0} a_k b^k = \sum_{r \geq 0} \sum_{s=0}^{q-1} a_{qr+s} b^{qr+s} = \sum_{r \geq 0} b^{rq} \sum_{s=0}^{q-1} a_{qr+s} b^s = \sum_{r \geq 0} b^{rq} m_r\,.$$

Oglejmo si razliko:

$$n - m = \sum_{r \geq 1} m_r (b^{qr} - (-1)^r)\,.$$

Za lihe indekse r, denimo $r = 2j+1$, dobimo v členih zgornje vsote na desni strani faktorje $(b^q)^{2j+1} + 1$, ki se dajo razstaviti:

$$(b^q)^{2j+1} + 1 = (b^q + 1) P(b, q, j)\,,$$

kjer je $P(b, q, j)$ celo število.

Za sode indekse r, denimo $r = 2j$, pa dobimo v členih vsote na desni strani faktorje $(b^q)^{2j} - 1$, ki se tudi dajo razstaviti:

$$(b^q)^{2j} - 1 = (b^{2q})^j - 1 = (b^{2q} - 1)Q(b, q, j) = (b^q + 1)(b^q - 1)Q(b, q, j)\,,$$

kjer je $Q(b, q, j)$ neko celo število.

Torej je celo število $n - m$ deljivo z $b^q + 1$. Sedaj takoj spoznamo: če $b^q + 1$ deli m, potem deli tudi n.

Očitno za $b = 10$ in $q = 1$ dobimo kriterij deljivosti naravnega števila n z 11.

3. Franc Hočevar se je ukvarjal, kot smo že zapisali, tudi z diferencialnimi enačbami in sistemi diferencialnih enačb. V svojem prispevku *Zur Integration der Jacobi'schen Differentialgleichung* $L\,dx + M\,dy + N(x\,dy - y\,dx)$ (*K integraciji Jacobijeve diferencialne enačbe* $L\,dx + M\,dy + N(x\,dy - y\,dx)$) je podal eleganten zapis rešitve diferencialne enačbe

$$\frac{dx}{a_1x + b_1y + c_1 - x(a_3x + b_3y + c_3)} = \frac{dy}{a_2x + b_2y + c_2 - y(a_3x + b_3y + c_3)}\,,$$

ki ima same realne koeficiente. Uporabimo nekoliko modernejšo obravnavo. Avtor si je pomagal z matriko A, ki jo je priredil zgornji enačbi:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Kadar ima matrika A različne lastne vrednosti $\lambda_k, (k = 1, 2, 3)$, obstajajo linearno neodvisni lastni vektorji $v_k = [\alpha_k, \beta_k, \gamma_k]^t, (k = 1, 2, 3)$, in rešitev dane diferencialne enačbe v implicitni obliki, to se pravi njen integral, je

$$(\alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1)^{\lambda_2 - \lambda_3}(\alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2)^{\lambda_3 - \lambda_1}(\alpha_3x + \beta_3y + \gamma_3)^{\lambda_1 - \lambda_2} = konst.$$

Avtor se ni izognil obravnavi primera, ko sta dve lastni vrednosti matrike A konjugirano kompleksni, in primerov, ko imamo dve ali vse tri lastne vrednosti matrike A med seboj enake. Ugotovil je tudi, da je integral obravnavane diferencialne enačbe algebraičen, če so realni deli vseh treh lastnih vrednosti matrike A med seboj enaki.

Tako obravnava Jacobijevo diferencialno enačbo Vjačeslav Vasiljevič Stepanov (1889–1950) v [7] (nemški prevod iz ruščine) s pripombo, da jo tako predava tudi Dmitrij Fjodorovič Egorov (1869–1931) na univerzi v Moskvi.

4. V članku *Über die Integration eines Systems simultaner Differentialgleichungen (O integraciji nekega sistema simultanih diferencialnih enačb)* se je Hočevar lotil sistema diferencialnih enačb

$$\frac{dx_1}{X_1 - x_1 X} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n - x_n X} = \frac{dz}{X_{n+1} - zX},$$

kjer je X homogena funkcija poljubne stopnje h in $X_1, \ldots, X_{n+1}$ linearne homogene funkcije spremenljivk x_1, …, x_n, z. Dokazal je, da se tedaj, ko je h celo število in

$$X = a_1 x_1^h + \cdots + a_n x_n^h + a_{n+1} z^h,$$

sistem da rešiti z integracijami do konca.

5. Ob koncu omenimo še Hočevarjevo prizadevanje za uvedbo odvoda in integrala v srednje šole. Verjetno je sledil Felixu Kleinu (1849–1925), ki je tudi videl potrebo po uporabi odvoda in integrala za korektno obravnavo fizikalnih problemov. Hočevar je v prispevku *Sind die Elemente der Infinitesimalrechnung an den Mittelschulen einzuführen oder nicht? (Ali gre uvajati elemente infinitezimalnega računa v srednje šole ali ne?)* najprej orisal obseg in potek pouka matematike na avstrijskih univerzah, visokih tehniških in srednjih šolah vključno z izobrazbo strokovnih učiteljev. Prišel je do spoznanja, da je treba dotakratno učno snov skrbno prerešetati in v teorijo funkcij vpeljati odvod in integral. Podal je nekaj predlogov, katere vsebine bi se dalo skrčiti na račun novih. S problemi, kaj sodi in kaj ne sodi v pouk matematike, se tudi pri nas ukvarjamo zadnja desetletja.

LITERATURA

[1] M. Abramowitz in I. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover publications, New York, 1972.

[2] J. Blackmore, *Ludwig Boltzmann, His later life and philosophy, 1900–1906*, Book one: a documentary history, Kluwer, 1995.

[3] I. S. Gradstein in I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums and products*, ur. Jeffrey, Academic Press, New York, 1994.

[4] J. Povšič, *Bibliografija Franca Hočevarja*, SAZU, Ljubljana, 1978.

[5] J. Povšič, *Franc Hočevar: ob stoletnici njegovega rojstva*, Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 4, str. 97–102.

[6] J. Povšič, *Prispevek Franca Hočevarja pouku elementarne matematike*, Obzornik mat. fiz. **8** (1961) 2, str. 87–92.

[7] W. W. Stepanow, *Lehrbuch der Differentialgleichungen*, VEB deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[8] P. Šišma, *Mathematics at the German Technical University in Brno*, Franzbecker, Berlin, 2006.

VESTI

MATEMATIČNE NOVICE

Predavanje profesorja Efima Zelmanova na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani

Prvega junija 2009 je profesor **Efim Zelmanov** s Kalifornijske univerze v San Diegu imel na FMF v Ljubljani predavanje z naslovom *Asymptotic properties of finite groups and finite dimensional algebras.*

Profesor Zelmanov je leta 1994 na Mednarodnem matematičnem kongresu v Zürichu dobil Fieldsovo medaljo, najbolj prestižno nagrado na področju matematike. Zato je njegov obisk privabil matematike iz vse Slovenije. Profesor Zelmanov je znan po svojem delu na področju neasociativne algebre, natančneje Jordanovih in Liejevih algeber. Največjo slavo pa si je pridobil, ko je z uporabo svojih rezultatov rešil dolgo neosvojljivi *Omejeni Burnsidov problem* iz teorije grup. Predavanje je pokazalo izredno širino metod, ki jih obvlada profesor Zelmanov – od teorije števil do kombinatorike in teorije grafov. Poslušalci smo lahko občudovali njegovo navdušenje nad matematičnim raziskovanjem.

Efim Izakovič Zelmanov se je rodil v Habarovsku leta 1955. Začetni del svoje kariere je naredil v Novosibirsku. Leta 1987 je emigriral iz Sovjetske zveze. Od leta 1990 dela v ZDA. Kot smo lahko videli, je profesor Zelmanov skromen in dostopen znanstvenik. Fotografije s predavanja profesorja Zelmanova si lahko ogledate na portalu *flickr* [1]. (Najenostavneje je, če v internetni brskalnik vtipkate *Efim Zelmanov flickr*.)

Nova matematična priznanja

Nobelove nagrade za matematiko žal ni. Kot nekakšno nadomestilo je dolgo časa veljala **Fieldsova medalja**. Dve do štiri take medalje podeljujejo vsaka štiri leta na Mednarodnem matematičnem kongresu. Dobitniki Fieldsove medalje morajo biti mlajši kot štirideset let. V denarju nagrada ni obilna in znaša okrog deset tisoč EUR. Še zmeraj pa nosi izreden prestiž.