

# **PRESEK**

**List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje**

ISSN 0351-6652

Letnik 1 (1973/1974)

Številka 4

Strani 165–172

Peter Gosar:

## **FIZIKA TRKOV**

Ključne besede: fizika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/1/1-4-Gosar.pdf>

© 1974 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.



## FIZIKA TRKOV Peter Gosar

Odboj žoge od tal, udarec ene kroglice ob drugo, trk vagonov na železniškem tiru, so tako vsakdanji primeri trkov, da o njih kaj dosti ne premišljujemo. Če listamo po fizikalnih knjigah, pa opazimo, da je razpravljanje o trkih vsakdanji posel fizikov in da so redka področja fizike, kjer se temu lahko izognemo. V moderni fiziki se seveda zanimamo bolj za trke med majhnimi delci, kot so atomi, molekule, elektroni, protoni, nevtroni, atomska jedra itd. Spomnimo se le na to, da je tlak plina posledica trkov plinskih molekul s predmeti, ki so v dotiku s plinom, da omogočajo žarenje reklamnih cevi trki med elektroni in molekulami plinov, s katerimi so cevi napolnjene, in da sveti televizijski zaslon zaradi udarcev hitrih elektronov na tanko fluorescenčno plast na zaslonu.

Tu se bomo omejili na trke med velikimi telesi. Nič manj zanimivi ne bodo, saj bomo pri teh trkih skušali razumeti tudi manj znane podrobnosti. Kaj pravzaprav vemo o trku med kroglica iz kovine, slonove kosti ali gume? Bore malo! V šoli nas odpravijo z izrekom, da se pri trku vedno ohrani skupna gibalna količina in s tem, da se pri prožnih oziroma elastičnih trkih ohrani tudi kinetična energija. V ilustracijo si oglejmo trk enakih krogel, ki se gibljeta po isti premici. Hitrost prve kroglice pred trkom je  $v_1$ , druge pa  $v_2$ . Ustrezni hitrosti po trku sta  $v_1'$  in  $v_2'$ . Iz pravila o ohranitvi gibalne količine sledi

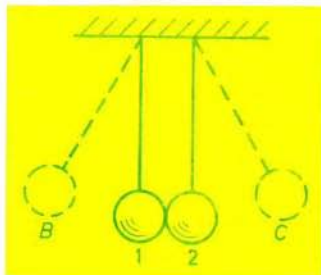
$$v_1 + v_2 = v_1' + v_2' \quad (1)$$

ker sta masi obeh krogel enaki. Zahteva o ohranitvi kinetične energije pri prožnem trku pa nam da enačbo

$$v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad (2)$$

Enačbi (1) in (2) povezujeta hitrosti po trku s hitrostima pred trkom in tako omogočata, da lahko izračunamo neznani hitrosti  $v_1'$  in  $v_2'$ . Račun je preprost, še bolj pa rezultat:  $v_1' = v_2$ ,  $v_2' = v_1$ . Pri trku krogli samo zamenjata hitrosti.

Vsako je bil gotovo že presenečen, ko je opazoval trk gibajoče se krogle z enako, mirujočo kroglo. Krogla, ki udari ob mirujočo kroglo, se ustavi, prvotno mirujoča krogla pa prevzame njeno hitrost in s tem tudi kinetično energijo. Tak poskus najlepše opazujemo, če obesimo enaki, jekleni ali slonokoščeni krogli na vrstico kot pri matematičnem nihalu tako, da se v mirujoči legi dotikata (Sl.1). Kroglo 1 odklonimo iz mirovne lege A v lego B in izpustimo. Po trku se krogla 1 ustavi v legi A, krogla 2 pa zaniha in doseže maksimalni odklon v legi C, ki je simetrična



z lego B. Proces se začne znova v obratni smeri. V začetku opazovanja se zdi, da enačbi (1) in (2) izredno dobro opišeta pojav. Vendar po nekaj trkih opazimo, da krogla v legi A ne miruje popolnoma. Čim več trkov sta krogli doživeli, tem bolj izrazito se giblje krogla, ki bi morala po naših računih mirovati. Po daljšem času pride celo do tega, da obe krogli nihata v fazi in z isto amplitudo ter med njima sploh ne pride več do trkov. Kaj je narobe v naši razlagi? Fiziki so popolnoma prepričani v veljavnost enačbe (1). Če je kaj narobe, mora biti z enačbo o ohranitvi kinetične energije. Zares, pri trku se nekaj kinetične energije izgubi, telesa pa lahko zanihajo, se za stalno deformirajo in segrejejo. Zato popolnoma prožnih trkov ni. Enačbo (2) moramo popraviti takole

$$v_1'^2 + v_2'^2 = v_1^{-2} + v_2^{-2} + 2\epsilon \quad (3)$$

kjer  $\epsilon > 0$  meri izgubo kinetične energije pri trku. Če je  $M$  masa posamezne krogle, je izguba kinetične energije  $M\epsilon$ .

Rešitev enačb (1) in (3) se sedaj glasi

$$\begin{aligned} v_1' &= (v_1 + v_2)/2 - \sqrt{[(v_1 - v_2)/2]^2 - \epsilon} \\ v_2' &= (v_1 + v_2)/2 + \sqrt{[(v_1 - v_2)/2]^2 - \epsilon} \end{aligned} \quad (4)$$

V posebnem primeru, ko v začetku krogla 2 miruje, krogla 1 pa se giblje s hitrostjo  $v$ , dobimo iz (4)

$$\begin{aligned} v_1' &= (v/2)(1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon/v^2}) \\ v_2' &= (v/2)(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon/v^2}) \end{aligned} \quad (5)$$

Vidimo, da se krogla 1 ne ustavi popolnoma, če je  $\varepsilon \neq 0$ . Po trku se obe gibljeta v isto smer, krogla 2 hitro, krogla 1 pa počasno. Po polovični periodi nihanja nihala se krogli ponovno srečata v legi A in doživita nov trk. Sedaj se že pred trkom obe gibljeta. Za ta trk veljajo torej enačbe (4). Te enačbe povedo, da ne pride do enostavne zamenjave hitrosti kot pri prožnem trku. Po trku je manjša hitrost  $v_1'$  večja in večja hitrost  $v_2'$  manjša od ustreznih hitrosti  $v_2$  in  $v_1$  pred trkom. Hitrost krogle, ki bi morala mirovati, ponovno naraste. To se ponovi pri vsakem nadaljnjem trku, dokler ne nihata obe krogli z enako hitrostjo. Končna hitrost v legi A je  $v/2$ . To sledi iz pogoja o ohranitvi gibalne količine, ker je v začetku  $v_1 = v$ ,  $v_2 = 0$  in na koncu  $v_1' = v_2'$ .

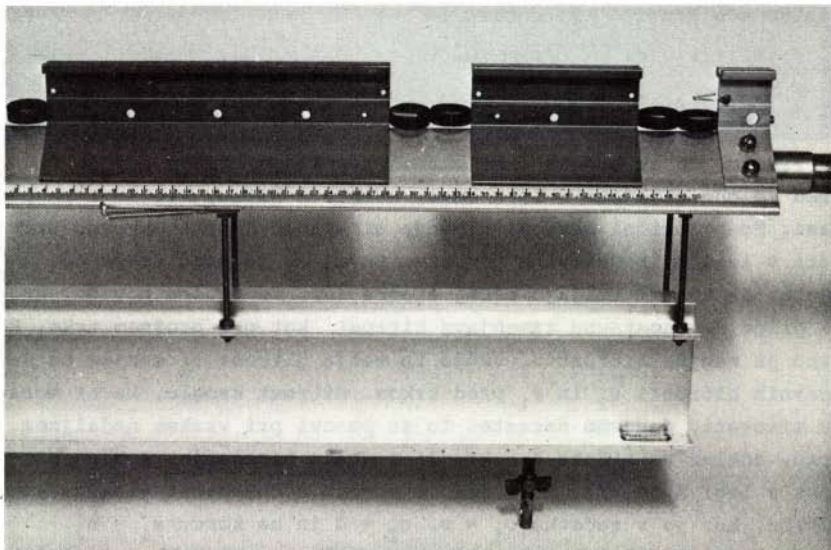
Poglejmo še, koliko kinetične energije se pri trku največ lahko spremeni v drugačno energijo. V enačbah (4) mora biti kvadratni koren realen. To je možno le, če je  $\varepsilon \leq [(v_1 - v_2)/2]^2$ . Pri popolnoma neprožnem trku, kjer se krogli po trku gibljeta enako hitro, doseže  $\varepsilon$  zgornjo mejo  $[(v_1 - v_2)/2]^2$ . Pri takem trku se ohranja le kinetična energija težišča  $M[(v_1 + v_2)/2]^2$ . Izguba kinetične energije je pri majhnih relativnih hitrostih  $v_1 - v_2$  sorazmerna s kvadratom relativne hitrosti:

$$\varepsilon = \alpha [(v_1 - v_2)/2]^2 \quad (6)$$

kjer je  $\alpha$  pri kroglah iz slonove kosti ali gutaperče 0.4, pri kroglah iz jekla 0.5 in svinca 0.96. Pri zgornjem poskusu z nihali je končni rezultat večkratnih trkov isti, kot če bi imeli en sam popolnoma neprožen trk.

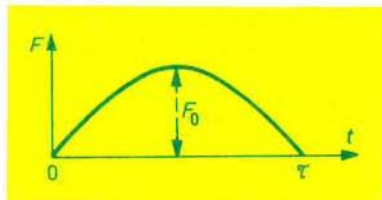
Do tu še vedno nismo nič zvedeli o samem poteku trka. Takih informacij nam enačbe, ki predstavljajo ohranitvene zakone, ne morejo dati. Zanimivo bi bilo vedeti, koliko časa traja trk, to je dotik med obema telesoma. Kolikšne sile in deformacije se pri tem pojavijo? Kaj vpliva na neprožnost trkov? Na ta vprašanja bomo skušali delno odgovoriti s preprostimi poskusi in razmišljanjem. Trke lahko izredno lepo opazujemo in raziskujemo z zračno progo, ki jo vidimo na sl. 2. Progo tvori votel strehast nosilec iz aluminija s trikotniškim prerezom. Zgornji strehast del nosilca ima zelo veliko luknjic s premerom okoli 0.6 mm. V prvo kraji-





šče nosilca komprimiramo zrak. Drugo krajišče pa je zaprto tako, da komprimirani zrak uhaja iz nosilca le skozi luknjice na strehastem delu. Na progo postavimo aluminjast voziček s presekom v obliki na glavo obrnjene črke Y. Zrak, ki piha iz luknjic, dvigne voziček toliko, da ni več neposrednega dotika med vozičkom in progo. Voziček, ki tako lebdi na zračni blazini, lahko skoraj brez trenja drsi po progi. S takimi vozički lahko študiramo trke pri skoraj idealnih okoliščinah. (Strnad J., Obzornik mat. fiz. 16, (1969) 123).

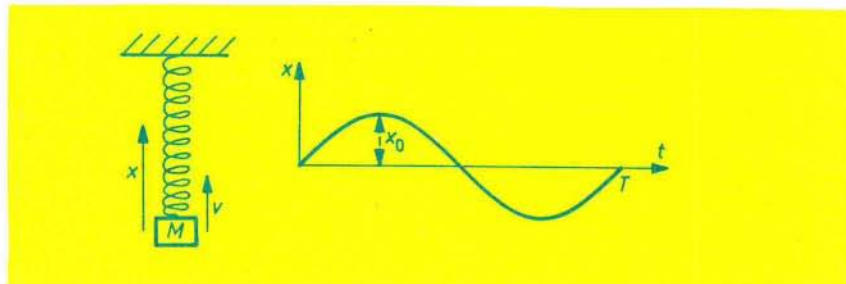
Opazujmo potek trka med vozičkom, ki se giblje s hitrostjo  $v$  in oviro na koncu proge. Voziček opremimo z odbijačem iz listnate ali vijačne vzmeti. Po prvem dotiku odbijača z oviro se začne vzmet krčiti. Pri tem se hitrost vozičku zmanjšuje, dokler se ta ne ustavi. V tem trenutku je vzmet najbolj stisnjena. Sledi raztezanje vzmeti in pospeševanje vozička v obratno smer. Ko vzmet ponovno dobi prvotno dolžino, je trka konec. Voziček se odlepi od ovire in drsi po zračni progi v obratno smer s hitrostjo  $-v$ . Potek sile med oviro in vozičkom kaže sl.3. Gibanje vozička po začetku trka je ravno tako kot gibanje uteži pri nihalu na vijač-



no vzmet v eni polperiodi (Sl.4). Trk torej traja polovico nihajnega časa  $t_0$  ustreznega nihala na vijačno vzmet, to je

$$\tau = t_0/2 = \pi\sqrt{m/k}, \quad (7)$$

kjer je  $m$  masa vozička in  $k$  konstanta odbijačeve vzmeti. Vidimo,

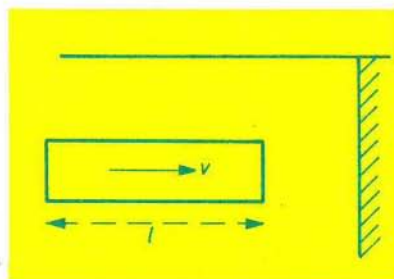


da je trajanje trka tem krajše, čim močnejša je vzmet. Zanimivo je, da je  $\tau$  neodvisen od začetne hitrosti vozička. Sila med vozičkom in oviro pa je seveda tem večja, čim večja je ta hitrost. Izračunajmo silo  $F_0$ , ki deluje, ko se voziček najbolj približa oviri. Tedaj se vsa kinetična energija vozička  $mv^2/2$  pretvori v prožnostno energijo vzmeti  $kx_0^2/2 = F_0^2/2k$ . Iz enakosti obeh energij sledi takoj

$$F_0 = \sqrt{km} v. \quad (8)$$

Z "močjo" vzmeti naraščajo tudi sile pri trku. Če hočemo ublažiti trk, moramo uporabiti šibkejšo vzmet. S tem pa seveda trajanje trka podaljšamo.

Analiza poteka trka med kroglo iz prožne snovi, na primer slo-  
novne kosti, gutaperče ali gume in  
togimi tlemi ali steno, je bolj  
zamotana. Oglejmo si preprostejši  
primer, namreč trk prožnega va-  
lja, ki se giblje vzdolž lastne osi ob togo steno. Glej sl.5 !  
Izvesti tak poskus ni lahko, ker želimo, da bi se dotik med va-



Valj in steno izvršil po vsej prednji ploskvi valja istočasno. Zato se mora valj gibati natančno v smeri pravokotnice na steno, prednja ploskev valja in stena pa morata biti natančno vzporedno obdelani. Ko pride do dotika med valjem in steno, se vsi deli prožnega valja ne gibljejo enako. Najprej se na togi steni ustavi sprednji del valja. Ostali deli začutijo oviro in se ustavijo tem pozneje, čim bolj so oddaljeni od stene. Razmere so podobne kot pri zaustavljanju dolge kolone avtomobilov pred semaforjem. Avtomobili v koloni se prvotno gibljejo z enako hitrostjo. Ko zasveti rdeča luč, se najprej ustavijo avtomobili na čelu kolone. Tem postopoma sledijo ostali avtomobili. Najpozneje se ustavi avtomobil na koncu kolone. Vpliv rdeče luči se širi vzdolž kolone z določeno hitrostjo. Podobno se godi v prožnih snoveh. Vsaka motnja, kot na primer lokalni pritisk ali deformacija, se širi skozi prožno snov z zvočno hitrostjo  $c$ . Zvočna hitrost je odvisna od vrste snovi in je pri jeklu  $5 \text{ km s}^{-1}$ , pri bakru  $3.7 \text{ km s}^{-1}$ , pri gumi pa le  $50 \text{ m s}^{-1}$ . To so hitrosti longitudinalnega valovanja v palici. Če torej opazujemo razmere v valju med trkom, vidimo, da je v danem trenutku tisti del valja, ki je že začutil oviro, stisnjen, ostali deli pa ne. Dolžina valja se med trkom zmanjšuje podobno kot se zmanjšuje dolžina kolone avtomobilov pred semaforjem ali vzmeti pri prejšnjem poskusu. Najbolj je valj stisnjen, ko vsi njegovi deli mirujejo. Temu trenutku ustreza konec prvega polčasa trka, tedaj je konec kompresije. Sledi raztezanje valja, ki poteka enako kot prej stiskanje, le v obratnem zaporedju. Zaradi tlaka v valju se začne najprej pospeševati v smer proč od stene tisti del valja, ki se je nazadnje ustavil v prvem polčasu trka. Sledijo mu deli valja bližje steni, dokler ne dobi ves valj hitrosti  $-v$ . Tedaj valj odleti od stene. Trk tako traja toliko časa, kolikor rabi zvok, da prepotuje dvojno dolžino valja  $2l$ , to je od stene do konca valja in nazaj do stene:

$$\tau = 2l/c \quad (9)$$

Tudi tu je trajanje trka neodvisno od hitrosti valja. Zanimiva je tudi ugotovitev, da je  $\tau$  sorazmeren z dolžino valja. Trajanje čelnega trka med dvema enakima valjema iz iste snovi je tudi podano z izrazom (9).

Koliko se valj največ stisne pri trku? Prav preprosto razmišljanje pove, da je sprememba dolžine valja  $\Delta l$  enaka

$$\Delta l = v\tau/2 = l(v/c). \quad (10)$$



Za prožna telesa velja Hookov zakon

$$\Delta l/l = p/E, \quad (11)$$

kjer je  $p$  tlak, ki povzroča deformacijo in  $E$  prožnostni modul snovi. Tako dobimo iz (10) in (11), da je tlak, ki deluje v valju med trkom

$$p = E(v/c). \quad (12)$$

Poglejmo še, kolikšna sila  $F$  deluje med steno in valjem. Ta se med trkom ne spreminja in je enaka kar  $F = Sp$ , kjer je  $S$  presek valja.

Trajanje trka med jeklenima valjema, ki sta dolga 4 cm, je na primer samo 16 milijonink sekunde. Pri enakih gumijastih valjih traja trk okoli 100 krat dlje. Zvočna hitrost v gumi je namreč zelo majhna.

Izraza (7) in (9) za trajanje trka si nista tuja. Prožni valj ima podobne lastnosti kot vzmet. Pri vzmeti je zveza med silo in deformacijo  $x$  izražena z  $F = kx$ , pri valju, ki ga stiskamo s silo  $F$ , pa velja  $F = (ES/l)x$ . Konstanti vzmeti  $k$  ustreza torej pri valju količina  $ES/l$ . To vrednost vstavimo v izraz (7) in, če upoštevamo, da je hitrost longitudinalnega valovanja v palici enaka  $c = \sqrt{E/\rho}$ , dobimo skoraj pravilni rezultat

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{S}{(ES/l)}} = \pi(l/c) \quad (13)$$

Telesa se pri trku pogosto deformirajo za stalno zaradi velikih sil med trkom. Snovi so prožne le, dokler so tlaki majhni. Jeklo se stalno deformira že, če je tlak večji od  $\approx 5 \cdot 10^{-3} E$ . Vsi zgornji izrazi so bili izpeljani za idealno prožna telesa, pri katerih velja Hookov zakon. Vidimo, da so rezultati pravilni le, če je hitrost dovolj majhna. Iz enačbe (12) sledi, da doseže pri trku tlak vrednost  $5 \cdot 10^{-3} E$  že pri hitrosti  $5 \cdot 10^{-3} c$  ali okoli  $25 \text{ m s}^{-1}$  pri trku jeklenih valjev. Pri večji hitrosti se valja stalno deformirata. Pri trkih teles, kot je krogla, so razmere še dosti bolj neugodne, kot bomo videli v naslednjem odstavku.

Trk dveh krogel ali trk krogle ob steno je zelo zapleten. Takoj po dotiku krogle s steno nastane v bližini stičnega mesta v krogli tlak (12), ki zaustavi gibanje tega dela krogle. Tlak se nato z zvočno hitrostjo širi v notranjost krogle in pri tem močno oslabi zaradi bočnega širjenja. Zmanjšani tlak ne more zaustaviti gibanja bolj oddaljenih delov krogle. Tudi potem, ko prvi



sunek prepotuje z zvočno hitrostjo premer krogle, se velik del krogle še vedno giblje. Posledica tega je, da se področja krogle, ki so bližje steni, še bolj stisnejo. Tlak v tem delu krogle narašča in postopoma zaustavlja vedno večji del krogle, dokler celotna krogla ne obmiruje. Iz tega sledi dvojje. Prvič traja trk v tem primeru dalj časa, kot bi sledilo iz formule (9), če v njej nadomestimo dolžino valja s premerom krogle. Pri trku krogel iz aluminija so na primer opazovali okoli 10 krat daljše čase. Čas trka  $\tau$  je tu odvisen tudi od hitrosti  $v$ , vendar le kot  $v^{-1/5}$ . Še vedno pa velja, da je trajanje trka sorazmerno premeru krogle. Drugič, tlak ob stičnem mestu med kroglo in steno, je zaradi dodatnega stiskanja snovi dosti večji kot pri valju. Tako pride še lažje do stalne deformacije in meja dopustne hitrosti za prožni trk občutno pade. Pri trku krogle je časovni potek sile  $F$  med steno in kroglo podoben poteku sile pri trku vozička z odbijačem (Sl. 3).

Za ublažitev trkov velikokrat uporabljamo gumo zaradi njenih izrednih prožnostnih lastnosti. Pri gumi je prožnostni modul  $E$  majhen in trk traja dolgo časa. Sile med trkom so zato majhne. Poleg tega je območje prožnosti pri gumi izredno veliko in prenese tudi več kot 100% deformacijo, ne da bi se snov poškodovala.

Za zaključek le nekaj besed o neprožnih trkih. Trk ni neprožen le v opisanih primerih, ko se del kinetične energije porabi za stalno deformacijo in se telo tudi segreje. Pri trku lahko začno telesa nihati in del kinetične energije preide v energijo nihanja. Ne bomo razmišljali, kdaj lahko nastanejo taka nihanja. Bralcem v razmislek prepuščam naslednji poskus:

Na zračno progo postavimo dva enaka vozička in ju zvežemo z listnato ali z vijačno vzmetjo. Tako smo dobili sestavljeno telo, ki lahko niha, če se vozička periodično približujeta in oddaljujeta drug od drugega. V začetku naj vozička mirujeta. Vzamemo še en ravno tak voziček in ga porinemo po zračni progi tako, da zadene v prva dva. Voziček, ki povzroči trk, naj bo opremljen z močnim odbijačem tako, da trk traja malo časa v primerjavi z nihajnim časom sestavljenega telesa. Kakšno gibanje opazujemo po trku? Kakšna je hitrost težišča sestavljenega telesa po trku? Koliko kinetične energije se je spremenilo v nihajno energijo sestavljenega telesa? Poučen je tudi trk sestavljenega telesa ob oviro na koncu proge.