UNIVERZA V LJUBLJANI
EKONOMSKA FAKULTETA

MARIJAN BLEJEC

STATISTIČNE METODE ZA EKONOMISTE

Druga, predelana in razširjena izdaja

OBRAZCI, POSTOPKI IN TABELE

LJUBLJANA 1975

UNIVERZA V LJUBLJANI

EKONOMSKA FAKULTETA

MARIJAN BLEJEC

STATISTIČNE METODE ZA EKONOMISTE

Druga, predelana in razširjena izdaja

OBRAZCI, POSTOPKI IN TABELE

LJUBLJANA 1975

Izdala in založila Ekonomska fakulteta v Ljubljani
Natisnila Univerzitetna tiskarna v Ljubljani
Natisnjeno 1000 izvodov

PREDGOVOR

Pri praktični uporabi statističnih metod pogosto potrebujemo le ustrezen obrazec, postopek ali tabelo, ne pa natančnega opisa metode in teoretičnega ozadja ali zgleda. Za primer, ko že obvladamo statistične metode, pa potrebujemo ustrezen obrazec, postopek ali tabelo, je namenjena Zbirka obrazcev, postopkov in tabel, ki je sestavljena na osnovi učbenika M. Blejec: Statistične metode za ekonomiste, Ekonomska fakulteta v Ljubljani, 1973.

Obrazci so označeni z istimi številkami kot v učbeniku, le da ne tečejo tekoče po vrstnem redu, ker so nekateri izpuščeni. V kolikor je že iz obrazca mogoče razbrati postopek, je dan samo obrazec z oznako simbolov, v nasprotnem primeru pa je podrobneje podan postopek za uporabo določene metode.

M. Blejec

Ljubljana, junij 1975

KAZALO

Str.

OBRAZCI IN POSTOPKI

Relativna števila 7

Frekvenčne porazdelitve 11

Kvantili 12

Srednje vrednosti 15

Mere variacije, asimetrije in sploščenosti 22

Mere koncentracije 32

Agregatni indeksi 34

Normalna porazdelitev 42

Vzorčenje-veliki vzorci 47

Vzorčenje-mali vzorci 60

Preskušanje domnev 72

Statistična analiza odločitev 81

Proučevanje odvisnosti med množičnimi pojavi 84

Statistično preverjanje kakovosti 119

Statistično načrtovanje poskusov 122

Proučevanje dinamike pojavov-časovne vrste 129

TABELE

Tabela A-B Normalna porazdelitev 153

Tabela C t-porazdelitev 155

Str.

Tabela Č χ^2-porazdelitev 156

Tabela D F-porazdelitev 157

Tabela E Studentiziran razmik $q = (\bar{y}_{max} - \bar{y}_{min})/s_y$ 160

Tabela F Preskus z mediano 161

Tabela G Preskus s predznačenimi rangi - Wilcoxonov preskus 162

Tabela H Preskus z vsoto rangov - Man-Withneyev preskus 163

Tabela I Preskus s sekvencami 164

Tabela J Fisherjeva transformacija $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$ 165

Tabela K Ortogonalni polinomi binomskih funkcij 166

Tabela L Slučajnostna števila 169

Tabela M Logaritmi tromestnih števil 171

***

OBRAZCI IN POSTOPKI

ŠESTO POGLAVJE

RELATIVNA ŠTEVILA

Strukture ali razčlenitvena števila

Enostavne strukture

Strukturni deleži

$$Y_1^o = \frac{Y_1}{Y} \; ; \quad Y_1\,\% = 100\,\frac{Y_1}{Y} \; ; \quad Y_1\,‰ = 1000\,\frac{Y_1}{Y} \tag{6.1}$$

Pri tem je Y_1 podatek za del populacije, Y podatek za populacijo, Y_1^o strukturni koeficient, $Y_1\,\%$ strukturni odstotek, $Y_1\,‰$ pa strukturni delež, izražen v promilih.

Dvojne strukture

Splošne zveze za dvojne strukture

6.6 Simbolično moremo vse možne deleže dvojnih struktur nakazati takole: Če z N_{AB} zaznamujemo kombinacijsko tabelo za število enot in ustrezne robne vsote $N_A = \sum\limits_B N_{AB}$: $N_B = \sum\limits_A N_{AB}$: $N = \sum\limits_A N_A = \sum\limits_B N_B$ zapišemo splošno kombinacijsko tabelo z vsotami takole

$$\begin{array}{c|c} N_{AB} & N_A \\ \hline N_B & N \end{array} \tag{6.2}$$

Ustrezni strukturni deleži na celotno populacijo so

$$
\begin{array}{c|c}
\frac{N_{AB}}{N} = P_{AB} & \frac{N_A}{N} = P_A \\
\hline
\frac{N_B}{N} = P_B & \frac{N}{N} = 1
\end{array}
\qquad (6.3)
$$

Vrstične ali stolpične strukturne vrste zapišimo takole

$$
\begin{array}{c|c}
\frac{N_{AB}}{N_B} = P_{A/B} & \frac{N_A}{N} = P_A \\
\hline
\frac{N_B}{N_B} = 1 & \frac{N}{N} = 1
\end{array}
\qquad (6.4)
$$

$$
\begin{array}{c|c}
\frac{N_{AB}}{N_A} = P_{B/A} & \frac{N_A}{N_A} = 1 \\
\hline
\frac{N_B}{N} = P_B & \frac{N}{N} = 1
\end{array}
\qquad (6.5)
$$

$P_{A/B}$ pomeni strukturne vrste po znaku A pri pogoju, da se podatki nanašajo na posamezno vrednost B in

$P_{B/A}$ strukturne vrste po znaku B za posamezne delne populacije po znaku A.

Iz gornjih tabel dobimo naslednje zveze:

$$\frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_B}{N} \cdot \frac{N_{AB}}{N_B} = \frac{N_A}{N} \cdot \frac{N_{AB}}{N_A} \quad \text{ali} \qquad (6.6)$$

$$P_{AB} = P_B \cdot P_{A/B} = P_A \cdot P_{B/A}$$

iz te zveze pa dobimo dalje obrazec

$$P_{B/A} = \frac{P_{AB}}{P_A} = \frac{P_B \cdot P_{A/B}}{\sum P_B \cdot P_{A/B}} \qquad (6.7)$$

Stavek o množenju verjetnosti za odvisne dogodke

$$Pr(A \cap B) = Pr(B) \cdot Pr(A/B) = Pr(A) \cdot Pr(B/A) \tag{6.8}$$

Bayesov obrazec za inverzno verjetnost

$$Pr(B/A) = \frac{Pr(B) \cdot Pr(A/B)}{\sum_B Pr(B) \cdot Pr(A/B)} \tag{6.9}$$

Strukturni krogi

Preračun strukturnih deležev $Y_1\%$ v ločne stopinje Y_1^{st}

$$Y_1^{st} = 3,6\ Y_1\% \tag{6.10}$$

$$Y_1^{st} = 1,8\ Y_1\% \tag{6.11}$$

Razmerje med radiji strukturnih krogov

Pri tem pomeni: r_o = znan radij kroga, ki ustreza podatku Y_o; r_1 = radij kroga po datek Y_1.

Statistični koeficienti in gostote

Računanje poprečij

$$\bar{X} = \frac{1}{r} (X_1 + X_2 + \ldots + X_r) \tag{6.13}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{r} (\frac{1}{2} X_o + X_1 + \ldots + X_{r-1} + \frac{1}{2} X_r) \tag{6.14}$$

Statistični koeficient

$$K = \frac{Y \cdot E}{\bar{X} \cdot i} \tag{6.15}$$

pri čemer pomeni: K = koeficient, Y = razmični podatek, $\bar{X}$ = poprečje za trenutni podatek, i = dolžina časovnega razdobja, za katerega računamo koeficient, E = 100, 1000, 10000, odvisno od tega, na koliko enot trenutnega podatka se nanaša koeficient.

Enostavni indeksi

Enostavni indeks

$$I_{1/0} = 100 \,.\, Y_1/Y_o \tag{6.10}$$

Pri tem pomeni: Y_1 = podatek, ki ga primerjamo s podatkom Y_o. Y_o = podatek, na katerega primerjamo. Podatek, na katerega primerjamo, imenujemo b a z o ali o s n o v o indeksa.

Verižni indeks

$$I_k = 100 \,.\, Y_k/Y_{k-1} \tag{6.11}$$

Pri tem pomeni: Y_k = tekoči podatek: Y_{k-1} = podatek za predhodni člen; I_k = verižni indeks.

Preračun indeksov na drugo osnovo

$$I_{2/1} = 100 \frac{I_{2/0}}{I_{1/0}} \tag{6.12}$$

SEDMO POGLAVJE

FREKVENČNE PORAZDELITVE

Gostota frekvence g_k –

$$g_k = f_k / i_k \tag{7.1}$$

f_k = frekvenca v razredu k ; i_k = širina razreda k ;

Relativna frekvenca f_k^o –

$$f_k^o = f_k / N \tag{7.2}$$

Gostota relativne frekvence φ_k –

$$\varphi_k = g_k^o = f_k^o / i_k = f_k / N . i_k \tag{7.3}$$

$$f_k = N . i_k \cdot \varphi_k \tag{7.4}$$

Kumulativna frekvenčna porazdelitev F_k –

$$F_{k+1} = F_k + f_k \tag{7.5}$$

OSMO POGLAVJE

KVANTILI

Kvantilni rang P

$$R = NP + 0,5 \qquad (8.1)$$

$$P = \frac{R - 0,5}{N} \qquad (8.2)$$

R = rang

Kvantili

Mediana Me

$$Me = y_{P=0.50} \qquad (8.3)$$

Kvartili

$$Q_1 = y_{P=0.25};\ Q_2 = y_{P=0.5o};\ Q_3 = y_{P=0.75} \qquad (8.4)$$

Decili

$$D_1 = y_{0,10},\ D_2 = y_{0,20} \ldots\ldots\ldots\ldots D_9 = y_{0,90} \qquad (8.5)$$

Centili

$$C_1 = y_{0,01} \quad C_2 = y_{0,02} \ldots\ldots C_{98} = y_{0,98} \text{ in } C_{99} = y_{0,99} \qquad (8.6)$$

Izračun kvartilnih rangov P_y iz negrupiranih podatkov

a) Imamo ranžirno vrsto vrednosti enot populacije.

b) V ranžirni vrsti poiščemo, med kateri vrednosti y_0 in y_1 pade vrednost y, za katero iščemo P_y, tako da velja: $y_0 \leq y < y_1$. Vrednosti y_0 naj ustreza rang R_0.

c) Rang R_y, ki ustreza vrednosti y, dobimo z linearno interpolacijo po obrazcu

$$R_y = R_0 + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{8.7}$$

d) Kvantilni rang P_y izračunamo iz ranga R_y in obsega populacije po obrazcu

$$P_y = \frac{R_y - 0{,}5}{N} \tag{8.8}$$

Izračun kvantilov y_P iz negrupiranih podatkov

a) Za populacijo imamo ranžirno vrsto.

b) Iz danega P po obrazcu

$$R_P = NP + 0{,}5 \tag{8.9}$$

izračunamo ustrezni rang R.

c) V ranžirni vrsti poiščemo, med katera cela ranga pade izračunani R_P, tako da velja: $R_o \leq R_p < R_1$. Rangoma R_o in R_1 ustrezata vrednosti y_o in y_1.

d) Iz teh podatkov izračunamo z linearno interpolacijo kvantil y_P po obrazcu:

$$y_P = y_o + (y_1 - y_o) \cdot (R_P - R_o) \tag{8.10}$$

Ocena kvantilnega ranga P_y iz frekvenčne porazdelitve

a) Iz frekvenčne porazdelitve izračunamo kumulativno frekvenčno porazdelitev F_k.

b) Poiščemo, v kateri razred pade vrednost y za katero iščemo kvantilni rang P_y. Ta razred imenujemo kvantilni razred in ga zaznamujmo z o. Zanj izpišemo iz frekvenčne porazdelitve ustrezne vrednosti:

$$y_{o,min},\ i_o,\ f_o,\ F_o.$$

c) Iz gornjih vrednosti izračunamo vrednosti y ustrezni rang R_y po obrazcu:

$$R_y = F_o + f_o \frac{y - y_{o.min}}{i_o} \qquad (8.11)$$

d) Iz dobljenega ranga R_y pa izračunamo kvantilni rang P_y po obrazcu:

$$P_y = \frac{R_y - 0{,}50}{N} \qquad (8.12)$$

Če je obseg populacije N velik, iz obrazca 8.12 običajno izpuščamo 0,5, ker je ta količina za velike populacije nebistvena.

Postopek velja tudi za frekvenčne porazdelitve z različnimi širinami razredov.

Ocena kvantilov y_p iz frekvenčne porazdelitve

a) Iz frekvenčne porazdelitve izračunamo kumulativno frekvenčno porazdelitev F_k.

b) Iz danega P izračunamo ustrezni rang R_p po obrazcu

$$R_p = NP + 0{,}5 \qquad (8.12)$$

Če je populacija velika, v obrazcu 8.13 izpustimo 0,5.

c) V kumulativni frekvenčni porazdelitvi F_k poiščemo, med kateri vrednosti kumulativne vrste pade R, tako da je: $F_o \leqslant R_p < F_1$. F_o ustrezen razred je kvantilni razred. Zanj poiščemo v frekvenčni porazdelitvi količine:

$$y_{o,min},\ i_o,\ f_o \text{ in } F_o .$$

d) Iz teh količin izračunamo ustrezni kvantil y_p po obrazcu:

$$y_p = y_{o,min} + i_o \frac{R_p - F_o}{f_o} \qquad (8.13)$$

Enako kot za kvantilne range velja nakazani postopek tudi za frekvenčne porazdelitve z različnimi širinami razredov.

DEVETO POGLAVJE

SREDNJE VREDNOSTI

Mediana

$$Me = y_{P=\cdot 50}$$

$$\sum_{i=1}^{N} | y_i - A | = \min \; ; \quad \text{če je } A = Me \qquad (9.1)$$

Modus

Izračun

a) Podatke imamo grupirane v frekvenčni porazdelitvi z razredi z enako širino i. Razredi morajo biti tako veliki, da frekvenčna porazdelitev izraža zakonitost gostitve frekvenc.

b) V frekvenčni porazdelitvi poiščemo razred z največjo frekvenco $f_{-1} < f_o > f_{+1}$. Razred z največjo frekvenco (o) imenujmo modalni razred.

c) Modus izračunamo po obrazcu

$$M_o = y_{o.min} + i \frac{f_o - f_{-1}}{2f_o - f_{-1} - f_{+1}} \qquad (9.2)$$

Pri tem pomeni razen že navedenih izrazov: $y_{0,min}$ = spodnja meja za modalni razred.

Aritmetična sredina

$$M_y = \frac{1}{N}(y_1 + y_2 + \ldots + y_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{Y}{N} \qquad (9.3)$$

Pri tem pomeni: M_y = aritmetična sredina. Znak M_y včasih zamenjamo z znakom $\bar{y}$ (y prečna) ; $\sum_{i=1}^{N} y_i = Y$ = vsota vseh vrednosti v populaciji; $\sum$ = splošen znak za seštevanje izraza, ki stoji za njim; y_i = posamične vrednosti. Nakazane oznake uporabljamo na splošno.

a) Aritmetična sredina je izpeljana ob predpostavki, da je vrednost y za posamezno enoto vsota rezultatov splošnih (M) in posamičnih vplivov (e)

$$y_i = M + e_i \qquad (9.4)$$

b) Aritmetična sredina za linearno zvezo iz več znakov

$$u = a_o + \sum_{k=1}^{r} a_k y_k \qquad (9.5)$$

je enaka linearni zvezi iz aritmetičnih sredin

$$u = a_o + \sum_{k=1}^{r} a_k y_k \; ; \quad M_u = a_o + \sum_{k=1}^{r} a_k M_k \qquad (9.6)$$

$$M_a = a \qquad (9.7)$$

Poprečje konstante je enako konstanti in

$$M_{by} = b.M_y \qquad (9.8)$$

poprečje znaka, pomnoženega s konstanto, je enako produktu konstante s poprečjem znaka.

c) Vsota odklonov posamičnih vrednosti y_i od aritmetične sredine M_y je nič

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - M_y) = 0 \qquad (9.9)$$

d) Vsota kvadratov odklonov posamičnih vrednosti y_i od neke konstante A je najmanjša, če je A enak aritmetični sredini M_y

$$SK = \sum_{i=1}^{N} (y_i - A)^2 : \quad \text{če je: } A = M_y \qquad (9.10)$$

e) Sumarno aritmetično sredino populacije M izračunamo iz aritmetičnih sredin M_k delnih populacij z obsegi N_k po obrazcu.

$$M = \frac{N_1M_1 + N_2M_2 + \ldots + N_rM_r}{N_1 + N_2 + \quad + \quad + N_r} = \frac{\sum_{k=1}^{r} N_kM_k}{\sum_{k=1}^{r} N_k} = \frac{1}{N}\sum_k N_kM_k \qquad (9.11)$$

Ta način za računanje aritmetične sredine imenujemo t e h t a n o r a č u n a n j e

Splošen obrazec za izračun tehtane aritmetične sredine

$$M = \frac{\sum_k w_k M_k}{\sum_k w_k} \qquad (9.12)$$

Pri tem pomeni: w_k = teža - ponder

Izračun aritmetične sredine iz frekvenčne porazdelitve

neposredna metoda

$$M_y = \frac{f_1y_1 + f_2y_2 + \ldots + f_ry_r}{f_1 + f_2 + \ldots + f_r} = \frac{\sum f_ky_k}{\sum f_k} = \frac{1}{N}\sum_1^r f_ky_k \qquad (9.13)$$

$$M_y = \frac{1}{N}(f_1y_1 + f_2y_2 + \ldots + f_{r-1}y_{r-1} + Y_r) \qquad (9.14)$$

y_k = sredina razreda ; f_k = frekvenca ; Y_r = vsota vrednosti v odprtem razredu

Izračun s pomožnim znakom u

$$y_k = y_o + i \cdot u_k \qquad (9.15)$$

$$M_y = y_o + iM_u \qquad (9.16)$$

$$M_y = y_o + i \cdot \frac{1}{N} \sum f_k u_k \qquad (9.17)$$

y_o = sredina razreda , ki je približno v sredini frekvenčne porazdelitve

Izračun s kumulativami

a) Iz frekvenčne porazdelitve izračunamo iz f_k kumulativno frekvenčno porazdelitev F_k.

b) Seštejemo člene v kumulativni vrsti, razen zadnjega, ki leži pod črto, ki pomeni obseg populacije N. Vsoto členov iz kumulativne vrste zaznamujemo s C.

c) Aritmetično sredino M_y izračunamo iz dobljenih podatkov po obrazcu

$$M_y = y_o - i \cdot \frac{C}{N} \qquad (9.17)$$

Pri tem pomeni: y_o = sredina zadnjega razreda v frekvenčni porazdelitvi; i = širina razreda ; C = vsota členov v kumulativni vrsti; N = obseg populacije.

Aritmetična sredina aritmetičnih sredin

$$M = \frac{\sum N_k M_k}{\sum N_k} \qquad (9.18)$$

$$M_R = \frac{\sum w_k R_k}{\sum w_k} \qquad (9.19)$$

Pri tem pomeni: M_R = tehtana aritmetična sredina količin R_k, w_k = ponder-teža za posamezne vrednosti R_k.

Harmonična sredina H

$$H = \frac{N}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} \ldots + \frac{1}{y_N}} = \frac{N}{\sum \frac{1}{y_i}} \qquad (9.20)$$

$$H = \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_r}{\frac{w_1}{y_1} + \frac{w_2}{y_2} + \ldots + \frac{w_r}{y_r}} = \frac{\sum w_k}{\sum \frac{w_k}{y_k}} \qquad (9.21)$$

Poprečja iz relativnih števil R_k

$$R_k = Y_k / X_k \qquad (9.22)$$

moremo ta obrazec pisati v več oblikah. Iz njega dobimo, da je

$$Y_k = X_k R_k \qquad (9.23)$$

in

$$X_k = Y_k / R_k \qquad (9.24)$$

$$R = \frac{Y}{X} = \frac{\sum Y_k}{\sum X_k} \qquad (9.25)$$

$$R = \frac{\sum X_k R_k}{\sum X_k} \qquad (9.26)$$

$$R = \frac{\sum Y_k}{\sum Y_k / R_k} \qquad (9.27)$$

Odvisnost sumarnega relativnega števila od sestave ponderov

Če preuredimo obrazec 9.26, dobimo

$$R = \frac{\sum X_k R_k}{X} = \sum \frac{X_k}{X} \cdot R_k = \sum X_k^o R_k \qquad (9.28)$$

Podobno dobimo iz obrazca 9.27

$$R = \frac{Y}{\sum Y_k / R_k} = \frac{1}{\sum \frac{Y_k}{Y} / R_k} = \frac{1}{\sum Y_k^o / R_k} \qquad (9.29)$$

Pri tem pomeni: $X_k^o = X_k / X$ strukturni delež za grupni podatek X_k; $Y_k^o = Y_k / Y$ strukturni delež za grupni podatek Y_k.

Geometrijska sredina G

$$G = \sqrt[N]{y_1 \cdot y_2 \cdots y_N} \qquad (9.30)$$

Iz te opredelitve sklepamo, da ima smisel računati geometrijsko sredino le tedaj, če noben izmed členov ni negativen ali nič.

$$G = \sqrt[\sum w_k]{y_1^{w_1} \cdot y_2^{w_2} \cdots y_r^{w_r}} \qquad (9.31)$$

$$\log G = \frac{1}{N} \sum \log y_i \qquad (9.32)$$

in

$$\log G = \frac{1}{\sum w_k} \sum w_k \log y_k \qquad (9.33)$$

Srednji koeficient dinamike k

$$k = \sqrt[N]{k_1 \cdot k_2 \cdots\cdots k_N} \qquad (9.35)$$

in

$$k = \sqrt[N]{Y_N / Y_o} \tag{9.36}$$

ali splošneje

$$k = \sqrt[t_1 - t_o]{Y_{t_1} / Y_{t_o}} \tag{9.37}$$

$k_1, k_2, k_3 \ldots k_N$ = posamični koeficienti dinamike ; $Y_o = Y_{t_o}$ = začetna vrednost pojava ; $Y_N = Y_{t_1}$ = končna vrednost pojava

Odnosi med različnimi vrstami srednjih vrednosti

$$H \leqslant G \leqslant M \tag{9.34}$$

$$M - Mo = 3 \cdot (M - Me) \tag{9.35}$$

$$Mo = M - 3 \cdot (M - Me) \tag{9.36}$$

DESETO POGLAVJE

MERE VARIACIJE, ASIMETRIJE IN SPLOŠČENOSTI

Variacijski razmik R

$$R = y_{max} - y_{min} \tag{10.1}$$

Kvartilni odklon Q

$$Q = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1) \tag{10.2}$$

Poprečni absolutni odklon AD

$$AD_M = \frac{1}{N} \sum |y - M| \tag{10.3}$$

$$AD_{Me} = \frac{1}{N} \sum |y - Me| \tag{10.4}$$

$$AD_{Me} = \frac{1}{N} (Y_z - Y_s) \tag{10.5}$$

pri čemer je Y_s = vsota podatkov, ki so manjši kot mediana;

Y_z = vsota podatkov, ki so večji kot mediana

$$AD_{Me} = \frac{1}{2} (M_z - M_s) \tag{10.6}$$

pri čemer je M_s poprečje iz členov pod, M_z pa poprečje iz členov nad mediano.

$$AD_M = 2 \cdot P_z \cdot P_s (M_z - M_s) \qquad (10.7)$$

pri tem pomeni: $P_s = N_s/N$ in $P_z = N_z/N$ strukturna deleža števila enot pod in nad aritmetično sredino M, $M_s = Y_s/N_s$ in $M_z = Y_z/N_z$ pa poprečji členov, ki so pod oziroma nad skupnim poprečjem M.

Varianca - Standardni odklon . σ^2 . σ - SD.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum(y_i - M)^2 \qquad (10.8)$$

$$SD = \sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad (10.9)$$

Računanje iz negrupiranih podatkov

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{N}}{N} = \frac{N\sum y_2^2 - (\sum y_i)^2}{N^2} \qquad (10.10)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{Ky}{N} \ ; \ Ky = Q_i - Q \ ; \ Q_i = \sum y_i^2 \quad Q = \frac{(\sum y)^2}{N} \qquad (10.11)$$

$$u_i = y_i - \bar{y}_o$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_u^2 = K_u/N \ ; \ K_u = \sum u^2 - \frac{(\sum u)^2}{N} \qquad (10.13)$$

$u_i = y_i = y_o$; y_o = poljubna vrednost

Računanje iz grupiranih podatkov

Neposredna metoda

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum f_k (y_k - M_y)^2 \qquad (10.14)$$

Metoda pomožnega znaka u

a) Enako kakor za aritmetično sredino izberemo razred, ki je nekje sredi frekvenčne porazdelitve. Vanj postavimo izhodišče znaka u = o, v druge razrede pa navzdol in navzgor od izhodišča ustrezne vrednosti pomožnega znaka u:
$\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$

b) Enako kakor za aritmetično sredino, izračunamo produkte frekvenc f_k z ustreznimi vrednostmi znaka u_k, da dobimo $f_k u_k$.

c) Produkte $f_h u_k$ ponovno pomnožimo z ustreznimi vrednostmi znaka u_k: tako dobimo vrednosti $f_k u_k^2$.

d) Seštejemo frekvence f_k, produkte $f_k u_k$ in produkte $f_k u_k^2$.

e) Iz teh količin izračunamo varianco po obrazcih

$$\sigma_y^2 = \frac{i^2}{N} K_u \; : \; K_u = \sum f_k u_k^2 - \frac{(\sum f_k u_k)^2}{N} \tag{10.15}$$

Pri tem je: i = širina razreda.

Metoda kumulativ

a) Enako kakor pri računanju aritmetične sredine iz frekvenčne porazdelitve iz f izračunamo kumulativno vrsto F. Zadnji člen kumulativne vrste (pod črto) je obseg populacije N.

b) Po enakem postopku kumuliranja izračunamo iz prve kumulativne vrste F drugo kumulativno vrsto FF. Zadnji člen druge kumulativne vrste FF (pod črto) je C_1.

c) Seštejemo vrednosti členov druge kumulativne vrste (brez člena pod črto). To vsoto zaznamujmo s C_2.

d) Iz teh količin izračunamo varianco po obrazcih

$$K_u = 2C_2 + C_1 - C_1^2/N \; ; \; \sigma_y^2 = \frac{i^2}{N} K_u \tag{10.16}$$

e) Kumulativne vrste moremo računati od zgoraj navzdol ali obratno od spodaj navzgor. Za asimetrične porazdelitve je prikladneje začeti izračunavati kumulative na strani asimetrije.

Sheppardov popravek

$$\sigma_{y,pop}^2 = \sigma_y^2 - i^2/12 \tag{10.17}$$

Skupna varianca

$$\sigma^2 = M_{\sigma^2} + \sigma_M^2 \tag{10.18}$$

Pri tem je

$$M_{\sigma^2} = \frac{1}{N} \sum N_k \sigma_k^2 \tag{10.19}$$

tehtana aritmetična sredina grupnih varianc,

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{N} \sum N_k (M_k - M)^2 \tag{10.20}$$

Poprečna razlika Δ_1 –

$$\Delta_1 = \frac{1}{\binom{N}{2}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} (y_i - y_j); \qquad y_1 \leq y_2 < \cdots \leq y_i \leq \cdots < y_N \tag{10.21}$$

$$\Delta_1 = \frac{2\left[(N-1)C_o - 2C_1\right]}{N(N-1)} \tag{10.22}$$

C_o in C_1 so vsote iz kumulativ iz ranžirne vrste

Računanje iz grupiranih podatkov

$$\Delta_1 = \frac{2\left[\sum Y_k (F_k + F_{k+1}) - NY\right]}{N(N-1)} \tag{10.23}$$

pri čemer so: Y_k = grupna vsota razredu k

F_k = kumulativna frekvenca v razredu k

$Y = \sum Y_k$

N = število enot

Razmerje med Q, AD in SD za normalno porazdelitev

Za normalno porazdelitev velja:

$$Q = 0.6745\,\sigma \doteq 2/3\,\sigma \tag{10.24}$$

$$AD = 0.7979\,\sigma \doteq 4/5\,\sigma \tag{10.25}$$

Relativne mere variacije

Na osnovi variacijskega razmika

$$\frac{2\,(y_{max} - y_{min})}{y_{min} + y_{max}} \tag{10.26}$$

Na osnovi kvartilnega razmika $Q_3 - Q_1$

$$\frac{Q_3 - Q_1}{M_e} \quad \text{ali} \quad \frac{2\,(Q_3 - Q_1)}{Q_1 + Q_3} \tag{10.27}$$

Na osnovi poprečnega absolutnega odklona AD

$$\frac{AD_{Me}}{M}\;,\;\frac{AD_M}{M} \tag{10.28}$$

Na osnovi standardnega odklona σ

$$KV = \frac{\sigma}{M} \tag{10.29}$$

Na osnovi poprečne razlike Δ_1

$$\frac{\Delta_1}{M} \qquad (10.30)$$

Koeficiente variacije izražamo kakor je nakazano v gornjih izrazih ali v odstotkih tako, da zgornja razmerja pomnožimo s 100.

$$\frac{AD_{Me}}{M} = Y_z^o - Y_s^o = 2Y_z^o - 1 = 1 - 2Y_s^o \qquad (10.31)$$

$$\frac{AD_M}{M} = (Y_z^o - Y_s^o) - (N_z^o - N_s^o) = 2(Y_z^o - N_z^o) = 2(N_s^o - Y_s^o) \qquad (10.32)$$

Pri AD_M/M pomeni Y_s^o in Y_z^o strukturni delež za agregat Y pod oziroma nad poprečjem M, N_s^o oziroma N_z^o pa delež enot pod oziroma nad poprečjem M.

$$KV = \frac{SD}{M} = \sqrt{\frac{Q_i}{Q} - 1} \quad ; \quad Q_i = \sum y_i^2 \quad ; \quad Q = \frac{Y^2}{N} \qquad (10.33)$$

Relativni odkloni

$$d_i = y_i - M \qquad (10.34)$$

$$v_i = \frac{y_i - M}{M} \qquad (10.35)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\sigma^2}{M^2} \qquad (10.36)$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{M^2}} = \frac{\sigma_y}{M} = KV_y \qquad (10.37)$$

Standardiziran z - odklon

$$z_i = \frac{y_i - M}{\sigma} \tag{10.38}$$

$$M_z = \frac{1}{N}\sum z = \frac{1}{N}\sum \frac{y_i - M}{\sigma} = 0 \tag{10.39}$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N}\sum (z - M_z)^2 = \frac{1}{N}\sum\left(\frac{y_i - M}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{N}\sum (y_i - M)^2 = 1 \tag{10.40}$$

Mere variacije za relativna števila

Medtem ko računamo netehtano varianco iz relativnih števil R_k po obrazcu

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{N}\sum_k (R_k - \bar{R})^2 \quad ; \qquad \bar{R} = \frac{1}{N}\sum_k R_k = \frac{1}{N}\sum \frac{Y_k}{X_k} \tag{10.41}$$

je obrazec za računanje variance s tehtanjem X_k

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{X}\sum X_k (R_k - R)^2 \quad ; \qquad R = \frac{\sum Y_k}{\sum X_k} \tag{10.42}$$

Če upoštevano, da je

$$R_k = \frac{Y_k}{X_k} \quad ; \qquad R = \frac{Y}{X} \tag{10.43}$$

dobimo s preračunom iz obrazca 10.42 operativni obrazec

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{X}\sum X_k (R_k - R)^2 = \frac{1}{X}\left[\sum \frac{Y_k^2}{X_k} - \frac{Y^2}{X}\right] = \frac{1}{X}\left[Q_k - Q\right] \tag{10.44}$$

Pri tem sta $Q_k = Y_k^2/X_k$ in $Q = Y^2/X$ izraza, ki se pogosto pojavljata pri statistični analizi.

$$KV_R = \frac{\sigma_R}{R} = \frac{X}{Y}\sqrt{\frac{1}{X}(Q_K - Q)} = \sqrt{\frac{Q_K}{Q} - 1} \tag{10.45}$$

Variança iz grupnih poprečij

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{N} \sum N_K (M_K - M)^2 = \frac{1}{N}\left[\sum \frac{Y_k^2}{N_k} - \frac{Y^2}{N}\right] = \frac{1}{N}\left[Q_K - Q\right] \qquad (10.46)$$

<u>Mere asimetrije in sploščenosti</u>

Mere asimetrije KA in sploščenosti KS po legi

$$M - M_o = 3\,(M - M_e) \qquad (10.47)$$

$$KA_{Mo} = \frac{M - M_o}{\sigma} \qquad (10.48)$$

$$KA_{Me} = \frac{3(M - Me)}{\sigma} \qquad (10.49)$$

$$KA_Q = \frac{(Q_3 - M_e) - (M_e - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1} \qquad (10.50)$$

$$KS = 1.9\,\frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1} \qquad (10.51)$$

<u>Mere asimetrije in sploščenosti, izračunane iz momentov</u>

centralni moment stopnje r

$$\mu_r = \frac{1}{N} \sum (y - M)^r \qquad (10.52)$$

$$\alpha_r = \frac{1}{N}\sum z^r = \frac{1}{N}\sum\left(\frac{y - M}{\sigma}\right)^r = \frac{\mu_r}{\sigma^r} = \frac{\mu_r}{\sqrt{\mu_2^r}} \qquad (10.53)$$

$$\gamma_1 = \alpha_3 \;; \qquad \gamma_2 = \alpha_4 - 3 \qquad (10.54)$$

pomožni momenti

$$\nu_r = \frac{1}{N} \sum (y - y_o)^r = \frac{1}{N} \sum u^r \qquad (10.55)$$

zveza med centralnimi in pomožnimi momenti

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \nu_2 - \nu_1^2 \\ \mu_3 &= \nu_3 - 3\nu_2 \nu_1 + 2\nu_1^3 \\ \mu_4 &= \nu_4 - 4\nu_3 \nu_1 + 6\nu_2 \nu_1^2 - 3\nu_1^4 \end{aligned} \qquad (10.56)$$

Charlier-ov preskus

$$\sum f(u+1)^4 = \sum fu^2 + 4\sum fu^3 + 6\sum fu^2 + 4\sum fu + N$$

Tabela 10.11 Shema za izračunanje centralnih momentov in mer asimetrije in sploščenosti z zgledom za trdnost konic svedrov

r	1	0	1	2	3	4
C_r	2	$C_o = N$	C_1	C_2	C_3	C_4
$\sum a_r C_r = \sum fu^r$	3	C_o	C_1 -14	$C_1 + 2C_2$ $= 460$	$C_1 + 6C_2 + 6C_3 =$ $= -170$	$C_1 + 14C_2 + 36C_3 + 24C_4 =$ $= 3172$
ν_1^r	4	1	$\nu_1 = -0,08235$	$\nu_1^2 = + 0,00678$	$\nu_1^3 = -0,00056$	$\nu_1^4 = 0,00005$
$\nu_r = \frac{1}{N} \sum fu^r$	$5 = \frac{3}{N}$	1	$\nu_1 = -0,08235$	$\nu_2 = 2,70588$	$\nu_3 = -1,00000$	$\nu_4 = 18,65882$
	6			$-\nu_1^2 = 0,00678$	$-3\nu_2\nu_1 = +0,66849$ $+2\nu_1^3 = 0,00112$	$-4\nu_3\nu_1 = 0,32940$ $+6\nu_2\nu_1^2 = +0,11008$ $-3\nu_1^4 = -0,00015$
μ_r	$7 = 5+6$ 8		0	$\mu_2 = 2,69910$ $-\frac{1}{12} = -0,08333$	$\mu_3 = -0,33263$ 0	$\mu_4 = 19,09815$ $-\frac{1}{2}\mu_2 = 1,34955$ $+\frac{7}{240} = +0,02917$
$\mu_{r,pop}$	$9 = 7+8$			$\mu_{2,pop} = 2,61577$	$\mu_{3,pop} = 0,33263$	$\mu_{4,pop} = 17,77777$
$(\mu_{2,pop})^{r/2} = \sigma^r$	10		$\sigma = 1,61733$	$\sigma^2 = 2,61577$	$\sigma^3 = 4,23056$	$\sigma^4 = 6,842253$
$\alpha_r = \frac{\mu_{r,pop}}{\sigma^r}$	$11 = \frac{9}{10}$		$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = 1$	$\alpha_3 = -0,0786$	$\alpha_4 = 2,5982$
γ_{r-2}	12				$\gamma_1 = \alpha_3 =$ $= 0,0786$	$\gamma_2 = \alpha_4 - 3$ $= -0,4018$

ENAJSTO POGLAVJE

MERE KONCENTRACIJE

Ginijev koeficient koncentracije C_{Δ_1}

$$C\Delta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_{1,max}} = \frac{\Delta_1}{2M} \tag{11.1}$$

Izračun iz negrupiranih podatkov

$$C\Delta_1 = 1 - \frac{2\,C_1}{(N-1)C_o} \tag{11.2}$$

C_o in C_1 so vsote iz kumulative iz ranžirne vrste posamičnih podatkov

Če je v ranžirni vrsti n enot, za katere nimamo posameznih vrednosti, temveč le njihovo vsoto podatkov Y_1 , C_1 korigiramo tako, da mu prištejemo $(n-1)Y_1$. Za tak primer izračunamo Ginijev koeficient koncentracije po obrazcu

$$C\Delta_1 = 1 - \frac{2C_1 + (n-1)\,Y_1}{(N-1)\,C_o} \tag{11.3}$$

Izračun iz grupiranih podatkov

$$C\Delta_1 = \frac{\sum (F_k + F_{k+1})\,Y_k}{N\,.\,Y} - 1 \tag{11.4}$$

pri čemer so F_k, Y_k . N in Y k obrazcu 10.23 pojasnjene količine.

Če namesto z absolutnimi podatki razpolagamo z relativnimi frekvencami $f_k\%$ in sestavo grupnih vsot $Y_k\%$, dobi obrazec 11.4 obliko

$$C_{\Delta_1} = \frac{\sum (F_k\% + F_{k+1}\%)\, Y_k\%}{10000} - 1 \qquad (11.5)$$

Hirschmanov koeficient koncentracije

$$C_{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma}{M\sqrt{N-1}} = \frac{KV}{\sqrt{N-1}} = \sqrt{\frac{N\sum (y_i/Y)^2 - 1}{N-1}} = \sqrt{\frac{Q_i/Q - 1}{N-1}} \qquad (11.7)$$

Pri velikem N dobimo za Hirschmanov koeficient koncentracije približek z naslednjim obrazcem

$$C_{\sigma} = \sqrt{\sum p_i^2} \qquad (11.8)$$

$p_i = y_i/Y$ = strukturni delež vrednosti posamezne enote v celotnem agregatu.

Mera koncentracije na osnovi AD_{me}

$$C_{AD} = \frac{AD_{Me}}{AD_{Me,max}} = \frac{Y_z - Y_s}{Y} = Y^o_z - Y^o_s = 1 - 2Y^o_s \qquad (11.10)$$

DVANAJSTO POGLAVJE

AGREGATNI INDEKSI

Relativne spremembe agregatov. Izhajajmo iz osnovne zveze med agregati in relativnimi števili

$$Y = X \cdot R = \sum X_k R_k = \sum X \cdot X_k^o R_k = X \cdot \sum X_k^o R_k \tag{12.1}$$

Agregat Y je torej odvisen od absolutne velikosti agregata X, sestave agregata $X_k^o = X_k/X$ in skupinskih relativnih števil $R_k = Y_k/X_k$.

$$I_Y = \frac{Y_1}{Y_o} = \frac{X_1 R_1}{X_o R_o} = I_X \cdot I_R \tag{12.2}$$

$$I_Y = \frac{Y_1}{Y_o} = \frac{\sum X_1 R_1}{\sum X_o R_o} \tag{12.3}$$

$$I_Y = \frac{Y_1}{Y_o} = \frac{X_1 \sum X_1^o R_1}{X_o \sum X_o^o R_o} = I_X \cdot \frac{\sum X_1^o R_1}{\sum X_o^o R_o} \tag{12.4}$$

Iz obrazca 12.2 in 12.4 sledi, da je

$$I_R = \frac{\sum X_1^o R_1}{\sum X_o^o R_o} \tag{12.5}$$

$$I_Y = \frac{\sum X_1R_1}{\sum X_oR_o} = \frac{\sum X_1R_1}{\sum X_1R_o} \cdot \frac{\sum X_1R_o}{\sum X_oR_o} = I_{R/X_1} \cdot I_{X/R_o} \qquad (12.6)$$

$$I_Y = \frac{\sum X_1R_1}{\sum X_oR_o} = \frac{\sum X_1R_1}{\sum X_oR_1} \cdot \frac{\sum X_oR_1}{\sum X_oR_o} = I_{X/R_1} \cdot I_{R/X_o} \qquad (12.7)$$

Prvi faktor

$$I_{R/X_1} = \frac{\sum X_1\,R_1}{\sum X_1R_o} \qquad (12.8)$$

v obrazcu 12.6 kaže sumarno spremembo agregata Y zaradi spremembe grupnih relativnih števil R_k pri nespremenjenih tekočih ponderih X_1, drugi

$$I_{X/R_o} = \frac{\sum X_1R_o}{\sum X_oR_o} \qquad (12.9)$$

pa podobno kaže spremembo agregata Y zaradi spremembe grupnih vrednosti X pri nespremenjenih baznih vrednostih R_o. Podoben pomen imajo indeksi I_{X/R_1} in I_{R/X_o} v obrazcu 12.7.

<u>Laspeyeresov in Paaschejev agregatni indeks.</u>

Vsi agregatni indeksi imajo splošno obliko

$$I_{z/w} = \frac{\sum wz_1}{\sum wz_o} \qquad (12.10)$$

V tem splošnem obrazcu za računanje agregatnega indeksa t e ž e ali p o n d e r i w niso vezani na tekoče (1) ali bazne vrednosti (0). Ponderi w morejo biti bodisi tekoče ali bazične vrednosti ali kake druge vrednosti. V posebnem primeru, ko so ponderi bazne količine w_o, govorimo o Laspeyeresovem agregatnem indeksu

$$I_{z/w_o} = L_{z/w} = \frac{\sum w_oz_1}{\sum w_oz_o} \qquad (12.11)$$

v posebnem primeru, če so ponderi tekoče količine w_1, pa o Paaschejevem agregatnem indeksu

$$I_{z/w_1} = P_{z/w} = \frac{\sum w_1 z_1}{\sum w_1 z_o} \tag{12.12}$$

$$I_{R/X_1} = P_{R/X} = \frac{\sum X_1 R_1}{\sum X_1 R_o} \quad ; \quad I_{X/R_o} = L_{X/R} = \frac{\sum X_1 R_o}{\sum X_o R_o} \tag{12.13}$$

I_{R/X_1} je Paaschejev indeks za R, $I_{X/R}$ pa Laspeyeresov indeks za X.

$$I_Y = I_{R/X_1} \cdot I_{X/R_o} = P_{R/X} \cdot L_{X/R} \tag{12.14}$$

$$I_Y = I_{X/R_1} \cdot I_{R/X_o} = L_{R/X} \cdot P_{X/R} \tag{12.15}$$

Laspeyeresov in Paaschejev agregatni indeksi kot tehtane sredine individualnih indeksov.

Iz identitet

$$\left.\begin{aligned}
P_{R/X} &= \frac{\sum X_1 R_1}{\sum X_1 R_o} = \frac{\sum X_1 R_1}{\sum X_1 R_1 / \frac{R_1}{R_o}} = \frac{\sum Y_1}{\sum \frac{Y_1}{I_R}} = H_{I_R}(Y_1) \\
P_{X/R} &= \frac{\sum X_1 R_1}{\sum X_o R_1} = \frac{\sum X_1 R_1}{\sum X_1 R_1 / \frac{X_1}{X_o}} = \frac{\sum Y_1}{\sum \frac{Y_1}{I_X}} = H_{I_X}(Y_1) \\
L_{R/X} &= \frac{\sum X_o R_1}{\sum X_o R_o} = \frac{\sum X_o R_o \cdot \frac{R_1}{R_o}}{\sum X_o R_o} = \frac{\sum Y_o I_R}{\sum Y_o} = M_{I_R}(Y_o) \\
L_{X/R} &= \frac{\sum X_1 R_o}{\sum X_o R_o} = \frac{\sum X_o R_o \cdot \frac{X_1}{X_o}}{\sum X_o R_o} = \frac{\sum Y_o I_X}{\sum Y_o} = M_{I_X}(Y_o)
\end{aligned}\right\} \tag{12.16}$$

spoznamo, da je Paaschejev agregatni indeks tehtana harmonična sredina iz individualnih indeksov, pri čemer so ponderi tekoče vrednosti Y_1. Laspeyeresov indeks pa je tehtana aritmetična sredina z bazičnimi vrednostmi Y_o kot ponderi.

Fisherjev idealni indeks

$$F_{z/w} = \sqrt{P_{z/w} \cdot L_{z/w}} = \sqrt{\frac{\sum w_1 z_1}{\sum w_1 z_o} \cdot \frac{\sum w_o z_1}{\sum w_o z_o}} \qquad (12.18)$$

Agregatni verižni indeksi. Podobno kot pri enostavnih indeksih, izračunamo tudi verižne agregatne indekse

$$\ell_{z.k} = \frac{\sum w_{k-1} z_k}{\sum w_{k-1} z_{k-1}} \qquad (12.19)$$

po Laspeyeresovem

$$p_{z.k} = \frac{\sum w_k z_k}{\sum w_k z_{k-1}} \qquad (12.20)$$

po Paaschejevem obrazcu.

Po logiki, ki velja za enostavne verižne indekse

$$I_{k/o} = \frac{Y_1}{Y_o} \cdot \frac{Y_2}{Y_1} \cdots \frac{Y_k}{Y_{k-1}} = i_1 \cdot i_2 \cdots i_k \qquad (12.21)$$

naj bi dobili agregatni indeks s stalno bazo 0

$$I_{k/o} = l_1 \cdot l_2 \cdots l_k = \frac{\sum w_o z_1}{\sum w_o z_o} \cdot \frac{\sum w_1 z_2}{\sum w_1 z_1} \cdots \frac{\sum w_{k-1} z_k}{\sum w_{k-1} z_{k-1}} \qquad (12.22)$$

Če vzamemo za osnovo Laspeyersov obrazec in

$$I_{k/o} = p_1 p_2 \cdots p_k = \frac{\sum w_1 z_1}{\sum w_1 z_o} \cdot \frac{\sum w_2 z_2}{\sum w_2 z_1} \cdots \frac{\sum w_k z_k}{\sum w_k z_{k-1}} \qquad (12.23)$$

če vzamemo za osnovo Paaschejev obrazec.

Preskusi z agregatnimi indeksi

Preskus o zamenljivosti osnove. Če v enostavnem indeksu zamenjamo osnovo 0 s tekočo vrednostjo 1, dobimo, da je

$$I_{1/0} \cdot I_{0/1} = \frac{z_1}{z_o} \cdot \frac{z_o}{z_1} = 1$$

Od nakazanih agregatnih indeksov ima to lastnost le agregatni indeks, izračunan po

$$F_{1/o} \cdot F_{o/1} = \sqrt{\frac{\sum X_o R_1}{\sum X_o R_o} \cdot \frac{\sum X_1 R_1}{\sum X_1 R_o}} \cdot \sqrt{\frac{\sum X_o R_o}{\sum X_o R_1} \cdot \frac{\sum X_1 R_o}{\sum X_1 R_1}} = 1 \qquad (12.24)$$

Preskus o zamenljivosti sestavin

Ker je $Y = XR$, velja za enostavne indekse

$$\frac{Y_1}{Y_o} = \frac{X_1 \cdot R_1}{X_o \cdot R_o} \; ; \qquad I_Y = I_X \cdot I_R \qquad (12.25)$$

Te lastnosti nima niti Laspeyeresov niti Paaschejev indeks. Velja namreč le:
$I_Y = L_X \cdot P_R = P_X \cdot L_R$, zaradi česar je

$$I_Y \neq L_X \cdot L_R \quad \text{ali} \quad I_Y \neq P_X \cdot P_R \qquad (12.26)$$

Pač pa velja preskus o zamenljivosti sestavin za Fischerjev indeksni obrazec, kjer je

$$F_R \cdot F_X = \sqrt{L_R \cdot P_R} \cdot \sqrt{L_X \cdot P_X} = \sqrt{L_R P_X \cdot P_R \cdot L_X} = \sqrt{I_Y \cdot I_Y} = I_Y \qquad (12.27)$$

Med drugim si je Fischerjev idealni obrazec pridobil prilastek "idealni" zaradi teh dveh lastnosti, ki enačijo zveze z agregatnimi indeksi z zvezami med enostavnimi indeksi.

Skupinski indeksi

Če z I_{ki} zaznamujemo indeks i-tega elementa v skupini k (npr. indeks cene za izdelek i iz skupine izdelkov k, z w_{zi} indeksu I_{ki} ustrezni ponder (npr. vrednost proizvodnje), izračunamo skupinski indeks I_k skupine k po obrazcu:

$$I_k = \frac{\sum_i I_{ki} w_{zi}}{\sum_i w_{ki}} = \sum_i I_{ki} w^o_{ki} \qquad (12.28)$$

w^o_{ki} = ponder, izražen kot delež v skupini

skupni agregatni indeks I pa podobno izračunamo dalje po obrazcu

$$I = \frac{\sum_k I_k w_k}{\sum_k w_k} = \sum_k I_k w^o_k \qquad (12.29)$$

pri čemer je $w_k = \sum_i w_{ki} \qquad w^o_k = w_k / \sum_k w_k$

Poprečni indeks cen

$$\bar{i} = \frac{1}{N} \sum \frac{p_1}{p_o} \qquad (12.30)$$

Pri tem pomeni:

p_o = cena v bazičnem trenutku, p_1 = cena v tekočem trenutku,
N = število artiklov, $\bar{i}$ = poprečni indeks.

Agregatni indeksi cen

Laspeyeresov agregatni indeks cen

$$L_p = \frac{\sum p_1 q_o}{\sum p_o q_o} \qquad (12.31)$$

Paaschejev agregatni indeks cen

$$P_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_o q_1} \qquad (12.32)$$

Fisherjev agregatni indeks cen

$$F_p = \sqrt{L_p \cdot P_p} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_o}{\sum p_o q_o} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_o q_1}} \qquad (12.33)$$

Agregatni indeksi količin - obsega

Laspeyeresov agregatni indeks količin

$$L_q = \frac{\sum p_o q_1}{\sum p_o q_o} \qquad (12.34)$$

Paaschejev agregatni indeks količin

$$P_q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_o} \qquad (12.35)$$

Fisherjev agregatni indeks količin

$$F_q = \sqrt{L_q \cdot P_q} = \sqrt{\frac{\sum p_o q_1}{\sum p_o q_o} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_o}} \qquad (12.36)$$

Reduciranje vrednosti po tekočih cenah na vrednost po cenah v bazičnem razdobju

Če je stvarna vrednost proizvodnje, porabe ali prometa v tekočem razdobju $V_1 = \sum p_1 q_1$, moremo vrednost proizvodnje reducirati na cene v bazičnem razdobju $V_1' = \sum p_o q_1$, če jo delimo z ustreznim reprezentativnim indeksom cen

$$V_1' = \sum p_o q_1 \approx \frac{V_1}{P_p'} \quad ; \quad P_p' = \frac{\sum p_1' q_1'}{\sum p_o' q_1'} \qquad (12.37)$$

Pri cenah in količinah so napravljene črtice, ker so to cene in količine za reprezentativne artikle te skupine, ne pa za vse artikle skupine, kakor je to v izrazih $\sum p_1 q_1$ in $\sum p_o q_1$.

Indeksi recipročnih pokazovalcev

Za pokazovalce, za katere imajo smisel tudi recipročni pokazovalci, je treba paziti, da so agregatni indeksi računani tako, da kažejo pravilno smer sprememb proučevanega pojava. Tako npr. produktivnost dela merimo s količino na enoto časa $q = \frac{Q}{T}$ ali s časom, potrebnim za izdelavo enote izdelka $t = \frac{T}{Q}$. Ker je pokazovalec $q = \frac{Q}{T}$ premosorazmeren s produktivnostjo dela, ker je proizvedena količina na enoto časa večja pri večji produktivnosti, računamo agregatni indeks za ta primer po obrazcu

$$L_{q/T} = \frac{\sum T_o q_1}{\sum T_o q_o} \quad \text{ali} \quad P_{q/T} = \frac{\sum T_1 q_1}{\sum T_1 q_o} \tag{12.38}$$

alternativno

$$L_{v/T} = \frac{\sum T_o v_1}{\sum T_o v_o} \quad \text{ali} \quad P_{v/T} = \frac{\sum T_1 v_1}{\sum T_1 v_o} \tag{12.39}$$

če gre za različne artikle in vzamemo vrednosti namesto količin.

Pokazovalec $t = \frac{T}{Q}$ pa je pri večji produktivnosti dela manjši, ker je čas za izdelavo enote pri večji proizvodnosti dela manjši. Zato računamo agregatne indekse produktivnosti po obrazcih

$$L_{t/Q} = \frac{\sum Q_o t_o}{\sum Q_o t_1} \qquad P_{t/Q} = \frac{\sum Q_1 t_o}{\sum Q_1 t_1} \tag{12,40}$$

da so indeksi premosorazmerni s proizvodnostjo dela. Podobno je z vsemi drugimi podobnimi pokazovalci.

$L_{q/T}$, $P_{q/T}$, $L_{v/T}$ in $P_{v/T}$ so indeksi produktivnosti dela, izračunani pri stalni sestavi časa, $L_{t/Q}$ in $P_{t/Q}$ pa indeksa produktivnosti dela pri stalni sestavi količin.

TRINAJSTO POGLAVJE

NORMALNA PORAZDELITEV

Gostota relativne frekvence za normalno porazdelitev

$$\varphi_{(y)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-M)^2}{2\sigma^2}} \tag{13.1}$$

Porazdelitvena funkcija

$$F^{o}(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(y)\, dy \tag{13.2}$$

$$F^{o}_{(\infty)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\, dy = 1 \tag{13.3}$$

$$f^{o}(y_1 < y < y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{y_2} \varphi(y)\, dy - \int_{-\infty}^{y_1} \varphi(y)\, dy = F^{o}(y_2) - F^{o}(y_1) \tag{13.4}$$

Standardizirana normalna porazdelitev

$$F^{o}(y = M + z\sigma) = F^{o}(z)$$

Iz lastnosti standardiziranega odklona spoznamo, da se z za normalno populacijo porazdeljuje normalno z $M_z = 0$ in $\sigma_z = 1$. To porazdelitev imenujemo **standardizirano normalno porazdelitev**. Če vstavimo te posebne vrednosti v obrazec za gostoto relativne frekvence v obrazcu 13.1, dobimo, da je gostota relativne frekvence za standardizirano normalno porazdelitev

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad (13.5)$$

porazdelitvena funkcija $F^{\circ}(z)$ pa

$$F^{\circ}(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{z}} dz \qquad (13.6)$$

V tabelah v dodatku imamo tabelirane ordinate $\varphi(z)$ in površine $H^{\circ}(z)$ za standardizirano normalno porazdelitev za razmik od 0 do z

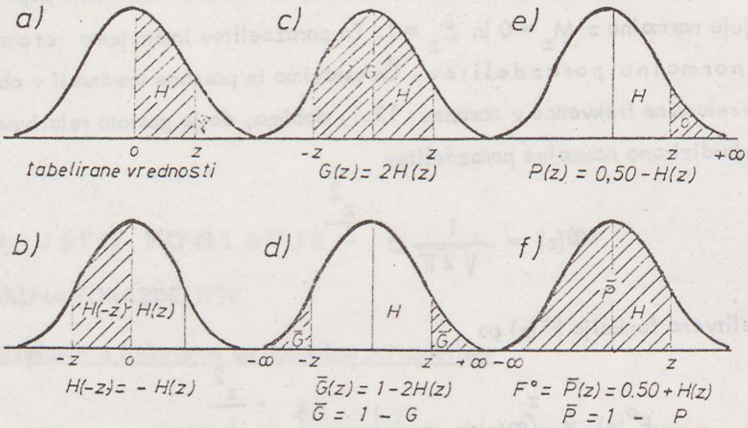
$$H(z) = \int_{0}^{z} \varphi(z)\, dz \qquad (13.7)$$

V tabelah so dane ordinate za pozitivne vrednosti za z. Ker je normalna porazdelitev simetrična, velja

$$H(-z) = -H(z) \qquad (13.8)$$

Za normalno porazdelitev potrebujemo večkrat različno opredeljene površine, tabelirane pa imamo samo površine H v razmiku od 0 do z. Zato so v sliki 13.3 nakazani odnosi med posameznimi površinami, ki pridejo v praksi v poštev v različnih primerih.

V tabeli ordinat $\varphi(z)$ in površin $H(z)$ za standardizirano normalno porazdelitvijo so zaradi nazornosti standardizirani odkloni z pomnoženi s 100, ordinate $\varphi(z)$ in površine $H(z)$ pa z 10.000.



Slika 13.3. Različne površine pod standardizirano normalno porazdelitvijo

Gostoto frekvence g(y) za normalno porazdelitev, ki ima obseg N, aritmetično sredino M in standardni odklon σ za poljuben y dobimo iz zveze

$$g(y) = N\,\varphi(y) = N \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-M}{\sigma}\right)^2} = \frac{N}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{N}{\sigma}\,\varphi\left(z = \frac{y-M}{\sigma}\right) \tag{13.9}$$

tako, da poiščemo najprej z, ki ustreza danemu y, nato v tabelah za standardizirano normalno porazdelitev poiščeno ustrezno gostoto relativne frekvence $\varphi(z)$. To pa pomnožimo s kvocientom N/σ .

Odnosi med standardiziranim odklonom z in ustreznimi relativnimi frekvencami H, G, $\bar{G}$, P in $\bar{P}$.

z	v odstotkih				
	H	G	$\bar{G}$	P	$\bar{P} = F^{o}$
0,6745	25,00	50,00	50,00	25,00	75,00
1,000	34,13	68,26	31,74	15,87	84,13
1,645	45,00	90,00	10,00	5,00	95,00
1,960	47,50	95,00	5,00	2,50	97,50
2,000	47,73	95,46	4,54	2,27	97,73
2,326	49,00	98,00	2,00	1,00	99,00
2,576	49,50	99,00	1,00	0,50	99,50
3,000	49,87	99,74	0,26	0,13	99,87
3,090	49,90	99,80	0,20	0,10	99,90
3,291	49,95	99,90	0,10	0,05	99,95

Kritični razmiki za normalno porazdelitev

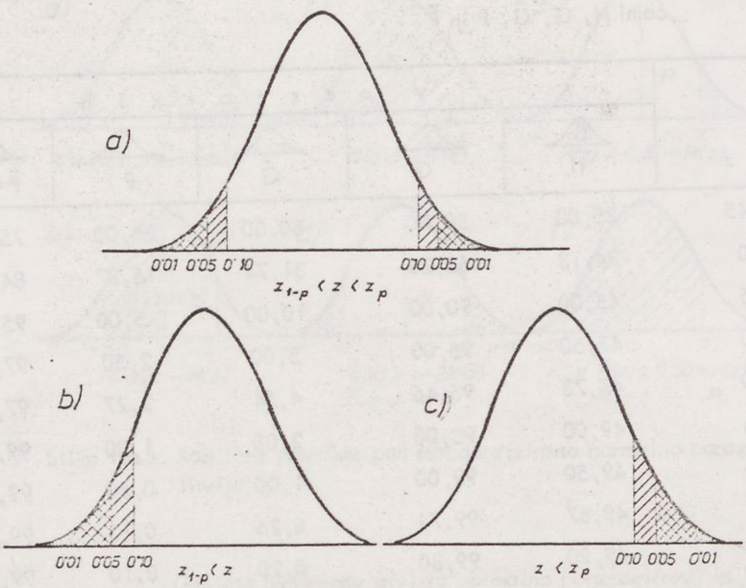
Za normalno porazdelitev moremo v splošnem z določenim tveganjem napovedati, kakšna je vrednost enot, ki jo slučajnostno izberemo iz normalne populacije, na tri različne načine:

a) nakazati moremo razmik, *v katerem* je z določeno stopnjo tveganja vrednost, ki jo ima slučajnostno izbrana enota;

b) nakazati moremo vrednost, *nad katero* je z določeno stopnjo tveganja nost, ki jo ima slučajnostno izbrana enota;

c) nakazati moremo mejo, *pod katero* je z določeno stopnjo tveganja za enoto, ki jo slučajnostno izberemo iz normal ne populacije.

Prva je dvostranska, drugi dve pa sta enostranski trditvi.



Slika 13. 7 Kritični razmiki in kritične meje za normalno porazdelitev

	Razmik	Tveganje
s tveganjem 2P	$-1,64 < z < +1,64$	0,10
	$-1,96 < z < +1,96$	0,05
$z_{1-P} < z < z_P$	$-2,58 < z < +2,58$	0,01
	$-3,29 < z < +3,29$	0,001
s tveganjem P	$-1,28 < z$	0,10
	$-1,64 < z$	0,05
$z_{1-P} < z$	$-2,32 < z$	0,01
	$-3,09 < z$	0,001
s tveganjem P	$z < +1,28$	0,10
	$z < +1,64$	0,05
$z < z_P$.	$z < +2,32$	0,01
	$z < +3,09$	0,001

ŠTIRINAJSTO POGLAVJE

VZORČENJE - VELIKI VZORCI

Osnovna populacija OP, vzorec V in populacija vseh možnih vzorcev PVMV

Populacija	Število enot - N		Enota	Znak	Zgledi za populacijo	Parameter
	končen	neskončen				
OP	N	∞	gospodarstvo, časovni moment itd.	y, A	vsa gospodarstva, časovni razmik	M_y σ_y^2, P_A
V	n	n	gospodarstvo, časovni moment itd.	y, A	vzorec	$\bar{y}$, s_y^2 p_A
PVMV	$\binom{N}{n}$ $\binom{N+n-1}{n}$	∞	vzorec	$\bar{y}$ s_y^2 p_A	skupnost vseh možnih vzorcev	$E\bar{y}$ $E\,s_y^2$ $E\,p_A$ Var $\bar{y}$, Var p_A

Enostavno slučajnostno vzorčenje

Ocenjevanje aritmetične sredine z vzorcem s ponavljanjem

$$M(\bar{y}) = E(\bar{y}) = My \qquad (14.3)$$

$\bar{y}$ = aritmetična sredina, izračunana iz vzorca

M_y = aritmetična sredina v osnovni populaciji

Varianca aritmetičnih sredin vzorcev Var($\bar{y}$)

$$\mathrm{Var}\,\bar{y} = \frac{\sigma_y^2}{n} \qquad (14.4)$$

Standardni pogrešek ocene za aritmetično sredino SE ($\bar{y}$)

$$SE(\bar{y}) = \sqrt{\mathrm{Var}\,\bar{y}} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \qquad (14.5)$$

<u>Ocenjevanje aritmetične sredine z vzorcem brez ponavljanja</u>

$$M(\bar{y}) = E(\bar{y}) = M_y \qquad (14.6)$$

$$\mathrm{Var}(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N} = \frac{S_y^2}{n} \cdot (1-f) \qquad (14.7)$$

Pri tem je S_y^2 srednji kvadratični odklon za znak y, ki je izračunan po obrazcu

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - M_y)^2}{N-1} \qquad (14.8)$$

<u>Točkovna ocena za aritmetično sredino $\bar{y}$</u>

$$\bar{y}_{sl} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = y/n \qquad (14.10)$$

<u>Odklon zaupanja za aritmetično sredino</u>

$$\underset{\alpha=2P}{D(\bar{y})} = z_{\alpha=2P} \cdot SE(\bar{y}) \qquad (14.11)$$

<u>Razmična ocena za aritmetično sredino</u>

$$\bar{y} - 1.96 \cdot SE(\bar{y}) < M_y < \bar{y} + 1.96 \cdot SE(\bar{y}) \qquad (14.12)$$

Nepristranska ocena variance s_y^2

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - y^2/n}{n-1} \qquad (14.13)$$

za vzorec s ponavljanjem

$$E(s_y^2) = \sigma_y^2 \qquad (14.14a)$$

in za vzorec brez ponavljanja

$$E(s_y^2) = S_y^2 \qquad (14.14b)$$

Ocena variance za oceno aritmetične sredine

a) z vzorcem s ponavljanjem

$$var(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n} \qquad (14.15)$$

b) brez ponavljanja

$$var(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N} = \frac{s_y^2}{n} \cdot (1-f) \qquad (14.16)$$

Ocenjevanje parametrov z enostavnim slučajnostnim vzorčenjem na splošno

Če z G zaznamujemo pravo vrednost ocenjevanega parametra, z g pa točkovno oceno tega parametra iz velikega vzorca, je odklon zaupanja za oceno s tveganjem $\alpha \doteq 2P$

$$D_p(g) \doteq z_p \, SE(g) \qquad (14.17)$$

razmik zaupanja pa

$$g - D_p(g) < G < g + D_p(g) \tag{14.18}$$

s tveganjem, ki ustreza koeficientu z. Ker v praksi ne poznamo parametrov populacije, v odklonu zaupanja in razmiku zaupanja nadomestimo pravo vrednost za standardni pogrešek SE(g) z oceno iz vzorca se(g). Glede na to je ocena odklona zaupanja

$$d_p(g) = z_p \cdot se(g) \tag{14.19}$$

ocena za razmik zaupanja pa

$$g - z_p \cdot se(g) < G < g + z_p \cdot se(g) \tag{14.20}$$

Ocenjevanje agregata Y

$$Y = \sum y_i = N \cdot My \tag{14.21}$$

$$Y_{sl} = N\bar{y} = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{N}{n} y \tag{14.22}$$

$$\mathrm{Var}\, Y_{sl} = N^2 \mathrm{Var}\, \bar{y} = N \cdot (N-n) \frac{S_y^2}{n} \tag{14.23}$$

$$\mathrm{var}\, Y_{sl} = N(N-n) \frac{s_y^2}{n} \tag{14.24}$$

Ocenjevanje strukturnega deleža P

$$P = \frac{N_a}{N} \tag{14.25}$$

$$P = p = \frac{n_a}{n} \tag{14.26}$$

$$Var(p) = \frac{\sigma_a^2}{n} \quad : \quad \sigma_a^2 = P(1 - P) \tag{14.27}$$

$$Var(p) = \frac{S_a^2}{n} \frac{N - n}{N} \quad : \quad S_a^2 = \frac{N_a (N - N_a)}{N(N - 1)} \tag{14.28}$$

$$var(p) = \frac{s_a^2}{n} \tag{14.29}$$

$$var(p) = \frac{s_a^2}{n} \frac{N - n}{N} \tag{14.30}$$

$$s_a^2 = \frac{n_a (n - n_a)}{n (n - 1)} \tag{14.31}$$

<u>Ocenjevanje števila enot z dano značilnostjo</u>

$$N_a = N \frac{N_a}{N} = NP \tag{14.32}$$

$$N_{a,sl} = Np = \frac{N}{n} n_a \tag{14.33}$$

$$Var(N_{a,sl}) = N(N-n) \frac{S_a^2}{n} \quad ; \quad S_a^2 = \frac{N_a (N-N_a)}{N(N - 1)} \tag{14.34}$$

$$var(N_{a,sl}) = N(N - n) \frac{s_a^2}{n} \; ; \; s_a^2 = \frac{n_a (n-n_a)}{n (n - 1)} \tag{14.35}$$

Simbolika in obrazci za ocene parametrov My, Y, P in Na so sistematično nakazani v naslednjem pregledu:

	Populacija	Vzorec
Znak za seštevanje		S
Število enot	N	n
Število enot z dano značilnostjo	N_a	n_a
Strukturni delež	P	p
Strukturni odstotek	P%	p%
Posamična vrednost	Y_i	y_i
Vsota za znak y	Y	y
Aritmetična sredina	My	$\bar{y}$
Poprečni kvadratni odklon	S_y^2	s_y^2
Varianca	σ_y^2	s_y^2

	Populacija	Vzorec
Poprečni kvadratni odklon za strukturni delež	S_a^2	s_a^2
Varianca strukturnega deleža	σ_a^2	s_a^2

	Prava vrednost	Ocena
Varianca	Var	var
Standardni pogrešek	SE	se
Odklon zaupanja	D	d

Parametri: Aritmetična sredina $My = \frac{1}{N} Y;$ $\bar{y} = \frac{1}{n} Sy_i$

Agregat $Y = Y_i$ $Y_{sl} = \frac{N}{n} y$

strukturni delež $P = Na/N$ $p = n_a/n$

število enot z dano značilnostjo N_a $Na_{sl} = \frac{N}{n} n_a$

Varianca ocen parametrov z vzorcem s ponavljanjem $\mathrm{Var}(\bar{y}) = \frac{\sigma_y^2}{n}$ $\mathrm{var}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n}$

$$\mathrm{Var}(p) = \frac{\sigma_a^2}{n} \qquad \mathrm{var}(p) = \frac{s_a^2}{n}$$

Varianca ocen parametrov z vzorcem brez ponavljanja

$$Var(\bar{y}) = \frac{S_y^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N} \qquad var(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N}$$

$$Var(Y_{sl}) = N(N-n)\frac{S_y^2}{n} \qquad var(Y_{sl}) = N(N-n)\frac{s_y^2}{n}$$

$$Var(p) = \frac{S_a^2}{n} \cdot \frac{N-n}{n} \qquad var(p) = \frac{s_a^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N}$$

$$Var(N_{a\,sl}) = N(N-n)\frac{S_a^2}{n} \qquad var(N_{a,sl}) = N(N-n)\frac{s_a^2}{n}$$

Določanje velikosti vzorca pri zahtevani natančnosti

Tabela 14.8 Obrazci za določanje potrebnega števila enot pri dani zanesljivosti

Ocenjevani parameter		Število enot v vzorcu s ponavljanjem, če je maksimalni odklon predpisan	
		absolutno D	relativno D%
Aritmetična sredina	My	$n = \left(\frac{z \cdot \sigma}{D(\bar{y})}\right)^2$	$n = \left(\frac{z \cdot KV\%}{D\%}\right)^2$
Vsota podatkov	Y	$n = \left(\frac{z \cdot N \cdot \sigma}{D(Y_{sl})}\right)^2$	
Strukturni delež	P%	$n = \frac{z^2 \cdot P\%(100 - P\%)}{D(p\%)^2}$	$n = \left(\frac{100 \cdot z}{D\%}\right)^2 \frac{100-P\%}{P\%}$
Število enot z dano značilnostjo	N_a	$n = \frac{z^2 \, N_a \, (N-N_a)}{D(N_{a;sl})^2}$	
Število enot v vzorcu brez ponavljanja		$n' = \frac{N \cdot n}{N+n-1} = \frac{n}{1+f}$	

n = število enot za vzorčenje s ponavljanjem ; n´ = število enot za vzorčenje brez ponavljanja, D = oznaka za maksimalni odklon, merjen absolutno; D% = oznaka za maksimalen verjeten odklon, merjen relativno

Ocena po metodi razmerij $Y_{r,sl}$

$$Y_{r,sl} = X \frac{Sy}{Sx} = X \cdot r \tag{14.43}$$

X = agregat za podatek, ki je v odvisnosti z ocenjevanim podatkom y ; Sx = vsota podatkov znaka x za vzorec ; Sy = vsota podatkov y za vzorec

$$\mathrm{Var}\, Y_{r.sl} = N(N-n)\frac{S_r^2}{n} \; ; \quad S_r^2 = \frac{\sum (y - xR)^2}{N-1} \; ; \quad R = \frac{\sum y}{\sum x}$$

$$\mathrm{var}\, Y_{r,sl} = N(N-n)\frac{s_r^2}{n} \; ; \quad s_r^2 = \frac{S(y-xr)^2}{n-1} = \frac{Sy^2 - 2r\, Sxy + r^2 Sx^2}{n-1} \; ; \; r = \frac{Sy}{Sx} \tag{14.44}$$

Stratificirano vzorčenje

Ocena agregata s stratificiranim vzorčenjem Y_{str} je vsota ocen agregatov v posameznih stratumih $Y_{k,sl}$

$$Y_{str} = \sum_{k=1}^{l} Y_{k,sl} = \sum_{k} \frac{N_k}{n_k} \underset{i}{S}\, y_{ki} \tag{14.45}$$

Varianca za oceno agregata s stratificiranim vzorčenjem Var (Y_{str}) pa je vsota varianc ocen agregatov po stratumih

$$\mathrm{Var}(Y_{str}) = \sum_{k=1}^{l} \mathrm{Var}(Y_{k.sl}) = \sum_{k} N_k (N_k - n_k) \frac{S_k^2}{n_k} \tag{14.46}$$

Iz teh dveh obrazcev moremo z upoštevanjem zvez med M_y, Y, P in H, razviti podobne obrazce za prave vrednosti ali ocene parametrov ali varianc za kateregakoli izmed navedenih štirih parametrov.

Razmestitev enot

proporcionalna razmestitev

$$n_k = a N_k \; ; \quad a = \frac{n}{N} = f \tag{14.47}$$

optimalna razmestitev

$$n_k = a \,.\, N_k S_k \;;\quad a = n/\sum N_k S_k \tag{14.48}$$

optimalna razmestitev enot glede na stroške

$$C = C_o + C_v = C_o + \sum \bar{c}_k . n_k \tag{14.49}$$

Pri tem pomeni: C = skupni stroški, C_o = konstantni stroški, C_v = variabilni stroški, $\bar{c}_k$ = poprečni stroški za opazovanje ene enote v stratumu, n_k = število enot v stratumu k.

$$n_k = a \frac{N_k S_k}{\sqrt{\bar{c}_k}} \;;\qquad a = C_v / \sum N_k S_k \sqrt{\bar{c}_k} \tag{14.50}$$

Vzorčenje v skupinicah

Vrednost agregata v skupinici k Y_k

$$Y_k = \sum_{i=1}^{N_k} Y_{ki} \tag{14.51}$$

Ocena agregata z vzorčenjem v skupinicah Y_{sk}

$$Y_{sk} = \frac{M}{m} \underset{k=1}{\overset{m}{S}} Y_k \;; \tag{14.52}$$

Varianca ocene agregata z vzorčenjem v skupinicah $Var(Y_{sk})$

$$Var(Y_{sk}) = M(M-m)\frac{S_Y^2}{m} \;;\quad S_Y^2 = \frac{\sum_k (Y_k - M_Y)^2}{M-1} \;;\; M_Y = \frac{1}{M}\sum_k Y_k \tag{14.53}$$

Ocena variance za oceno agregata z vzorčenjem v skupinicah

$$var\ Y_{sk} = M(M-m)\frac{s_Y^2}{m} \;;\quad s_Y^2 = \frac{\underset{k}{S}(Y_k - \bar{Y})^2}{m-1} \;;\quad \bar{Y} = \frac{1}{m} \underset{k}{S} Y_k \tag{14.54}$$

Interklasna korelacija r_I

$$r_I = \frac{\bar{N}\eta^2_{xy} - 1}{\bar{N} - 1} \qquad (14.55)$$

η^2_{xy} = korelacijsko razmerje ; $\bar{N}$ = število enot v skupinici

Varianca za oceno za aritmetično sredino Var $\bar{y}_{sk}$

$$\mathrm{Var}\,\bar{y}_{sk} = \frac{\sigma^2_y}{\bar{N}.m} \cdot \left[1 + (\bar{N} - 1)\, r_I\right] \qquad (14.56)$$

Varianca za oceno za strukturni delež Var p_{sk}

$$\mathrm{Var}\,p_{sk} = \frac{P.(1-P)}{\bar{N}.m} \left[1 + (\bar{N} - 1)\, r_I\right] \qquad (14.57)$$

Sistematično vzorčenje

$$s = 1/f \qquad (14.55)$$

$$s = N/n \qquad (14.56)$$

s = stopinja izbora, f = vzorčni delež

Ocena agregata Y_{sis}

$$Y_{sis} = \frac{N}{n} \cdot Sy = s.Sy \qquad (14.57)$$

Ocena variance agregata var Y_{sis}

$$\mathrm{var}\,Y_{sis} = s(s-1) \sum_{k=o}^{\frac{n-1}{2}} (y_{2k+2} - y_{2k+1})^2 \qquad (14.58)$$

Vzorčenje v dveh stopnjah

Ocena agregata $Y_{2.st}$

$$Y_{2.st} = \frac{M}{m} \mathop{S}_{k=1}^{m} \frac{N_k}{n_k} \mathop{S}_{i=1}^{n_k} y_{ki} \tag{14.59}$$

Varianca ocene agregata $\mathrm{Var}Y_{2.st}$

$$\mathrm{Var}Y_{2st} = \mathrm{Var}Y_{sk} + \frac{M}{m} \sum_{k=1}^{M} \mathrm{Var}\,Y_{k,sl} \; ; \; \mathrm{var}Y_{2st} = \mathrm{var}Y_{sk} + \frac{M^2}{m^2} \mathop{S}_{k=1}^{m} \mathrm{var}Y_{k,sl} \tag{14.60}$$

M, m število enot v populaciji in vzorcu prve stopnje
N_k n_k število enot v drugi stopnji

Vzorčenje v dveh fazah

Ocena agregata z vzorcem v dveh fazah pri metodi razmerij $Y_{2f.r}$

$$Y_{2f.r} = X_{sl.1} \cdot r_2 = \frac{N}{n_1} \underset{1}{S}x \times \frac{\underset{2}{S}y}{\underset{2}{S}x} \tag{14.61}$$

$\underset{1}{S}x$ = vsota podatkov v vzorcu v prvi fazi

$\underset{2}{S}x$ $\underset{2}{S}y$ = vsote podatkov v drugi fazi

Ocena agregata z vzorcem v dveh fazah pri stratifikaciji $Y_{2f.st}$

$$Y_{str.2f} = \sum_k N_{k.sl.1} \bar{y}_{k.sl.2} = \frac{N}{n_1} \sum_k \frac{n_{k1}}{n_{k2}} \cdot \underset{2}{S}y \tag{14.62}$$

pri upoštevanju neodgovorov v anketi

$$Y_{str.2f} = \frac{N}{n_1} \left(\underset{1}{S^{+}}y + \underset{2}{S}\bar{y}/\bar{f}_2\right) \tag{14.63}$$

Pri tem je razen znanih izrazov $\bar{f_2} = \bar{n_2}/\bar{n_1}$ vzorčni delež enot v drugi fazi v populaciji neodgovorov.

Časovno vzorčenje

Časovni agregat Y

$$Y = \int_0^T y(t)\,dt \tag{14.64}$$

Ocena za časovni agregat Y_{sl}

$$Y_{sl} = T\,\frac{\underset{i}{S}\, y(t_i)}{n} \tag{14.65}$$

Ocena za časovno poprečje

$$\bar{y}_{sl} = \frac{1}{n}\,\underset{i}{S}\, y(t_i) \tag{14.66}$$

Medtem ko je točkovna ocena za strukturni delež $p\% = 100\frac{y}{n}$, je intervalna ocena

$$P\% = p\% \pm 1.96\sqrt{\frac{p\%(100 - p\%)}{n-1}} \tag{14.67}$$

Če je $y(t)$ kakšna druga zvezna ali nezvezna funkcija, ocenimo agregat s točkovno oceno

$$Y_{sl} = T \cdot \bar{y}$$

ali z intervalno oceno

$$Y = Y_{sl} \pm 1{,}96.T\,\frac{s_y}{\sqrt{n}} \tag{14.69}$$

pri čemer je s_y ocena standardnega odklona σ_y, izračunana po obrazcu

$$s_y^2 = \frac{Sy_i^2 - \frac{(Sy_i)^2}{n}}{n - 1} \tag{14.70}$$

PETNAJSTO POGLAVJE

VZORČENJE - MALI VZORCI

TEORETIČNE VERJETNOSTNE PORAZDELITVE

Zvezne verjetnostne porazdelitve

Standardizirana normalna porazdelitev

$$z = \frac{y - M_y}{\sigma_y} \tag{15.1}$$

Gostota verjetnosti za $z =: N(0,1)$ je

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{15.2}$$

porazdelitvena funkcija pa je funkcija zgornje meje

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{15.3}$$

χ^2-porazdelitev.

Vsota kvadratov m neodvisnih standardizirano normalnih slučajnostnih spremenljivk z_i

$$S z_i^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots\ z_m^2 =: \chi^2(m) \tag{15.4}$$

se porazdeljuje v porazdelitvi, ki jo imenujemo χ^2 (hi-kvadrat) porazdelitev. Gostota verjetnosti za χ^2-porazdelitev je dana s funkcijo

$$\varphi(\chi^2) = C_{\chi^2} \cdot e^{\frac{\chi^2}{z}} (\chi^2)^{\frac{m}{2}-1} \tag{15.5}$$

To je posebna oblika Γ-porazdelitve s $\varphi(x) = C_\Gamma e^{-x} . x^{t-1}$, v kateri je $x = \chi^2/2$ in $t = \frac{m}{2}$

Porazdelitvena funkcija za χ^2-porazdelitev je

$$F(\chi^2) = \int_0^{\chi^2} \varphi(\chi^2)\, d\chi^2 \tag{15.6}$$

Iz obrazca za gostoto verjetnosti je razvidno, da je gostota verjetnosti razen od slučajnostne spremenljivke χ^2 odvisna tudi od parametra m, ki ga imenujemo s t o p i n j a p r o s t o s t i . Stopinja prostosti m je število neodvisnih spremenljivk, iz katerih je sestavljen χ^2.

Iz definicije χ^2-porazdelitve sledi, da je $E(\chi^2) = m$; $Var(\chi^2) = 2m$. χ^2-porazdelitev je asimetrična v desno, stopnja asimetrije pa se manjša z večanjem števila stopinj prostosti m. Medtem, ko je χ^2-porazdelitev za $m = 1$ tipična J porazdelitev, je za $m = 10$ χ^2-porazdelitev že skoraj simetrična in zelo podobna normalni porazdelitvi. Če je število stopinj prostosti $m > 30$, se izraz

$$\frac{1}{2}(z + \sqrt{2m-1})^2 =: \chi^2(m) \tag{15.7}$$

asimptotično porazdeljuje v χ^2-porazdelitvi z m stopinjami prostosti. Pri tem velja, da je $z =: N(0,1)$.

adicijski teorem

$$\sum_{k=1}^{r} \chi^2 (m_k) =: \chi^2 \left(\sum_{k=1}^{r} m_k \right) \tag{15.8}$$

Studentova t-porazdelitev

Če se z porazdeljuje standardizirano normalno, χ^2 v hi- kvadrat porazdelitvi z m stopinjamo prostosti, in χ^2 pa sta neodvisna, se slučajnostna spremenljivka,

$$\frac{z}{\sqrt{\chi^2/m}} =: t(m) \tag{15.9}$$

ki je funkcija slučajnostnih spremenljivk z in χ^2, porazdeljuje v t- porazdelitvi z m stopinjami prostosti.

Za t- porazdelitev je gostota verjetnosti $\varphi(t)$ dana s funkcijo

$$\varphi(t) = C_t \left(1 + \frac{t^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}} \tag{15.10}$$

pri čemer je t slučajnostna spremenljivka, C_t je

konstanta, ki je odvisna od števila stopinj prostosti, m pa število stopinj prostosti.

F- porazdelitev

Če sta $\chi^2(m_1)$ in $\chi^2(m_2)$ neodvisni slučajnostni spremenljivki, ki se porazdeljujeta v χ^2-porazdelitvi, prva z m_1 in druga z m_2 stopinjami prostosti, se

$$\frac{\chi^2(m_1)/m_1}{\chi^2(m_2)/m_2} =: F(m_1 \cdot m_2) \tag{15.11}$$

porazdeljuje v F porazdelitvi z m_1 in m_2 stopinjami prostosti. Gostota verjetnosti za F-porazdelitev je dana s

$$\varphi(F) = C_F \cdot F^{\frac{m_1-2}{2}} \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2} F\right)^{-\frac{m_1+m_2}{2}} \qquad (15.12)$$

F-porazdelitev je odvisna od dveh stopinj prostosti: m_1 ustreza χ^2 v števcu, m_2 pa χ^2 v imenovalcu.

$$F_{1-p}(m_2, m_1) = \frac{1}{F_p(m_1, m_2)} \qquad (15.13)$$

Zveze med teoretičnimi slučajnostnimi spremenljivkami, ki so zasnovane na normalni porazdelitvi. V nadaljevanju dajemo pregled zvez med slučajnostnimi spremenljivkami, ki so zasnovane na normalni porazdelitvi. Razen povzetka že znanih zvez podajamo še nekaj novih, ki slede iz opredelitev porazdelitev:

$$y_i =: N\left(My_i ; \sigma_i^2\right); \quad u = \sum a_i y_i =: N\left(M_u = \sum a_i My_i ; \sigma_u^2 = \sum a_i^2 \sigma_i^2\right) \qquad (15.14)$$

y_i neodvisni

$$z_i =: N(0,1) \qquad \sum_{i=1}^{n} z_i =: N(0,n) \qquad (15.15)$$

$$\sum_1^m z_i^2 =: \chi^2(m) \quad ; \quad z^2 =: \chi^2(1) \qquad \sqrt{\chi^2(1)} =: z \qquad (15.16)$$

$$\frac{(\sum_i z_i)^2}{n} =: \chi^2(1) \qquad (15.17)$$

$$\frac{z}{\sqrt{\chi^2/m}} =: t(m) \quad ; \quad t(\infty) =: z \qquad (15.18)$$

$$t^2(m) = \frac{z^2}{\chi^2/m} =: F(1,m) \qquad (15.19)$$

$$\chi^2(m)/m =: F(m, \infty) \qquad (15.10)$$

Če iz populacije $y =: N(M, \sigma^2)$ izberemo slučajnostni vzorec z n enotami, velja:

$$\frac{\bar{y} - M}{\sigma} \cdot \sqrt{n} =: z \tag{15.21}$$

$$\frac{\bar{y} - M}{s} \cdot \sqrt{n} =: t(m = n-1) \tag{15.22}$$

$$\frac{(n-1)\, s^2}{\sigma^2} =: \chi^2 \; (m = n-1) \tag{15.23}$$

Pri tem sta $\bar{y}$ in s^2 izračunana iz vzorca po obrazcih

$$\bar{y} = \frac{1}{n} Sy \quad , \quad s^2 = \frac{s(y - y)^2}{n-1} \tag{15.24}$$

Iz gornjih treh obrazcev je lepo vidna zveza:

Ker je $z/\sqrt{\chi^2/m} =: t(m)$, dobimo iz 15.21 in 15.23

$$\frac{z}{\sqrt{\chi^2(m)/m}} = \frac{\frac{\bar{y} - M}{\sigma}\, n}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} / (n-1)}} = \frac{\bar{y} - M}{s} \sqrt{n} =: t(m = n-1) \tag{15.25}$$

Če iz dveh populacij, ki imata enaki varianci

$y_1 =: N(M_1; \sigma^2)$, $y_2 =: N(M_2; \sigma^2)$ izberemo vzorca iz prve z n_1 iz druge z n_2 enotami in so:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{n_1} Sy_1 : \; \bar{y}_2 = \frac{1}{n_2} Sy_2 \;\; : \;\; s_1^2 = \frac{S(y_1 - \bar{y}_1)^2}{n_1 - 1} : \; s_2^2 = \frac{S(y_2 - \bar{y}_2)^2}{n_2 - 1} \tag{15.26}$$

velja

$$\frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1 - (M_2 - M_1)}{s}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} =: t(m = n_1 + n_2 - 2) \qquad (15.27)$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Če iz dveh normalno porazdeljenih populacij z σ_1^2 in σ_2^2 izberemo vzorca z n_1 in n_2 enotami, velja

$$\frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} =: F\,(m_1\,;\ m_2) \qquad (15.28)$$

Vse te zveze slede iz definicij za porazdelitve χ^2, t in F.

Razmične ocene z malimi vzorci

Ocena aritmetične sredine, če poznamo σ

$$\bar{y} - Z_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M < \bar{y} + Z_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (15.29)$$

Ocena aritmetične sredine, če ne poznamo σ

$$\bar{y} - t_p\,(m = n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < M < \bar{y} + t_p\,(m = n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (15.30)$$

Subjektivna ocena za aritmetično sredino

$$M =: N\,(m;\ \sigma_M^2) \qquad (15.31)$$

$$m - z_p \cdot \sigma_M < M < m + z_p\, \sigma_M \qquad (15.32)$$

Bayesova ocena za aritmetično sredino m_B

točkovna ocena m_B

$$m_B = \frac{m \cdot \frac{1}{\sigma_M^2} + \bar{y} \cdot \frac{n}{\sigma_y^2}}{\frac{1}{\sigma_M^2} + \frac{n}{\sigma_y^2}} = \frac{m\,\sigma_y^2 + \bar{y} \cdot n \cdot \sigma_M^2}{\sigma_y^2 + n \cdot \sigma_M^2} \qquad (15.33)$$

varianca točkovne ocene m_B

$$\mathrm{Var}(m_B) = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_M^2} + \frac{n}{\sigma_y^2}} = \frac{\sigma_y^2 \cdot \sigma_M^2}{\sigma_y^2 + n \cdot \sigma_M^2} \qquad (15.34)$$

porazdelitev točkovne ocene m_B

$$m_B =: N(M, \mathrm{Var}\, m_B) \qquad (15.37)$$

razmična ocena

$$m_B - z_P \cdot \sqrt{\mathrm{Var}\, m_B} < M < m_B + z_P \cdot \sqrt{\mathrm{Var}\, m_B} \qquad (15.38)$$

stopnja informacije za Bayesovo oceno

$$\frac{1}{\sigma_{mB}^2} = \frac{1}{\sigma_M^2} + \frac{n}{\sigma_y^2} \qquad (15.39)$$

Ocena razlik med aritmetičnima sredinama: neodvisna vzorca

Dvostransko

$$\bar{y}_2 - \bar{y}_1 - t_P \cdot s \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} < M_2 - M_1 < \bar{y}_2 - \bar{y}_1 + t_P \cdot s \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

$$t_P = t_P\,(m = n_1 + n_2 - 2): \quad s^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \qquad (15.40)$$

Enostransko

$$\bar{y}_2 - \bar{y}_1 - t_P \cdot s \cdot \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} < M_2 - M_1 \qquad (15.41)$$

Ocena razlik med sredinama: odvisna vzorca

a) Izberemo vzorec n enot.

b) Za vsako enoto merimo proučevan podatek pri pogoju 1

y_{1i} in pri pogoju 2 y_{2i} $i = 1,2 \dots n$

c) Za vsako enoto izračunamo ustrezne razlike

$$d_i = y_{2i} - y_{1i} \tag{15.42}$$

d) Iz d_i ocenimo poprečno razliko učinka

$$\bar{d} = \frac{1}{n} S\, d_i = \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \tag{15.43}$$

in varianco razlik $$s_d^2 = \frac{S(d - \bar{d})^2}{n - 1} \tag{15.44}$$

e) Če računamo, da se y_{2i} in y_{1i} porazdeljujeta normalno, se tudi d_i porazdeljuje normalno. Zato moremo za $\bar{d}$ uporabiti obrazec za računanje razmičnih ocen za poprečje

$$\bar{d} - t_P \frac{s_d}{\sqrt{n}} < \Delta M = M_2 - M_1 < \bar{d} + t_P \frac{s_d}{\sqrt{n}} \; ; \quad \alpha = 2P \tag{15.45}$$

pri čemer je kritična vrednost $t_P(m=n-1)$ določena z $m = n-1$ stopinjami prostosti.

Ocena za varianco

$$\frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{1-P}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_P(n-1)} \tag{15.47}$$

Ocena za razmerje med variancama

$$P_r\left[F_{1-P}(m_1 = n_1 - 1, m_2 = n_2 - 1) < \frac{s_1^2/s_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_P(m_1 = n_1 - 1,\ m_2 = n_2 - 1)\right] = 1 - 2P \tag{15.48}$$

$$\frac{s_1^2/s_2^2}{F_P\,(m_1=n_1-1,\ m_2=n_2-1)} < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < s_1^2/s_2^2 . F_P\,(m_1=n_2-1,\ m_2=n_1-1) \qquad (15.49)$$

s tveganjem $\alpha = 2P$

Nezvezne porazdelitve

Hipergeometrična porazdelitev

$$H(x/N, N_a : n) = \frac{\binom{N_a}{x}\binom{N-N_a}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad (15.50)$$

$$E\left(p=\frac{x}{n}\right) = \frac{N_a}{N} = P; \quad Var\left(p=\frac{x}{n}\right) = \frac{P.(1-P)}{n} . \frac{N-n}{N-1} = \frac{N_a}{N} \frac{N-N_a}{N-1} . \frac{1}{n} . \frac{N-n}{N} = \frac{S_a^2}{n} . \frac{N-n}{N}$$

(15.51)

$$p = \frac{x}{n} =: N\left[E(p) = \frac{N_a}{N};\ Var\,p = \frac{N_a(N-N_a)}{N(N-1)} . \frac{1}{n} . \frac{N-n}{N}\right] \qquad (15.52)$$

Binomska - Bernoullijeva porazdelitev

$$B(x/n; P) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} \qquad (15.53)$$

$$(n+1).P - 1 < X_{Mo} < (n+1).P \qquad (15.55)$$

Za slučajnostno spremenljivko x, ki se porazdeljuje v binomski porazdelitvi, veljajo parametri

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{slučajnostna spremenljivka } x & \text{slučajnostna spremenljivka } p = \frac{x}{n} \\[2ex]
M(x) = E(x) = nP & M\left(p = \frac{x}{n}\right) = E\left(p = \frac{x}{n}\right) = P \\[2ex]
Var(x) = nP \cdot Q & Var\left(p = \frac{x}{n}\right) = \frac{P \cdot Q}{n} \\[2ex]
\gamma_1(x) = \frac{(Q-P)}{(nPQ)^{1/2}} & \gamma_1\left(p = \frac{x}{n}\right) = \frac{(Q-P)}{(nPQ)^{1/2}} \\[2ex]
\gamma_2(x) = \frac{1-6PQ}{nPQ} & \gamma_2\left(p = \frac{x}{n}\right) = \frac{1-6PQ}{nPQ}
\end{array}
\right\} \quad (15.56)
$$

$Q = 1 - P$

$$x =: N(nP;\ nPQ)\ ;\ p = \frac{x}{n} =: N\left(P;\ \frac{PQ}{n}\right) \qquad (15.57)$$

$$\frac{x - nP}{\sqrt{nPQ}} =: z\ ;\ \frac{\frac{x}{n} - P}{\sqrt{\frac{PQ}{n}}} =: z \qquad (15.58)$$

$$\sum_{x=0}^{x=x_1} B(x/n;\ P) = 0{,}50 + H\left(z_1 = \frac{x_1 + 0.5 - nP}{\sqrt{nPQ}}\right) \qquad (15.59)$$

<u>Razmična ocena za strukturni delež</u>

Če iz slučajnostnega vzorca z n enotami dobimo x enot z dano značilnostjo, določimo spodnjo in zgornjo mejo zaupanja $P_s\%$ in P% za strukturni odstotek P% po obrazcih

$$P_s\% = \frac{100x}{x+(n-x+1)F_s}\ ;\ P_z\% = \frac{100(x+1)F_z}{(x+1)F_z + (n-x)} \qquad (15.60)$$

Pri tem pomeni: $F_s = F_P\left[m_1 = 2(n-x+1),\ m_2 = 2x\right]$; $F_z = F_P\left[m_1 = 2(x+1),\ m_2 = 2(n-x)\right]$

n = velikost vzorca in x = število enot z dano značilnostjo v vzorcu. Prava vrednost strukturnega deleža P% je v razmiku

$$P_s\% < P\% < P_z\% \qquad (15.61)$$

s tveganjem $\alpha = 2P$

Poissonova porazdelitev

Če je v Bernoullijevem procesu P zelo majhen, n pa zelo velik, in gre v limiti $P \to 0$ in $n \to \infty$ produkt nP pa proti konstanti λ

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ P \to 0}} nP = \lambda \qquad (15.62)$$

verjetnost za x preide v Poissonovo porazdelitev, za katero je verjetnostna porazdelitev dana s

$$P(x ; \lambda) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \qquad (15.63)$$

Ob teh pogojih preidejo parametri binomske porazdelitve za Poissonovo porazdelitev v naslednjo obliko

$$M_x = E(x) = \lambda \ ; \ \mathrm{Var}\, x = \lambda \ ; \ \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ ; \ \gamma_2 = \frac{1}{\lambda} \qquad (15.64)$$

ocene za parametre

$$\Pr\left(x - z_p\sqrt{x} < \lambda < x + z_p\sqrt{x}\right) = 1 - 2P = 1 - \alpha \qquad (15.65)$$

$$\Pr\left\{\frac{x}{k} - z_p\frac{\sqrt{x}}{k} < \lambda < \frac{x}{k} + z_p\frac{\sqrt{x}}{k}\right\} = 1 - 2P = 1 - \alpha \qquad (15.66)$$

Rekurzijski obrazci za nezvezne porazdelitve

Hipergeometrična porazdelitev

$$H(x+1) = H(x) \cdot \frac{(n - x) \cdot (N_a - x)}{(x + 1)\left[(N-N_a)-(n-x)+1\right]} = H(x) . C(x) \qquad (15.67)$$

$$H(x) = H(o) \cdot h(x) = \frac{h(x)}{\sum_{o}^{n} h(x)} \tag{15.69}$$

Binomska porazdelitev

$$B(x+1) = B(x) \cdot \frac{n-x}{x+1} \frac{P}{Q} \tag{15.70}$$

$$b(x+1) = b(x) \frac{n-x}{x+1} \frac{P}{Q} \; ; \quad b(o) = 1 \; ; \quad B(x) = \frac{b(x)}{\sum_{o}^{n} b(x)} \tag{15.71}$$

Poissonova porazdelitev

$$P(x+1) = P(x) \frac{\lambda}{x+1} \tag{15.72}$$

$$p(x+1) = p(x) \frac{\lambda}{x+1} \; ; \quad p(o) = 1 \; ; \quad P(x) = \frac{p(x)}{\sum_{o}^{n} p(x)} \tag{15.73}$$

ŠESTNAJSTO POGLAVJE

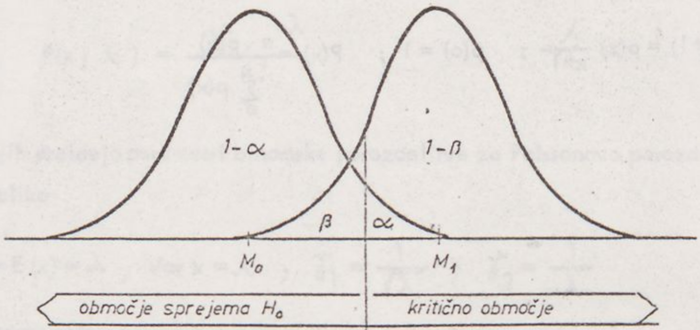
PRESKUŠANJE DOMNEV

Preskušanje enostavnih domnev

$$\bar{y} =: N\left(M; \frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{16.1}$$

$$P_r\left(\bar{y} < \bar{y}_z = M_o + z_P \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - P = 1 - \alpha \tag{16.2}$$

$$Pr\left(\bar{y} > \bar{y}_z = M_1 - z_{1-\beta} \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \beta \tag{16.3}$$



Rezultat preskusnega vzorca	$\bar{y} \leq \bar{y}_z$	$\bar{y} > \bar{y}_z$
Sklep / *Dejansko stanje*	*sprejmemo* H_0	*sprejmemo* H_1
$M = M_0$	*sklep pravilen* $1-\alpha$	*sklep napačen* α
$M = M_1$	*sklep napačen* β	*sklep pravilen* $1-\beta$

Slika 16.2 Primerjalni pregled možnih situacij

Preskušanje domnev z velikimi vzorci

Splošen preskus ničelne domneve $H_o : G = G_o$

$$z = \frac{g - G_o}{SE_g} \qquad (16.10)$$

g = ocena iz vzorca, G_o = hipotetična vrednost, SE_g = standardni pogrešek ocene g

Preskus domnev o strukturnih deležih P_o

$$z = \frac{p - P_o}{\sqrt{\frac{p(100-p)}{n}}} \qquad (16.11)$$

Splošen preskus domnev o razlikah med parametri

$$z = \frac{(g_2 - g_1) - (G_{o2} - G_{o1})}{\sqrt{var\ g_1 + var\ g_2}} \qquad (16.12)$$

Preskus o razlikah med poprečjema

$$z = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \qquad (16.13)$$

Preskus o razlikah med številom redkih dogodkov iz dveh populacij

$$z = \frac{h_2 - h_1}{\sqrt{h_2 + h_1}} \qquad (16.14)$$

h_1 = število dogodkov v prvi populaciji

h_2 = število dogodkov v drugi populaciji

Preskušanje domnev z malimi vzorci

Preskušanje domnev o aritmetičnih sredinah. Če velja $y =: N(M; \sigma^2)$, dobimo ničelni domnevi $H_o : M = M_o$ ustrezen vzorčni izraz

$$z = \frac{\bar{y} - M_o}{\sigma}\sqrt{n} \tag{16.15}$$

$$t = \frac{\bar{y} - M_o}{s} \cdot \sqrt{n} \tag{16.16}$$

ki ga preskušamo s $t_\alpha (m = n-1)$.

Preskus o poprečni razliki za odvisna vzorca

$$t = \frac{\bar{d} - D_o}{s_d}\sqrt{n} \quad ; \quad t_\alpha (m = n - 1) \tag{16.17}$$

Pri tem je: $D_o = M_{o2} - M_{01}$: $\bar{d} = \frac{1}{n} S di$; $s_d^2 = \frac{S(d_i - \bar{d})^2}{n - 1}$

Po obrazcu

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d}\sqrt{n} \qquad \cdot t_\alpha (m = n - 1)$$

preskušamo ničelno domnevo $H_o : D_o \doteq 0$, da razlik med aritmetičnima sredinama ni.

Preskus o poprečni razliki za neodvisna vzorca

$$= \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1 - \Delta M_o}{s}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \; ; \; t_p (m = n_1 + n_2 - 2) \; ; \; s^2 = \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \tag{16.18}$$

V primeru, da razen predpostavk, da sta obe populaciji normalni s $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ velja, da je hipotetična razlika med aritmetičnima sredinama enaka dejanski razliki ($\Delta M_o = \Delta M$) se t porazdeljuje v t-porazdelitvi z $m = n_1 + n_2 - 2$ stopinjami prostosti. Vzorčni izraz uporabljamo za preskušanje ničelne domneve $H_o : \Delta M_o = \Delta M$. Za preskušanje ničelne domneve $H_o : \Delta M_o = 0$ pa velja

$$t = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \qquad (16.19)$$

Preskušanje domnev o varianci

Preizkušanje domnev o varianci. Z izrazom

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_o^2} \qquad \chi^2_p (m = n-1) \qquad (16.20)$$

preizkušamo domneve o varianci, če predpostavljamo, da se y porazdeljuje normalno.

Preskušanje domnev o razmerju med variancama. Značilnost razlik med variancama za dva neodvisna vzorca preskušamo z vzorčnim izrazom

$$F = \frac{s_1^2 / s_2^2}{\left[\sigma_1^2 / \sigma_2^2\right]_o} \qquad F_p(m_1 = n_1 - 1 \,;\, m_2 - n_2 - 1) \qquad (16.21)$$

ki se porazdeljuje v F-porazdelitvi z $m_1 = n_1 - 1$ in $m_2 = n_2 - 1$ stopinjami prostosti, če je domnevno razmerje enako dejanskemu razmerju in se obe populaciji porazdeljujeta normalno.

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad ; \qquad F_p\,(m_1 = n_1 - 1 \;;\; m_2 = n_2 - 1) \qquad (16.22)$$

Preskušanje domnev o frekvenčnih porazdelitvah

Preskus domnev o frekvenčnih porazdelitvah. Če je stvarna frekvenčna porazdelitev f_i rezultat vzorca iz populacije z verjetnostmi P_i, velja

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{(f_j - nP_j)^2}{nP_j} =: \chi^2 \ (m = k - 1) \qquad (16.23)$$

Če v obrazcu 16.23 zamenjamo nP_j z ocenami f_j' za teoretične frekvence, ki jih dobimo ob določenih predpostavkah iz vzorca, se

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{(f_j - f_j')^2}{f_j'} =: \chi^2 \ (m = k - r) \qquad (16.24)$$

porazdeljuje tudi v χ^2 porazdelitvi s stopinjami prostosti, ki so enake številu razredov k, zmanjšane za število zvez r med stvarnimi f_j in teoretičnimi f_j' frekvencami.

Analiza variance

Postopek za analizo variance za en dejavnik v splošnejšem primeru, če je število enot v grupah različno, moremo nakazati v tehle točkah:

a) Iz vsake izmed k grup, katerih razlike proučujemo, izberemo vzorec z n_k enotami in zanje poiščemo vrednosti za znak y_{ki}, ki ga proučujemo. Indeks k pri y_{ki} pomeni grupo, i pa tekočo številko enote znotraj grupe.

b) Za vsako grupo izračunamo iz posamičnih vrednosti grupne vsote $Y_k = S_i \, y_{ki}$, iz teh pa skupno vsoto $Y = S_k \, Y_k$

c) Izračunamo vsoto kvadratov posamičnih vrednosti $S_k S_i \, y_{ki}^2 = Q_{ki}$, iz grupnih vsot y_k izraz $S_k \, Y_k^2/n_k = Q_k$, iz skupne vsote pa izraz $Y^2/n = Q$; $(\sum_k n_k = n)$

d) Iz izrazov c obračunamo analizo variance po standardni shemi

Tabela 16.3 Shema za obračun analize variance

Vir variacije	Vsota kvadratov odklonov SK	Stopinje prostosti m	$s^2 = K/m$	F
med grupami	$Q_k - Q = K_k$	$k - 1 = m_k$	$K_k/m_k = s_k^2$	$s_k^2/s_e^2 = F$
znotraj grup	$Q_{ki} - Q_k = K_e$	$n - k = m_e$	$K_e/m_e = s_e^2$	1
Skupaj	$Q_{ki} - Q = K$	$n - 1$		

Razlike med grupnimi sredinami so značilne na stopnji α, če je izračunani F večji kot kritična vrednost F_{α} $(m_1 = k-1;\ m_2 = n-k)$.

Neparametrične metode za preskušanje domnev

Neparametrično preskušanje domnev o srednjih vrednostih

Preskus s predznaki

$$u = a + bx + cy \qquad (16.31)$$

$$\begin{array}{lll} a = -Me, & b = 1, c = 0 & u = x - Me \\ a = 0, & b = -1, c = 1 & u = y - x \\ a = 0, & b = -k\ c = 1 & u = y - kx \\ a = -a & b = -1, c = 1 & u = y - x - a \end{array} \qquad (16.32)$$

Če postavimo na splošno, da je $Me(u) = 0$, pomeni to v prvem primeru, da je $Me(x-Me) = 0$, v drugem, da je $Me(y-x) = 0$, v tretjem $Me(y-kx) = 0$, v četrtem pa $Me(y-x-a) = 0$.

Preskus z mediano

Dvostranski preskus $H_o : Me(u) = o$

Enostranska preskusa $H_o : Me(u) < o$ $H_o : Me(u) > o$

$$z = \frac{n+ - E(n+)}{\sqrt{Var n+}} = \frac{n+ - n/2}{\sqrt{n/4}} = \frac{2n+ - n}{\sqrt{n}} \qquad (16.33)$$

ali spodnja kritična meja za $n+$

$n+_s = \frac{1}{2}(n - z_p\sqrt{n})$ ali s korekturo za nezveznost

$n+_s = \frac{1}{2}(n - 1 - z_p\sqrt{n+1})$

Za male vzorce (do n = 100) so v zbirki tabel dane kritične vrednosti za $n+$ oziroma $n-$ za dogovorjene stopnje tveganja. n^+ pomeni število pozitivnih, n^- pa število negativnih vrednosti za u.

Preskus s predznačenimi rangi (Wilcoxonov preskus)

a) glede na tip preskusa izračunamo vrednosti u

b) vrednostim u priredimo range po velikosti absolutnih vrednosti u

c) seštejemo range za pozitivne u. Tako dobimo vrednost T.

d) iz tabele za kritične vrednosti presodimo značilnost odklona me(u) od 0.

Preskus z vsoto rangov (Mann-Withneyov preskus)

c) Numerične podatke preskusnih vzorcev z n_1 in n_2 enotami ($n_1 \leq n_2$) za primerjani populaciji združimo. Ko jih uredimo po velikosti, jim po velikosti priredimo ustrezne range.

b) Seštejemo range za vzorec z n_1 enotami ($n_1 \leq n_2$)

c) Dobljeno vsoto rangov T' primerjamo s kritičnimi vrednostmi v tabeli. Kritične vrednosti v tabeli v zbirki tabel so dane za štiri ravni za enostranske preskuse $\alpha = P = 0.10,\ 0,05,\ 0,01$ in $0,001$.

Če sta n_1 in n_2 večja kot 10, za preskušanje domneve o enaki porazdelitvi dveh populacij uporabimo zakonitost, da se T' porazdeljuje približno normalno

$$T' =: N\left[E(T') = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}\ ;\ Var\ T' = \frac{n_2}{6} E(T)\right] \qquad (16.34)$$

Moč preskusa z vsotami rangov je približno enaka kot moč preskusa za t-preskus. Če pa populaciji nista normalni, more biti moč preskusa z vsotami rangov večja kot s t- preskusom, neglede na to, da za take primere ne moremo uporabiti t- preskusa, ker osnovne populacije ne zadoščajo pogojem za uporabo.

Analiza variance z rangi (Kruskal-Wallisov test). Podobno kot z osnovnimi vrednostmi tudi z analizo variance rangov preskušamo domnevo, da je k vzorcev z $n_1, n_2 \dots n_k$ enotami slučajnostno izbranih iz k populacij z enakimi porazdelitvami. Analizo variance rangov izvedemo po tehle stopnjah.

a) Imamo podatke k vzorcev z n_j $(j = 1,2 \dots k)$ enotami. Skupno imajo vsi vzorci $\sum n_j = n$ enot.

b) Vrednosti vseh vzorcev razvrstimo v skupno ranžirno vrsto in enotam v ranžirni vrsti pripišemo range 1, 2..... n v združeni ranžirni vrsti.

c) Seštejemo range za vzorce iz posameznih populacij v vsote R_j

d) Izračunamo vzorčni izraz

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j^2}{n_j} - 3(n+1) \quad ; \quad \chi_p^2 \ (m=k-1) \qquad (16.35)$$

Če je domneva o enakosti porazdelitev pravilna, se vzorčni izraz H porazdeljuje približno v χ^2 - porazdelitvi z $m = k-1$ stopinjami prostosti. Ta približek je praktično uporaben že, če imajo posamezni vzorci več kot 5 enot.

Preskus s sekvencami

Če je $n_1 > 20$ ali $n_2 > 20$, moremo uporabiti približek z normalno porazdelitvijo. Število sekvenc r se za take primere v približku porazdeljuje normalno

$$r =: N\left[E(r) = \frac{2 n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1 \, ; \ Var(r) = \frac{(E(r) - 1)\,(E(r) - 2)}{n_1 + n_2 - 1}\right] \qquad (16.36)$$

število sekvenc pa preskušamo z z - preskusom

$$z = \frac{r - E(r)}{\sqrt{Var(r)}} \tag{16.37}$$

n_1 = število enot z značilnostjo 1 v vrsti

n_2 = število enot z značilnostjo 2 v vrsti

r = število sekvenc

Primerjava z mediano

$$z = \left[r - (n_1 + 1) \right] / \sqrt{\frac{n_1 . (n_1 - 1)}{2 n_1 - 1}} \tag{16.38}$$

Preskus o slučajnosti razporeda z variancami (von Neumannov preskus). Pri preskusu slučajnosti razporeda z variancami primerjamo popreček kvadrat prvih razlik zaporednih členov v proučevani vrsti

$$\delta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)^2 \quad \text{z varianco} \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

Že če je število enot $n > 10$, populacija normalna, zaporedje pa slučajnostno, velja, da se izraz

$$z = \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right) \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n - 2}} \; ; \; \eta = \frac{\delta^2}{s^2} \tag{16.39}$$

porazdeljuje standardizirano normalno. Značilno večji z je izraz velike pozitivne povezave med zaporednimi členi, značilno manjši z pa odraz negativne povezave med zaporednimi členi.

SEDEMNAJSTO POGLAVJE

STATISTIČNA ANALIZA ODLOČITEV

Tabela 17.2. Splošna matrika dohodkov ${}_{S}D_{A}$

S_1 \ A_i	A_1	A_2	--------	A_g
S_1	D_{11}	D_{12}	- - - - -	D_{1g}
S_2	D_{21}	D_{22}	- - - - -	D_{2g}
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		
S_k	D_{k1}	D_{k2}	- - - - -	D_{kg}

$$ {}_{S}Z_{A} = {}_{S}D_{max} - {}_{S}D_{A} \tag{17.1}$$

Odločitev pri gotovosti

$$E(D_A) = \sum_{S} Pr(S_S) D_{SA} = max \tag{17.2}$$

$$E(Z_A) = \sum_{S} Pr(S_S)\, Z_{SA} = Min \tag{17.3}$$

Hurwitczovo pravilo

$$_A\bar{D} = {_A}D_{min} \cdot w_{min} + {_A}D_{max} \cdot w_{max} \quad (17.4)$$

D = dohodek

Linearna funkcija dohodka in točka preloma

$$D_A = f_A(p) \quad (17.5)$$

p = strukturni delež

$$D_A = a_A + b_A \cdot p \quad (17.6)$$

$$p_o = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} \quad (17.7)$$

p_o = točka preloma

Predpostavljamo, da je $b_2 > b_1$ in $a_1 > a_2$. Tako imamo pravilo o odločitvi o ukrepu A_1 ali A_2 neposredno iz deleža p

delež	dohodek	ukrep
$p < p_o$	$D_1 > D_2$	A_1
$p = p_o$	$D_1 = D_2$	neopredeljeno
$p > p_o$	$D_1 < D_2$	A_2

Pri odločitvah s tveganjem je sodilo o uspešnosti pričakovana vrednost za dohodek

$$E({_A}D) \quad (17.8)$$

Če je funkcija dohodka linearna, sledi iz obrazca 17.6, da je

$$E({_A}D) = E(a_A + b_A p) = a_A + b_A\, E(p) \quad (17.9)$$

Pri odločitvah s tveganjem vzamemo, da je ukrep A_1 ustreznejši kot A_2, če je

$$E(_{A1}D) > E(_{A2}D) \tag{17.10}$$

iz česar sledi dalje po obrazcu 17.9 in 17.10

$$a_1 + b_1 E(p) > a_2 + b_2 E(p) \tag{17.11}$$

ali

$$E(p) < \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} = p_o \tag{17.12}$$

Analogno je ustreznejša odločitev A_2, če je

$$E(p) > p_o \tag{17.13}$$

OSEMNAJSTO POGLAVJE

PROUČEVANJE ODVISNOSTI MED MNOŽIČNIMI POJAVI

Funkcijska odvisnost

$$y = f(x) \tag{18.1}$$

Korelacijska odvisnost

$$y = f(x) + e \tag{18.3}$$

Določanje regresijskih krivulj

Metoda grupnih sredin

$$\bar{y} = \bar{f}(x) + \bar{e} \doteq f(\bar{x}) \tag{18.5}$$

prečna črtica pomeni poprečja

Analitična metoda določanja regresijskih krivulj

Regresijska funkcija

$$y' = f(x;\ a, b, c \ldots) \tag{18.6}$$

Merilo prilagojenosti

$$\sum_i (y_i - y_i')^2 = F(a, b, c \ldots) \tag{18.7}$$

Mera jakosti odvisnosti

$$y = \bar{y} + (y' - \bar{y}) + (y - y') \qquad (18.8)$$

Pri tem pomeni:

$\bar{y}$ = rezultat splošnih vplivov; $(y' - \bar{y})$ = rezultat vpliva koreliranega znaka x; $(y - y')$ = rezultat vpliva drugih, posamičnih dejavnikov.

pojasnjena varianca

$$\sigma_{y'}^2 = \frac{1}{N}\sum (y' - \bar{y})^2 \qquad (18.9)$$

nepojasnjena varianca

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{N}\sum (y - y')^2 \qquad (18.10)$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y'}^2 + \sigma_e^2 \qquad (18.11)$$

$$\frac{\sigma_{y'}^2}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2} = 1 \qquad (18.12)$$

Indeks korelacije

$$I_{y.x} = \sigma_{y'} / \sigma_y \qquad (18.13)$$

$$I_{y.x} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2}} \qquad (18.14)$$

Standardna napaka ocene

$$\sigma_e = \sigma_y \sqrt{1 - I_{y.x}^2} \qquad (18.15)$$

Linearna odvisnost

Regresijski premici

$$y' = M_y + b_1\,(x - M_x) \tag{18.16}$$

$$x' = M_x + b_2\,(y - M_y) \tag{18.17}$$

$$b_1 = \frac{C_{xy}}{\sigma_x^2} \; ; \quad b_2 = \frac{C_{xy}}{\sigma_y^2} \tag{18.18}$$

Kovarianca

$$C_{xy} = \frac{1}{N}\sum (x - M_x)(y - M_y) \tag{18.19}$$

Korelacijski koeficient

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y} \tag{18.20}$$

Izračun pokazovalcev linearne odvisnosti

1.	x	y	x^2	xy	y^2
	x_1	y_1	x_1^2	x_1y_1	y_1^2
	x_2	y_2	x_2^2	x_2y_2	y_2^2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_N	y_N	x_N^2	x_Ny_N	y_N^2
2.	$X = \sum x$	$Y = \sum y$	$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$
3.	$M_x = X/N$	$M_y = Y/N$	$K_x = \sum x^2 - \frac{X^2}{N}$	$K_{xy} = \sum xy - \frac{XY}{N}$	$K_y = \sum y^2 - \frac{Y^2}{N}$

(18.21)

4.			$\sigma_x^2 = K_x/N$	$C_{xy} = K_{xy}/N$	$\sigma_y^2 = K_y/N$

5. $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ $\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2}$

6. $b_1 = \frac{C_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{K_{xy}}{K_x}$; $\rho_{xy}^2 = b_1 b_2 = \frac{C_{xy}^2}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}$; $b_2 = \frac{C_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{K_{xy}}{K_y}$

7. $\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{K_x K_y}}$

8. $\sigma_{e.y} = \sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}$; $\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}$ $\sigma_{e.x} = \sigma_x \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}$

9. $y' = M_y + b_1 (x - M_x)$ $x' = M_x + b_2 (y - M_y)$

V shemi je nazorno nakazan potek za računanje pokazovalcev linearne odvisnosti. Pogosto posamičnih rezultatov iz točke 1 niti ne pišemo, ker na računskem stroju dobimo vsote iz točke 2 direktno

Včasih se izkaže tehnično koristno, če obračunamo pokazovalce linearne odvisnosti iz reduciranih vrednosti $u = x - x_o$ in $v = y - y_o$. Vse količine, razen $M_x = x_o + M_u$; $M_y = y_o + M_v$ so invariantne in velja $\sigma_x^2 = \sigma_u^2$; $\sigma_y^2 = \sigma_v^2$;

$$C_{xy} = C_{uv} \; ; \; b_{1xy} = b_{1uv} ; \; b_{2\,xy} = b_{2\,uv} ; \; \rho_{xy} = \rho_{uv}$$

Linearna regresija

Linearni regresijski model

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon \tag{18.22}$$

Regresijska premica

$$y' = \alpha + \beta x \tag{18.23}$$

Porazdelitev slučajnostne komponente

$$\varepsilon =: N(0, \sigma_\varepsilon^2) \tag{18.24}$$

Porazdelitev slučajnostne spremenljivke y

$$y = : N(E(y) = y' = \alpha + \beta x ;\ \sigma_{\varepsilon}^{2}) \tag{18.25}$$

Ocena regresijske premice

$$y^{*} = a + b\,x \tag{18.26}$$

Pogoj po metodi najmanjših kvadratov

$$F(a,b) = \mathop{S}_{i=1}^{n} (y_i - y_i^{*})^2 = \mathop{S}_{i=1}^{n} (y_i - a - b x_i)^2 = \min \tag{18.27}$$

Normalni enačbi

$$\begin{aligned} a n + b\,Sx &= Sy \\ a\,Sx + b\,Sx^2 &= Sxy \end{aligned} \tag{18.29}$$

Ocena regresijske premice

$$y'' = \bar{y} + b(x - \bar{x}) \tag{18.30}$$

Pri tem je: $\bar{x} = \frac{1}{n} Sx$; $\bar{y} = \frac{1}{n} Sy$; $b = \frac{c_{xy}}{s_x^2} = \frac{k_{xy}}{k_x}$

$$k_x = S\,x^2 - \frac{(Sx)^2}{n} \ ; \quad k_{xy} = Sxy - \frac{Sx \,.\, Sy}{n}$$

$$c_{xy} = \frac{S(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n-1} = \frac{Sxy - \frac{(Sx)(Sy)}{n}}{n-1} = \frac{k_{xy}}{n-1} ; \quad c_{xx} = s_x^2 ; \quad c_{yy} = s_y^2$$

s_x^2 in s_y^2 sta nepristranski oceni varianc σ_x^2, σ_y^2, c_{xy} pa nepristranska ocena kovariance C_{xy}.

Porazdelitev parametrov za regresijsko premico

Za oceno regresijske premice y'

$$y'' = \bar{y} + b(x - \bar{x})$$

se oceni parametrov a in b porazdeljujeta, kot je nakazano v 18.31.

$$\bar{y} =: N\left(M_y; \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n}\right); \quad b = \frac{c_{xy}}{s_x^2} =: N\left(\beta; \frac{\sigma_\varepsilon^2}{k_x}\right) \tag{18.31}$$

Nepristranska ocena za varianco σ_ε^2 je

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = s_e^2 = \frac{k_y - \frac{k_{xy}^2}{k_x}}{n-2} \tag{18.32}$$

in se porazdeljuje

$$\frac{(n-2)\,s_e^2}{\sigma_\varepsilon^2} =: \chi^2 \; (m = n-2) \tag{18.33}$$

Ocena regresijske premice

$$y'' = \bar{y} + b(x - \bar{x}) \tag{18.34}$$

je tudi slučajnostna spremenljivka, ker vsebuje $\bar{y}$ in b.

Pri danem x se y" porazdeljuje normalno.

$$y''_x = \bar{y} + b(x-\bar{x}) =: N(E\,y''_x = y'_x = M_y + \beta(x-\bar{x}); \; \mathrm{Var}\, y''_x = \sigma_\varepsilon^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{k_x}\right] \tag{18.35}$$

Ocene za regresijsko premico y" se zaradi $\bar{y}$ odklanjajo navzgor ali navzdol od $y' = \alpha + \beta(x - \bar{x})$ paralelno, ali pa so zaradi različnih b strmejše ali položnejše od $y' = \alpha + \beta(x - \bar{x})$.

Če na koncu opazujemo še posamezne vrednosti y v modelu, spoznamo, da se ocene $y_x = \bar{y} + b(x - \bar{x}) + e$ porazdeljujejo tudi normalno z

$$y_x =: N(Ey_x = y' = M_y + \beta(x - \bar{x})\,;\ \ \mathrm{Var}\, y_x = \sigma_\varepsilon^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{k_x}\right] \tag{18.36}$$

Vzorčni izraz za oceno regresijskega koeficienta

$$\frac{b - \beta}{s_e}\sqrt{k_x} =: t\ (m = n - 2) \tag{18.37}$$

Ta obrazec služi za preskušanje domnev o regresijskem koeficientu ali za računanje razmika zaupanja za β ker velja

$$\Pr\left(b - t_p(n-2)\frac{s_e}{\sqrt{k_x}} < \beta < b + t_p(n-2)\frac{s_e}{\sqrt{k_x}}\right) = 1 - \alpha \tag{18.38}$$

Za oceno regresijske premice $y'' = \bar{y} + b(x - \bar{x})$ pa dobimo ploskev zaupanja, znotraj katere leži z danim tveganjem $\alpha = 2P$ regresijska premica $y' = \alpha + \beta(x - \bar{x})$. Meje te ploskve so

$$\bar{y}+b(x-\bar{x}) - t_p(n-2)\, s_e\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{k_x}} < y' = \alpha + \beta(x-\bar{x}) < \bar{y}+b(x-\bar{x}) + t_p(n-2)\, s_e\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{k_x}} \tag{18.39}$$

Vzorčni izraz za razliko dveh regresijskih koeficientov

Če v populaciji 1 opazujemo z vzorcem n_1 enot in v populaciji 2 z vzorcem n_2 obnašanje dvojic xy, ki slede nakazanemu modelu, dobimo iz zakonitosti porazdelitev z in t podobno kot za razliko med aritmetičnima sredinama zakonitosti

$$\frac{(b_2 - b_1) - (\beta_2 - \beta_1)}{s_d}\sqrt{\frac{k_{x1} \cdot k_{x2}}{k_{x1} + k_{x2}}} =: t(m = n_1 + n_2 - 4) \tag{18.40}$$

$$s_d^2 = \frac{(n_1-2)\, s_{e1}^2 + (n_2-2)\, s_{e2}^2}{n_1 + n_2 - 4} = \frac{k_{y1} + k_{y2} - \frac{k_{xy1}^2}{k_{x1}} - \frac{k_{xy2}^2}{k_{x2}}}{n_1 + n_2 - 4}$$

Te zakonitosti uporabljamo za preizkušanje domnev o razlikah med regresijskimi koeficienti npr. $H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$ ali $H_1 : \beta_2 - \beta_1 > \Delta\beta_H$ itd.

Linearna korelacija

Gostota relativne frekvence za bivariatno normalno porazdelitev

$$\varphi(z_x, z_y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}(z_x^2 - 2\rho z_x z_y + z_y^2)} \qquad (18.41)$$

Pri tem sta $z_x = \frac{x - M_x}{\sigma_x}$; $z_y = \frac{y - M_y}{\sigma_y}$ standardizirano normalni spremenljivki, ki sta podani s štirimi parametri: M_x, M_y, σ_x in σ_y. Peti parameter, ki opredeljuje bivariatno porazdelitev x,y, je parameter ρ. Parameter ρ je po definiciji

$$E z_x z_y = E\left[\frac{x - M_x}{\sigma_x} \cdot \frac{y - M_y}{\sigma_y}\right] = \frac{E[(x - M_x)(y - M_y)]}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \rho_{xy} \qquad (18.42)$$

in je korelacijski koeficient za bivariantno porazdelitev. Korelacijski koeficient meri stopnjo linearne odvisnosti med x in y, ki je dana z regresijskima premicama

Regresijski premici

$$z'_y = \rho z_x \quad ; \quad y' = M_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - M_x) \qquad (18.43)$$

in

$$z'_x = \rho z_y \quad ; \quad x' = M_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - M_y) \qquad (18.44)$$

V primeru čiste korelacijske odvisnosti imamo torej dve regresijski premici. Prva kaže linearno odvisnost y od x, druga pa linearno odvisnost x on y. Prvi regresijski koeficient

$$\beta_1 = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x^2} \qquad (18.45)$$

pove, za koliko se v poprečju spremeni y, če se poveča x za enoto, drugi regresijski koeficient

$$\beta_2 = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{C_{xy}}{\sigma_y^2} \qquad (18.46)$$

pa pove, za koliko se spremeni v poprečju x, če se y poveča za enoto. Slika 18.10 nakazuje krivulje enake verjetnosti za bivariatno porazdelitev dveh odvisnih spremenljivk. Vrednosti korelacijskega koeficienta ρ leže med -1 in +1. Ta ima drugače iste lastnosti, kot korelacijski koeficient, ki ga računamo v primeru, če predstavlja populacijo N dvojic (xy).

<u>Ocena regresijskih premic iz vzorca</u>

$$y'' = \bar{y} + b_1 (x - \bar{x}) \quad ; \quad b_1 = \frac{c_{xy}}{s_x^2} = \frac{k_{xy}}{k_x} \qquad (18.47)$$

$$x'' = \bar{x} + b_2 (y - \bar{y}) \quad ; \quad b_2 = \frac{c_{xy}}{s_y^2} = \frac{k_{xy}}{k_y} \qquad (18.48)$$

<u>Verjetnostna porazdelitev ocen korelacijskega koeficienta</u>

Pri pogoju, da je $\rho = 0$

$$\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} =: t(m = n-2) \qquad (18.49)$$

Fisherjeva transformacija korelacijskega koeficienta in njegova porazdelitev

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \qquad (18.50)$$

$$Z_r =: N\left[EZ = Z_o = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}\ ;\ \mathrm{Var}\ Z = \frac{1}{n-3}\right] \tag{18.51}$$

$$Z_s = Z_r - \frac{z_p}{\sqrt{n-3}} < Z_\rho < Z_z = Z_r + \frac{z_p}{\sqrt{n-3}} \tag{18.52}$$

Preskušanje domnev o korelacijskih koeficientih

$H_o : \rho = \rho_o = o$

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

z $m = n-2$

$H_o : \rho = \rho_H$, $H_o : \rho \leq \rho_H$, $H_o : o \gtrless o_H$

$$(Z - Z_H)\sqrt{n-3} = z \tag{18.53}$$

$H_o : \rho_1 = \rho_2$

$$\frac{Z_2 - Z_1}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}} = z \tag{18.54}$$

Proučitev linearne odvisnosti iz grupiranih podatkov.

Za obsežne populacije ali vzorce proučimo linearno odvisnost iz korelacijske tabele f_{xy}. Običajno izvedemo računanje prek pomožnih znakov $u = (x - x_o)/i_x$ in $v = (y - y_o)/i_y$. Shema za računanje pokazovalcev linearne regresije in korelacije iz korelacijske tabele f_{uv} je takale:

a) Shema za izračunanje pomožnih količin n, U, V, $\sum u^2$, $\sum uv$, $\sum v^2$ (v pravokotnikih so zaznamovane tabele, vrste in stolpci, pod njimi in ob njih pa sumarne količine)

	x						
y	f_{uv}	f_v	v	vf_v	v^2f_v	$U_v=\sum_u f_{uv}u$	vU_v
	f_u	n		$\sum vf_v=V$	$\sum v^2f_v=Sv^2$	$\sum U_v=U$	$\sum vU_v=S\,uv$
	u						
	uf_u	$\sum uf_u=U$					
	u^2f_u	$\sum u^2f_u=Su^2$					
	$V_u=\sum_v f_{uv}v$	$\sum V_u=V$					
	uV_u	$\sum uV_u=S\,uv$					

(18.56)

b) Shema za računanje pokazovalcev linearne regresije in korelacije iz pomožnih količin

(18.56)

	i_x	i_y			
n	U	V	Su^2	Suv	Sv^2
	$\frac{U}{n}$	$\frac{V}{n}$	$-U^2/n$	$-UV/n$	$-V^2/n$
	$i_x\frac{U}{n}$	$i_y\frac{V}{n}$	$k_u=Su^2-U^2/n$	$k_{uv}=Suv-UV/n$	$k_v=Sv^2-V^2/n$
	$+x_o$	$+y_o$	$s_x^2=\frac{i_x^2k_u}{n-1}$	$c_{xy}=\frac{i_xi_yk_{uv}}{n-1}$	$s_y^2=\frac{i_y^2k_v}{n-1}$
	$\bar{x}=x_o+i_x\frac{U}{n}$	$\bar{y}=y_o+i\frac{V}{n}$			

$$b_1=\frac{i_y}{i_x}\cdot\frac{k_{uv}}{k_u}\ ;\quad r_{xy}=\frac{k_{uv}}{\sqrt{k_u\cdot k_v}}\ ;\ b_2=\frac{i_x}{i_y}\cdot\frac{k_{uv}}{k_v}\ .$$

$$y''=\bar{y}+b_1\ (x-\bar{x}) \qquad\qquad x''=\bar{x}+b_2\ (y-\bar{y})$$

Krivuljčne odvisnosti

Implicitna oblika odvisnosti med x in y

$$h\,(y;\ x;\ \varepsilon)=0 \tag{18.57}$$

Eksplicitna oblika odvisnosti med x in y

$$y = f(x; \varepsilon) \tag{18.58}$$

$$y = f(x; a, b, c\ldots) + \varepsilon \tag{18.59}$$

Regresijska krivulja

$$y' = f(x; a, b, c\ldots) \tag{18.60}$$

Pojasnjena in nepojasnjena varianca

$$\sigma_{y'}^2 = \frac{1}{N}\sum (y' - \bar{y})^2 \quad \text{in} \quad \sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{N}\sum (y - y') = \frac{1}{N}\sum \varepsilon^2 \tag{18.61}$$

Poseben tip regresijskega modela

$$g(y) = a_o f_o(x) + a_1 f_1(x) + \ldots\ldots + a_p f_p(x) + \varepsilon \tag{18.62}$$

$$g(y') = a_o f_o(x) + a_1 f_1(x) + \ldots\ldots + a_p f_p(x) \tag{18.63}$$

Za ta model moremo določiti parametre a_o, a_1 ... po standardni metodi najmanjših kvadratov, ne za y, temveč za $Y' = g(y')$, ki je funkcija neodvisnega znaka y.

Če na tem modelu uporabimo metodo najmanjših kvadratov, štejemo kot regresijsko funkcijo tisto, za katero velja

$$\sum (Y - Y')^2 = \sum \left[(g(y) - g(y')\right]^2 = \min \tag{18.64}$$

Normalne enačbe

$$\sum_1^N g f_j = \sum_{k=o}^{p} a_k \sum_1^N f_k f_j \qquad (j = 0,1,2\ldots p) \quad (h = 0,1,2..p) \tag{18.67}$$

ki jih moremo pisati v razviti obliki:

$$
\begin{aligned}
\sum gf_o &= a_o \sum f_o^2 + a_1 \sum f_1 f_o + a_2 \sum f_2 f_o + \ldots + a_p \sum f_p f_o \\
\sum gf_1 &= a_o \sum f_o f_1 + a_1 \sum f_1^2 + a_2 \sum f_2 f_1 + \ldots + a_p \sum f_p f_1 \\
\sum gf_2 &= a_o \sum f_o f_2 + a_1 \sum f_1 f_2 + a_2 \sum f_2^2 + \ldots + a_p \sum f_p f_2 \\
&\vdots \\
\sum gf_p &= a_o \sum f_o f_p + a_1 \sum f_1 f_p + a_2 \sum f_2 f_p + \ldots a_p \sum f_p^2
\end{aligned}
\tag{18.68}
$$

Če zaznamujemo vektorja funkcije y in parametrov a

$$
\begin{aligned}
(g(y_1), g(y_2) \ldots g(y_N)) &= g \\
(a_o, a_1 \ldots a_p) &= a
\end{aligned}
\tag{18.69}
$$

in matriko funkcij $f(x)$

$$
\begin{pmatrix}
f_o(x_1) & f_o(x_2) & \ldots\ldots & f_o(x_N) \\
f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots\ldots & f_1(x_N) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
f_p(x_1) - & f_p(x_2) & \ldots\ldots & f_p(x_N)
\end{pmatrix} = f
\tag{18.70}
$$

moremo sistem normalnih enačb pisati v matrični obliki

$$
g f' = a f f' \tag{18.71}
$$

Če postavimo, da je $gf' = G$, $ff' = F$, je

$$
G = aF \quad \text{in} \quad a = GF^{-1} \tag{18.72}
$$

Nepojasnjena varianca

$$\sigma^2_{\varepsilon(g)} = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} g_i^2 - \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{i=1}^{N} f_{ki}\, g_i\right] = \frac{1}{N}\left[gg' - GF^{-1}G'\right] \qquad (18.73)$$

Determinacijski koeficient krivuljčne korelacije

$$I^2_{g(y),x} = 1 - \frac{\sigma^2_{\varepsilon(g)}}{\sigma^2_{g(y)}} \qquad (18.74)$$

<u>Regresijski modeli tipa $g(y) = \alpha_0 + \beta_1 f(x) + \varepsilon$</u>. Poseben primer gornjega splošnejšega modela je regresijski model

$$g(y) = \alpha_0 + \beta_1 f(x) + \varepsilon \qquad (18.75)$$

Če vpeljemo za ta primer transformacijo $g(y) = Y$ in $f(x) = X$, je regresijski model v transformiranih znakih linearni model

$$Y = \alpha_0 + \beta_1 X + \varepsilon \qquad (18.76)$$

Take vrste krivuljčne regresije obravnavamo enostavno tako kot linearne odvisnosti po naslednjih stopnjah:

1. Glede na poznavanje zakonitosti povezanosti med x in y ali iz korelacijskega grafikona ugotovimo ustrezni transformaciji $Y = g(y)$, $X = f(x)$.

2. Vrednosti osnovnih znakov $x_i = x_1 \ldots x_N$ in $y_i = y_1 \ldots y_N$ prevedemo v transformirane znake $X_i = f(x_i)$, $Y_i = g(y_i)$, $i = 1,2 \ldots N$.

3. Iz transformiranih vrednosti znakov X_i in Y_i izračunamo pokazovalce za linearno regresijo in korelacijo za X in Y

$$Y' = M_Y + b_1 (X - M_X) \;;\; b_1 = \frac{C_{XY}}{\sigma^2_X} \;;\; \rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad (18.77)$$

4. V regresijski enačbi med X in Y′ nadomestimo transformirane spremenljivke z f(x) in g(y′)

$$g(y') = M_Y + b_1 \left[f(x) - M_X \right] \tag{18.78}$$

in y′ iz te enačbe izrazimo eksplicitno

$$y' = h\,(x\,;\; M_X,\, M_Y \,.\, b_1) \tag{18.79}$$

5. Korelacijski koeficient $\rho_{XY} = \rho_{f(x),g(y)}$ je koeficient linearne korelacije med f(x) in g(y) in ne med x in y. Glede na znaka x in y ima $\rho_{f(x),g(y)}$ značaj mere krivuljčne korelacije. Prav tak značaj ima za ta primer tudi $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma^2_{g(y).f(x)}$.

Tabela 18.12 Regresijske funkcije za različne zakonitosti spreminjanja spremenljivk x in y

	$E=b$		$E=\frac{b}{x}$		$E=\frac{b}{y}$		$E=b(1-\frac{y}{y_\infty})$		$E=b(1-\frac{x}{x_o})$		
	$y'=f(x)$		$y'=f(x)$		$y'=f(x)$		$y'=f(x)$		$y'=f(x)$		
	$g(y)$	$h(x)$	$g(y)$	$h(x)$	$g(y)$	$h(x)$	$g(y)$	$h(x)$	$g(y)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$
$E=\frac{dy}{dx}$	$y'=M_y+b(x-M_x)$		$y'=M_y+b\ln\frac{x}{G_x}$		$y=\sqrt{Q_y+2b(x-M_x)}$		$y'=y_\infty\left(1-\frac{y_\infty-y_o}{y_\infty}e^{-\frac{bx}{y_\infty}}\right)$		$y'=y_o-\frac{b}{2}\frac{(x-x_o)^2}{x_o}$		
	y	x	y	$\ln x$	y^2	x	y	$e^{-\frac{bx}{y_\infty}}$	y	x	x^2
$E=\frac{dy/y}{dx}$	$y'=G_x\cdot e^{b(x-M_x)}$		$y'=G_y\left(\frac{x}{G_x}\right)^b$		$y'=M_y+b(x-M_x)$		$y'=\frac{y_\infty}{1+\frac{y_\infty-y_o}{y_o}e^{-bx}}$		$y'=y_o e^{-\frac{b}{2}\frac{(x-x_o)^2}{x_o}}$		
	$\ln y$	x	$\ln y$	$\ln x$	y	x	$\frac{1}{y}$	e^{-bx}	$\ln y$	x	x^2
$E=\frac{dy}{dx/x}$	$y'=M_y+b\ln\frac{x}{G_x}$		$y'=M_y-b\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{H_x}\right)$		$y'=\sqrt{Q_y+\frac{b}{2}\ln\frac{x}{G_x}}$		$y'=y_\infty\left(1-\frac{y_\infty-y_1}{y_\infty}x^{-\frac{b}{y_\infty}}\right)$		$y'=y_o+b\left(\ln\frac{x}{x_o}-\frac{x-x_o}{x_o}\right)$		
	y	$\ln x$	y	$\frac{1}{x}$	y^2	$\ln x$	y	x^{-b/y_∞}	y	$\ln x$	x
$E=\frac{dy/y}{dx/x}$	$y'=G_y\left(\frac{x}{G_x}\right)^b$		$y'=G_y e^{-b\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{H}\right)}$		$y'=M_y+b\ln\frac{x}{G_x}$		$y'=\frac{y_\infty}{1+\frac{y_\infty-y_1}{y_1}x^{-b}}$		$y'=y_o\left(\frac{x}{x_o}\right)^b\cdot e^{-b\frac{x-x_o}{x_o}}$		
	$\ln y$	$\ln x$	$\ln y$	$\frac{1}{x}$	y	$\ln x$	$\frac{1}{y}$	x^{-b}	$\ln y$	$\ln x$	x

Večparametrski regresijski model posebnega tipa

Regresijski model

$$y = \sum_k a_k f_k(x) + \varepsilon \tag{18.80}$$

Regresijska funkcija

$$y' = \sum_k a_k f_k(x) \tag{18.81}$$

Polinom celih potenc

Regresijska funkcija

$$y' = \sum_{k=o}^{p} a_k x^k = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p \tag{18.82}$$

Sistem normalnih enačb

Sistem normalnih enačb pa je

$$\sum_{i=1}^{N} y_i x_i^{j} = \sum_{k=o}^{p} a_k \sum_{i=1}^{N} x_i^{k+j} \qquad \begin{array}{l} j = 0,1,2 \ldots p \\ k = o,1,2 \ldots p \end{array} \tag{18.83}$$

Vsote produktov $\sum f_k f_j$ so v tem posebnem primeru enake $\sum f_k f_j = \sum x^{k+j}$ vsotam potenc znaka x za vse enote populacije.

Pogosto so vrednosti x dane v aritmetičnem zaporedju $x_{i+1} = x_i + \Delta$. V tem primeru uvedemo namesto x ustrezno transformacijo

$$u = \frac{x - x_1}{\Delta} - \frac{N-1}{2} \qquad \text{če je } N = \text{liho število} \tag{18.84}$$

$$u = \frac{2(x - x_1)}{\Delta} - (N-1) \qquad \text{če je } N = \text{sodo število}$$

Za transformirani u je vsota lihih potenc nič

$$\sum u^{2s+1} = 0 \qquad s = 0, 1, 2 \ldots p-1 \tag{18.85}$$

medtem ko je vsota sodih potenc

$$\sum u^{2s} \qquad s = 0, 1, 2 \ldots p \tag{18.86}$$

odvisna samo od N in s.

Sistem normalnih enačb razpade v dva sistema linearnih enačb. Za polinom četrte stopnje sta sistema enačb npr. takale:

$$\begin{aligned}
\sum y &= a_o N &&+ a_2 \sum u^2 &&+ a_4 \sum u^4 \\
\sum yu &= a_1 \sum u^2 &&+ a_3 \sum u^4 && \\
\sum yu^2 &= a_o \sum u^2 &&+ a_2 \sum u^4 &&+ a_4 \sum u^6 \\
\sum yu^3 &= a_1 \sum u^4 &&+ a_3 \sum u^6 && \\
\sum yu^4 &= a_o \sum u^4 &&+ a_2 \sum u^6 &&+ a_4 \sum u^8
\end{aligned} \tag{18.87}$$

$$\begin{aligned}
\sum yu &= a_o N + a_2 \sum u^2 + a_4 \sum u^4 \\
\sum yu^2 &= a_o \sum u^2 + a_2 \sum u^4 + a_4 \sum u^6 \\
\sum yu^4 &= a_o \sum u^4 + a_2 \sum u^6 + a_4 \sum u^8
\end{aligned} \tag{18.88}$$

$$\begin{aligned}
\sum yu &= a_1 \sum u^2 + a_3 \sum u^4 \\
\sum yu^3 &= a_1 \sum u^4 + a_3 \sum u^6
\end{aligned}$$

Prvi velja za parametre a_o, a_2, a_4 in drugi pa za a_1 in a_3.

Nepojasnjena varianca

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \sum_{k=o}^{p} a_k \sum_{i=1}^{N} y_i x_i^k\right] \tag{18.89}$$

Če predpostavljamo regresijski model 18.62

$$g(y) = \sum_k a_k f_k(x) + \mathcal{E} \quad ; \quad \mathcal{E} =: N(0, \sigma_{\mathcal{E}}^2) \tag{18.90}$$

in iz populacije na slučajnostni način izberemo n vrednosti y pri n vrednostih x, so po gornjih obrazcih izračunani parametri a_υ le ocene pravih vrednosti .

Nepristransko oceno za $\sigma_{\mathcal{E}}^2$ pa izračunamo po obrazcu

$$s_e^2 = \frac{1}{n-p-1} \left[\underset{i}{S}\, g(y_i)^2 - \sum_k a_k \sum_i f_k\, g(y_i) \right] \tag{18.91}$$

m=n-p-1 je število stopinj prostosti, ker imamo v modelu p + 1 parameter.

<u>Korelacijsko razmerje</u> $\eta^2_{y.x}$

$$\sigma_y^2 = \sigma_M^2 + M_{\sigma^2} \tag{18.92}$$

$$\eta^2_{\bar{y}.x} = \frac{\sigma^2_M}{\sigma^2_y} = \frac{\frac{1}{N}\sum N_k (M_k - M)^2}{\frac{1}{N}\sum (y - M)^2} \tag{18.93}$$

$$\eta^2_{y.x} = \frac{\sum_k Y_k^2/N_k - Y^2/N}{\sum_k \sum_i y_{ki}^2 - Y^2/N} = \frac{Q_k - Q}{Q_{ki} - Q}$$

<u>Preskušanje značilnosti za $\eta^2_{y.x}$</u>

Če so podatki po grupah rezultati slučajnostnih vzorcev, moremo značilnost za korelacijsko razmerje preskusiti z izrazom

$$F = \frac{\eta^2_{y.x}}{1 - \eta^2_{y.x}} \cdot \frac{n-k}{k-1} \tag{18.94}$$

ki se pri istih predpostavkah kot pri analizi variance porazdeljuje v F porazdelitvi z $m_1 = k-1$ in $m_2 = n-k$ stopinjami prostosti. Izračunani F torej primerjamo s kritičnimi vrednostmi F_α (m_1=k-1; m_2 = n-k) pri različnih stopnjah tveganja α.

Z izrazom

$$F = \frac{\eta_{y.x}^2 - r_{xy}^2}{1 - \eta_{y.x}^2} \cdot \frac{n-k}{k-2} \tag{18.95}$$

pa s pomočjo F_α (m_1=k-2 ; m_2 = n-k) preskušamo ničelno domnevo H_o : $y=\alpha+\beta x+\varepsilon$, da je y linearno odvisen od x. Seveda moremo ta preskus izvesti le, če sta x in y numerična, ker drugače ne moremo izračunati korelacijskega koeficienta r_{xy}.

Korelacija ranga

Spearmanov koeficient korelacije ranga

$$\rho_S = 1 - \frac{6\sum d_R^2}{N(N^2-1)} \tag{18.96}$$

Pri tem je: ρ_S = koeficient korelacije ranga; $\sum d_R^2 = \sum (R_y - R_x)^2$ = vsota kvadratov razlik med rangoma za oba znaka.

Preskušanje značilnosti Spearmanovega koeficienta korelacije ranga

$$\frac{r_S\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_S^2}} = t \tag{18.97}$$

Asociacija in kontingenca

Kontingenca

Teoretična frekvenca

$$f'_{kg} = \frac{f_k \cdot f_g}{N} \tag{18.98}$$

Merila stopnje kontingence

$$\chi^2 = \sum_{kg} \frac{(f_{kg} - f'_{kg})^2}{f'_{kg}} \tag{18.99}$$

$$\chi^2 = \sum_{kg} \frac{f^2_{kg}}{f'_{kg}} - N = \left(\sum_{kg} \frac{f^2_{kg}}{f_k . f_g} - 1 \right) N = \left(\sum_k \frac{1}{f_k} \sum_g \frac{f^2_{kg}}{f_g} - 1 \right) N \tag{18.100}$$

Poprečna kvadratična kontingenca

$$\phi^2 = \chi^2/N = \sum_{kg} \frac{f^2_{kg}}{f_k f_g} - 1 \tag{18.101}$$

Pearsonov koeficient kontingence

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N+\chi^2}} = \sqrt{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}} \tag{18.102}$$

$$C_{max} = \sqrt{\frac{N(k-1)}{N+N(k-1)}} = \sqrt{\frac{k-1}{k}} \tag{18.103}$$

$$C_{pop} = \frac{C}{C_{max}} = \sqrt{\frac{k}{k-1} \cdot \frac{\chi^2}{N+\chi^2}} \tag{18.104}$$

Popravljeni χ^2

$$\chi^2_{pop} = \frac{\chi^2}{N(k-1)} \tag{18.105}$$

Korelacijski koeficient

$$r = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(k-1)}} \tag{18.106}$$

Preskušanje domnev o odvisnosti s χ^2-preskusom. Pogosto je kontingenčna tabela rezultat vzorca iz umišljene populacije. Če velja ničelna domneva, da sta znaka neodvisna, se koeficient kontingence χ^2 porazdeljuje v χ^2 porazdelitvi. Število stopinj prostosti je lahko določiti. Od skupno k.g podatkov v kontingenčni tabeli je v vsaki vrsti oziroma stolpcu ena frekvenca odvisna od drugih, ker so vsote frekvenc vezane na robne vsote. Prav zato je število stopinj prostosti $m = (k-1)(g-1)$.

Homogenost za skupino strukturnih deležev

	1	2	......	k	......	r	
-	f_1^-	f_2^-	......	f_k^-	......	f_r^-	f_-
+	f_1^+	f_2^+	......	f_k^+	.....	f_r^+	f^+
	n_1	n_2		n_k		n_r	n

Za kontingenčno tabelo 2 x r izračunamo χ^2 po enem izmed obrazcev

$$\chi^2 = \frac{n_k\,(p_k\% - \bar{p}\%)^2}{\bar{p}\,\%\,(100 - \bar{p}\%)} \;;\quad p_k\% = 100\,\frac{f_k^+}{n_k}\;;\quad \bar{p}\% = 100\,\frac{f^+}{n} \tag{18.107}$$

$$\chi^2 = \frac{n^2}{f^- \cdot f^+}\left[\sum_k \frac{(f_k^+)^2}{n_k} - \frac{(f^+)^2}{n}\right] \tag{18.108}$$

Če štejemo n_k enot kot vzorce, značilnost odvisnosti proučujemo z χ^2-preskusom z $m = (2-1)(r-1) = r-1$ stopnjami prostosti.

Preskušanje enakosti frekvenc

$$\chi^2 = \frac{\sum (f_k - \bar{f})^2}{\bar{f}} = \frac{r}{n}\sum f_k^2 - n$$

Asociacija

Za asociacijo, za katero je kontingenčna tabela 2 x 2, ki jo moremo pisati simbolično

$$\begin{array}{cc|c} a & b & a+b \\ c & d & c+d \\ \hline a+c & b+d & N \end{array} \tag{18.109}$$

je tabela teoretičnih frekvenc

$$a' = \frac{(a+c)(a+b)}{N} \qquad b' = \frac{(b+d)(a+b)}{N} \tag{18.110}$$

$$c' = \frac{(a+c)(c+d)}{N} \qquad d' = \frac{(b+d)(c+d)}{N}$$

Pokazovalci asociacije, prenešeni iz kontingence za 2 x 2 pa so v gornjih simbolih

$$\chi^2 = \frac{N\,(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = (a-a')^2\left[\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} + \frac{1}{d'}\right] \tag{18.111}$$

$$\phi^2 = \frac{(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \tag{18.112}$$

Atributivnim znakom v ožjem pomenu, to je znakom z dvema vrednostima, pripišemo formalne numerične vrednosti: eni 0, drugi pa 1. Za tak primer moremo iz kombinacijske tabele

y \ x	0	1	
0	a	b	a+b
1	c	d	c+d
	a+c	b+d	N

izračunati formalno korelacijski koeficient ρ_{xy}. Izkaže se, da je izračunani koeficient V

$$V = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \tag{18.114}$$

v ozki zvezi s χ^2 oziroma ϕ^2

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}} = \sqrt{\phi^2} \tag{18.115}$$

Razen nakazanih koeficientov asociacije pogosto izračunavamo Yule-ov koeficient asociacije Q

$$Q = \frac{ad - bc}{ad + bc} \tag{18.116}$$

<u>Preskušanje domnev o asociaciji</u>. Če so podatki v kontingenčni tabeli 2 x 2 rezultat iz vzorca, značilnost asociacije podobno kot za kontingenco preskušamo z χ^2-preskusom. Ker je ta preskus le približen, izračunamo po obrazcu

$$\chi^2_{pop} = \frac{\left(|ad-bc| - \frac{n}{2}\right)^2 n}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \left(|a - a'| - 0.5\right)^2 \left[\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} + \frac{1}{d'}\right] \tag{18.117}$$

popravljen χ^2 (Yatesov popravek). Ker je za asociacijo m = (k-1)(g-1)=(2-1)(2-1)=1, primerjamo χ^2_{pop} s kritičnimi vrednostmi za posamezne stopnje tveganja pri m = 1

α	0,10	0,05	0,01	0,001
$\chi^2_\alpha(1)$	2,71	3,84	6,64	10,83

Popravek uporabljamo, če so teoretične frekvence relativno majhne (najmanjša manjša kot 5).

Preskus z mediano

	slabih	dobrih	
- v prvi polovici	a	n/2-a	n/2
- v drugi polovici	b	n/2-b	n/2
	a+b	n-a-b	n

Če za ta primer izračunamo χ^2, dobimo po obrazcu 18.117

$$\chi^2_{pop} = \frac{(|a-b| - 1)^2\, n}{(a+b)(n-a-b)} \tag{18.118}$$

Neparametrično preskušanje domnev za vezana vzorca.

Neparametrična metoda preskušanja razlik za dva vezana vzorca se s prireditvijo χ^2-preskusa za mediano prevede na preskus s predznaki. Da bi preskusili domnevo $H_o : M_e(y_2) = Me(y_1) + D$, izračunamo iz podatkov $y_{1,i}$ in $y_{2,i}$ za dva odvisna vzorca izraze $u_i = y_{2i} - y_{1i} - D$. Če velja ničelna domneva, je število vrednosti u_i s pozitivnimi predznaki (f^+) in število enot z negativnimi predznaki (f^-) približno enako oziroma v skladu s slučajnostnimi odkloni. V nasprotnem primeru, če ničelna domneva ne velja, pa razlika med f^+ in f^- ni odvisna samo od slučaja, večja. Za ta primer odvisnosti preskušamo ničelno domnevo s χ^2- preskusom števila pozitivnih f^+ in negativnih u_i f^- po obrazcu

$$\chi^2 = \frac{(|f^+ - f^-| - 1)^2}{f^+ + f^-} \tag{18.119}$$

Neparametrični preskus za dva neodvisna vzorca

	pod mediano	nad mediano	Skupaj
Pogoj 1	$n_1 - a_1$	a_1	n_1
Pogoj 2	$n_2 - a_2$	a_2	n_2
Skupaj	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	n

Če za ta primer priredimo obrazec (18.11), dobimo

$$\chi^2 = \frac{(|n_1 - 2a_1| - 1)^2 . n}{n_1 (n - n_1)} = \frac{(|n_2 - 2a_2| - 1)^2 . n}{n_2 (n - n_2)} \qquad (18.120)$$

ki ga preskušamo s $\chi^2(1)$ z eno stopinjo prostosti.

Če je $n_1 = n_2 = \bar{n}$, je obrazec 18.120 še enostavnejši

$$\chi^2 = \frac{2(|\bar{n} - 2a_2| - 1)^2}{\bar{n}} \qquad (18.121)$$

Multipla regresija in korelacija

Multipla regresijska odvisnost implicitno

$$y = h\,(x_1, x_2 \ldots x_p, \varepsilon) \qquad (18.122)$$

Multipla regresijska odvisnost eksplicitno

$$y = f\,(x_1, x_2 \ldots x_p) + \varepsilon \qquad (18.123)$$

$$y' = f(x_1, x_2 \ldots x_p)$$

Varianca zaradi posamičnih vplivov

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_{y.1,2\ldots p}^2 = \frac{1}{N}\sum (y - y')^2 \qquad (18.124)$$

Linearna multipla regresija

Linearni regresijski podel

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p + \varepsilon \qquad (18.125)$$

Regresijska hiperravnina

$$y' = a_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots b_p x_p \qquad (18.126)$$

Regresijski model v standardiziranih znakih

$$z_y = \frac{y - M_y}{\sigma_y}\ ; \quad z_1 = \frac{x_1 - M_1}{\sigma_1}\ ; \quad z_2 = \frac{x_2 - M_2}{\sigma_2}\ ; \ \dots\ z_p = \frac{x_p - M_p}{\sigma_p} \qquad (18.127)$$

$$\frac{1}{N}\sum z = M_z = 0; \quad \frac{1}{N}\sum z^2 = \sigma_z^2 = 1; \quad \frac{1}{N}\sum z_i z_j = r_{ij}, \ i \neq j \qquad (18.128)$$

$$z_y = a_o + b_1 z_1 + b_2 z_2 + \dots + b_p z_p + \varepsilon_{y.1.2\dots p} \qquad (18.129)$$

Normalne enačbe, parametri b in regresijska funkcija za linearno regresijo standardiziranih znakov

$$0 = a_o$$

$$r_{yj} = \sum_k b_k r_{kj} \qquad j = 1,2 \dots p \qquad r_{kj} = 1, \text{ če je } k=j \qquad (18.133)$$

Če ta sistem pišemo v razviti obliki, so normalne enačbe za parametre b_i naslednje:

$$\begin{aligned} r_{y1} &= b_1 + b_2 r_{21} + \dots + b_p r_{p1} \\ r_{y2} &= b_1 r_{12} + b_2 + \dots + b_p r_{p2} \\ &\vdots \\ r_{yp} &= b_1 r_{1p} + b_2 r_{2p} + \dots + b_p \end{aligned} \qquad (18.134)$$

Če definiramo vektorja r in b in matriko korelacijskih koeficientov R

$$r = \begin{pmatrix} r_{y1} \\ r_{y2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{yp} \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_p \end{pmatrix} ; \quad R = \begin{pmatrix} 1 & r_{21} \ldots\ldots & r_{p1} \\ r_{12} & 1 \ldots\ldots & r_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{1p} & r_{2p} \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{18.135}$$

moremo sistem normalnih enačb napisati v matrični obliki

$$r = R\,b \tag{18.136}$$

Iz tega je dalje

$$b = R^{-1} r \tag{18.137}$$

Če temu sistemu dodamo še enačbo regresijske ravnine

$$z''_y = z'b \tag{18.138}$$

pri čemer je z vektor $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_p \end{pmatrix}$ neodvisnih spremenljivk, ima homogen sistem enačb

$$\begin{aligned} z''_y - z'b &= 0 \\ r - R\,b &= 0 \end{aligned} \tag{18.139}$$

netrivialno rešitev, če je izpolnjen pogoj

$$\begin{vmatrix} z''_y & z' \\ r & R \end{vmatrix} = 0 \tag{18.140}$$

V razviti obliki moremo to enačbo pisati:

$$\begin{vmatrix} z''_y & z_1 & z_2 & \cdots & z_p \\ r_{y1} & 1 & r_{21} & \cdots & r_{p1} \\ r_{y2} & r_{12} & 1 & \cdots & r_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ r_{yp} & r_{1p} & r_{2p} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (18.141)$$

Če z R_{yi} označimo minorje ustrezne prvi vrsti v enačbi 18.141 dobimo, da je

$$z''_y R_{yy} + z_1 R_{y1} + z_2 R_{y2} + \cdots + z_p R_{yp} = 0 \qquad (18.142)$$

ali z''_y eksplicitno

$$z''_y = - \frac{R_{y1}}{R_{yy}} z_1 - \frac{R_{y2}}{R_{yy}} z_2 - \cdots - \frac{R_{yp}}{R_{yy}} z_p \qquad (18.143)$$

Multipla linearna odvisnost od dveh neodvisnih znakov

Enačba regresijske zveze je

$$z'_y = b_1 z_1 + b_2 z_2 \qquad (18.144)$$

ustrezni vektorji b, r in matrika R pa

$$r = \begin{pmatrix} r_{y1} \\ r_{y2} \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} ; \quad R = \begin{pmatrix} 1 & r_{21} \\ r_{12} & 1 \end{pmatrix} \qquad (18.145)$$

Da bi izračunali vektor koeficientov b, moramo najprej poiskati R^{-1}

$$R^{-1} = \frac{1}{1 - r_{12}^2} \begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix} \qquad (18.146)$$

$$b = R^{-1} r = \frac{1}{1 - r_{12}^2} \begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{y1} \\ r_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{r_{y1} - r_{12} r_{y2}}{1 - r_{12}^2} \\ \dfrac{r_{y2} - r_{21} r_{y1}}{1 - r_{12}^2} \end{bmatrix} \qquad (18.147)$$

$$b_1 = \frac{r_{y1} - r_{12} r_{y2}}{1 - r_{12}^2} \; ; \quad b_2 = \frac{r_{y2} - r_{21} r_{y1}}{1 - r_{12}^2} \qquad (18.148)$$

Regresijsko funkcijo moremo po 18.141 pisati tudi v obliki determinante:

$$\begin{vmatrix} z''_y & z_1 & z_2 \\ r_{y1} & 1 & r_{21} \\ r_{y2} & r_{12} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (18.149)$$

<u>Koeficient in koeficient determinacije multiple korelacije</u> $R_{y.12..p}$

$$R^2_{y.12...p} = 1 - \frac{\sigma^2_{y.12..p}}{\sigma^2_y} \qquad (18.150)$$

$$\frac{1}{N} \sum e^2_{y.12..p} = \frac{1}{N} \sum (z_y - z''_y)^2 = \frac{\sigma^2_{y.12..p}}{\sigma^2_y} = 1 - R^2_{y.12..p} \qquad (18.151)$$

$$z''_y = \sum b_k z_k \qquad (18.152)$$

$$\sigma^2_{z''_y} = \frac{\sigma^2_{y*}}{\sigma^2_y} = R^2_{y.12..p} \qquad (18.153)$$

$$R^2_{y.12..p} = \sum_{k=1}^{p} b_k r_{yk} \qquad (18.155)$$

$$R^2_{y.12..p} = r'b = r'R^{-1}r = \frac{-\begin{vmatrix} o & r' \\ r & R \end{vmatrix}}{|R|} \qquad (18.156)$$

Multipla odvisnost od dveh neodvisnih znakov

$$R^2_{y.12} = (r_{y1}, r_{y2}) \cdot \frac{1}{1 - r^2_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -r_{21} \\ -r_{12} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{y1} \\ r_{y2} \end{pmatrix} = \frac{r^2_{y1} + r^2_{y2} - 2r_{12} r_{y1} r_{y2}}{1 - r^2_{12}} \qquad (18.157)$$

$$R^2_{y.12} = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & r_{y1} & r_{y2} \\ r_{1y} & 1 & r^2_{12} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r^2_{y1} + r^2_{y2} - 2\, r_{12}\, r_{y1}\, r_{y2}}{1 - r^2_{12}} \qquad (18.158)$$

Parcialna linearna korelacija

$$z_x = \sum_{k=1}^{p} b_{xk} z_k + e_{x.12..p} \; ; \quad z_y = \sum_{k=1}^{p} b_{yk} z_k + e_{y.12..p} \qquad (18.159)$$

$$e_{x.12..p} = z_x - \sum_{k=1}^{p} b_{xk} z_k$$

$$e_{y.12..p} = z_y - \sum_{k=1}^{p} b_{yk} z_k \qquad (18.160)$$

$$r_{xy.12..p} = r_{e_{x.12..p} \cdot e_{y.12..p}} = \frac{C_{e_{x.12..p} \cdot e_{y.12..p}}}{\sigma_{e_{x.12..p}} \sigma_{e_{x.12..p}}} \tag{18.161}$$

$$r_{xy.12..p} = \frac{r_{xy} - \sum_k b_{xk} r_{ky}}{\sqrt{1-R^2_{x.12..p}} \sqrt{1-R^2_{y.12..p}}} = \frac{r_{xy} - \sum_k b_{yk} r_{kx}}{\sqrt{1-R^2_{x.12..p}} \sqrt{1-R^2_{y.12..p}}} \tag{18.165}$$

$$r_{xy.12..p} = \frac{r_{xy} - \underset{r}{x'} R^{-1} \underset{r}{y}}{\sqrt{1-\underset{r}{x'} R^{-1} \underset{r}{x}} \sqrt{1-\underset{r}{y'} R^{-1} \underset{r}{y}}} = \frac{\begin{vmatrix} r_{xy} & \underset{r}{y'} \\ \underset{r}{x} & R \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \underset{r}{x'} \\ \underset{r}{x} & R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \underset{r}{y'} \\ \underset{r}{y} & R \end{vmatrix}}} \tag{18.166}$$

$$r_{xy.1} = \frac{r_{xy} - r_{x1} r_{y1}}{\sqrt{1-r^2_{x1}} \sqrt{1-r^2_{y1}}} \tag{18.167}$$

$$r_{xy.12} = \frac{r_{xy.2} - r_{x1.2} r_{y1.2}}{\sqrt{1-r^2_{x\,1.2}} \sqrt{1-r^2_{y1.2}}} \tag{18.169}$$

Partkorelacijski koeficient

$$z_y = A_1 z_1 + A_{2.1} z_{2.1} + \ldots + A_{k.12\ldots k-1} z_{k.12\ldots k-1} + A_{p.12.(p-1)} z_{p.12.(p-1)} +$$
$$+ A_{y.12..p} z_{y.12...p} \tag{18.170}$$

Ta enačba je zapisana tako, da je iz vsake naslednje neodvisne spremenljivke izločen linearni vpliv predhodnih. Npr. $z_{k.12.(k-1)}$ je zapis standardizirane spremenljivke k, iz katere je izločen 1,2 (k-1). Zato so vsi $z_{k.12.(k-1)}$ med seboj ortogonalni. Iz tega sledi, da je

$$\frac{1}{N} \sum z_{k.12.(k-1)} z_{j,12..(j-1)} = \begin{matrix} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{matrix} \tag{18.171}$$

Partkorelacijski koeficient $_{y}r_{k.12..(k-1)}$

$$_{y}r_{k.12..(k-1)} = r_{yk.12..(k-1)} \sqrt{1 - R^2_{y.22..(k-1)}} \qquad (18.177)$$

Sestava multiple korelacije je nazorno podana s partkorelacijskimi koeficienti. Ker je

$$z''_y = A_1 z_1 + A_{2.1} z_{2.1} + \ldots\ldots A_{p.12..(p-1)} z_{p.12..(p-1)} \qquad (18.178)$$

je determinacijski koeficient multiple korelacije

$$R^2_{y.12..p} = \frac{1}{N} \sum z''^2_y = \frac{1}{N} \sum \left[A_1 z_1 + A_{2.1} z_{2.1} + \ldots + A_{p.12..(p-1)} z_{p.12..(p-1)} \right]^2 =$$

$$= A_1^2 + A^2_{2.1} + \ldots A^2_{p.12..(p-1)} \qquad (18.179)$$

ker so $z_{k.12..(k-1)}$ med seboj ortonormalni. Tako dobimo dalje, da je po 18.172 in 18.179

$$R^2_{y.12..p} = {}_{y}r_1^2 + {}_{y}r^2_{2.1} + {}_{y}r^2_{3.12} + \ldots + {}_{y}r^2_{p.12..(p-1)} = \sum_{k=1}^{p} {}_{y}r^2_{k.12..(k-1)} \qquad (18.180)$$

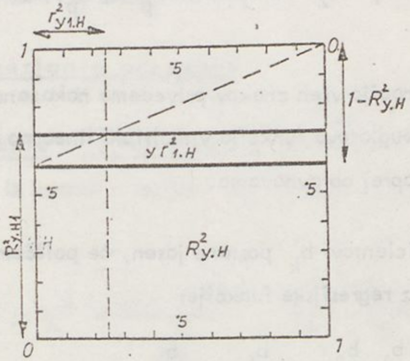
$$R^2_{y.12..p} = r^2_{y1} + r^2_{y2.1}(1 - r^2_{y1}) + r^2_{y3.12}(1 - R^2_{y.12}) + \ldots + r^2_{yp.12.(p-1)}(1 - R^2_{y.12.(p-1)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} r^2_{yk.12..(k-1)}(1 - R^2_{y.12.(k-1)}) \qquad . \qquad (18.181)$$

$${}_{y}r^2_{1.H} = R^2_{y.H1} - R^2_{y.H} \qquad (18.182)$$

$$r^2_{y1.H} = \frac{R^2_{y.H1} - R^2_{y.H}}{1 - R^2_{y.H}} \tag{18.183}$$

Celotna varianca, ki je v relativnem enaka 1, je ponazorjena s kvadratom s stranico 1. Ta kvadrat je v skladu z odnosi med raziskovanimi pokazovalci razdeljen v ustrezne pravokotnike, katerih ploščina je v sorazmerju z njihovo velikostjo.



Slika 18.12 Odnosi med $R^2_{y.H}$, $R^2_{y.H1}$, $_yr^2_{1.H}$ in $r^2_{y1.H}$

Multipla krivuljčna regresija in korelacija

Krivuljčna parabolična regresija drugega reda

$$y = a + \sum_{k=1}^{p} b_k x_k + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j \leq k} c_{kj} x_k x_j + e \tag{18.185}$$

s $\binom{p+2}{2}$ parametri

V posebnem primeru, če je p=2, dobimo

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c_{11} x_1^2 + c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2 + e \tag{18.186}$$

Prav tako moremo razširiti npr. tudi regresijo $y = a + b\sqrt{x} + cx + e$

$$y = a + b_1\sqrt{x_1} + b_2\sqrt{x_2} + c_{11} x_1 + c_{12}\sqrt{x_1 \cdot x_2} + c_{22} x_2 + e$$

Coob-Douglasova funkcija

$$y = a \cdot x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_p^{b_p} E \tag{18.189}$$

ali v implicitivni obliki

$$\log y = \log a + b_1 \log x_1 + b_2 \log x_2 \ldots + b_p \log x_p + e \tag{18.190}$$

Z logaritemsko transformacijo vseh znakov privedemo nakazano regresijo, ki je znana pod imenom Coob-Douglasova funkcija v multiplo linearno regresijo logaritmov in jo na ta način tudi naprej obravnavamo.

Pomen regresijskih koeficientov b_k postane jasen, če poiščemo parcialni diferencialni kvocient po x_k iz regresijske funkcije:

$$y' = a\, x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_k^{b_k} \ldots x_p^{b_p} \tag{18.191}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x_k} = b_k \cdot a\, x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_k^{b_k - 1} \ldots x_p^{b_p} = b_k \frac{y'}{x_k} \tag{18.192}$$

Iz tega spoznamo, da je

$$b_k = \frac{\partial y' / y'}{\partial x_k / x_k} \tag{18.193}$$

parcialni prožnostni koeficient, ki pove, za koliko se relativno spremeni v poprečju y', če se x_k spremeni relativno za enoto, npr. en odstotek, če so drugi x_k nespremenjeni.

DEVETNAJSTO POGLAVJE
STATISTIČNO PREVERJANJE KAKOVOSTI

Statistično preverjanje procesov

Kontrolne karte. $\bar{y}$ - s karta. Domnevi: $H_o: M = M_o$ in $H_o: \sigma^2 = \sigma_o^2$ iz vzorca n meritev $y_1\ y_2 \ldots\ y_n$ preskušamo prek preskusnih izrazov

$$z = \frac{\bar{y} - M_o}{\sigma_o}\sqrt{n}\ ;\ \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_o^2}\ ;\ z_p\ ;\ \chi^2_{p(m=n-1)} \qquad (19.3)$$

Če veljata ničelni domnevi o poprečju in varianci, veljata znani verjetnostni neenačbi

$$\Pr(\bar{y}_s = M_o - z_P \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}} < \bar{y} < \bar{y}_z = M_o + z_P \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}) = 1 - 2P = 1 - \alpha$$

$$\Pr(s^2 < s_z^2 = \frac{\sigma_o^2 \chi_P^2}{m-1}) = 1 - P = 1 - \alpha \qquad (19.4)$$

ki služita kot osnova za preskušanje domnev o M in σ^2.

$\bar{y}$ - karta

zgornja kontrolna črta ZKČ : $\bar{y}_z = M_o + z_P \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}$

osrednja črta ОČ: M_o

spodnja kontrolna črta SKČ : $\bar{y}_s = M_o - z_P \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}$

s-karta

zgornja kontrolna črta ZKČ: $s_z = \sqrt{\dfrac{\sigma_o^2\ \chi_P^2(n-1)}{n-1}}$

osrednja črta OČ: σ_o

Karte za število enot z dano značilnostjo d, strukturni delež p število enot c, ki se redko pojavljajo.

$$d \doteq : N\left[nP;\ nP(1-P)\right] \quad ; \quad p\% \doteq : N\left[P\%\ ;\ \frac{P\%\ (100-P\%)}{n}\right] \tag{19.5}$$

$$c =: N\ (\lambda\ ,\ \lambda) \tag{19.6}$$

Iz take zakonitosti dobimo ustrezne SKČ, OKČ in ZKČ po obrazcih

	d	p%	c
ZKČ	$nP_o + z_P\sqrt{n\,P_oQ_o}$	$P\% + z_P\sqrt{\dfrac{P\%\ .\ Q\%}{n}}$	$\lambda + z_P\sqrt{\lambda}$
OČ	nP_o	$P\%$	λ
SKČ	$nP_o - z_P\sqrt{nP_oQ_o}$	$P\% - z_P\sqrt{\dfrac{P\%\ Q\%}{n}}$	$\lambda - z_P\sqrt{\lambda}$

(19.7)

Prave vrednosti P_o, P% in λ običajno zamenjamo s poprečji iz več vzorcev pri stabilnem procesu.

Vzorčna kontrola pri prevzemu

Verjetnost L(P) za sprejem skupine z deležem neustreznih izdelkov P

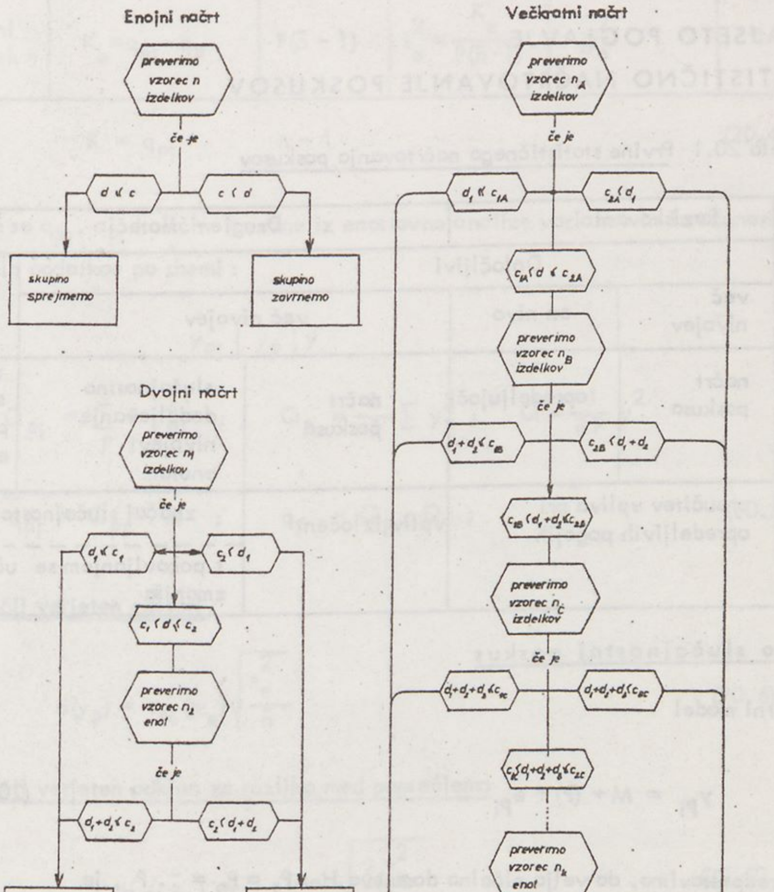
$$\mathcal{L}(P) = \sum_{x=o}^{c}\binom{n}{x} P^x Q^{n-x} \tag{19.19}$$

Poprečna ali pričakovana izhodna kakovost PIK

$$PIK = E(P) = P \cdot L(P) + 0 \cdot \left[1 - L(P)\right] = P \cdot L(P) \tag{19.20}$$

Najslabša izhodna kakovost PIKM

$$PIK_{max} = PIKM \tag{19.21}$$



Sheme za potek kontrole pri enojnem, dvojnem in večkratnem vzorčnem načrtu.

DVAJSETO POGLAVJE

STATISTIČNO NAČRTOVANJE POSKUSOV

Tabela 20.1 Prvine statističnega načrtovanja poskusov

Dejavniki	Raziskovani	Drugi - moteči			
	Določljivi				Nedoločljivi
	več nivojev	en nivo	več nivojev		
Obravnavanje dejavnikov	načrt poskusa	opredeljujoči	načrt poskusa	slučajnostno dodeljevanje nivojev enotam	slučajnosten izbor poskusnih enot
	proučitev vpliva pri opredeljivih pogojih		vpliv izločen	značaj slučajnosten s ponavljanjem se učinek zmanjša	

Čisto slučajnostni poskus

linearni model

$$y_{Pi} = M + (P) + e_{Pi} \tag{20.2}$$

Če predpostavimo, da velja ničelna domneva H_o: $P_1 = P_2 = .. P_p$, je

$$\sum(P) = 0 \quad ; \quad s_P^2 = \frac{1}{P-1} \sum P^2 \quad ; \quad e_{Pi} = : N(0, \sigma_e^2) \tag{20.3}$$

Tabela 20.2. Analiza variance za čisto slučajnostni poskus

Vir variacije	Vsota kvadratov SK	Stopinje prostosti m	Ocena variance $s^2 = \frac{K}{m}$	Pričakovana vrednost $E(s^2)$	F
Faktor P	$K_P = q_P$	$P - 1$	$s_P^2 = \frac{K_P}{P-1}$	$\sigma_e^2 + \bar{n}\ S_P^2$	s_P^2 / s_e^2
Poskusni pogrešek e	$K_e = q_{Pi} - q_P$	$P(\bar{n} - 1)$	$s_e^2 = \frac{K_e}{P(\bar{n}-1)}$	σ_e^2	1
Skupaj	$K = q_{Pi}$	$n - 1$			

(20.4)

Pri tem so q_{Pi}, q_P količine, znane iz enostavne analize variance in izračunane iz osnovnih podatkov po shemi :

$$y_{Pi} \mid y_P \mid y$$

$$Q_{Pi} = \sum_P \sum_i y_{Pi}^2 \ ; \qquad Q_P = \frac{1}{\bar{n}} \sum y_P^2 \ ; \qquad Q = \frac{1}{\bar{n}P}\, y^2$$

$$q_{Pi} = Q_{Pi} - Q \ ; \qquad q_P = Q_P - Q \ ; \tag{20.5}$$

Največji verjeten odklon

$$d(\bar{y}_P) = t_\alpha (m_e) \sqrt{\frac{s_e^2}{\bar{n}}} \tag{20.6}$$

Največji verjeten odklon za razliko med poprečjema

$$d(\Delta \bar{y}_P) = t_\alpha (m_e) \sqrt{\frac{2 . s_e^2}{\bar{n}}} \tag{20.7}$$

Preskus razlike med poprečjema

Apriorna primerjava

$$\frac{\bar{y}_3 - \bar{y}_1}{\sqrt{\frac{s_e^2}{n}(1^2 + 1^2)}} = t\ (m = n - P) \tag{20.8}$$

Porazdelitev primerjave $\sum c_k \bar{y}_k$ pri $H_o : M_1 = M_2 \ldots M_P$

$$\frac{\sum c_k \bar{y}_k}{\sqrt{\frac{s_e^2}{n} \cdot \sum c_k^2}} =: t\ (m = n - P) \tag{20.9}$$

Aposteriorna primerjava

Tukeyev preskus

Studentiziran razmik q

$$q = \frac{\bar{y}_{max} - \bar{y}_{min}}{s_e} \sqrt{n} \tag{20.10}$$

Značilnost razlik med sredinama

$$|\bar{y}_2 - \bar{y}_1| > q_{\alpha}(m,p) \frac{s_e}{\sqrt{n}} \tag{20.11}$$

Slučajnostni bloki

Linearni model

$$y_{BP} = M + (B) + (P) + e_{BP} \tag{20.12}$$

Porazdelitev poskusnega pogreška

$$e_{BR} =: N(0, \sigma_e^2) \tag{20.13}$$

Pomožne količine

y_{BP}	y_B
y_P	y

$$Q_{BP} = \sum_B \sum_P y_{BP}^2 \cdot Q_B = \frac{1}{p} \sum_B y_B^2 \; ; \; Q_P = \frac{1}{b} \sum_P y_P^2 \; ; \; Q = \frac{1}{b \cdot p} y^2 \qquad (20.14)$$

$$q_{BP} = Q_{BP} - Q \; ; \quad q_B = Q_B - Q \; ; \; Q_P = Q_P - Q \; ,$$

Tabela 20.5 Shema za analizo variance za poskus v slučajnostnih blokih (20.15)

Vir variacije	SK	m	$s^2 = \frac{SK}{m}$	$E(s^2)$	F
Bloki B	$K_B = q_B$	$b - 1$	s_B^2	$\sigma_e^2 + p S_B^2$	
Faktor P	$K_P = q_P$	$p - 1$	s_P^2	$\sigma_e^2 + b S_P^2$	$F = s_P^2 / s_e^2$
Poskusni pogrešek	$K_e = q_{BP} - q_B - q_P$	$(b-1)(p-1)$	s_e^2	σ_e^2	1
Skupaj	$K = q_{BP}$	$bp - 1$			

Poprečni kvadratični odkloni

$$S_B^2 = \frac{1}{b-1} \sum_{B=1}^{b} B_B^2 \; ; \quad S_P^2 = \frac{1}{p-1} \sum_P P_P^2 \qquad (20.16)$$

Največja verjetna odklona za oceno poprečja in razliko med poprečjema

$$d(\bar{y}_P) = t_\alpha \left[m_e = (b-1)(p-1) \right] \sqrt{\frac{s_e^2}{b}} \; ; \; d(\Delta \bar{y}_p) = t_\alpha \left[(b-1)(p-1) \right] \sqrt{\frac{2 s_e^2}{b}} \qquad (20.17)$$

Latinski kvadrati

Latinski kvadrat

	Vrstni red: 1.	2.	3.	4.
Delavec 1	P_1	P_2	P_3	P_4
Delavec 2	P_2	P_3	P_4	P_1
Delavec 3	P_3	P_4	P_1	P_2
Delavec 4	P_4	P_1	P_2	P_3

(20.20)

Linearni model

$$y_{VSP} = M + (V) + (S) + (P) + e_{VSP} \tag{20.19}$$

Pri tem so: (V) in (S) sta dejavnika, katerih učinek iz sklopa slučajnostnih faktorjev izločimo, (P) je dejavnik, katerega proučujemo, $e_{VSP} =: N(0, \sigma_e^2)$ pa rezultat slučajnostnih vplivov, ki se porazdeljuje normalno.

Tabela 20.8 Analiza variance za poskus v latinskem kvadratu

Vir variacije	SK	m	s^2	$E(s^2)$	F
(V)	$K_V = q_V$	$p-1$	s_V^2	$e^2 + p\,S_V^2$	s_V^2/s_e^2
(S)	$K_S = q_S$	$p-1$	s_S^2	$e^2 + p\,S_S^2$	s_S^2/s_e^2
(P)	$K_P = q_P$	$p-1$	s_P^2	$e^2 + p\,S_P^2$	s_P^2/s_e^2
pp	$K_e = q_{VSP} - q_V - q_S - q_P$	$(p-1)(p-2)$	s_e^2	e^2	1
Skupaj	$K = q_{VSP}$	$p^2 - 1$	-	-	-

Podobno kot pri že obravnavanih poskusih pomeni:

$$Q_{VSP} = \sum_V \sum_S y_{VSP}^2;\quad Q_V = \frac{1}{p}\sum_V y_V^2;\quad Q_S = \frac{1}{p}\sum_S y_S^2;\quad Q_P = \frac{1}{p}\sum_P y_P^2;\quad Q = \frac{1}{p^2}y^2$$

(20.21)

$$q_{VSP} = Q_{VSP} - Q;\quad q_V = Q_V - Q;\quad q_S = Q_S - Q;\quad q_P = Q_P - Q$$

Faktorski poskusi

Linearni model

$$y_{ABi} = M + (A) + (B) + (AB) + e_{ABi}; \quad e_{ABi} =: N(0, \sigma_e^2) \qquad (20.24)$$

Shema za dvofaktorski poskus dveh dejavnikov A in B z $\bar{n}$ ponovitvami je po stopnjah takale:

a) osnovni podatki:

Če z y_{ABi} zaznamujemo i-to ponovitev poskusa pod kombinacijo faktorjev A in B so potrebne vsote dane po znanih pravilih naslednje:

y_{ABi}	
y_{AB}	y_A
y_B	y

Če je vsak postopek AB ponovljen $\bar{n}$ krat, če ima dejavnik A v poskusu a vrednosti, dejavnik B pa b vrednosti, imamo v celotnem poskusu $n = \bar{n}ab$ posameznih poskusov.

b) pomožne količine

$$Q_{ABi} = \sum_A \sum_B \sum_i y_{ABi}^2 \qquad q_{ABi} = Q_{ABi} - Q$$

$$Q_{AB} = \frac{1}{\bar{n}} \sum_A \sum_B y_{AB}^2 \qquad q_{AB} = Q_{AB} - Q$$

$$Q_A = \frac{1}{\bar{n}b} \sum_A y_A^2 \qquad q_A = Q_A - Q$$

$$Q = \frac{1}{\bar{n}a} \sum_B y_B^2 \qquad q_B = Q_B - Q$$

$$Q = \frac{1}{\bar{n}ab} y^2$$

Reducirane vsote kvadratov dobimo tako, da odštejemo količino Q.

c) analiza variance

20.9 Analiza variance dvofaktorskega poskusa s ponovitvami

Vir variacije	K	m	s^2	$E(s^2)$	F
Dejavnik A	$K_A = q_A$	$a - 1$	s_A^2	$\sigma_e^2 + \bar{n} b S_A^2$	s_A^2 / s_e^2
Dejavnik B	$K_B = q_B$	$b - 1$	s_B^2	$\sigma_e^2 + \bar{n} a S_B^2$	s_B^2 / s_e^2
Interakcija AB	$K_{AB} = q_{AB} - q_A - q_B$	$(a-1)(b-1)$	s_{AB}^2	$\sigma_e^2 + \bar{n} S_{AB}^2$	s_{AB}^2 / s_e^2
Poskusni pogrešek e	$K_e = q_{ABi} - q_{AB}$	$ab(\bar{n} - 1)$	s_e^2		1
Skupno	$K = q_{ABi}$	$\bar{n}ab - 1$			

(20.25)

ENAINDVAJSETO POGLAVJE

PROUČEVANJE DINAMIKE POJAVOV - ČASOVNE VRSTE

Oblike časovnih vrst

Kumulativna časovna vrsta K_k

$$K_{k+1} = K_k + Y_k \tag{21.1}$$

K_k = kumulativa ; Y_k = vrednost v tekočem razdobju k

Vrsta sredin $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{1}{r}(Y_1 + Y_2 + \dots Y_r) \tag{21.2}$$

$$\bar{\bar{Y}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{r-1} + \frac{1}{2}Y_r\right) \tag{21.3}$$

Vrsta drsečih vsot S_k –

$$S_{k+1} = S_k + Y_k - Y_{k-r} = S_k + {}_r d_k \tag{21.4}$$

Pri tem pomeni: S_k in S_{k+1} = ustrezne vrednosti v vrsti drsečih vsot; Y_k = člen k v osnovni vrsti; Y_{k-r} = člen osnovne vrste, ki je za r členov pred Y_k ; r = število členov, iz kolikor so računane vsote ; ${}_r d_k = Y_k - Y_{k-r}$ = razlika ustreznih vrednosti za Y .

Vrsta drsečih sredin $\bar{Y}_k$

Če imajo razmiki, na katere se nanašajo sredine, liho število osnovnih razmikov: $r = 2i+1$, izračunavamo časovno vrsto drsečih sredin po obrazcu

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{r}(Y_{k-i} + Y_{k-i+1} + \ldots + Y_k + \ldots Y_{k+i-1} + Y_{k+i}) = \frac{1}{r} S_{k+i+1} \qquad (21.5)$$

Če pa sredine veljajo za sodo število osnovnih razmikov ($r = 2i$), računamo drseče sredine po obrazcu:

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} Y_{k-i} + Y_{k-i+1} + \ldots Y_k + \ldots Y_{k+i-1} + \frac{1}{2} Y_{k+i}\right) \qquad (21.6)$$

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{2r}(Y_{k-i} + 2Y_{k-i+1} + \ldots + 2Y_k + \ldots 2Y_{k+i-1} + Y_{k+i}) = \frac{1}{2r} S'_k \qquad (21.7)$$

$$S'_{k+1} = S_{k+i+1} + S_{k+i+2} = S_{k+i} + {}_r d_{k+i} + S_{k+i+1} + {}_r d_{k+i+1} = S'_k + {}_r d_{k+i} + {}_r d_{k+i+1}$$

Ganttov grafikon

Izračun Ganttovega odstotka

a) Poiščemo, med katera člena P_k in P_{k+1} v planski kumulativi pade vrednost dejanske kumulative D_r.

$$P_k \leq D_r < P_{k+1}. \qquad (21.9)$$

b) Ganttov odstotek izračunamo po obrazcu: Prvo mesto Ganttovega odstotka je $k - 1$. Naslednji dve mesti pa izračunamo po obrazcu:

$$G_k = \frac{D_r - P_k}{P_k} \cdot 100 \qquad (21.10)$$

Enostavni pokazovalci dinamike

R a v e n Y_k je osnovna časovna vrsta. Že iz sprememb v ravni sklepamo na smer in jakost dinamike pojava.

Če raven časovne vrste izrazimo v primerjavi z nekim stalnim značilnim členom v časovni vrsti, dobimo vrsto i n d e k s o v s s t a l n o o s n o v o

$$I_{k/o} = 100\, Y_k / Y_o \tag{21.11}$$

A b s o l u t n a r a z l i k a

$$D_k = Y_k - Y_{k-1} \tag{21.12}$$

pokaže v absolutnih vrednostih spremembo pojava od člena do člena.

T e m p r a s t i a l i s t o p n j a r a s t i

$$T_k = 100 \frac{Y_k - Y_{k-1}}{Y_{k-1}} = 100 \frac{D_k}{Y_{k-1}} \tag{21.13}$$

pokaže relativno razliko od člena do člena.

K o e f i c i e n t d i n a m i k e

$$K_k = Y_k / Y_{k-1} \tag{21.14}$$

pokaže v obliki koeficienta relativne spremembe od člena do člena.

Enak značaj ima v e r i ž n i i n d e k s

$$I_k = 100 \cdot Y_k / Y_{k-1} \tag{21.15}$$

$$T_k = 100 \cdot D_k / Y_{k-1} = 100 (K_k - 1) = T_k - 100 \tag{21.16}$$

$$I_k = 100 \cdot K_k$$

Tabela 21.11. Vrednosti posameznih pokazovalcev dinamike pri različnem gibanju pojava

Pokazovalec dinamike	P o j a v		
	raste	zastane	pada
Raven Y_k	$Y_{k+1} > Y_k$	$Y_{k+1} = Y_k$	$Y_{k+1} < Y_k$
Indeks s stalno osnovo	$I_{k+1/o} > I_{k/o}$	$I_{k+1/o} = I_{k/o}$	$I_{k+1/o} < I_{k/o}$
Absolutna razlika	$D_k > 0$	$D_k = 0$	$D_k < 0$
Temp rasti	$T_k > 0$	$T_k = 0$	$T_k < 0$
Koeficient dinamike	$K_k > 1$	$K_k = 1$	$K_k < 1$
Verižni indeks	$I_k > 100$	$I_k = 100$	$I_k < 100$

Osnovni modeli časovnih vrst

$$
\begin{aligned}
&1)\quad Y = T + P + C + E + S \\
&2)\quad Y = T\,(1 + p + c + e + s) \\
&3)\quad Y = T \,.\, C\,(1 + p + e + s) \qquad (21.17) \\
&4)\quad Y = T \,.\, P \,.\, C \,.\, E \,.\, S \\
&5)\quad Y = T \,.\, P \,.\, C \,.\, E + S
\end{aligned}
$$

Y = osnovna časovna vrsta, T = trend, P = periodična, v posebnem sezonska komponenta; C = ciklična komponenta; E = epizodična komponenta; S = slučajnostna komponenta

Trend

Funkcije trenda

1. Premica: $T = a + bx$
2. Parabola druge, tretje ... stopnje: $T = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$
3. Parabola: $T = a + b\sqrt{x}$
4. Eksponentna funkcija: $T = ab^x$
5. Kvadratična eksponentna funkcija: $T = ab^x \cdot c^{x2}$
6. Modificirana eksponentna funkcija: $T = k + ab^x$ (21.18)
7. Gompertzova krivulja: $T = Ka^{b^x}$
8. Pearl-Reedova logistična krivulja:

$$T = \frac{T_\infty}{1 + ab^x}$$

V teh funkcijah pomeni T trend, x čas, a,b,c,d,k, T_∞ pa so parametri trenda.

Transformacije funkcije trenda

$$\log T = \log a + x \log b \qquad (21.19)$$

ker moremo pisati

$$T' = a' + b'x \qquad (21.20)$$

pri tem je $T' = \log T$; $a' = \log a$; $b' = \log b$.

Modificirane eksponentne krivulje ne moremo prevesti v željeno obliko, vendar moremo bolj zamotani funkciji, logistično in Gompertzovo funkcijo, prevesti v modificirano eksponentno funkcijo.

Če vzamemo za logistično funkcijo reciprok, dobimo

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_\infty} + \frac{a}{T_\infty} \cdot b^x \qquad (21.21)$$

ali dalje:

$$T' = k' + a' b'^{x} \qquad (21.22)$$

Pri tem pomeni:

$$T' = \frac{1}{T} \; ; \quad k' = \frac{1}{T_\infty} \; ; \quad a' = \frac{a}{T_\infty} \; , \quad b' = b$$

Če logaritmiramo Gompertzovo funkcijo, pa dobimo:

$$\text{Log } T = \log K + b^{x} \log a \qquad (21.23)$$

ali

$$T' = k' + a' b'^{x} \qquad (21.24)$$

Pri tem pomeni: $T' = \log T$; $k' = \log K$; $a' = \log a$; $b' = b$.

<u>Preskus o značilnosti trenda</u>

$$t = \frac{r_S}{\sqrt{1 - r_S^2}} \cdot \sqrt{n - 2} \; ; \quad m = n - 2$$

pri čemer je: n = število členov v časovni vrsti ; r_S = Spearmanov koeficient med časom in podatkom Y.

<u>Transformacija tehničnega časa t na čas z izhodiščem v prvem členu</u>

$$N = 2r+1 \quad ; \quad t = x - \frac{N-1}{2}$$

$$N = 2r \quad ; \quad t = 2x - (N-1) \qquad (21.25)$$

<u>Metode za določanje trenda</u>

<u>Metoda delnih vsot</u>

$$Y = T + S \qquad (21.31)$$

$$\sum Y = \sum T \qquad (21.32)$$

Postopek za računanje modificirane eksponentne funkcije trenda $T = k + ab^x$ po metodi delnih vsot posplošimo na poljubno število členov v časovni vrsti! Če je skupno število členov v časovni vrsti $N = 3r$, pri tem pa je $r = 2i + 1$ liho število, ima tehnični čas t za posamezne člene v časovni vrsti vrednosti ... -3, -2-1 0+1+2+3... Parametre k, a in b računamo v tem primeru po obrazcih

$$b = \sqrt[r]{\frac{\Sigma_3 - \Sigma_2}{\Sigma_2 - \Sigma_1}} \; ;$$

$$a = (\Sigma_3 - \Sigma_2)\, b^i \cdot \frac{b-1}{(b^r-1)^2} \tag{21.35}$$

$$k = \frac{1}{r}\left(\Sigma_2 - \frac{\Sigma_3 - \Sigma_2}{b^r - 1}\right)$$

Če je število členov v osnovni časovni vrsti $N = 3r$, pri čemer je $r = 2i$ sodo število, ima tehnični čas t za posamezne člene v časovni vrsti vrednosti ... -3, -1, +1, +3 ...

Parametre trenda k,a in b za modificirano eksponentno funkcijo izračunamo v tem primeru po obrazcih

$$b = \sqrt[2r]{\frac{\Sigma_3 - \Sigma_2}{\Sigma_2 - \Sigma_1}}$$

$$a = (\Sigma_3 - \Sigma_2)\cdot b^{r-1}\, \frac{b^2-1}{(b^{2r}-1)^2} \tag{21.36}$$

$$k = \frac{1}{r}\left(\Sigma_2 - \frac{\Sigma_3 - \Sigma_2}{b^{2r} - 1}\right)$$

Pri tem poprečni koeficient dinamike reduciranih vrednosti $(Y - k)$ ni b, ampak b^2.

Metoda najmanjših kvadratov

$$g(T) = \sum_{k=o}^{r} a_k f_k(x) \tag{21.37}$$

$$\sum_{i=1}^{N} g(Y_i) f_h(x_i) = \sum_{k=o}^{r} a_k \sum_{i=1}^{N} f_k(x_i) f_h(x_i) \;;\; h = 0, 1 \ldots r \tag{21.38}$$

$$g(T) = \sum_{k=o}^{r} a_k x^k \tag{21.39}$$

$$g(T) = \sum_{k=o}^{r} b_k t^k \tag{21.40}$$

Linearen trend

$$T = b_o + b_1 \cdot t \tag{21.41}$$

$$b_o = \frac{1}{N} \sum Y \;; \quad b_1 = \frac{\sum Y t}{\sum t^2} \tag{21.43}$$

$$\sum_{1}^{N} t^2 = \frac{1}{2} \binom{N+1}{3} \quad \text{če je } N = 2i + 1$$

$$\sum_{1}^{N} t^2 = 2 \cdot \binom{N+1}{3} \quad \text{če je } N = 2i \tag{21.44}$$

Tabela 21.20. $\sum t^2$ za $2 \leqslant N \leqslant 30$.

N		2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sum t^2$		2	2	20	10	70	28	168	60	330
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sum t^2$	110	572	182	910	240	1360	408	1938	570	2660
N	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\sum t^2$	770	3542	1012	4600	1300	5850	1638	7308	2030	8990

Linearen trend, transformiran na prvi člen kot izhodišče, izračunamo po obrazcih

$$\begin{aligned} T &= \left[b_o - \frac{b_1(N-1)}{2}\right] + b_1 x \quad \text{za} \quad N = 2i + 1 \\ T &= \left[b_o - b_1(N-1)\right] + 2b_1 x \quad \text{za} \quad N = 2i \end{aligned} \tag{21.45}$$

Določanje trenda z ortogonalnimi polinomi

Ortogonalni polinomi. Funkcijo trenda, ki je dana s polinomom stopnje p

$$T = \sum_{k=o}^{p} a_k x^k \tag{21.46}$$

moremo transformirati v linearno zvezo ortogonalnih polinomov $X_k(x)$

$$T = \sum_{k=o}^{p} A_k \cdot X_k(x) \tag{21.47}$$

Ortogonalni polinom stopnje k

$$X_k(x) = \sum_{h=o}^{k} b_h \tilde{x}^h \tag{21.48}$$

je cela racionalna funkcija stopnje k, ki ima v odnosu do ortogonalnih polinomov drugih stopenj tole lastnost

$$\sum_{i=1}^{N} X_k(x_i) X_g(x_i) = 0 \;;\quad k \neq g \tag{21.49}$$

$$\sum Y X_k = A_k \sum X_k^2 \quad (k = 0,1 \dots p) \tag{21.50}$$

Iz sistema enačb 21.50 dobimo, da so parametri trenda

$$A_k = \frac{\sum Y X_k}{\sum X_k^2} \tag{21.51}$$

Iz lastnosti ortogonalnih polinomov sledi dalje, da je

$$\sum_{1}^{N} (Y - T)^2 = \sum_{1}^{N} (Y - \sum_{k} A_k X_k)^2 = \sum Y^2 - \sum_{k} \frac{(\sum Y X_k)^2}{\sum X_k^2} \tag{21.52}$$

pri čemer je

$$KS_k = \frac{(\sum Y X_k)^2}{\sum X_k^2} \tag{21.53}$$

prispevek polinoma k. variabilnosti Y.

Binomske funkcije

$$T = \sum_{k=o}^{p} c_k \binom{x}{k} \tag{21.54}$$

$$c_k = \Delta^k T_o^p \tag{21.55}$$

Splošen postopek računanja funkcije trenda stopnje p

$$T_x^p = \sum_{h=o}^{p} \Delta^h T_o^p \binom{x}{h}$$

za časovno vrsto Y_x ima tele faze:

a) Iz osnovne časovne vrste Y_x izračunamo vsote kumulativ C_h $(h = 0, 1, 2 \ldots p)$ do stopnje p.

b) Iz matrike konstant d_{hk} D_k in vektorja C_h izračunamo parametre trenda po obrazcih

$$\frac{d_{kh} \mid D_k}{C_h} \; ; \quad \sum_{h=k}^{o} d_{kh} C_h = E_k \; ; \quad A_k = (-1)^k \frac{E_k}{D_k} \; ; \; s_k^2 = \frac{E_k^2}{D_k} \tag{21.58}$$

$$T_x^p = \sum_{k=o}^{p} A_k X_k \; ; \quad X_k = \sum_{h=k}^{o} d_{kh} \binom{x}{h} \tag{21.59}$$

Trend, podan kot polinom binomskih funkcij pa je

$$T_x^p = \sum_{h=o}^{p} \Delta^h T_o^p \binom{x}{h} \; ; \quad \Delta^h T_o^p = \sum_{k=h}^{p} A_k d_{kh} \tag{21.60}$$

Vsoto kvadratov odklonov stvarnih vrednosti Y_x od vrednosti trenda T_x^p računamo po obrazcu

$$\sum_{x=o}^{N-1} (Y_x - T_x^p)^2 = \sum_{x=o}^{N-1} Y_x^2 - \sum_{k=o}^{p} \frac{E_k^2}{D_k} = \sum_{x=o}^{N-1} Y_x^2 - \sum_{k=o}^{p} s_k^2 \tag{21.61}$$

Varianco iz odklonov pa izračunamo po obrazcu

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{N} \left[\sum_x Y_x^2 - \sum_k s_k^2 \right] \tag{21.62}$$

ali ocenimo po obrazcu

$$s_e^2 = \frac{1}{N-p-1} \left[\sum_x Y_x^2 - \sum_k s_k^2 \right] \tag{21.63}$$

če gre za slučajnostne odklone od trenda.

Eksponentni trend

$$T = ab^{x} \tag{21.66}$$

Če jo logaritmiramo, dobimo

$$\log T = \log a + x \log b \tag{21.67}$$

Enako lastnost ima tudi kvadratična eksponentna funkcija

$$T = a \cdot b^{x} \cdot c^{x^2} \tag{21.68}$$

katero z logaritmiranjem prevedemo v obliko

$$\log T = \log a + x.\log b + x^2.\log c \tag{21.69}$$

$$\sum_x \left[f(Y_x) - f(T_x) \right]^2 = \min \tag{21.70}$$

<u>Periodične variacije</u>

$$P_m = 100\,(1 + p_m) \tag{21.71}$$

P_m = sezonski indeks

<u>Metoda vsot</u>

$$Y_{lm} = A\,(1 + p_m + e_{lm}) \tag{21.72}$$

Pri tem je Y_{lm} = osnovni podatek za člen m v periodi l ; p_m = periodična sestavina za člen m; e_{lm} = rezultat posamičnih vplivov.

Za ta primer dobimo pri znanih lastnostih sredin vrsto periodičnih indeksov po temle postopku:

a) Da bi odstranili posamične vplive, izračunamo za vsako obdobje periode iz ustreznih mesečnih vrednosti za vse periode proučevanega razdobja vsote $S_m = \sum_l Y_{lm}$. Zaradi lastnosti, ki jih pripisujemo posamičnim vplivom, velja

$$S_m = NA\,(1 + p_m) \tag{21.73}$$

Dobljene vsote so sorazmerne sezonskim indeksom $1+p_m$.

b) Vsote S_m prevedemo v periodične s popravnim faktorjem

$$c = \frac{100\;.\;P}{\sum_{m=1}^{P} S_m} \tag{21.74}$$

v čiste periodične indekse. Pri tem je P število členov v periodi. Po tem je periodični indeks

$$P_m = 100\,(1 + p_m) = c\;.\;S_m \tag{21.75}$$

Metoda vsot s popravkom za smer razvoja

Model

$$Y_{lm} = A\;.\;b^x\,(1 + p_m) + e_{lm}\;; \quad x = Pl + m \tag{21.76}$$

Postopek:

a) Iz osnovne časovne vrste, katere členi Y_{lm} se nanašajo na leto l in mesec m, izračunamo mesečne vsote S_m in letne vsote S_l.

b) Število let oziroma period v osnovni časovni vrsti je sodo $N = 2r$ ali liho $N = 2r+1$. Iz prvih r letnih vsot izračunamo vsoto S_s, iz zadnjih r letnih vsot pa vsoto S_z. (Če je N sodo število, so torej v vsoti S_s in S_z vključena vsa leta, če pa je N liho število, srednji člen ne upoštevamo.

c) Iz S_s in S_z ocenimo popravek za smer razvoja b po obrazcu

$$b = \sqrt[6N]{S_z / S_s} \tag{21.77}$$

če je število let sodo ($N = 2r$), in po obrazcu

$$b = \sqrt[6(N+1)]{S_z / S_s} \tag{21.78}$$

če je število let liho ($N = 2r+1$)

d) Iz popravnega faktorja b izračunamo geometrijsko zaporedje

$$1,\ b,\ b^2\ \ldots\ldots\ b^{11} \tag{21.79}$$

e) Mesečne vsote S_m popravimo s potencami popravnega faktorja b

$$S'_m = S_m / b^{m-1} \tag{21.80}$$

f) Iz popravljenih vsot S'_m izračunamo sezonske indekse P_m po obrazcu

$$P_m = 100\,(1 + p_m) = kS'_m \tag{21.81}$$

pri čemer je

$$k = 1200 / \sum_m S'_m \tag{21.82}$$

$$\log S'_m = \log S_m - (m-1) \log b \tag{21.83}$$

Metoda koeficientov dinamike

Model

$$Y_x = A \cdot b^x (1 + p_m + e_x) \qquad (21.84)$$

Vrsta koeficientov dinamike je

$$k_{lm} = k_x = Y_x / Y_{x-1} = Ab^x (1 + p_m + e_x)/Ab^{x-1} (1 + p_{m-1} + e_{x-1}) =$$

$$= b \cdot \frac{1 + p_m}{1 + p_{m-1}} + e'_x \qquad (21.85)$$

$$\bar{k}_m = \frac{1}{N-2} \sum_l k_{lm} = b \frac{1 + p_m}{1 + p_{m-1}} \qquad (21.86)$$

$$G_{\bar{k}} = \sqrt[12]{\bar{k}_1, \bar{k}_2 \ldots\ldots \bar{k}_{12}} = b \qquad (21.87)$$

$$t_m = \bar{k}_m / b = \frac{1 + p_m}{1 + p_{m-1}} \qquad (21.88)$$

Iz vrste t_m dobimo s kumulativnim množenjem izraze

$$C_1 = 1 \cdot t_1 = 1 \cdot \frac{1 + p_1}{1 + p_{12}} = \frac{1 + p_1}{1 + p_{12}}$$

$$C_2 = C_1 \cdot t_2 = \frac{1 + p_1}{1 + p_{12}} \cdot \frac{1 + p_2}{1 + p_1} = \frac{1 + p_2}{1 + p_{12}} \qquad (21.89)$$

$$\vdots$$

$$C_m = C_{m-1} \cdot t_m = \frac{1 + p_{m-1}}{1 + p_{12}} \cdot \frac{1 + p_m}{1 + p_{m-1}} = \frac{1 + p_m}{1 + p_{12}}$$

$$\vdots$$

$$C_{12} = C_{11} \cdot t_{12} = \frac{1 + p_{11}}{1 + p_{12}} \cdot \frac{1 + p_{12}}{1 + p_{11}} = \frac{1 + p_{12}}{1 + p_{12}} = 1$$

Zaradi lastnosti sezonske sestavine ($\sum_m p_m = 0$) vrsto C_m popravimo s

$K = 1200/ \sum_m C_m$ in dobimo čiste sezonske indekse po obrazcu

$$P_m = 100\,(1 + p_m) = K \cdot C_m \qquad (21.90)$$

Metoda kvocientov na vrsto drsečih sredin

Model

$$Y_x = T_x\,(1 + p_m + e_x) \qquad (21.93)$$

$$K_x = Y_x / T_x = A\,(1 + p_m + e_x) \qquad (21.94)$$

$$Y_x = T_x \cdot C_x\,(1 + p_m + e_x) \qquad (21.95)$$

$$K_{lm} = Y_x / \tilde{Y}_x = A \cdot (1 + p_m + e_{lm}) \qquad (21.96)$$

Postopek določanja sezonskih indeksov po metodi kvocientov na vrsto drsečih sredin izvedemo po gornjem v tehle stopnjah:

a) Za proučevano časovno vrsto Y_{lm} izračunamo vrsto dvanajstmesečnih sredin $\tilde{Y}_{lm}$.

b) Izračunamo vrsto kvocientov $K_{lm} = Y_{lm}/\tilde{Y}_{lm}$ osnovnih podatkov Y_{lm} z ustreznimi vrednostmi vrste drsečih sredin.

c) v vrstah kvocientov K_{lm} za posamezne mesece izračunamo modificirana poprečja. Najprej izločimo za vsak m oba skrajna kvocienta, iz drugih pa izračunamo poprečje $\bar{K}_m$.

d) Iz $\bar{K}_m$ izračunamo popravni faktor $c = 1200/\sum_m \bar{K}_m$.

e) Sezonske indekse izračunamo po obrazcu

$$P_m = 100 \cdot (1 + p_m) = c \cdot \bar{K}_m$$

Sintetičen pokazovalec jakosti periodičnih vplivov

$$AD_P = \frac{1}{12} \sum | P_m - 100| = \frac{1}{6} \sum (P^+_m - 100) \qquad (21.97)$$

Dinamična sezonska komponenta

$$1 + p_{lm} = 1 + p_{m.o} + p_{m.1} X_l^1 + p_{m.2} X_l^2 \qquad (21.98)$$

pri čemer so $p_{m,o}$ sezonski koeficienti, ki nakazujejo poprečno statično sestavino, $p_{m,1}$ sezonski koeficienti, ki nakazujejo linearne spremembe v sezonski sestavini in $p_{m,2}$ sezonski koeficienti, ki nakazujejo kvadratične spremembe v sezonski sestavini. Zaradi lastnosti sezonskih indeksov velja:

$$\sum_m p_{m.o} = 0; \sum_m p_{m.1} = 0; \sum_m p_{m.2} = 0 \qquad (21.99)$$

Model časovne vrste z dinamično sezonsko sestavino druge stopnje je torej takle

$$Y_{lm} = T_{lm} \cdot C_{lm} (1 + p_{m.o} + p_{m.1} X_l^1 + p_{m.2} X_l^2 + e_{lm}) \qquad (21.100)$$

Dinamično sezonsko sestavino proučimo v tehle fazah:

1. Iz osnovne časovne vrste po mesecih Y_{lm} izračunamo vrsto drsečih sredin $\tilde{Y}_{lm}$.
2. Iz Y_{lm} in $\tilde{Y}_{lm}$ izračunamo vrsto kvocientov $Y_{lm}/\tilde{Y}_{lm} = K_{lm}$.
3. Za vsak mesec posebej izračunamo iz letne časovne vrste K_{lm} trend

$$K_{lm} = 1 + p'_{m.o} + p'_{m.1} X_l^1 + p'_{m.2} X_l^2 \qquad (21.101)$$

4. Dobljene parametre p_{mo}, p_{m1} in p_{m2} popravimo

$$p_{m.o} = p'_{m.o} - \frac{1}{12}\sum_m p'_{m.o}; \; p_{m1} = p'_{m1} - \frac{1}{12}\sum_m p'_{m.1}; \; p_{m2} = p'_{m2} - \frac{1}{12}\sum_m p'_{m2} \qquad (21.102)$$

5. Izravnane sezonske indekse dobimo, če z dobljenimi parametri poiščemo vrste sezonskih indeksov za vsak mesec posebej.

Ciklični vplivi

Preskus o značilnosti ciklične sestavine

$$z = \frac{r - M_r}{SD_r} \qquad (21.103)$$

se porazdeljuje v standardizirani normalni porazdelitvi. Ciklična sestavina je značilna na stopnji $\alpha = 0{,}05$, če je $1{,}96 < |z| < 2{,}58$, na stopnji $\alpha = 0{,}01$, če je $2{,}58 < |z| < 3{,}29$ in značilna na stopnji $\alpha = 0{,}001$, če je $|z| < 3{,}29$.

$$M_r = \frac{2\,\overset{+}{n}\cdot\overset{-}{n}}{\overset{+}{n}+\overset{-}{n}} + 1\ ; \quad SD_r = \sqrt{\frac{(M_r - 1)(M_r - 2)}{\overset{+}{n} + \overset{-}{n} - 1}} \qquad (21.104)$$

Pri tem pomeni $\overset{+}{n}$ = število dvigov, $\overset{-}{n}$ = število padcev, r = število sekvenc.

Izločanje trenda in periodične sestavine

$$Y = T\,.\,P\,.\,C\,.\,S. \qquad (21.105)$$

$$Y/T = P\,.\,C\,.\,S \qquad (21.106)$$

$$(Y/T)\,/\,P = C\,.\,S \qquad (21.107)$$

$$Y/P = T\,.\,C\,.\,S \qquad (21.108)$$

$$(Y/P)\,/\,T = C\,.\,S \qquad (21.109)$$

$$N = T\,.\,P \qquad (21.110)$$

$$Y/N = Y/T\,.\,P = C\,.\,S \qquad (21.111)$$

Izločanje iregularnih vplivov

Netehtane sredine

$$\bar{K}_o = \frac{K_{-k} + K_{-k+1} \dots + K_o + \dots K_{k-1} + K_k}{r} \tag{21.112}$$

$$\bar{K}_o = \frac{1/2\, K_{-k} + K_{-k+1} + \dots + K_o + \dots\dots K_{k-1} + 1/2\, K_k}{r} \tag{21.113}$$

Tehtanje z binomskimi koeficienti

		1	2	1			:	4
	1	4	6	4	1		:	16
1	6	15	20	15	6	1	:	64

Drseči loki: tehtanje

Parabola 2. stopnje

-3	12	17	12	-3			:	35
-2	3	6	7	6	3	-2	:	21

Parabola 4. stopnje

5	-30	75	131	75	-30	5	:	231

Standardizacija ciklov

$$z_C = \frac{C - \bar{C}}{SD_C} \tag{21.114}$$

Proučevanje odvisnosti v dinamiki pojavov

Korelacija med časovnima vrstama po izločitvi trenda

$$r_{YZ.T} = \frac{\sum (Y - T_Y)(Z - T_Z)}{\sqrt{\sum (Y - T_Y)^2 \cdot \sum (Z - T_Z)^2}} \tag{21.115}$$

$$r_{YZ.T^p} = \frac{\sum_x Y_x Z_x - \sum_k \frac{E_{Yk}\cdot E_{Zk}}{D_k}}{\sqrt{\left(\sum_x Y_x^2 - \sum_k \frac{E^2_{yk}}{D_k}\right)\left(\sum_x Z_x^2 - \sum_{k=0}^{p} \frac{E^2_{Zk}}{D_k}\right)}} \qquad (21.116)$$

Tabela 21.31. Shema za računanje korelacijskih koeficientov z izločenim trendom.

				D_k	E_{Yk}	E_{Zk}	$\sum Y^2$	$\sum YZ$	$\sum Z^2$	
			d_{00}	D_0	E_{Y0}	E_{Z0}	$-E^2_{Y0}/D_0$ $= K_{Y0}$	$-E_{Y0}E_{Z0}/D_0$ $= K_{YZ0}$	$-E^2_{Z0}/D_0$ $= K_{Z0}$	$r_0 = \frac{K_{YZ0}}{\sqrt{K_{Y0}K_{Z0}}}$
d_{kh}		d_{11}	d_{10}	D_1	E_{Y1}	E_{Z1}	$-E^2_{Y1}/D_1$ $= K_{Y1}$	$-E_{Y1}E_{Z1}/D_1$ $= K_{YZ1}$	$-E^2_{Z1}/D_1$ $= K_{Z1}$	$r_1 = \frac{K_{YZ1}}{\sqrt{K_{Y1}K_{Z1}}}$
	d_{22}	d_{21}	d_{20}	D_2	E_{Y2}	E_{Z2}	$-E^2_{Y2}/D_2$ $= K_{Y2}$	$-E_{Y2}E_{Z2}/D_2$ $= K_{YZ2}$	$-E^2_{Z2}/D_2$ $= K_{Z2}$	$r_2 = \frac{K_{YZ2}}{\sqrt{K_{Y2}K_{Z2}}}$
d_{33}	d_{32}	d_{31}	d_{30}	D_3	E_{Y3}	E_{Z3}	$-E^2_{Y3}/D_3$ $= K_{Y3}$	$-E_{Y3}E_{Z3}/D_3$ $= K_{YZ3}$	$-E^2_{Z3}/D_3$ $= K_{Z3}$	$r_3 = \frac{K_{YZ3}}{\sqrt{K_{Y3}K_{Z3}}}$
C_{Y3}	C_{Y2}	C_{Y1}	C_{Y0}							
C_{Z3}	C_{Z2}	C_{Z1}	C_{Z0}							

Stopnje za računanje ustreznih korelacijskih koeficientov pa so:

a) Iz osnovnih časovnih vrst izračunamo kumulativne vsote:

$$S_{hY}\ ,\ S_{hZ} \quad i = 0 \ldots K$$

b) Izračunamo izraze:

$$E_{kY} = \sum_h d_{hk} \cdot S_{Yh}$$

$$E_{kZ} = \sum_h d_{hk} \cdot S_{Zh}$$

c) Iz osnovnih časovnih vrst Y_x, Z_x izračunamo vsote:

$\sum Y_x^2$ $\sum Y_x Z_x$, $\sum Z_x^2$.

d) Kot kaže shema postopno izračunamo izraze E_{hY}^2/D_h, $E_{hY}E_{hZ}/D_h$, E_{hZ}^2/D_h in jih odštevamo od predhodnih količin K, da dobimo K stopnje h.

Korelacija z odlogom

$$r_{Y_x Z_{x+t}}$$

Avtokorelacija

$$r_{Y_x Y_{x+t}}$$

Von Neumannov preskus

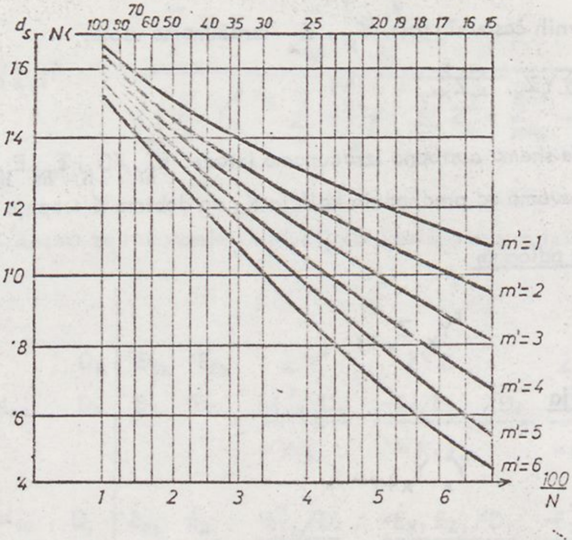
$$\eta = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} (y_{k+1} - y_k)^2}{\sum_{k=1}^{N} (y_k - \bar{y})^2} \tag{21.118}$$

Durbin-Watsonov preskus

$$d = \frac{\sum_{x=1}^{N-1} (e_{x+1} - e_x)^2}{\sum_{x=1}^{N} e_x^2} \tag{21.119}$$

ker je po definiciji popreče iz ostankov enako nič. Vzorčni izraz d je v ozki zvezi s korelacijskim koeficientom avtokorelacije r_1 in velja približna zveza $d = 2(1 - r_1)$. Za preskus značilnosti Durbin-Watsonovega izraza d je vsebinsko pomembna enostranska preskušnja, ali je d značilno manjši od 2, kar pomeni, da je koeficient avtokorelacije r značilno pozitiven.

V nomogramu v sliki 21.31 so dane spodnje kritične vrednosti d pri α=P=,05. m' pomeni število neodvisnih spremenljivk, ki smo jih vključili v časovno regresijo za y'.

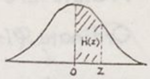


Slika 21.31 Kritične meje d_s za Durbin-Watsonov preskus za α=P=.05

T A B E L E

Tabela A NORMALNA PORAZDELITEV

Ploščine H(z)

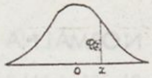


z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·0	·0000	·0040	·0080	·0120	·0160	·0199	·0239	·0279	·0319	·0359
0·1	·0398	·0438	·0478	·0517	·0557	·0596	·0636	·0675	·0714	·0754
0·2	·0793	·0832	·0871	·0910	·0948	·0987	·1026	·1064	·1103	·1141
0·3	·1179	·1217	·1255	·1293	·1331	·1368	·1406	·1443	·1480	·1517
0·4	·1554	·1591	·1628	·1664	·1700	·1736	·1772	·1808	·1844	·1879
0·5	·1915	·1950	·1985	·2019	·2054	·2088	·2123	·2157	·2190	·2224
0·6	·2258	·2291	·2324	·2357	·2389	·2422	·2454	·2486	·2518	·2549
0·7	·2580	·2612	·2642	·2673	·2704	·2734	·2764	·2794	·2823	·2852
0·8	·2881	·2910	·2939	·2967	·2996	·3023	·3051	·3078	·3106	·3133
0·9	·3159	·3186	·3212	·3238	·3264	·3289	·3315	·3340	·3365	·3389
1·0	·3413	·3438	·3461	·3485	·3508	·3531	·3554	·3577	·3599	·3621
1.1	·3643	·3665	·3686	·3708	·3729	·3749	·3770	·3790	·3810	·3830
1·2	·3849	·3869	·3888	·3907	·3925	·3944	·3962	·3980	·3997	·4015
1·3	·4032	·4049	·4066	·4082	·4099	·4115	·4131	·4147	·4162	·4177
1·4	·4192	·4207	·4222	·4236	·4251	·4265	·4279	·4292	·4306	·4319
1·5	·4332	·4345	·4357	·4370	·4382	·4394	·4406	·4418	·4429	·4441
1·6	·4452	·4463	·4474	·4484	·4495	·4505	·4515	·4525	·4535	·4545
1·7	·4554	·4564	·4573	·4582	·4591	·4599	·4608	·4616	·4625	·4633
1·8	·4641	·4649	·4656	·4664	·4671	·4678	·4686	·4693	·4699	·4706
1·9	·4713	·4719	·4726	·4732	·4738	·4744	·4750	·4756	·4761	·4767
2·0	·4772	·4778	·4783	·4788	·4793	·4798	·4803	·4808	·4812	·4817
2·1	·4821	·4826	·4830	·4834	·4838	·4842	·4846	·4850	·4854	·4857
2·2	·4861	·4864	·4868	·4871	·4875	·4878	·4881	·4884	·4887	·4890
2·3	·4893	·4896	·4898	·4901	·4904	·4906	·4909	·4911	·4913	·4916
2·4	·4918	·4920	·4922	·4925	·4927	·4929	·4931	·4932	·4934	·4936
2·5	·4938	·4940	·4941	·4943	·4945	·4946	·4948	·4949	·4951	·4952
2·6	·4953	·4955	·4956	·4957	·4959	·4960	·4961	·4962	·4963	·4964
2·7	·4965	·4966	·4967	·4968	·4969	·4970	·4971	·4972	·4973	·4974
2·8	·4974	·4975	·4976	·4977	·4977	·4978	·4979	·4979	·4980	·4981
2·9	·4981	·4982	·4982	·4983	·4984	·4984	·4985	·4985	·4986	·4986
3·0	·4987	·4987	·4987	·4988	·4988	·4989	·4989	·4989	·4990	·4990
3·1	·4990	·4991	·4991	·4991	·4992	·4992	·4992	·4992	·4993	·4993
3·2	·4993	·4993	·4994	·4994	·4994	·4994	·4994	·4995	·4995	·4995
3·3	·4995	·4995	·4995	·4996	·4996	·4996	·4996	·4996	·4996	·4997
3·4	·4997	·4997	·4997	·4997	·4997	·4997	·4997	·4997	·4997	·4998
3·5	·4998	·4998	·4998	·4998	·4998	·4998	·4998	·4998	·4998	·4998
3·6	·4998	·4998	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999
3·7	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999
3·8	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999	·4999
3·9	·5000	·5000	·5000	·5000	·5000	·5000	·5000	·5000	·5000	·5000

Opomba: obrazložitev glej 13.6 - 13.9

Tabela B NORMALNA PORAZDELITEV

Ordinate $\varphi(z)$

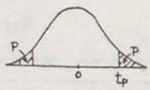


z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0·0	·3989	·3989	·3989	·3988	·3986	·3984	·3982	·3980	·3977	·3973
0·1	·3970	·3965	·3961	·3956	·3951	·3945	·3939	·3932	·3925	·3918
0·2	·3910	·3902	·3894	·3885	·3876	·3867	·3857	·3847	·3836	·3825
0·3	·3814	·3802	·3790	·3778	·3765	·3752	·3739	·3725	·3712	·3697
0·4	·3683	·3668	·3653	·3637	·3621	·3605	·3589	·3572	·3555	·3538
0·5	·3521	·3503	·3485	·3467	·3448	·3429	·3410	·3391	·3372	·3352
0·6	·3332	·3312	·3292	·3271	·3251	·3230	·3209	·3187	·3166	·3144
0·7	·3123	·3101	·3079	·3056	·3034	·3011	·2989	·2966	·2943	·2920
0·8	·2897	·2874	·2850	·2827	·2803	·2780	·2756	·2732	·2709	·2685
0·9	·2661	·2637	·2613	·2589	·2565	·2541	·2516	·2492	·2468	·2444
1·0	·2420	·2396	·2371	·2347	·2323	·2299	·2275	·2251	·2227	·2203
1·1	·2179	·2155	·2131	·2107	·2083	·2059	·2036	·2012	·1989	·1965
1·2	·1942	·1919	·1895	·1872	·1849	·1826	·1804	·1781	·1758	·1736
1·3	·1714	·1691	·1669	·1647	·1626	·1604	·1582	·1561	·1539	·1518
1·4	·1497	·1476	·1456	·1435	·1415	·1394	·1374	·1354	·1334	·1315
1·5	·1295	·1276	·1257	·1238	·1219	·1200	·1182	·1163	·1145	·1127
1·6	·1109	·1092	·1074	·1057	·1040	·1023	·1006	·0989	·0973	·0957
1·7	·0940	·0925	·0909	·0893	·0878	·0863	·0848	·0833	·0818	·0804
1·8	·0790	·0775	·0761	·0748	·0734	·0721	·0707	·0694	·0681	·0669
1·9	·0656	·0644	·0632	·0620	·0608	·0596	·0584	·0573	·0562	·0551
2·0	·0540	·0529	·0519	·0508	·0498	·0488	·0478	·0468	·0459	·0449
2·1	·0440	·0431	·0422	·0413	·0404	·0396	·0387	·0379	·0371	·0363
2.2	·0355	·0347	·0339	·0332	·0325	·0317	·0310	·0303	·0297	·0290
2·3	·0283	·0277	·0270	·0264	·0258	·0252	·0246	·0241	·0235	·0229
2·4	·0224	·0219	·0213	·0208	·0203	·0198	·0194	·0189	·0184	·0180
2·5	·0175	·0171	·0167	·0163	·0158	·0154	·0151	·0147	·0143	·0139
2·6	·0136	·0132	·0129	·0126	·0122	·0119	·0116	·0113	·0110	·0107
2·7	·0104	·0101	·0099	·0096	·0093	·0091	·0038	·0086	·0084	·0081
2·8	·0079	·0077	·0075	·0073	·0071	·0069	·0067	·0065	·0063	·0061
2·9	·0060	·0058	·0056	·0055	·0053	·0051	·0050	·0048	·0047	·0046
3·0	·0044	·0043	·0042	·0040	·0039	·0038	·0037	·0036	·0035	·0034
3·1	·0033	·0032	·0031	·0030	·0029	·0028	·0027	·0026	·0025	·0025
3·2	·0024	·0023	·0022	·0022	·0021	·0020	·0020	·0019	·0018	·0018
3·3	·0017	·0017	·0016	·0016	·0015	·0015	·0014	·0014	·0013	·0013
3·4	·0012	·0012	·0012	·0011	·0011	·0010	·0010	·0010	·0009	·0009
3·5	·0009	·0008	·0008	·0008	·0008	·0007	·0007	·0007	·0007	·0006
3·6	·0006	·0006	·0006	·0005	·0005	·0005	·0005	·0005	·0005	·0004
3·7	·0004	·0004	·0004	·0004	·0004	·0004	·0003	·0003	·0003	·0003
3·8	·0003	·0003	·0003	·0003	·0003	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002
3·9	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002	·0001	·0001

Opomba: obrazložitev glej od 13.6. - 13.9.

Tabela C t–PORAZDELITEV

Kritične vrednosti t_P

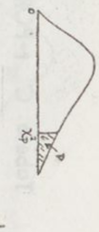


m	$\alpha = P$					
	.10	.05	.025	.01	.005	.0005
	$\alpha = 2P$					
	.20	.10	.05	.02	.01	.001
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Opomba: obrazložitev glej 15.3.

TABELA Č χ^2 - PORAZDELITEV

Kritične vrednosti χ^2_P

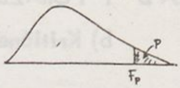


m	0.005	0.010	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999	m
	$1-P$																		
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.0642	0.148	0.275	0.455	0.708	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	1
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.446	0.713	1.02	1.39	1.83	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	2
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.00	1.42	1.87	2.37	2.95	3.67	4.64	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.65	2.19	2.75	3.36	4.04	4.88	5.99	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	4
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.34	3.00	3.66	4.35	5.13	6.06	7.29	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	4.57	5.35	6.21	7.23	8.56	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	6
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	5.49	6.35	7.28	8.38	9.80	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	7
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	6.42	7.34	8.35	9.52	11.0	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	8
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	7.36	8.34	9.41	10.7	12.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	8.30	9.34	10.5	11.8	13.4	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	9.24	10.3	11.5	12.9	14.6	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	10.2	11.3	12.6	14.0	15.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	11.1	12.3	13.6	15.1	17.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.8	12.1	13.3	14.7	16.2	18.2	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.3	11.7	13.0	14.3	15.7	17.3	19.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.2	12.6	14.0	15.3	16.8	18.4	20.5	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.0	13.5	14.9	16.3	17.8	19.5	21.6	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	12.9	14.4	15.9	17.3	18.9	20.6	22.8	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	18
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	13.7	15.4	16.9	18.3	19.9	21.7	23.9	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	19
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	14.6	16.3	17.8	19.3	21.0	22.8	25.0	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	15.4	17.2	18.8	20.3	22.0	23.9	26.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	16.3	18.1	19.7	21.3	23.0	24.9	27.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	17.2	19.0	20.7	22.3	24.1	26.0	28.4	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	23
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	18.1	19.9	21.7	23.3	25.1	27.1	29.6	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	24
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	18.9	20.9	22.6	24.3	26.1	28.2	30.7	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	25
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	19.8	21.8	23.6	25.3	27.2	29.2	31.8	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	26
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	20.7	22.7	24.5	26.3	28.2	30.3	32.9	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	27
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	21.6	23.6	25.5	27.3	29.2	31.4	34.0	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9	28
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	22.5	24.6	26.5	28.3	30.3	32.5	35.1	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3	29
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	23.4	25.5	27.4	29.3	31.3	33.5	36.3	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7	30
35	17.2	18.5	20.6	22.5	24.8	27.8	30.2	32.3	34.3	36.5	38.9	41.8	46.1	49.8	53.2	57.3	60.3	66.6	35
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	32.3	34.9	37.1	39.3	41.6	44.2	47.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4	40
45	24.3	25.9	28.4	30.6	33.4	36.9	39.6	42.0	44.3	46.8	49.5	52.7	57.5	61.7	65.4	70.0	73.2	80.1	45
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	41.4	44.3	46.9	49.3	51.9	54.7	58.2	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7	50
75	47.2	49.5	52.9	56.1	59.8	64.5	68.1	71.3	74.3	77.5	80.9	85.1	91.1	96.2	100.8	106.4	110.3	118.6	75
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	87.9	92.1	95.8	99.3	102.9	106.9	111.7	118.5	124.3	129.6	135.6	140.2	149.4	100

Opomba: obrazložitev glej 15.2

TABELA D F-PORAZDELITEV

a) Kritične vrednosti $F_{P=.05}$



$p = .05$

m_2 \ m_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	249.0	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.74	8.64	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.77	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.53	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.61	2.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.50	2.30
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.77	2.60	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.35	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.29	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.24	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.19	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.15	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.11	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.25	2.05	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.23	2.03	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.38	2.20	2.00	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.18	1.98	1.73
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.16	1.96	1.71
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.30	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.29	2.12	1.91	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	1.89	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.10	1.92	1.70	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.61	1.25
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	1.94	1.75	1.52	1.00

Opomba: obrazložitev glej 15.4

TABELA D F-PORAZDELITEV

b) Kritične vrednosti $F_{P=.01}$

$p = .01$

m_2 \ m_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98.49	99.01	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.42	99.46	99.50
3	34.12	30.81	29.46	28.71	28.24	27.91	27.49	27.05	26.60	26.12
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.80	14.37	13.93	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.27	9.89	9.47	9.02
6	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.10	7.72	7.31	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.84	6.47	6.07	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.03	5.67	5.28	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.47	5.11	4.73	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.06	4.71	4.33	3.91
11	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.74	4.40	4.02	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.50	4.16	3.78	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.30	3.96	3.59	3.16
14	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.14	3.80	3.43	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.00	3.67	3.29	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	3.89	3.55	3.18	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.79	3.45	3.08	2.65
18	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.71	3.37	3.00	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.63	3.30	2.92	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.56	3.23	2.86	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.51	3.17	2.80	2.36
22	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.45	3.12	2.75	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.41	3.07	2.70	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.36	3.03	2.66	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.32	2.99	2.62	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.29	2.96	2.58	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.26	2.93	2.55	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.23	2.90	2.52	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.20	2.87	2.49	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.17	2.84	2.47	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	2.99	2.66	2.29	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.82	2.50	2.12	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.66	2.34	1.95	1.38
∞	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.51	2.18	1.79	1.00

Opomba: obrazložitev glej 15.4

TABELA D F-PORAZDELITEV

c) Kritične vrednosti $F_{P=.001}$

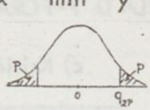
$p = .001$

m_2 \ m_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	405284	500000	540379	562500	576405	585937	598144	610667	623497	636619
2	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.5	999.5
3	167.5	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	130.6	128.3	125.9	123.5
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.00	47.41	45.77	44.05
5	47.04	36.61	33.20	31.09	29.75	28.84	27.64	26.42	25.14	23.78
6	35.51	27.00	23.70	21.90	20.81	20.03	19.03	17.99	16.89	15.75
7	29.22	21.69	18.77	17.19	16.21	15.52	14.63	13.71	12.73	11.69
8	25.42	18.49	15.83	14.39	13.49	12.86	12.04	11.19	10.30	9.34
9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.37	9.57	8.72	7.81
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.92	9.20	8.45	7.64	6.76
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.35	7.63	6.85	6.00
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	7.71	7.00	6.25	5.42
13	17.81	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.21	6.52	5.78	4.97
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.43	6.80	6.13	5.41	4.60
15	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.47	5.81	5.10	4.31
16	16.12	10.97	9.00	7.94	7.27	6.81	6.19	5.55	4.85	4.06
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	5.96	5.32	4.63	3.85
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	5.76	5.13	4.45	3.67
19	15.08	10.16	8.28	7.26	6.61	6.18	5.59	4.97	4.29	3.52
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.44	4.82	4.15	3.38
21	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.31	4.70	4.03	3.26
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.19	4.58	3.92	3.15
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6.08	5.65	5.09	4.48	3.82	3.05
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	4.99	4.39	3.74	2.97
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.88	5.46	4.91	4.31	3.66	2.89
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	4.83	4.24	3.59	2.82
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	4.76	4.17	3.52	2.75
28	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.69	4.11	3.46	2.70
29	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.64	4.05	3.41	2.64
30	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.58	4.00	3.36	2.59
40	12.61	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.21	3.64	3.01	2.23
60	11.97	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	3.87	3.31	2.69	1.90
120	11.38	7.31	5.79	4.95	4.42	4.04	3.55	3.02	2.40	1.56
∞	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.27	2.74	2.13	1.00

Opomba: obrazložitev glej 15.4

TABELA E STUDENTIZIRAN RAZMIK $q = (\bar{y}_{max} - \bar{y}_{min})/s_y$

Kritične vrednosti $q_{\alpha = 2P}$



$\alpha = 2P = 0.1$

m \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90	135	164	186	202	216	227	237	246
2	14.0	19.0	22.3	24.7	26.6	28.2	29.5	30.7	31.7
3	8.26	10.6	12.2	13.3	14.2	15.0	15.6	16.2	16.7
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.6	11.1	11.5	11.9	12.3
5	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.2
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37
8	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21
11	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99
12	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54
15	4.17	4.83	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44
16	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09
24	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.27	5.39	5.50	5.60
60	3.76	4.28	4.60	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16

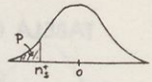
$\alpha = 2P = .05$

m \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1
2	6.09	8.3	9.8	10.9	11.7	12.4	13.0	13.5	14.0
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99
6	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92
9	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.60	4.78	4.94	5.08	5.20
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.71	4.86	4.99	5.11
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92
30	2.89	3.49	3.84	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.74
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65
120	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.48	4.56
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47

Opomba: obrazložitev glej 20.6

TABELA F PRESKUS Z MEDIANO

Kritične vrednosti za n_s^+

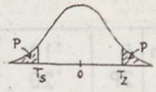


n	P: .10 / 2P: .20	P: .05 / 2P: .10	P: .025 / 2P: .05	P: .01 / 2P: .02	P: .005 / 2P: .01	n	P: .10 / 2P: .20	P: .05 / 2P: .10	P: .025 / 2P: .05	P: .01 / 2P: .02	P: .005 / 2P: .01
6	0	0	0	–	–	41	15	14	13	12	11
7	1	0	0	0	–	42	16	15	14	13	12
8	1	1	0	0	0	43	16	15	14	13	12
9	2	1	1	0	0	44	17	16	15	13	13
10	2	1	1	0	0	45	17	16	15	14	13
11	2	2	1	1	0	46	18	16	15	14	13
12	3	2	2	1	1	47	18	17	16	15	14
13	3	3	2	1	1	48	19	17	16	15	14
14	4	3	2	2	1	49	19	18	17	15	15
15	4	3	3	2	2	50	19	18	17	16	15
16	4	4	3	2	2	52	20	19	18	17	16
17	5	4	4	3	2	54	21	20	19	18	17
18	5	5	4	3	3	56	22	21	20	18	17
19	6	5	4	4	3	58	23	22	21	19	18
20	6	5	5	4	3	60	24	23	21	20	19
21	7	6	5	4	4	62	25	24	22	21	20
22	7	6	5	5	4	64	26	24	23	22	21
23	7	7	6	5	4	66	27	25	24	23	22
24	8	7	6	5	5	68	28	26	25	23	22
25	8	7	7	6	5	70	29	27	26	24	23
26	9	8	7	6	6	72	30	28	27	25	24
27	9	8	7	7	6	74	30	29	28	26	25
28	10	9	8	7		76	31	30	28	27	26
29	10	9	8	7	7	78	32	31	29	28	27
30	10	10	9	8	7	80	33	32	30	29	28
31	11	10	9	8	7	82	34	33	31	30	28
32	11	10	9	8	8	84	35	33	32	30	29
33	12	11	10	9	8	86	36	34	33	31	30
34	12	11	10	9	8	88	37	35	34	32	31
35	13	12	11	10	9	90	38	36	35	33	32
36	13	12	11	10	9	92	39	37	36	34	33
37	14	13	12	10	10	94	40	38	37	35	34
38	14	13	12	11	10	96	41	39	37	36	34
39	15	13	12	11	11	98	42	40	38	37	35
40	15	14	13	12	11	100	43	41	39	37	36

Opomba: obrazložitev glej 16.41 in 16.42

TABELA G PRESKUS S PREDZNAČENIMI RANGI – WILCOXONOV PRESKUS

Spodnja T_s in zgornja T_z kritična vrednost za vzorce z $n = 6(1)\ 20$ enotami

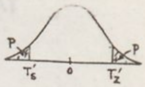


n	P / 2P	·10 / ·20		·05 / ·10		·025 / ·05		·01 / ·02		·005 / ·01	
		T_s	T_z	T_s	T_z	T_s	T_z	T_s	T_z	T_s	T_z
6		3	18	2	19	0	21	–		–	
7		5	23	3	25	2	26	0	28		
8		8	28	3	31	3	33	1	35	–	
9		10	35	8	37	5	40	3	42	1	44
10		14	41	10	45	8	47	5	50	3	52
11		17	49	13	53	10	56	7	59	5	61
12		21	57	17	61	13	65	10	68	7	71
13		26	65	21	70	17	74	12	79	10	81
14		31	74	25	80	21	84	16	89	13	92
15		36	84	30	90	25	95	19	101	16	104
16		42	94	35	101	30	106	23	113	20	116
17		48	105	41	112	35	118	28	125	24	129
18		55	116	47	124	40	131	33	138	28	143
19		62	128	54	136	46	144	38	152	33	157
20		69	141	60	150	52	158	43	167	38	172

Opomba: obrazložitev glej 16.44 in 16.45

TABELA H PRESKUS Z VSOTO RANGOV - MAN-WITHNEYEV PRESKUS

Spodnja T_s' in zgornja T_z' kritična vrednost za vsote rangov T'



n_2		3		4		5		6		7		8		9		10	
n_1	P	T_s'	T_z'	T_s'	T_z'	T_s'	T_z'	T_s'	T_z'	T_s'	T_z'	T_s'	T_z'	T_s'	T_z'	T_s'	T_z'
1	˙10													1	10	1	11
	˙05													–	–	–	–
	˙01													–	–	–	–
	˙001													–	–	–	–
2	˙10	3	9	3	11	4	12	4	14	4	16	5	17	5	19	6	20
	˙05			–		3	13	3	15	3	17	4	18	4	20	4	22
	˙01			–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	˙001			–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	˙10	7	14	7	17	8	19	9	21	10	23	11	25	11	28	12	30
	˙05	6	15	6	18	7	20	8	22	8	25	9	27	10	29	10	32
	˙01			–		–		–	–	6	27	6	30	7	32	7	35
	˙001			–		–		–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4	˙10			13	23	14	26	15	29	16	32	17	35	19	37	20	40
	˙05			11	25	12	28	13	31	14	34	15	37	16	40	17	43
	˙01			–		10	30	11	33	11	37	12	40	13	43	13	47
	˙001			–		–	–	–	–	–	–	–	–	10	46	10	50
5	˙10					20	35	22	38	23	42	25	45	27	48	28	52
	˙05					19	36	20	40	21	44	23	47	24	51	25	55
	˙01					–	–	17	43	18	47	19	51	20	55	21	59
	˙001					–	–	–	–	15	50	15	55	16	59	16	64
6	˙10							30	48	32	52	34	56	36	60	38	64
	˙05							28	50	29	55	31	59	33	63	35	67
	˙01							24	54	25	59	27	63	28	68	29	73
	˙001							21	57	21	63	22	68	23	73	24	78

n_1	n_2 / P	7		8		9		10	
		T_s'	T_z'	T_s'	T_z'	T_s'	T_z'	T_s'	T_z'
7	˙10	41	64	44	68	46	73	49	77
	˙05	39	66	41	71	43	76	45	81
	˙01	34	71	36	76	37	82	39	87
	˙001	29	76	30	82	31	88	33	93
8	˙10			55	81	57	87	60	92
	˙05			51	85	54	90	56	96
	˙01			45	91	48	96	50	102
	˙001			40	96	41.	103	42	110

n_1	n_2 / P	9		10	
		T_s'	T_z'	T_s'	T_z'
9	˙10	70	101	73	107
	˙05	66	105	69	111
	˙01	59	112	61	119
	˙001	52	119	54	126
10	˙10			87	123
	˙05			82	128
	˙01			74	136
	˙001			66	144

Opomba: obrazložitev glej: 16.46 in 16.47

TABELA I PRESKUS S SEKVENCAMI

Spodnja r_s in zgornja r_z kritična vrednost za število sekvenc r

za $\alpha = P = {}^{\cdot}05$ in $\alpha = 2P = 0.10$

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2																			
3																			
4			9	9															
5			2	2 / 10	10	11	11												
6		2	2	3	3 / 11	12	12	13	13	13	13								
7		2	2	3	3	3 / 13	13	14	14	14	14	15	15	15					
8		2	3	3	3	4	4 / 14	14	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17
9		2	3	3	4	4	5	5 / 15	16	16	16	17	17	18	18	18	18	18	18
10		2	3	3	4	5	5	5	6 / 16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20
11		2	3	4	4	5	5	6	6	7 / 17	18	19	19	19	20	20	20	21	21
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7 / 19	19	20	20	21	21	21	22	22
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8 / 20	20	21	21	22	22	23	23
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9 / 21	22	22	23	23	23	24
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10 / 22	23	23	24	24	25
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11 / 23	24	25	25	25
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11 / 25	25	26	26
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12 / 26	26	27
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13 / 27	27
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14 / 28

r_s n_2 (below the stepped line) — r_z n_1 n_2 (above the stepped line)

TABELA J FISHERJEVA TRANSFORMACIJA $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$

a) $Z = Z(r)$

r	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
.0	0.000	0.010	0.020	0.030	0.040	0.050	0.060	0.070	0.080	0.090
.1	.100	.110	.121	.131	.141	.151	.161	.172	.182	.192
.2	.203	.213	.224	.234	.245	.255	.266	.277	.288	.299
.3	.310	.321	.332	.343	.354	.365	.377	.388	.400	.412
.4	.424	.436	.448	.460	.472	.485	.497	.510	.523	.536
.5	.549	.563	.576	.590	.604	.618	.633	.648	.662	.678
.6	.693	.709	.725	.741	.758	.775	.793	.811	.829	.848
.7	.867	.887	.908	.929	.950	.973	.996	1.020	1.045	1.071
.8	1.099	1.127	1.157	1.188	1.221	1.256	1.293	1.333	1.376	1.422
r	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
.90	1.472	1.478	1.483	1.488	1.494	1.499	1.505	1.510	1.516	1.522
.91	1.528	1.533	1.539	1.545	1.551	1.557	1.564	1.570	1.576	1.583
.92	1.589	1.596	1.602	1.609	1.616	1.623	1.630	1.637	1.644	1.651
.93	1.658	1.666	1.673	1.681	1.689	1.697	1.705	1.713	1.721	1.730
.94	1.738	1.747	1.756	1.764	1.774	1.783	1.792	1.802	1.812	1.822
.95	1.832	1.842	1.853	1.863	1.874	1.886	1.897	1.909	1.921	1.933
.96	1.946	1.959	1.972	1.986	2.000	2.014	2.029	2.044	2.060	2.076
.97	2.092	2.109	2.127	2.146	2.165	2.185	2.205	2.227	2.249	2.273
.98	2.298	2.323	2.351	2.380	2.410	2.443	2.477	2.515	2.555	2.599
.99	2.646	2.700	2.759	2.826	2.903	2.994	3.106	3.250	3.453	3.800

b) $r = r(Z)$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.000	0.010	0.020	0.030	0.040	0.050	0.060	0.070	0.080	0.090
.1	.100	.110	.119	.129	.139	.149	.159	.168	.178	.187
.2	.197	.207	.216	.226	.236	.245	.254	.264	.273	.282
.3	.291	.300	.310	.319	.327	.336	.345	.354	.363	.371
.4	.380	.389	.397	.405	.414	.422	.430	.438	.446	.454
.5	.462	.470	.478	.485	.493	.500	.508	.515	.523	.530
.6	.537	.544	.551	.558	.565	.572	.578	.585	.592	.598
.7	.604	.611	.617	.623	.629	.635	.641	.647	.653	.658
.8	.664	.670	.675	.680	.686	.691	.696	.701	.706	.711
.9	.716	.721	.726	.731	.735	.740	.744	.749	.753	.757
1.0	.762	.766	.770	.774	.778	.782	.786	.790	.793	.797
1.1	.800	.804	.808	.811	.814	.818	.821	.824	.828	.831
1.2	.834	.837	.840	.843	.846	.848	.851	.854	.856	.859
1.3	.862	.864	.867	.869	.872	.874	.876	.879	.881	.883
1.4	.885	.888	.890	.892	.894	.896	.898	.900	.902	.903
1.5	.905	.907	.909	.910	.912	.914	.915	.917	.919	.920
1.6	.922	.923	.925	.926	.928	.929	.930	.932	.933	.934
1.7	.935	.937	.938	.939	.940	.941	.942	.944	.945	.946
1.8	.947	.948	.949	.950	.951	.952	.953	.954	.954	.955
1.9	.956	.957	.958	.959	.960	.960	.961	.962	.963	.963
2.0	.964	.965	.965	.966	.967	.967	.968	.969	.969	.970
2.1	.970	.971	.972	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.975
2.2	.976	.976	.977	.977	.978	.978	.978	.979	.979	.980
2.3	.980	.980	.981	.981	.982	.982	.982	.983	.983	.983
2.4	.984	.984	.984	.985	.985	.985	.986	.986	.986	.986
2.5	.987	.987	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.6	.989	.989	.989	.990	.990	.990	.990	.990	.991	.991
2.7	.991	.991	.991	.992	.992	.992	.992	.992	.992	.992
2.8	.993	.993	.993	.993	.993	.993	.993	.994	.994	.994
2.9	.994	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995

Opomba: obrazložitev glej 18.26

TABELA K ORTOGONALNI POLINOMI BINOMSKIH FUNKCIJ

Matrike d_{kh} I D_k za N = 2(1) 30

N = 1

1	:	1

N = 2

	1	:	2
2	–1	:	2

N = 3

		1	:	3
	1	–1	:	2
6	–3	1	:	6

N = 4

			1	:	4
		2	–3	:	20
	2	–2	1	:	4
20	–10	4	–1	:	20

N = 5

				1	:	5
			1	–2	:	10
		2	–3	2	:	14
	5	–5	3	–1	:	10
70	–35	15	–5	1	:	70

N = 6

					1	:	6
				2	–5	:	70
			3	–6	5	:	84
		10	–15	12	–5	:	180
	14	–14	9	–4	1	:	28
252	–126	56	–21	6	–1	:	252

N = 7

					1	:	7
				1	–3	:	28
			2	–5	5	:	84
		1	–2	2	–1	:	6
	14	–21	18	–10	3	:	154
42	–42	28	–14	5	–1	:	84

N = 8

					1	:	8
				2	–7	:	168
			2	–6	7	:	168
		4	–10	12	–7	:	264
	14	–28	30	–20	7	:	616
84	–126	112	–70	30	–7	:	2184

N = 9

					1	:	9
				1	–4	:	60
			6	–21	28	:	2772
		5	–15	21	–14	:	990
	14	–35	45	–35	14	:	2002
18	–36	40	–30	15	–4	:	468

N = 10

					1	:	10
				2	–9	:	330
			1	–4	6	:	132
		10	–35	56	–42	:	8580
	10	–30	45	–40	18	:	2860
12	–30	40	–35	20	–6	:	780

N = 11

					1	:	11
				1	–5	:	110
			2	–9	15	:	858
		5	–20	36	–30	:	4 290
	2	–7	12	–12	6	:	286
3	–9	14	–14	9	–3	:	156

N = 12

					+ 1	:	12
				2	–11	:	572
			6	–30	55	:	12 012
		4	–18	36	–33	:	5 148
	7	–28	54	–60	33	:	8 008
18	–63	112	–126	90	–33	:	15 912

N = 13

					1	:	13
				1	–6	:	182
			2	–11	22	:	2 002
		1	–5	11	–11	:	572
	14	–63	135	–165	99	:	68 068
7	–28	56	–70	55	–22	:	6 188

TABELA K (nadaljevanje)

N = 14

					1	:	14
				2	–13	:	910
			1	–6	13	:	728
		10	–55	132	–143	:	97 240
	14	–70	165	–220	143	:	136 136
28	–126	280	–385	330	–143	:	235 144

N = 15

					1	:	15
				1	–7	:	280
			6	–39	91	:	37 128
		5	–30	78	–91	:	39 780
	70	–385	990	–1 430	1 001	:	6 466 460
126	–630	1 540	–2 310	2 145	–1 001	:	10 581 480

N = 16

					1	:	16
				2	–15	:	1 360
			2	–14	35	:	5 712
		20	–130	364	–455	:	1 007 760
	14	–84	234	–364	273	:	470 288
12	–66	176	–286	–286	–143	:	201 522

N = 17

					1	:	17
				1	–8	:	408
			2	–15	40	:	7 752
		1	–7	21	–28	:	3 876
	2	–13	39	–65	52	:	16 796
6	–36	104	–182	195	–104	:	100 776

N = 18

					1	:	18
				2	–17	:	1 938
			3	–24	68	:	23 256
		2	–15	48	–68	:	23 256
	2	–14	45	–80	68	:	28 424
36	–234	728	–1 365	1 560	–884	:	6 953 544

N = 19

					1	:	19
				1	–9	:	570
			2	–17	51	:	13 566
		5	–40	136	–204	:	213 180
	14	–105	360	–680	612	:	2 288 132
3	–21	70	–140	170	–102	:	89 148

N = 20

					1	:	20
				2	–19	:	2 660
			2	–18	57	:	17 556
		20	–170	612	–969	:	4 903 140
	35	–280	1 020	–2 040	1 938	:	22 881 320
42	–315	1 120	–2 380	3 060	–1 938	:	31 201 800

N = 21

					1	:	21
				1	–10	:	770
			6	–57	190	:	201 894
		5	–45	171	–285	:	432 630
	14	–119	459	–969	969	:	5 720 330
63	–504	1 904	–4 284	5 814	–3 876	:	121 687 020

N = 22

					1	:	22
				2	–21	:	3 542
			1	–10	35	:	7 084
		2	–19	76	–133	:	96 140
	14	–126	513	–1 140	1 197	:	8 748 740
28	–238	952	–2 261	3 230	–2 261	:	40 562 340

TABELA K (nadaljevanje)

N = 23						1	:	23
					1	–11	:	1 012
				2	–21	77	:	35 420
			1	–10	41	–77	:	32 890
		14	–133	570	–1 330	1 463	:	13 123 110
	2	–18	76	–190	285	–209	:	340 860
N = 24						1	:	24
					2	–23	:	4 600
				6	–66	253	:	394 680
			20	–210	924	–1 771	:	17 760 600
		2	–20	90	–220	253	:	394 680
	36	–342	1 520	–3 990	6 270	–4 807	:	177 928 920
N = 25						1	:	25
					1	–12	:	1 300
				2	–23	92	:	53 820
			5	–55	253	–506	:	1 480 050
		10	–105	495	–1 265	1 518	:	14 307 150
	6	–60	280	–770	1 265	–1 012	:	7 803 900
N = 26						1	:	26
					2	–25	:	5 850
				1	–12	50	:	16 380
			10	–115	552	–1 150	:	7 803 900
		14	–154	759	–2 024	2 530	:	40 060 020
	12	–126	616	–1 771	3 036	–2 530	:	48 384 180
N = 27						1	:	27
					1	–13	:	1 638
				6	–75	325	:	712 530
			1	–12	60	–130	:	101 790
		14	–161	828	–2 300	2 990	:	56 448 210
	63	–693	3 542	–10 626	18 975	–16 445	:	2 032 135 560
N = 28						1	:	28
					2	–27	:	7 308
				2	–26	117	:	95 004
			4	–50	260	–585	:	2 103 660
		7	–84	450	–1 300	1 755	:	19 634 160
	42	–483	2 576	–8 050	14 950	–13 455	:	1 354 757 040
N = 29						1	:	29
					1	–14	:	2 030
				2	–27	126	:	113 274
			5	–65	351	–819	:	4 207 320
		14	–175	975	–2 925	4 095	:	107 987 880
	21	–252	1 400	–4 550	8 775	–8 190	:	500 671 080
N = 30						1	:	30
					2	–29	:	8 990
				3	–42	203	:	302 064
			10	–135	756	–1 827	:	21 360 240
		70	–910	5 265	–16 380	23 751	:	3 671 587 920
	36	–450	2 600	–8 775	17 550	–16 965	:	2 145 733 200

Opomba: obrazložitev glej 21.68 in 21.69

TABELA L SLUČAJNOSTNA ŠTEVILA

59 58 00 64 78	75 56 97 88 00	88 83 55 44 86	23 76 80 61 56	04 11 10 84 08
38 50 80 73 41	23 79 34 87 63	90 82 29 70 22	17 71 90 42 07	95 95 44 99 53
30 69 27 06 68	94 68 81 61 27	56 19 68 00 91	82 06 76 34 00	05 46 26 92 00
65 44 39 56 59	18 28 82 74 37	49 63 22 40 41	08 33 76 56 76	96 29 99 08 36
27 26 75 02 64	13 19 27 22 94	07 47 74 46 06	17 98 54 89 11	97 34 13 03 58
91 30 70 69 91	19 07 22 42 10	36 69 95 37 28	28 82 53 57 93	28 97 66 62 52
68 43 49 46 88	84 47 31 36 22	62 12 69 84 08	12 84 38 25 90	09 81 59 31 46
48 90 81 58 77	54 74 52 45 91	35 70 00 47 54	83 82 45 26 92	54 13 05 51 60
06 91 34 51 97	42 67 27 86 01	11 88 30 95 28	63 01 19 89 01	14 97 44 03 44
10 45 51 60 19	14 21 03 37 12	91 34 23 78 21	88 32 58 08 51	43 66 77 08 83
12 88 39 73 43	65 02 76 11 84	04 28 50 13 92	17 97 41 50 77	90 71 22 67 69
21 77 83 09 76	38 80 73 69 61	31 64 94 20 96	63 28 10 20 23	08 81 64 74 49
19 52 35 95 15	65 12 25 96 59	86 28 36 82 58	69 57 21 37 98	16 43 59 15 29
67 24 55 26 70	35 58 31 65 63	79 24 68 66 86	76 46 33 42 22	26 65 59 08 02
60 58 44 73 77	07 50 03 79 92	45 13 42 65 29	26 76 08 36 37	41 32 64 43 44
53 85 34 13 77	36 06 69 48 50	58 83 87 38 59	49 36 47 33 31	96 24 04 36 42
24 63 73 87 36	74 38 48 93 42	52 62 30 79 92	12 36 91 86 01	03 74 28 38 73
83 08 01 24 51	38 99 22 28 15	07 75 95 17 77	97 37 72 75 85	51 97 23 78 67
16 44 42 43 34	36 15 19 90 73	27 49 37 09 39	85 13 03 25 52	54 84 65 47 59
60 79 01 81 57	57 17 86 57 62	11 16 17 85 76	45 81 95 29 79	65 13 00 48 60
03 99 11 04 61	93 71 61 68 94	66 08 32 46 53	84 60 95 82 32	88 61 81 91 61
38 55 59 55 54	32 88 65 97 80	08 35 56 08 60	29 73 54 77 62	71 29 92 38 53
17 54 67 37 04	92 05 24 62 15	55 12 12 92 81	59 07 60 79 36	27 95 45 89 09
32 64 35 28 61	95 81 90 68 31	00 91 19 89 36	76 35 59 37 79	80 86 30 05 14
69 57 26 87 77	39 51 03 59 05	14 06 04 06 19	29 54 96 96 16	33 56 46 07 80
24 12 26 65 91	27 69 90 64 94	14 84 54 66 72	61 95 87 71 00	90 89 97 57 54
61 19 63 02 31	92 96 26 17 73	41 83 95 53 82	17 26 77 09 43	78 03 87 02 67
30 53 22 17 04	10 27 41 22 02	39 68 52 33 09	10 06 16 88 29	55 98 66 64 85
03 78 89 75 99	75 86 72 07 17	74 41 65 31 66	35 20 83 33 74	87 53 90 88 23
48 22 86 33 79	85 78 34 76 19	53 15 26 74 33	35 66 35 29 72	16 81 86 03 11
60 36 59 46 53	35 07 53 39 49	42 61 42 92 97	01 91 82 83 16	98 95 37 32 31
83 79 94 24 02	56 62 33 44 42	34 99 44 13 74	70 07 11 47 36	09 95 81 80 65
32 96 00 74 05	36 40 98 32 32	99 38 54 16 00	11 13 30 75 86	15 91 70 62 53
19 32 25 38 45	57 62 05 26 06	66 49 76 86 46	78 13 86 65 59	19 64 09 94 13
11 22 09 47 47	07 39 93 74 08	48 50 92 39 29	27 48 24 54 76	85 24 43 51 59
31 75 15 72 60	68 98 00 53 39	15 47 04 83 55	88 65 12 25 96	03 15 21 92 21
88 49 29 93 82	14 45 40 45 04	20 09 49 89 77	74 84 39 34 13	22 10 97 85 08
30 93 44 77 44	07 48 18 38 28	73 78 80 65 33	28 59 72 04 05	94 20 52 03 80
22 88 84 88 93	27 49 99 87 48	60 53 04 51 28	74 02 28 46 17	82 03 71 02 68
78 21 21 69 93	35 90 29 13 86	44 37 21 54 86	65 74 11 40 14	87 48 13 72 20

98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07	35 44 13 18 80
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94	37 54 87 30 43
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98	94 62 46 11 71
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39	00 38 75 95 79
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27	77 93 89 19 36
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21	80 81 45 17 48
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55	36 04 09 03 24
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40	88 46 12 33 56
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46	15 02 00 99 94
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15	01 84 87 69 38
09 18 82 00 97	32 82 53 95 27	04 22 08 63 04	83 38 98 73 74	64 27 85 80 44
90 04 58 54 97	51 98 15 06 54	94 93 88 19 97	91 87 07 61 50	68 47 66 46 59
73 18 95 02 07	47 67 72 52 69	62 29 06 44 64	27 12 46 70 18	41 36 18 27 60
75 76 87 64 90	20 97 18 17 49	90 42 91 22 72	95 37 50 58 71	93 82 34 31 78
54 01 64 40 56	66 28 13 10 03	00 68 22 73 98	20 71 45 32 95	07 70 61 78 13
08 35 86 99 10	78 54 24 27 85	13 66 15 88 73	04 61 89 75 53	31 22 30 84 20
28 30 60 32 64	81 33 31 05 91	40 51 00 78 93	32 60 46 04 75	94 11 90 18 40
53 84 08 62 33	81 59 41 36 28	51 21 59 02 90	28 46 66 87 95	77 76 22 07 91
91 75 75 37 41	61 61 36 22 69	50 26 39 02 12	55 78 17 65 14	83 48 34 70 55
89 41 59 26 94	00 39 75 83 91	12 60 71 76 46	48 94 97 23 06	94 54 13 74 08
77 51 30 38 20	86 83 42 99 01	68 41 48 27 74	51 90 81 39 80	72 89 35 55 07
19 50 23 71 74	69 97 92 02 88	55 21 02 97 73	74 28 77 52 51	65 34 46 74 15
21 81 85 93 13	93 27 88 17 57	05 68 67 31 56	07 08 28 50 46	31 85 33 84 52
51 47 46 64 99	68 10 72 36 21	94 04 99 13 45	42 83 60 91 91	08 00 74 54 49
99 55 96 83 31	62 53 52 41 70	69 77 71 28 30	74 81 97 81 42	43 86 07 28 34
33 71 34 80 07	93 58 47 28 69	51 92 66 47 21	58 30 32 98 22	93 17 49 39 72
85 27 48 68 93	11 30 32 92 70	28 83 43 41 37	73 51 59 04 00	71 14 84 36 43
84 13 38 96 40	44 03 55 21 66	73 85 27 00 91	61 22 26 05 61	62 32 71 84 23
56 73 21 62 34	17 39 59 61 31	10 12 39 16 22	85 49 65 75 60	81 60 41 88 80
65 13 85 68 06	87 64 88 52 61	34 31 36 58 61	45 87 52 10 69	85 64 44 72 77
38 00 10 21 76	81 71 91 17 11	71 60 29 29 37	74 21 96 40 49	65 58 44 96 98
37 40 29 63 97	01 30 47 75 86	56 27 11 00 86	47 32 46 26 05	40 03 03 74 38
97 12 54 03 48	87 08 33 14 17	21 81 53 92 50	75 23 76 20 47	15 50 12 95 78
21 82 64 11 34	47 14 33 40 72	64 63 88 59 02	49 13 90 64 41	03 85 65 45 52
73 13 54 27 42	95 71 90 90 35	85 79 47 42 96	08 78 98 81 56	64 69 11 92 02
07 63 87 79 29	03 06 11 80 72	96 20 74 41 56	23 82 19 95 38	04 71 36 69 94
60 52 88 34 41	07 95 41 98 14	59 17 52 06 95	05 53 35 21 39	61 21 20 64 55
83 59 63 56 55	06 95 89 29 83	05 12 80 97 19	77 43 35 37 83	92 30 15 04 98
10 85 06 27 46	99 59 91 05 07	13 49 90 63 19	53 07 57 18 39	06 41 01 93 62
39 82 09 89 52	43 62 26 31 47	64 42 18 08 14	43 80 00 93 51	31 02 47 31 67

Opomba: obrazložitev glej 14.24

TABELA M LOGARITMI TROMESTNIH ŠTEVIL

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Proportional parts 1	2	3	4	5
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	4	5	7	9
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	5	7
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	7
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	2	4	5	6
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	4	5	6
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	5
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	3	3	4
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5

TABELA M (nadaljevanje)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Proportional parts 1	2	3	4	5
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	1	2	3	4
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	3
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	3	3
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	3	3
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	3	3
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	3	3
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	1	1	2	2	3
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5

51.)

18 -XI- 1975