PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **8** (1980/1981)
Številka 1
Strani 13–18

Edvard Kramar:

ŠTEVILO RAZDELITEV ENAKIH PREDMETOV NA SKUPINE

Ključne besede: matematika, kombinatorika, razdelitve, množica.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/8/458-Kramar.pdf

ŠTEVILO RAZDELITEV ENAKIH PREDMETOV NA SKUPINE

Dedek Mraz je pri pripravljanju daril za otroke imel še 10 pomaranč, ki jih je hotel dodati v tri vrečke, ki še niso bile zaprte. Ker je hotel biti čim bolj pravičen, je najprej poiskal vse možne porazdelitve teh pomaranč na tri kupčke. Dobil je 8 razdelitev: 8+1+1, 7+2+1, 6+3+1, 6+2+2, 5+3+2, 5+4+1, 4+4+2, 4+3+3. Nazadnje se je odločil za eno od teh možnosti in kupčke razdelil v najprimernejše vrečke. Zastavil pa si je vprašanje, ali se da že vnaprej ugotoviti, koliko je takih porazdelitev pri danem številu pomaranč, da pri grupiranju ne bi morda pozabil na kakšno razdelitev.

Poskusimo problem, na katerega je naletel Dedek Mraz, rešiti za splošnejše primere. Vprašajmo se, na koliko načinov lahko naredimo iz n enakih predmetov k skupin. Lahko bi tudi rekli, na koliko načinov lahko pišemo dano število n na k pozitivnih sumandov, pri čemer vrstni red sumandov ni važen (na primer razdelitvi $6 = 1+2+3$ in $6 = 2+3+1$ sta za nas isti).

Namesto zgornje naloge si najprej oglejmo nekoliko spremenjeno nalogo, vendar bomo lahko iz rešitve te naloge takoj izpeljali tudi rešitev za prvotno. Vprašanje je, na koliko načinov lahko razdelimo n enakih predmetov na kvečjemu k skupin. Označimo z $r_k(n)$ število teh možnosti. Čeprav je vprašanje zelo lahko razumljivo, ni lahko dobiti formulo za število $r_k(n)$ za poljubni naravni števili n in k. Pokazali bomo pot do take formule za najbolj preproste primere. Dogovorimo se še, da pri zapisu porazdelitev ničelnih členov ne bomo pisali, razen pri razdelitvi števila 0 ($0 = 0$). Torej bomo zapisali $6 = 4+2$ namesto $6 = 4+2+0+0$.

Najprej je očitno $r_1(n) = 1$ za vsako število predmetov. Tudi do števila $r_2(n)$ bomo hitro prišli. Naj bo najprej n sodo število, potem imamo naslednje razdelitve števila n:

$$n = n, \quad n = (n-1) + 1, \quad \ldots, \quad n = n/2 + n/2$$

torej $n/2 + 1 = (n+2)/2$ možnosti. Pri lihem n pa dobimo

$$n = n, \quad n = (n-1) + 1, \ldots, \quad n = (n+1)/2 + (n-1)/2$$

se pravi $(n-1)/2 + 1 = (n+1)/2$ možnosti. Oba rezultata lahko zapišemo z eno formulo na primer takole:

$$r_2(n) = (n+1+(1+(-1)^n)/2)/2$$

Pri tem smo morali pisati sumand $(1+(-1)^n)/2$, ki uravnava formulo za primer sodega in primer lihega števila n. Za praktično rabo lahko zgornji izraz še poenostavimo, če vpeljemo naslednji simbol: za dani števili m in n naj bo $D(m,n) = 1$, če je n deljiv z m in $D(m,n) = 0$, če ni deljiv ter $D(m,0) = 1$. Pri tem sta m in n poljubni naravni števili. S to oznako lahko zgornjo formulo pišemo v obliki

$$r_2(n) = (n+1+D(2,n))/2$$

To formulo smo izpeljali za $n = 2,3,\ldots$, velja pa tudi za $n = 0$ in $n = 1$, kajti tedaj dobimo $r_2(0)=r_2(1)=1$, kar je smiselno, saj imata ti števili le po eno razdelitev: $0 = 0$, $1 = 1$.

Oglejmo si še, do kakšnega obrazca pridemo za število razdelitev n predmetov na kvečjemu 3 skupine. Do števila $r_3(n)$ bomo prišli v več korakih, pri tem pa si bomo pomagali z že izpeljano formulo za $r_2(n)$. Mislimo si, da moramo n enakih krogel razdeliti na kvečjemu 3 kupčke. Vse možne načine lahko dobimo takole: Najprej poiščemo vse razdelitve na kvečjemu dva kupčka, teh razdelitev je $r_2(n)$ in jih lahko štejemo za razdelitve na kvečjemu 3 kupčke, pri čemer je en kupček prazen. V drugem koraku damo na vsakega od treh kupčkov po eno kroglo, preostalih $n-3$ krogel (če je $n > 3$) pa razdelimo tako, da jih damo kakorkoli na kvečjemu dva kupčka. Število razdelitev na tem koraku je enako $r_2(n-3)$ in vse te razdelitve so očitno drugačne od razdelitev v prvem koraku. V tretjem koraku damo najprej na vsak kupček po dve krogli, če jih je dovolj, preostale pa porazdelimo na kvečjemu prva dva kupčka. S tem dobimo še

$r_2(n-6)$ porazdelitev. Ta postopek ponavljamo tako dolgo, dokler nam ne zmanjka krogel. Očitno so razdelitve, ki jih dobimo, vse različne. Število razdelitev $r_3(n)$ torej lahko izrazimo z zvezo

$$r_3(n) = r_2(n) + r_2(n-3) + r_2(n-6) + \ldots + r_2(n-3i) + \ldots$$

kjer člene prištevamo tako dolgo, dokler je število v oklepaju še večje ali enako nič. Pri tem še upoštevamo $r_2(0) = r_2(1) = 1$.

Za ilustracijo si oglejmo zgornji postopek pri $n = 8$. Najprej imamo $r_2(8) = 5$ razdelitev na kvečjemu dva dela: $8 = 8$, $8 = 7+1$, $8 = 6+2$, $8 = 5+3$, $8 = 4+4$. Te razdelitve lahko štejemo tudi za razdelitve na kvečjemu tri dele. V drugem koraku damo na vsak kupček po eno kroglo, ostalih 5 pa razdelimo na kvečjemu dva dela: $5 = 5$, $5 = 4+1$ in $5 = 3+2$. Če upoštevamo, da imamo na vsakem kupčku že po eno kroglo, dobimo: $8 = 6+1+1$, $8 = 5+2+1$ in $8 = 4+3+1$, torej še $r_2(8-3) = r_2(5) = 3$ razdelitve. Nazadnje damo na kupček po dve krogli, preostali dve pa na kvečjemu dva kupčka: $2 = 2$, $2 = 1+1$. Vidimo, da imamo nazadnje še $2 = r_2(8-6)$ možnosti: $8 = 4+2+1$ in $8 = 3+3+2$. Vseh razdelitev je torej $r_3(8) = 5 + 3 + 2 = 10$.

Če bi sedaj v zgornjo zvezo vstavili zaporedoma vse izraze, ki veljajo za $r_2(n)$, $r_2(n-3)$ itd, bi dobili končno formulo za število razdelitev $r_3(n)$. Ker pa je pot do končne oblike dokaj zamudna, jo raje kar zapišimo, spodaj pa bomo pokazali, kako to formulo lahko dokažemo s popolno indukcijo

$$r_3(n) = (n^2+6n+5+3D(2,n)+4D(3,n))/12$$

Če si ogledamo zvezo med številom porazdelitev na kvečjemu 3 dele in med števili porazdelitev na kvečjemu 2 dela, opazimo, da imamo 3 različne situacije glede na to, kakšen ostanek dobimo, če število n delimo s 3. Zato ločimo tri možnosti: $n = 3s$, $n = 3s+1$ in $n = 3s+2$. Formula za $r_3(n)$ ima tedaj tri oblike

$$r_3(3s) = (3s^2+6s+3+D(2,3s))/4$$
$$r_3(3s+1) = (3s^2+8s+4+D(2,3s+1))/4$$
$$r_3(3s+2) = (3s^2+10s+7+D(2,3s+2))/4$$

kjer smo izraze še okrajšali s 3. Vsako od teh formul bi bilo treba dokazati z indukcijo. Da veljajo vse tri pri $s=1$, se zlahka prepričamo: $r_3(3) = 3$, $r_3(4) = 4$ in $r_3(5) = 5$. Kot vemo (glej Presek V/2) pri popolni indukciji predpostavimo še, da formula velja pri številu s in od tod dokažemo veljavnost formule za $s+1$. Oglejmo si dokaz pri prvi formuli. Iz zveze med $r_3(3s+3)$ in $r_2(3s+3-3i)$ dobimo najprej

$$r_3(3s+3) = r_2(3s+3) + r_2(3s) + r_2(3s-3) + \ldots$$
$$\ldots + r_2(3) + r_2(0)$$

kar pomeni: $r_3(3s+3) = r_2(3s+3) + r_3(3s)$. Upoštevajmo formulo za $r_2(3s+3)$ in formulo za $r_3(3s)$, ki po predpostavki velja

$$r_3(3s+3) = (3s+4+D(2,3s+3))/2 +$$
$$+ (3s^2+6s+3+D(2,3s))/4$$

Ker je natanko eno od števil $3s$ in $3s+3$ deljivo z 2, je $D(2,3s+3) + D(2,3s) = 1$, od tod pa sledi zveza $2D(2,3s+3) + D(2,3s) = 1 + D(2,3s+3)$. Če to zvezo upoštevamo zgoraj in izraz malo uredimo, dobimo

$$r_3(3s+3) = (3(s+1)^2+6(s+1)+3+D(2,3s+3))/4$$

kar je ravno prva od zgornjih treh formul pri $s+1$. Na podoben način dokažemo tudi drugi dve formuli.

Formulo za $r_3(n)$ tako dokažemo za $n=3,4,\ldots$, kaj hitro pa se lahko prepričamo, da velja tudi za $n=0,1$ in 2 . Da pa se ta formula pisati v krajši obliki, če vpeljemo še en simbol. Najprej lahko pišemo $r_3(n) = ((n+3)^2+p)/12$, kjer je $p = 3D(2,n)+4D(3,n)-4$. Če si ogledamo vse tri situacije, ko je število n deljivo ali ne z 2 ali s 3, dobimo za p naslednje štiri možnosti $p=3$, $p=0$, $p=-1$ ali $p=-4$. Ker pa mora biti šte vilo $(n+3)^2+p$ deljivo z 12, lahko rečemo, da je treba k številu $(n+3)^2$ poiskati najbližji večkratnik števila 12 (prištejemo 0 ali 3, ali odštejemo 1 ali 4). Označimo z $\{s\}_{12}$ k številu s najbližji večkratnik števila 12, potem zgornjo formulo lahko pišemo v obliki

$$r_3(n) = \{(n+3)^2\}_{12}/12$$

Ker je vedno $p \neq 6$, je število $\{s\}_{12}$ vedno enolično določeno. Za zgled izračunajmo $r_3(8) = \{11^2\}_{12}/12 = 120/12 = 10$.

Na prav podoben način bi izpeljali formulo pri večjem k. Za $r_4(n)$ bi najprej dobili zvezo

$$r_4(n) = r_3(n)+r_3(n-4)+r_3(n-8)+\ldots+r_3(n-4i)+\ldots$$

kjer dodajamo člene tako dolgo, dokler so izrazi v oklepajih še nenegativni. Naj brez dokaza zapišemo končno formulo, ki jo dobimo iz zgornje in prejšnjih zvez

$$r_4(n) = (n^3+15n^2+63n+49+9(n+3)D(2,n)+32D(3,n)+$$
$$+16D(3,n)+36D(4,n))/144$$

Še mnogo daljše so formule za $r_5(n)$, $r_6(n)$ itd.

Povrnimo se sedaj k številu razdelitev n enakih predmetov na k nepraznih kupčkov. Označimo število teh razdelitev z $r_k'(n)$. Ker sedaj nobeden od k kupčkov ne sme biti prazen, damo najprej na vsakega po en predmet, preostalih $n-k$ pa razdelimo na kvečjemu k kupčkov. Tako dobimo zvezo

$$r_k'(n) = r_k(n-k) \quad ; \quad k=1,2,3,\ldots \quad ; \quad n \geqq k$$

V posebnih primerih torej imamo formule

$$r_1'(n) = 1$$
$$r_2'(n) = r_2(n-2) = (n-1+D(2,n))/2$$
$$r_3'(n) = r_3(n-3) = \{n^2\}_{12}/12$$

Upoštevali smo zvezo $D(2,n-2) = D(2,n)$. Za pomaranče Dedka Mraza na primer dobimo: $r_3'(10) = \{10^2\}_{12}/12 = 96/12 = 8$.

Ker je računanje vrednosti za $r_k(n)$ po formulah za večje k čedalje bolj komplicirano, lahko za ne preveč velike n in k te vrednosti računamo postopoma kar iz zvez oblike: $r_k(n) =$ $= r_{k-1}(n) + r_{k-1}(n-k) + \ldots + r_{k-1}(n-ik) + \ldots$, $n-ik \geqq 0$, ki jih lahko dokažemo za $k=2,3,\ldots$ Naredimo si tabelo, v katero najprej napišemo števila $n=0,1,2,\ldots$, nato same enojke za $r_1(n)$, iz teh izračunamo in izpišemo vrednosti za $r_2(n)$, iz teh zopet podobno vrednosti za $r_3(n)$ itd. To tabelo nadaljujemo tako dolgo, da pridemo do iskane vrednosti za $r_k(n)$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ..
$r_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1 ..
$r_2(n)$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6 ..
$r_3(n)$	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14 ..
$r_4(n)$	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	...
$r_5(n)$	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	...
...	. . . .										

Za vajo izračunaj: $r_3(40)$, $r_3(60)$ in $r_9(9)$!

Edvard Kramar